

Kémiai matematika

2. gyakorlat

Busai Ágota

agota.busai@gmail.com

www.math.bme.hu/~bgotti

2016.09.22.

1. Lássuk be, hogy ha \underline{x} az \underline{A} mátrix sajátvektora, akkor $\alpha \underline{x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) is sajátvektora \underline{A} -nak!
2. Lássuk be, hogy ha λ az \underline{A} mátrix sajátértéke, akkor λ^n ($n \in \mathbb{N}$) az \underline{A}^n mátrix sajátértéke!
3. Adjuk meg az $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ valós elemű mátrix sajátértékeit!
4. Adjuk meg az $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & a \end{pmatrix}$ valós elemű mátrix sajátértékeit és normált sajátvektorait!
- HF 5.** Adjuk meg az $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és normált sajátvektorait!
6. Számold ki az alábbi deriváltak értékét definíció szerint!
 - (a) $f(x) = x^2$, $f'(5) = ?$
 - (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(3) = ?$
 - (c) $f(x) = \sqrt{4x+5}$, $f'(1) = ?$
7. Bizonyítsd be, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
8. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = ?$
- HF 9.** Bizonyítsd be, hogy $(\cos x)' = -\sin x$.
- HF 10.** (a) $\left(e^{e^{e^{x^2}}} \right)' = \frac{d}{dx} \exp(\exp(\exp(x^2))) = ?$ (b) $\left(\sin^3 x \cdot \left(\sqrt{\ln(\cos \frac{x^2}{2})} + \frac{e^x}{x} \right) \right)' = ?$
11. Fejtsd Taylor-sorba az alábbi függvényeket az $x_0 = 0$ pont körül!
 - (a) $f(x) = \sin x$
 - (b) $f(x) = \cos x$
 - (c) $f(x) = e^x$
 - (d) $f(x) = e^{-x^2}$
 - (e) $f(x) = \frac{1}{7+x}$
 - (f) $f(x) = \frac{2x}{2-x^2}$
12. Határozd meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} x^{2k}$ sor összegét! Mennyi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!}$ értéke?
13. Add meg $e^{1.03}$ közelítő értékét az $f(x) = e^x$ függvény Taylor-sorának segítségével, az $f(x)$ függvényt
 - (a) $x_0 = 0$
 - (b) $x_0 = 1$körül sorba fejtvé negyedrendig!
Mit tapasztalsz?
14. Határozd meg az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait!
- HF 15.** $y^2(x) - \frac{x + y(x)}{x - y(x)} = 0$, $y'(x) = ?$

16. A reális gáz van der Waals-állapotegyenlete:

$$p = \frac{NRT}{V - Nb} - \frac{a}{V^2}N^2,$$

ahol a , b a gázra jellemző empirikus paraméterek.

Mennyivel változik a gáz nyomása, ha a hőmérsékletét ΔT -vel, a térfogatát ΔV -vel megváltoztatjuk?

17. $\text{grad} f = ?$

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + 1)e^y}$

(c) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2} + 3y$

(d) $f(x, y, z) = e^{x^2+2y} + \sin(xz)$

(e) $f(x, y, z) = x^3 + y^4 + x^2y e^{2z}$, $\text{grad} f|_{(-1,1,0)} = ?$

18. Ellenőrizd a Young-tétel érvényességét az $f(x, y) = (2x + y)^3$ függvényen!

HF* 19. Alkalmazható-e a Young-tétel az alábbi függvényre?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

20. Add meg az $f(x, y) = x^3 + y$ függvény deriváltját az l egyenes irányában, ha az l egyenes az x tengellyel α szöget zár be!

21. Legyen $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 1$, $P_0(1, -1, 0)$.

(a) $\text{grad} f = ?$

(b) $\text{grad} f|_{P_0} = ?$

(c) Határozd meg $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0}$ -t, ha $\underline{e} \parallel \underline{v} = (2, 1, 3)$

(d) Add meg $\max_{\underline{e}} \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0}$ értékét és irányát!