Kémiai matematika
3. gyakorlat

Busai Ágota
agota.busai@gmail.com
www.math.bme.hu/~bgotti

2016.09.29.

Az előző gyakorlatról megmaradt feladatok:

16. A reális gáz van der Waals-állapotegyenlete:

$$p = \frac{NRT}{V - Nb} - \frac{a}{V^2}N^2,$$

ahol a, b a gázra jellemző empirikus paraméterek.
Mennyivel változik a gáz nyomása, ha a hőmérsékletét ΔT-vel, a térfogatát ΔV-vel megváltoztatjuk?

17. $\operatorname{grad} f = ?$

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+1)\,\mathrm{e}^y}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} + 3y$

(d) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2+2y} + \sin(xz)$

(e) $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + x^2y\,\mathrm{e}^{2z}$, $\operatorname{grad} f|_{(-1,1,0)} = ?$

18. Ellenőrizd a Young-tétel érvényességét az $f(x,y) = (2x+y)^3$ függvényen!

HF* 19. Alkalmazható-e a Young-tétel az alábbi függvényre?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

20. Add meg az $f(x,y) = x^3 + y$ függvény deriváltját az l egyenes irányában, ha az l egyenes az x tengellyel α szöget zár be!

21. Legyen $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 + 1$, $P_0(1,-1,0)$.

(a) $\operatorname{grad} f = ?$

(b) $\operatorname{grad} f|_{P_0} = ?$

(c) Határozd meg $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$-t, ha $\underline{e} \| \underline{v} = (2,1,3)$

(d) Add meg $\max\limits_{\underline{e}} \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét és irányát!

---

1. Számold ki az $f(x,y) = xy^2$ függvény t szerinti deriváltját, ha $x(t) = \mathrm{e}^{-t}$ és $y(t) = \sin t$!

HF 2. Add meg az $f(t,x) = t^2x^3$ függvény t szerinti teljes (avagy totális) deriváltját, ha $x(t) = \sin t$!

HF 3. Legyen $\underline{v}(x_1,x_2,x_3) = \Big(\ln(x_1x_3), \mathrm{e}^{-(x_1+x_2)}, 1 - \sin x_2 \cos x_3\Big)$. Határozd meg $\operatorname{div}\underline{v}$-t és $\operatorname{rot}\underline{v}$-t!

4. Határozd meg $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin r \\ x^2+y^2 \\ \ln z \end{pmatrix}$ divergenciáját, rotációját és deriválttenzorát ($r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$)!

5. Lásd be, hogy $\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{v} = 0\,!$

6. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \underline{0}\,!$

7. Legyen $\Phi(\underline{r}) = \dfrac{1+r}{r^2}$, $\underline{r} = (\sqrt{t}, t^2, \ln t)$

(a) $\operatorname{grad}\Phi = ?$

(b) $\Delta\Phi = ?$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = ?$

8. Lásd be az alábbi azonosságokat!

(a) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f$

(b) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{v} - \Delta\underline{v}$ (Δ, mint skalároperátor: $(\Delta\underline{v})_i = \sum_j \dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$)

9. $\Delta\,\mathrm{e}^{-r} = ?$

HF 10. Fejtsd Taylor-sorba az $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pont körül másodrendig az $f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x+y)}$ függvényt!

11. Fejtsd Taylor-sorba a $(\pi, 0)$ pont körül másodrendig az $f(x, y) = \sin x \cos y$ függvényt!