BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A könyv a Műszaki Könyvkiadó Bolyai-sorozatának 9. tagja, amelyben a szerzők célja megismertetni az olvasót a matematikai analízis alapfogalmával, a határérték-fogalommal és annak néhány alkalmazásával. A példatár anyagának megértéséhez nincs szükség több előismeretre, mint a középiskolák első három évfolyamának matematikai anyagára. A fejezetek három részre tagolódnak: először a legfontosabb definíciókat, tételeket foglalják össze, majd a gyakorló feladatok, végül az önálló megoldásra szánt feladatok következnek. A gyakorló feladatok megfogalmazása után közvetlenül következik a megoldás. Az egyes fejezetekben kitűzött feladatok megoldásai a fejezet végén, egy helyen találhatók meg.
A könyvet elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak ajánljuk, illetve azoknak a középiskolás diákoknak, akik a reáltudományok terén kívánják folytatni tanulmányaikat.

http://www.muszakikiado.hu
ISBN 963-16-3072-2
9 789631 630725
MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

HATÁRÉRTÉK-SZÁMÍTÁS

BOLYAI-KÖNYVEK

URBÁN JÁNOS

HATÁRÉRTÉK-SZÁMÍTÁS

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |a|<1, \\ 1, & \text{ha} \quad a=1, \\ +\infty, & \text{ha} \quad a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad (a>1).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad (a>1).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = C,$$

ahol C az ún. Euler-féle állandó.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = \ln 2.$$

URBÁN JÁNOS

HATÁRÉRTÉK-SZÁMÍTÁS

PÉLDATÁR

A BOLYAI-SOROZAT KÖTETEI:

Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
Solt György: Valószínűségszámítás
Lukács Ottó: Matematikai statisztika
Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek
Bárczy Barnabás: Integrálszámítás
Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás
Urbán János: Matematikai logika
Fekete Zoltán–Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise
Urbán János: Határérték-számítás
Hanka László-Zalay Miklós: Komplex függvénytan

URBÁN JÁNOS

HATÁRÉRTÉK-SZÁMÍTÁS

PÉLDATÁR

3. változatlan utánnyomás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával,
a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított
felsőoktatási tankönyvtámogatási program keretében jelent meg.

Lektorálta:
DR. PETRUSKA GYÖRGY
matematikus

ISBN 963 10 0674 3 (első kiadás)
ISBN 963 16 3072 2
ISSN 1216-5344

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérezi Sándor ügyvezető igazgató

Felelős szerkesztő: Nagyné Szokol Ágnes
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
A borítót tervezte: Németh Csongor
A könyv formátuma: Fr/5
Ívterjedelem: 22,625 (A/5)
Azonossági szám: 10 475
Készült az MSZ 5601:1983 és 5602:1983 szerint

Nyomta és kötötte a Borsodi Nyomda Kft.
Felelős vezető: Ducsai György ügyvezető igazgató

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Ennek a feladatgyűjteménynek az a célja, hogy a matematikai analízis alapfogalmával, a határértékfogalommal és annak néhány alkalmazásával ismertesse meg az Olvasót. A könyv anyagának megértéséhez nincs szükség több előismeretre, mint a középiskolák első három évfolyamának matematikai anyagára.

Minden fejezet 3 részre tagolódik: először a legfontosabb definíciókat, tételeket foglaljuk össze, majd a gyakorló feladatok, végül az önálló megoldásra szánt feladatok következnek. A gyakorló feladatok megfogalmazása után közvetlenül következik a megoldás. Az egyes fejezetekben kitűzött feladatok megoldásai a fejezet végén, egy helyen találhatók meg. A feladatok között ✳ *jellel látjuk el azokat, amelyek elméleti jellegűek, fontos kiegészítő ismereteket tartalmaznak.*

A képletek, gyakorló feladatok és feladatok számozása minden fejezetben újra kezdődik. Ha egy képletszámra, gyakorló feladatra, ill. feladatra utalunk, akkor annak a fejezetnek, ahol a hivatkozás előfordul, a megfelelő képletéről, gyakorló feladatáról, feladatáról van szó. Ellenkező esetben mindig feltüntetjük a megfelelő fejezetet is.

Mint már említettük, a könyv olvasásához kevés előismeretre van szükség. Szükség van viszont arra, hogy az Olvasó figyelmesen, gondolkodva olvassa a könyvet, önállóan próbálja megoldani a gyakorló feladatokat is, de a feladatokat mindenképpen. Csak ha az önálló megoldás nem sikerül, akkor olvassa el a könyvben közölt megoldást. Ha sikerült önállóan megoldani a gyakorló feladatot, ill. feladatot, akkor is célszerű elolvasni a könyvben közölt megoldást, összehasonlítani az Olvasó által talált megoldással. Előfordulhat, hogy az Olvasó megoldása egyszerűbb, rövidebb, esetleg eltér a könyvben közölt megoldástól. A terjedelem szabta korlát miatt azonban egy gyakorló feladatra, ill. feladatra a legtöbb esetben csak egy megoldást közlünk.

A Szerző

I. VALÓS SZÁMOK ÉS SZÁMSOROZATOK

1. A valós számok

A következőkben bevezetésre kerülő fogalmak a valós számok fogalmára épülnek. A középiskolai matematika tanulmányok alapján mindenkiben kialakul egy intuitív, szemléletes kép a valós számokról. Eszerint a valós számokat a racionális és az irracionális számok alkotják. A racionális számok azok, amelyek két egész szám hányadosaként felírhatók. A racionális számokat véges vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban is elő lehet állítani. Az irracionális számok nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, az irracionális számokat végtelen, nem szakaszos tizedes törtekkel adhatjuk meg.

Az eddig mondottak természetesen nem szabatos matematikai kijelentések. A későbbiekben még — éppen a határérték fogalom alkalmazásaként — visszatérünk egyes feladatokban az elmondottak pontosabbá tételére.

Kiindulópontként, a további fogalmak szilárdabb megalapozásához összefoglaljuk a valós számoknak azokat a legfontosabb alaptulajdonságait, amelyeket fel fogunk használni. Ezek a tulajdonságok, bizonyos, pontosan definiálható értelemben egyértelműen meg is határozzák a valós számok halmazát.

Jelöljük V-vel a valós számok halmazát. A V halmazban értelmezve van két kétváltozós művelet: az összeadás — jele „+", és a szorzás — jele „·" (gyakran e jelet el is hagyjuk). Ez azt jelenti, hogy bármely két, a és b valós számhoz egyértelműen tartozik egy $a+b$ valós szám — az a és b összege, és egy $a \cdot b$ valós szám — az a és b szorzata.

A két műveletre a következő alaptulajdonságok teljesülnek:

Bármelyik $a, b \in$ V-re ($a, b \in$ V-t így olvassuk: „a, b eleme V-nek")

(1) $a+b=b+a$ az összeadás kommutatív,
(2) $a \cdot b=b \cdot a$ a szorzás kommutatív.

Bármelyik a, b, $c \in$ V-re

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$ az összeadás asszociatív,
(4) $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ a szorzás asszociatív
és
(5) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

Van olyan valós szám — amit 0-val jelölünk —, hogy minden $a \in$ V-re

(6) $a+0=a$

és van olyan valós szám — ezt 1-gyel jelöljük —, hogy minden $a \in$ V-re

(7) $a \cdot 1=a$.

Minden a valós számhoz pontosan egy olyan x valós szám van, amelyikre

(8) $a+x=0$.

Az a-hoz tartozó, (8)-at kielégítő x-et a ellentettjének nevezzük és $-a$-val jelöljük.

Minden $a \neq 0$ valós számhoz pontosan egy olyan x valós szám van, amelyikre

(9) $a \cdot x=1$.

Az a-hoz tartozó, (9)-et kielégítő x-et a reciprokának nevezzük és $\frac{1}{a}$-val jelöljük.

Az eddig felsorolt kilenc alaptulajdonság felhasználásával már könnyen definiálhatjuk a valós számok körében a kivonást és az osztást:

bármely két a, b valós számhoz pontosan egy olyan valós szám tartozik, amit a két szám, a és b különbségének nevezünk, $a-b$-vel jelölünk és így definiálunk:

$$a-b=a+(-b);$$

bármely a és $b \neq 0$ valós számhoz pontosan egy olyan, $\frac{a}{b}$-vel jelölt valós szám tartozik, amit a két szám hányadosának nevezünk és így definiálunk:

$$\frac{a}{b}=a \cdot \frac{1}{b}.$$

Ugyancsak az eddig felsorolt alaptulajdonságokból következik, hogy a valós számoknak egy részhalmazát alkotja a *természetes számok halmaza* (az 1-ből ismételt összeadással előállítható számok); ezt a továbbiakban T-vel jelöljük. *A racionális számok* R-*rel* jelölt *halmaza* is részhalmaza a valós számoknak (például a T halmazból kiindulva a négy alapművelettel megkapható valós számok halmaza éppen R lesz).

A valós számok halmazának egy további fontos tulajdonsága, hogy ki van jelölve benne a *pozitív számok halmaza.* Ha egy a valós szám pozitív, azt így jelöljük: $a>0$. A pozitív valós számokat jellemző alaptulajdonságokat is felsoroljuk:

Ha $a \neq 0$, akkor a és $-a$ közül pontosan az egyik pozitív.

Bármely két pozitív szám összege és szorzata pozitív.

A pozitív szám fogalmával már definiálni lehet az egyenlőtlenséget. Azt mondjuk, hogy *az a valós szám nagyobb, mint a b valós szám, $a>b$, ha $a-b$ pozitív.* Ebből a definícióból azután már egyszerűen bevezethetők az egyenlőtlenség alaptulajdonságai, az egyenlőtlenségekkel való számolás szabályai.

Szükségünk lesz a *valós szám abszolút értékének* fogalmára is; a abszolút értékét $|a|$-val jelöljük és így definiáljuk:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ha } a \geqq 0, \\ -a, & \text{ha } a<0. \end{cases}$$

A valós számok eddig felsorolt alaptulajdonságait úgy szokás összefoglalni röviden, hogy *a valós számok rendezett testet alkotnak.*

További fontos alaptulajdonsága a valós számok testének, hogy a rendezésre a következő igaz:

Bármely $a>0$ valós számhoz van olyan $n \in$ T természetes szám, hogy $n>a$.

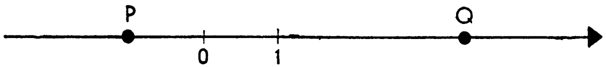
Ezt az alaptulajdonságot *Arkhimédész-féle axiómának* is nevezik és egy olyan rendezett testet, amire ez az alaptulajdonság igaz, arkhimédészien rendezett testnek neveznek.

A következő, egyben utolsó és legfontosabb alaptulajdonság megfogalmazása előtt néhány bevezető, szemléletes megjegyzést teszünk.

A valós számokat egy egyenes pontjaival szoktuk szemléltetni. A valós számok halmazának és az egyenesnek mint pontokból álló halmaznak a „szerkezete" lényeges tulajdonságokban megegyezik. Ennek mélyebb oka az, hogy azok a geometriai alaptulajdonságok, amik az egyenesnek mint ponthalmaznak a „szerkezetét" jellemzik, megfelelnek a valós számokat jellemző alaptulajdonságoknak.

Az említett megfeleltetés a valós számok és az egyenes pontjai között a következőt jelenti: ha megadunk egy egyenest, kijelölünk rajta egy pontot, amit a 0 valós számnak feleltetünk meg és megadjuk az egységnyi hosszúságú szakaszt, akkor minden valós számhoz egyértelműen hozzá tudjuk rendelni az egyenes egy pontját és fordítva, az egyenes minden pontjához egyértelműen tartozik egy valós szám.

Például az 1. ábrán a P pontnak a -1 valós szám felel meg, a 2,5 valós számnak pedig a Q pont felel meg. Ezt röviden úgy is mondhatjuk, hogy a P a -1, a Q pedig a 2,5 valós szám.



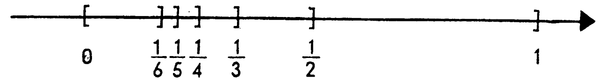
1. ábra

Ha adott két valós szám, a és b és pl. $a<b$, akkor a számegyenes a és b pontja közötti szakaszához rendelt valós számok, azaz az $a \leqq x \leqq b$ egyenlőtlenségnek eleget tevő valós számok halmazát az *a, b zárt intervallumnak* nevezzük és így jelöljük: $[a, b]$. Az $a<x<b$ egyenlőtlenséget kielégítő valós számok halmazát *nyílt intervallumnak* nevezzük és (a, b)-vel jelöljük. Használni fogjuk még a *félig zárt intervallum* fogalmát is: az $a \leqq x<b$ egyenlőtlenségnek eleget tevő valós számok halmaza az $[a, b)$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum, az $a<x \leqq b$ egyenlőtlenséget kielégítőké viszont az $(a, b]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum.

A valós számokat jellemző, eddig felsorolt alaptulajdonságokat a racionális számok is kielégítik; a racionális számok is arkhimédészien rendezett testet alkotnak. Egy további alaptulajdonságot fogalmazunk most meg, ami már csak a valós számokat jellemzi, amit a racionális számok teste már nem elégít ki.

Először egy elnevezést vezetünk be. *Egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatnak* nevezzük zárt intervallumoknak egy olyan rendszerét, amelyben minden természetes számhoz meg van adva egy $[a_n, b_n]$ zárt intervallum úgy, hogy az $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ zárt intervallum minden $n \in T$-re része az $[a_n, b_n]$-nek, azaz:

$$a_n \leqq a_{n+1} < b_{n+1} \leqq b_n.$$



2. ábra

Például a $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ alakú intervallumok, ahol $n \in T$ ilyen egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozatot alkotnak (2. ábra).

Ezeknek az egymásba skatulyázott zárt intervallumoknak van közös pontja, mégpedig a 0 szám. Nyilván igaz, hogy a $0 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ minden $n \in T$-re, mert a 0 végpontja mindegyik intervallumnak.

Másik példa: rendeljük hozzá minden természetes számhoz azt a $[t_n, T_n]$ intervallumot, ahol t_n, ill. T_n jelenti az egység sugarú körbe, ill. kör köré írt szabályos $n+2$ szög területét. Igazolható, hogy ez az intervallumsorozat is egymásba skatulyázott, sőt:

$$t_n < t_{n+1} < T_{n+1} < T_n.$$

Belátható, de szemléletesen nyilvánvaló is, hogy az intervallumsorozatnak ismét van közös pontja, méghozzá csak egy közös pontja van, a π szám. Az egység sugarú kör területe éppen az az egyetlen szám, ami minden n-re a t_n és T_n között van.

A valós számtestnek fontos alaptulajdonsága a következő, *Cantor-axiómának* nevezett tulajdonság:

Minden $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatnak van közös pontja, azaz van olyan c valós szám, hogy minden $n \in T$-re:

$$a_n \leqq c \leqq b_n.$$

A Cantor-axiómában kimondott alaptulajdonság nem zárt intervallumokra általában nem igaz. Például a $\left(0, \frac{1}{n}\right]$ féligzárt intervallumok sorozata egymásba skatulyázott, mert $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, de nincs olyan valós szám, ami mindegyikben benne lenne. A 0 nyilván egyik intervallumban sincs benne, egy tetszőleges $p > 0$ való számhoz viszont van olyan $n \in \mathrm{T}$, hogy $\frac{1}{n} < p$ (hiszen az Arkhimédész-féle alaptulajdonság miatt van olyan $n \in \mathrm{T}$, amire $\frac{1}{p} > n$, tehát p nincs benne mindegyik intervallumban.

2. A teljes indukció; nevezetes egyenlőtlenségek

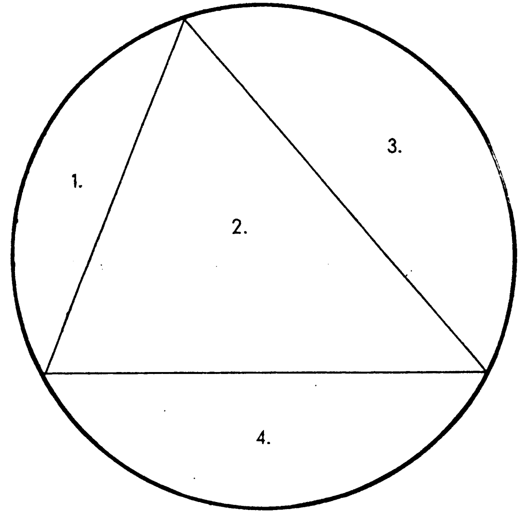
A határérték definíciójában és később, a határértékszámítási feladatok megoldásában az egyenlőtlenségeknek fontos szerepük van. Néhány nevezetes és a későbbiekben jól hasznosítható egyenlőtlenséget fogunk ebben a részben tárgyalni. Az egyenlőtlenségek bizonyításához egyik jól használható segédeszköz lesz *a teljes indukcióval* való bizonyítás módszere.

Próbáljunk megadni egy általános képletet az első n páratlan szám összegére. Ha

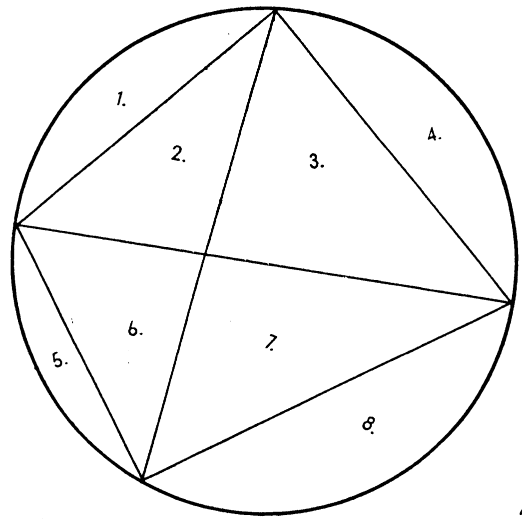
$n=1$, akkor az összeg is nyilván 1. Ha
$n=2$, akkor az összeg $1+3=4$,
$n=3$-ra $1+3+5=9$,
$n=4$-re $1+3+5+7=16$,
$n=5$-re $1+3+5+7+9=25$.

Az eddigiek alapján már azt mondhatja valaki: nyilván látszik, hogy az első n páratlan szám összege n^2, hiszen ez igaz $n=1$, 2, 3, 4 és 5-re is.

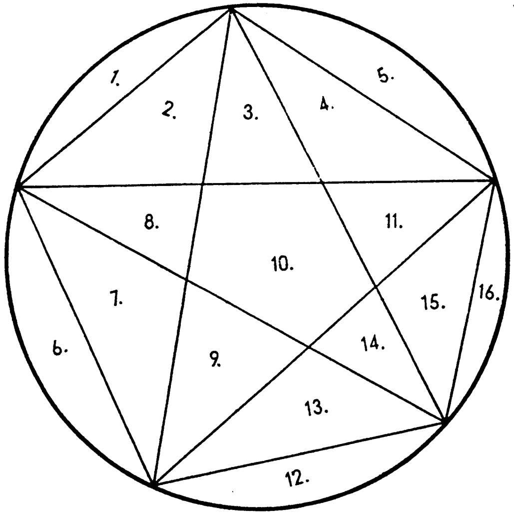
Óvatosan kell kezelni azonban az ilyen kijelentéseket. Nézzük a következő feladatot. Egy körvonalon felveszünk n darab pontot és ezeket úgy kötjük össze egymással az összes lehetséges módon, hogy a kör belsejének bármelyik pontjában legfeljebb két összekötő szakasz messe egymást. Kérdésünk az, hogy hány részre vágják szét a körlapot az így kapott szakaszok? Ismét kezdjünk el próbálgatni. Ha $n=1$, akkor nincs összekötő sza-



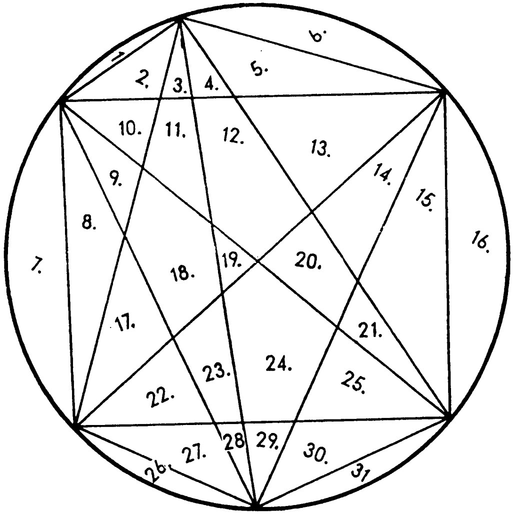
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra

kasz, a körlap tehát egyben marad, a részek száma 1. Ha $n=2$, nyilván egy összekötő szakasz van, a részek száma 2. Növeljük eggyel a pontok számát, legyen $n=3$, ekkor, mint a 3. ábrán látható, a részek száma 4 lesz. $n=4$ esetén ismét könnyen összeszámolhatjuk, hogy 8 rész keletkezik (4. ábra).

Az eddigi tapasztalatok azt sejtetik, hogy minden további pont hozzávételével a részek száma megduplázódik. Próbáljuk ki ezt a sejtésünket! Ha igaz, akkor $n=5$ pont esetén $2 \cdot 8=16$ részt kell kapnunk. Az 5. ábra (amely általános esetet jellemez) mutatja, hogy erre az esetre is igaz a sejtésünk. Ha most az előző példa mintájára elhamarkodottan kijelentenénk, hogy a megállapításunk továbbra is érvényes, hamar csalódnánk, mert $n=6$-ra már nem $2 \cdot 16=32$, hanem csak 31 részt kapunk (6. ábra).

Térjünk vissza az előző feladathoz, az első n páratlan szám összegéhez.

Írjuk fel sejtésünket általános alakban:

$$1+3+5+\ldots+2n-1=n^2.$$

Tételezzük fel most, hogy sejtésünk igaz egy rögzített n-re és próbáljuk bebizonyítani ebből a feltételből azt, hogy ez az összefüggés a következő természetes számra, $n+1$-re is igaz lesz. Az első $n+1$ páratlan szám összege, a feltételt is felhasználva, így alakítható át:

$$\begin{aligned}&1+3+5+\ldots+2n-1+2n+1=\\&=n^2+2n+1=(n+1)^2.\end{aligned}$$

Ha tehát sejtésünk igaz n-re, akkor igaz $n+1$-re is. $n=1$-re már láttuk, hogy igaz az összefüggés. Ekkor azonban az előzők szerint $n+1=2$-re is igaz. Legyen most $n=2$, erre már tudjuk, hogy igaz, de akkor $n+1=3$-ra is fennáll s í. t., végül is minden természetes számra igaz lesz az összefüggés.

A most alkalmazott bizonyítási módot nevezzük *teljes indukciónak*. Foglaljuk össze még egyszer a bizonyítási módszert:

ha $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ egy „állítássorozat" és A_1 igaz,

valamint abból a feltételből, hogy A_n igaz (indukciós feltétel) következik, hogy A_{n+1} is igaz,

akkor az A_n állítás minden n természetes számra igaz.

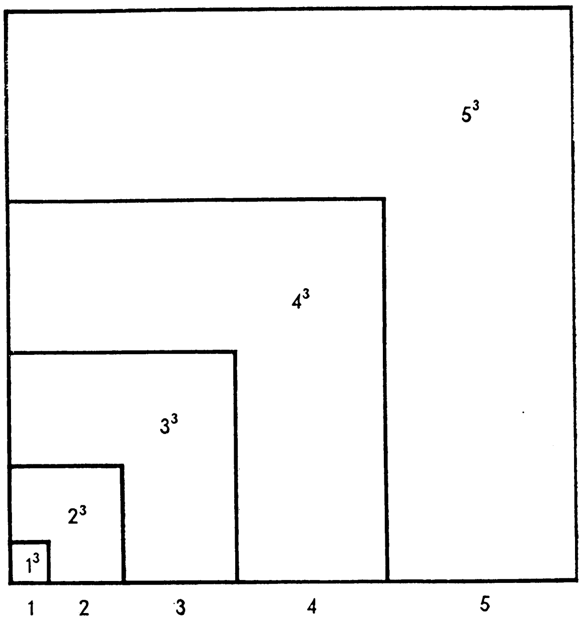
Ez nyilván helyes bizonyítási mód. Ha ugyanis volna olyan n természetes szám, amire A_n nem igaz, akkor az ilyenek között van egy legkisebb, legyen ez n_0. Az n_0 nem lehet 1, mert A_1 igaz a feltevés szerint. Mivel n_0 a legkisebb ilyen tulajdonságú szám, ezért A_{n_0-1} igaz, ebből pedig a feltevés szerint következik, hogy A_{n_0} igaz, így ellentmondásra jutottunk.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az első n természetes szám köbének összegét.

Megoldás:

A köbszámok összegét a 7. ábrán levő négyzetek területe szemlélteti. Ennek alapján a következő összefüggésről sejtjük, hogy igaz:



7. ábra

(10) $\quad 1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2.$

Az összefüggést teljes indukcióval igazoljuk:

$n=1$-re igaz az állítás, hiszen $1^3=1^2$.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, vagyis a (10) összefüggés fennáll és mutassuk meg, hogy $n+1$-re is igaz. Az első $n+1$ természetes szám köbének összege a (10) feltétel, vagyis az indukciós feltétel felhasználásával így is írható:

(11) $\quad 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\ldots+n)^2+(n+1)^3.$

A (11) egyenlőség jobb oldalát így alakíthatjuk tovább:

$$(1+2+\ldots+n)^2+(n+1)^3=$$

(12)
$$=(1+2+\ldots+n)^2+n(n+1)^2+(n+1)^2=$$
$$=(1+2+\ldots+n)^2+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}(n+1)+(n+1)^2.$$

Vegyük észre, hogy itt $\frac{n(n+1)}{2}$ az első n természetes szám összege. Így a (11) egyenlőség — (12) alapján — így írható:

(13) $\quad 1+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\ldots+n)^2+$
$+2(1+2+\ldots+n)(n+1)+(n+1)^2.$

A (13) egyenlőségből a kéttagú kifejezés összegének négyzetére vonatkozó azonosság felhasználásával a bizonyítandó egyenlőséget kapjuk:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\ldots+n+n+1)^2.$$

Ezzel a (10) összefüggés érvényességét igazoltuk. Az első n természetes szám összegére vonatkozó, már felhasznált képlet alkalmazásával a bizonyított képlet még így is felírható:

(14) $$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges $a>-1$ valós számra és $n\in T$ természetes számra érvényes az

(15) $\quad (1+a)^n\geqq 1+na$

egyenlőtlenség, az ún. *Bernoulli-féle egyenlőtlenség.*

Megoldás:

A (15) egyenlőtlenség $n=1$-re igaz, mert

$$1+a=1+a.$$

Tegyük fel, hogy (15) fennáll valamilyen rögzített n-re és igazoljuk, hogy $n+1$-re is igaz az állítás. Mivel $a>-1$, $1+a>0$, tehát az $1+a$ pozitív számmal a feltételünket jelentő (15) egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk:

(16) $\quad (1+a)^{n+1}\geqq(1+na)(1+a).$

A (16) egyenlőtlenség jobb oldalát így alakíthatjuk tovább:

(17) $(1+na)(1+a)=1+na+a+na^2=1+(n+1)a+na^2.$

Itt $na^2 \geqq 0$ nyilván igaz, tehát ha ezt elhagyjuk, ezzel csak csökkenthetjük a (17) kifejezés értékét. (16) és (17) alapján tehát ezt kapjuk:

$$(1+a)^{n+1} \geqq 1+(n+1)a,$$

és ezt kellett igazolnunk.

A középiskolai matematikából már jól ismert a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség két szám esetére: ha a, $b \geqq 0$ valós számok, akkor:

(18) $\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$,

ahol az egyenlőség csak $a=b$ esetén áll fenn. A következőkben ennek az egyenlőtlenségnek az általánosítását fogjuk bizonyítani. Először azt definiáljuk általánosan, hogy mit értünk n darab nemnegatív valós szám számtani és mértani közepén. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqq 0$ valós számok. Az adott számok *számtani közepe* az

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

valós szám, *mértani közepe pedig az*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

valós szám.

Gyakorló feladatok

3. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy 2^n darab nemnegatív valós szám ($n \in T$) mértani közepe kisebb vagy egyenlő, mint ugyanezen számok számtani közepe; egyenlőség pedig csak akkor áll fenn, ha mind a 2^n szám egyenlő egymással.

Megoldás:

Jelöljenek $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$ tetszőleges nemnegatív valós számokat. Azt kell igazolnunk, hogy:

(19) $\sqrt[2^n]{a_1 a_2 \ldots a_{2^n}} \leqq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^n}}{2^n}$,

ahol az egyenlőség csak abban az esetben igaz, ha $a_1=a_2=\ldots=a_{2^n}$.

Az állítás $n=1$-re igaz, hiszen ezt mondja ki a (18) egyenlőtlenség.

Tegyük fel, hogy a (19), a kiegészítő állítással együtt tetszőleges 2^n nemnegatív valós számra igaz. Igazolni akarjuk, hogy az állítás $n+1$-re is igaz. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}, a_{2^n+1}, \ldots, a_{2^{n+1}}$ tetszőleges nemnegatív valós számok. Ennek a 2^{n+1} darab számnak a mértani közepét a következő alakban is felírhatjuk:

(20)
$$\sqrt[2^{n+1}]{a_1 \ldots a_{2^n} a_{2^n+1} \ldots a_{2^{n+1}}} = \sqrt{\sqrt[2^n]{a_1 \ldots a_{2^n}} \cdot \sqrt[2^n]{a_{2^n+1} \ldots a_{2^{n+1}}}}.$$

A (20) egyenlőség jobb oldalán a négyzetgyökjel alatt mindkét tényezőre alkalmazhatjuk az indukciós feltevést. Így ezt kapjuk:

(21)
$$\sqrt[2^{n+1}]{a_1 \ldots a_{2^n} \cdot a_{2^n+1} \ldots a_{2^{n+1}}} \leqq \sqrt{\frac{a_1+\ldots+a_{2^n}}{2^n} \cdot \frac{a_{2^n+1}+\ldots+a_{2^{n+1}}}{2^n}},$$

és az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1=\ldots=a_{2^n}$ és $a_{2^n+1}=\ldots=a_{2^{n+1}}$ teljesül. (21) jobb oldala két nemnegatív valós szám mértani közepe. Erről már tudjuk, hogy kisebb vagy egyenlő, mint ugyanezen két szám számtani közepe, tehát:

(22)
$$\sqrt[2^{n+1}]{a_1 \ldots a_{2^n} a_{2^n+1} \ldots a_{2^{n+1}}} \leqq \frac{a_1+\ldots+a_{2^n}+a_{2^n+1}+\ldots+a_{2^{n+1}}}{2^{n+1}},$$

és az egyenlőség itt csak akkor áll fenn, ha

$$a_1=\ldots=a_{2^n},\ a_{2^n+1}=\ldots=a_{2^{n+1}} \text{ és } \frac{a_1+\ldots+a_{2^n}}{2^n} = \frac{a_{2^n+1}+\ldots+a_{2^{n+1}}}{2^n}$$

is igaz, ami viszont csak akkor teljesül, ha $a_1 = \ldots = a_{2^n} = a_{2^n+1} = \ldots = a_{2^{n+1}}$ igaz, vagyis éppen a bizonyítandó állítást kaptuk.

4. Igazoljuk (a 3. feladat eredményének felhasználásával), hogy ha n akármilyen természetes számot jelöl és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges nemnegatív valós számok, fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(23) \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

és az egyenlőség csak akkor igaz, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Megoldás:

A 3. feladatból tudjuk, hogy az állítás speciális n-ekre, a 2 hatványokra igaz. Legyen n tetszőleges rögzített természetes szám és válasszuk meg k-t úgy, hogy $n \leq 2^k$ teljesüljön. Ha $n = 2^k$, az állítás igaz. Ha $n < 2^k$, akkor az $a_1, \ldots, a_n$ számokhoz vegyünk hozzá még 2^k-n darab nemnegatív valós számot; ezek mindegyike legyen éppen az $a_1, \ldots, a_n$ számok számtani közepe. Jelöljük s-sel $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$-et. Az így kapott 2^k darab számra már tudjuk a 3. feladatból, hogy igaz az egyenlőtlenség:

$$(24) \quad \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_n \cdot s^{2^k-n}} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+(2^k-n)s}{2^k}.$$

Itt az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, hiszen ekkor nyilván az s számtani közép is egyenlő e számokkal. (24) jobb oldalán az $a_1 + \ldots + a_n$ összeget $n \cdot s$-sel is pótolhatjuk, majd összevonás és egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$(25) \quad \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_n s^{2^k-n}} \leq s.$$

(25) mindkét oldalát 2^k kitevőre emelve és s^{2^k-n}-nel egyszerűsítve (ez utóbbi lépésnél kihasználjuk, hogy $s \neq 0$, amit feltehetünk, mert $s = 0$ esetén $a_1 = \ldots = a_n = 0$ is áll és (23) nyilván igaz) az

$$(26) \quad a_1 a_2 \ldots a_n \leq s^n$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiből a bizonyítandó (23) egyenlőtlenség már következik. (26)-ban és így (23)-ban is az egyenlőség csak ugyanakkor érvényes, amikor (24)-ben, vagyis amikor $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ áll fenn.

A számtani és mértani közép mellett más „közepeket" is szoktak alkalmazni. Gyakran jól tudjuk használni feladatok megoldásakor a harmonikus közép fogalmát. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok ***harmonikus közepének*** nevezzük az adott számok reciprokai számtani közepének reciprokát, vagyis az

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

valós számot. A következő feladat arra a kérdésre ad választ, hogyan helyezkedik el nagyságrendileg a harmonikus közép a számtani és mértani középhez képest.

Gyakorló feladatok

5. Igazoljuk, hogy n darab pozitív valós szám harmonikus közepe kisebb vagy egyenlő, mint ugyanezen számok mértani közepe és az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a számok mind egyenlők egymással.

Megoldás:

Jelölje $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az adott pozitív valós számokat. Azt kell igazolnunk hogy

$$(27) \quad \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

és az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Alkalmazzuk a már bizonyított számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ számokra:

$$(28) \quad \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}};$$

A (28) egyenlőtlenségben, mint tudjuk, csak akkor igaz az egyenlőség, ha $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_2}=\ldots=\frac{1}{a_n}$, ez pedig ekvivalens az $a_1=a_2=\ldots=a_n$ feltétellel. (28)-ból (27)-et egyszerűen úgy kaphatjuk meg, hogy mindkét oldal reciproká vesszük, ekkor természetesen az egyenlőtlenség jele megfordul.

Feladatok

1. Igazoljuk teljes indukcióval az első n természetes szám négyzetének összegére vonatkozó következő képletet:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes számra:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Hogy ez mennyire „éles", az a következőkből látszik. Az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

ekvivalens az $(n+1)^{2n+1}<n^n(n+2)^{n+1}$ egyenlőtlenséggel. Ha a bal oldalból egy $n+1$, a jobból pedig egy $n+2$ szorzót elhagyunk, akkor az egyenlőtlenség megfordul:

$$(n+1)^{2n}=(n^2+2n+1)^n>(n^2+2n)^n=n^n(n+2)^n.$$

3. Teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy ha n és k természetes számok, és $k\leqq n$, akkor:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

(Rögzített n mellett k-ra vonatkozó teljes indukciót alkalmazzunk.)

4. Igazoljuk, hogy minden $n\in$ T-re:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

5. A 4. feladat eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n\geqq3$ természetes számra:

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $n\in$ T számra igaz a következő két egyenlőtlenség:

$$a)\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$b)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

7. Legyen $n>1$ tetszőleges természetes szám. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

8. Legyen $a>1$ tetszőleges valós szám és $n>1$ tetszőleges természetes szám. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}.$$

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges n természetes számra igaz az

$$\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$$

egyenlőtlenség.

10. Az előző feladat alkalmazásával igazoljuk, hogy az

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

egyenlőtlenség tetszőleges $n>1$ természetes számra igaz.

11. Igazoljuk teljes indukcióval a binomiális tételt, azaz mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b valós számokra és tetszőleges n természetes számra

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n,$$

ahol az $\binom{n}{k}$ (olv.: „n alatt a k”) számok az ún. binomiális együtthatók az $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ számok rövid jelölései.

12. A binomiális tétel felhasználásával igazoljuk, hogy ha $n>1$ természetes szám, akkor:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

3. Számsorozatok határértéke

Valós számsorozatnak nevezünk minden olyan függvényt, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, értékkészlete pedig a valós számok egy részhalmaza.

A definícióból következik, hogy egy számsorozatot akkor tekintünk adottnak, ha minden $n\in T$ számra ismerjük a sorozat n-edik tagját, azaz a sorozatot jelentő függvénynek az n helyen felvett értékét. Egy számsorozatot általában (a_n)-nel, a sorozat n-edik tagját pedig a_n-nel fogjuk jelölni.

Egy számsorozatot sokféleképpen meg lehet adni. Gyakran használjuk azt a fajta legegyszerűbb megadási módot, amikor egy *képlettel* fejezzük ki, hogyan függ az n-től a sorozat n-edik tagja. Például az $\frac{n+1}{n^3+n}$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ képletek egy-egy sorozatot definiálnak. Egy sorozatot megadhatunk *utasítással* is, például így: a sorozat páratlan indexű tagjai legyenek 1-gyel egyenlők, a páros indexű tagok pedig 2-vel. A sorozatok egyik gyakori megadásmódja a *rekurzív definíció*, amikor megadjuk a sorozat első néhány tagját, majd az a_n-et az előző tagok függvényeként fejezzük ki. Rekurzív definícióra ad példát a következő sorozat: $a_1=1$, $a_2=2$ és $a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$. A következőkben előforduló sorozatok egyben változatos példáit adják annak, hogyan lehet definiálni egy számsorozatot.

Következő célunk az, hogy a konvergens (összetartó) sorozat fogalmát definiáljuk. Előkészítésként vizsgáljunk meg néhány sorozatot:

a) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots;$

b) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \ldots;$

c) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots;$

d) $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ 1,\ \frac{n-1}{n},\ \ldots;$

e) $1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2^2},\ 2^2,\ \frac{1}{2^3},\ 2^3,\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ 2^n,\ \ldots;$

f) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots;$

g) $\frac{1}{10^6},\ \frac{2}{10^6},\ \frac{3}{10^6},\ \ldots,\ \frac{n}{10^6},\ \ldots;$

h) $\frac{100}{101},\ \left(\frac{100}{101}\right)^2,\ \left(\frac{100}{101}\right)^3,\ \ldots,\ \left(\frac{100}{101}\right)^n,\ \ldots;$

i) $(1+1)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots;$

j) $0,\ 0,\ 0,\ \ldots;$

k) $1,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots.$

A felsorolt sorozatok közül az *a)*, *b)* konvergensek és 0-hoz tartanak, de konvergensnek tekintjük a *j)* sorozatot is, határértéke természetesen 0. A *c)* és *d)* sorozatok is konvergensek és 1-hez tartanak. Az *e)*, *f)*, *g)* és *k)* sorozatok nem konvergensek, más szóval divergensek, hiszen az *e)*, *g)*, és *k)* sorozat tagjai közt akármilyen nagy számok előfordulnak, az *f)* sorozat tagjai pedig -1 és 1 közt „ingadoznak”, más szóval oszcillálnak. A *h)* és *i)* sorozatról „ránézésre” nehéz megmondani, hogy konvergens-e. A későbbiekben igazolni fogjuk, hogy mindkettő konvergens, méghozzá *h)* határértéke 0.

A most elmondottak természetesen még nem szabatos matematikai állítások, hiszen még nem mondtuk meg pontosan mit értünk azon, hogy egy (a_n) sorozat konvergens. A pontos definíció előtt még egy elnevezést vezetünk be: egy a valós szám $\varepsilon>0$ *sugarú környezetének* nevezzük az $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ nyílt intervallumot.

Az (a_n) valós számsorozatról akkor mondjuk, hogy konvergens és határértéke a, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan N természetes szám, hogy a sorozat minden N-nél nagyobb indexű tagja az a szám ε sugarú környezetébe esik.

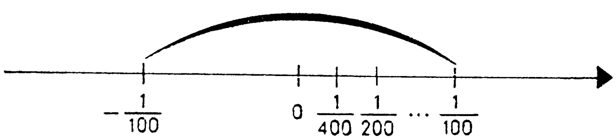
Azt, hogy az (a_n) sorozat konvergens és határértéke a, így fogjuk jelölni:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a;$$

néha röviden az $a_n \to a$ jelölést is használjuk.

Igazoljuk például a definíció alapján, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ha ε-t $\frac{1}{100}$-nak választjuk, akkor N-nek jó lesz 100, mert a sorozatnak a 100-adik tag után következő tagjai már nyilván a 0 szám $\frac{1}{100}$ sugarú környezetében vannak (8. ábra).

Az Arkhimédész-féle alaptulajdonság biztosítja, hogy akármilyen $\varepsilon>0$ számot is adunk meg, van olyan N természetes szám, amelyre $N>\frac{1}{\varepsilon}$, ahonnan $\frac{1}{N}<\varepsilon$; $n>N$-re $\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$ ami azt mutatja, hogy a sorozatnak a N-nél nagyobb indexű tagjai a 0 szám ε sugarú környezetében vannak.



8. ábra

A konvergens sorozat definíciójának az a kikötése, hogy a_n az a szám ε sugarú környezetébe esik, egyenlőtlenséggel is kifejezhető:

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

ez pedig ekvivalens a

(29) $\quad -\varepsilon<a_n-a<\varepsilon$

egyenlőtlenséggel. A (29) egyenlőtlenség az abszolút érték definícióját felhasználva így írható:

(30) $\quad |a_n-a|<\varepsilon.$

A definíciót most (30) felhasználásával így is megfogalmazhatjuk: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ akkor teljesül, ha minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan N természetes szám, hogy minden $n>N$-re $|a_n-a|<\varepsilon$.

A konvergens sorozat fogalmának még egy, az eredetivel ekvivalens definícióját fogjuk többször használni: *az (a_n) sorozat konvergens és határértéke az a szám, ha a bármely $\varepsilon>0$ sugarú környezetén kívül csak véges sok tagja van a sorozatnak.*

Ha az eredeti definíció szerint konvergens egy sorozat, akkor ez teljesül, hiszen az adott ε-hoz tartozó alkalmas N-nél kisebb indexű tagok csak véges sokan vannak, tehát csak véges sok lehet az ε sugarú környezeten kívül. Ha a most megfogalmazott értelemben konvergens egy sorozat, akkor adott $\varepsilon>0$-hoz legyen N a legnagyobb indexű tagnak az indexe, ami még az a szám ε sugarú környezetén kívül esik. Erre igaz lesz, hogy az N-nél nagyobb indexű tagok már az a ε sugarú környezetében vannak. Ezzel igazoltuk a két definíció ekvivalenciáját.

Gyakorló feladatok

6. Igazoljuk, hogy a *b)* sorozat konvergens és határértéke 0, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0.$$

Megoldás:

Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon>0$-t és keressünk hozzá alkalmas N-et. Ezt a (30) egyenlőtlenségből kaphatjuk meg:

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right| = \frac{1}{n}<\varepsilon,$$

ez teljesül, ha $n>\frac{1}{\varepsilon}$, azaz N-nek bármilyen, az $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb természetes szám jó. Ezzel megmutattuk, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz van a definíciót kielégítő N, az állítást igazoltuk.

7. Igazoljuk, hogy a *c)* és *d)* sorozatok konvergensek és határértékük 1.

Megoldás:

A *c)* sorozatra közvetlenül alkalmazzuk a definíciót a (30) egyenlőtlenséggel:

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

ez akkor teljesül, ha $n>\frac{1}{\varepsilon}$, azaz $\varepsilon>0$-hoz bármely, az $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb természetes szám jó N-nek, más szóval küszöbindexnek.

A *d)* sorozatban minden páratlan indexű tag 1, a páros indexű tagok $\frac{n-1}{n}$ alakúak, ezek sorozatáról is tudjuk, hogy 1-hez tart. Adott ε-hoz, ha N-et keresünk, akkor csak az $\frac{n-1}{n}$ alakú tagokat kell vizsgálni, hiszen az 1-ek $N=1$-től is az 1 szám ε sugarú környezetében vannak. Az $\frac{n-1}{n}$ sorozat-hoz N-nek az $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb természetes számok jók. Vegyük figyelembe, hogy ezek a tagok csak a páros indexűek, így az $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobbnak választott természetes szám kétszerese lesz jó küszöbindex.

8. Igazoljuk, hogy az $a_n=c$ egyenlőséggel definiált sorozat, ahol c tetszőleges valós szám, konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c$.

Megoldás:

Az állítást — bármennyire nyilvánvalónak is tűnik — ellenőriznünk kell, hogy a definíciónak valóban megfelel-e. $\varepsilon>0$-t választva N-nek 1 is választható, hiszen a sorozat minden tagja benne van c szám ε sugarú környezetében. Így a *j)* sorozat konvergenciáját is igazoltuk.

9. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}=0.$

Megoldás:

t $\varepsilon>0$-hoz keressünk jó N-et. A

$$\left|\frac{n}{n^3+1}-0\right|=\frac{n}{n^3+1}<\varepsilon \tag{31}$$

egyenlőtlenséget kellene megoldanunk n-re, ami elég nehézkes munka volna. E helyett csináljuk a következőt: az $\frac{n}{n^3+1}$ számot növeljük úgy, hogy lehetőleg egyszerű kifejezést kapjunk. Ha a növelt értéktől követeljük meg, hogy ε-nál kisebb legyen, akkor nyilván az eredeti is kisebb lesz, mint ε, vagyis:

$$\frac{n}{n^3+1}<\frac{1}{n^2}\leqq\frac{1}{n}<\varepsilon. \tag{32}$$

A (32) és így a (31) egyenlőtlenség is teljesül, ha $n>\frac{1}{\varepsilon}$, ezzel az állítást igazoltuk.

A 9. feladat megoldását a következő ötlettel is elvégezhettük volna: mivel fennáll a

$$0<\frac{n}{n^3+1}<\frac{1}{n} \tag{33}$$

egyenlőtlenség és az egyenlőtlenség két „szélén" álló sorozat 0-hoz tart, ezért a középen álló sorozat határértéke is 0. Mutassuk meg, hogy ez az ötlet valóban használható, vagyis igaz a következő állítás:

10. Tegyük fel, hogy minden $n\in T$-re:

$$a_n\leqq b_n\leqq c_n$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$ is fennáll. (Ez az állítás az ún. „*rendőrszabály*". Az elnevezést az indokolja, hogy ha a_n és c_n két „rendőr" és b_n a „letartóztatott", akkor b_n is kénytelen „oda tartani", ahova a két „rendőr" tart.)

Igazoljuk továbbá, hogy ha $a_n\leqq b_n$ minden n-re, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\leqq\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ is fennáll, ha a határértékek léteznek.

Megoldás:

Legyen adott $\varepsilon > 0$ és mutassuk meg, hogy ehhez van megfelelő N küszöbindex a b_n sorozatra.

A feltételekből következik, hogy az a-nak adott ε sugarú környezetében egy alkalmas N_1-től kezdve az (a_n) tagjai és egy alkalmas N_2-től kezdve a (b_n) tagjai is benne vannak. Ha N-nek az N_1 és N_2 közül a nagyobbikat választjuk, akkor innen kezdve az a_n-ek is meg a c_n-ek is, de akkor a köztük levő b_n-ek is az a szám ε sugarú környezetében vannak és ezt kell igazolni.

A második állítás igazolására indirekt módon tegyük fel, hogy az állítással ellentétben:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Ekkor az $\frac{a-b}{2} = \varepsilon > 0$-hoz tartozó N_1 és N_2 indexeket keresve az a_n és b_n sorozatokra azt kapjuk, hogy ha $n > \max(N_1, N_2)$, akkor a_n az a szám, b_n pedig a b szám ε sugarú környezetében van, tehát $a_n > b_n$, ami ellentmond a feltevésnek.

Ebből az is következik, hogy egy sorozatnak csak egy határértéke lehet, hiszen ha $a_n \to a$ és $a_n \to b$ is igaz, akkor $a_n \leq a_n$ miatt $a \leq b$ és $b \leq a$ is fennáll, ebből pedig $a = b$ következik.

Egy adott sorozatnak egy *részsorozatát* kapjuk, ha az eredeti sorozatból elhagyunk tagokat úgy, hogy még mindig egy sorozat maradjon. Az $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sorozat például részsorozata az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatnak.

11. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat konvergens, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és az (a_{n_k}) sorozat részsorozata az (a_n)-nek. Igazoljuk, hogy ekkor (a_{n_k}) is konvergens sorozat és $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

Megoldás:

A határérték definíciója szerint az a szám tetszőleges környezetén kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok tagja van. Nyilván ugyanez igaz az (a_{n_k}) sorozatra is, hiszen ennek tagjai az eredeti sorozatnak is tagjai.

Vizsgáljuk meg most közelebbről a *g)* és *k)* sorozatokat. Ezekre az a jellemző, hogy tagjaik akármilyen nagy számnál is nagyobbak lesznek, ha elég messze megyünk a sorozatban.

Az ilyen sorozatokról azt mondjuk, hogy $+\infty$-hez tartanak, a tágabb értelemben vett határértékük $+\infty$.

Az (a_n) sorozatról akkor mondjuk, hogy $+\infty$-hez tart, ha tetszőleges P valós számhoz van olyan N index, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > P$.

12. Igazoljuk, hogy a *g)* és *k)* sorozatok $+\infty$-hez tartanak.

Megoldás:

Elég megmutatni, hogy $P > 0$-hoz van megfelelő N küszöbindex, hiszen ha $P \leq 0$, akkor $N = 1$ már jó. A

$$P < \frac{n}{10^6}$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $10^6 P < n$, így N-nek jó a $10^6 P$ után következő első egész szám.

A *k)* sorozat a *g)* részsorozata, hiszen úgy származtatható, hogy *g)*-ből csak azokat a tagokat hagyjuk meg, amelyek számlálója $n^2 \cdot 10^6$ alakú. Elég tehát azt igazolni, hogy egy $+\infty$-hez tartó sorozat részsorozata is $+\infty$-hez tart. Ezt a 11. gyakorló feladathoz hasonlóan lehet megmutatni.

Egy (a_n) sorozatról azt mondjuk, hogy $-\infty$-hez tart, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *ha minden P valós számhoz van olyan N index, hogy ha $n > N$, akkor $a_n < P$.*

Például az $a_n = -n^2$ képlettel definiált sorozat $-\infty$-hez tart, mert a

$$-n^2 \leq -n < P$$

egyenlőtlenség teljesül, hacsak $n > -P$ fennáll.

Feladatok

13. Igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$.

Állapítsuk meg a következő sorozatokról, hogy konvergensek-e és ha igen, mi a határértékük:

14. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

15. $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$ (l. a 10. feladatot).

16. $a_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

17. *a)* Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ és c tetszőleges valós szám, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n=ca$.

b) Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ és c tetszőleges valós szám, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} (c+a_n)=c+a$.

18. Igazoljuk, hogy az $a_n=\sqrt{a}$ sorozat, ahol $a>1$ konvergens, és számítsuk ki a határértékét (l. a 8. feladatot).

19. Igazoljuk, hogy az

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

sorozat $+\infty$-hez tart (alkalmazzuk a 7. feladat eredményét!).

20. A Bernoulli-féle egyenlőtlenség felhasználásával igazoljuk, hogy ha $q>1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=+\infty$.

21. Az előző feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, ha $|q|<1$.

22. Egy sorozatot a következő rekurzív definícióval adunk meg.

$$a_1=0,\quad a_2=1 \quad \text{és}$$

$$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}.$$

Adjuk meg képlettel a_n-et és határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ értékét.

23. Legyen $|q|<1$ és határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+\ldots+q^n)$$

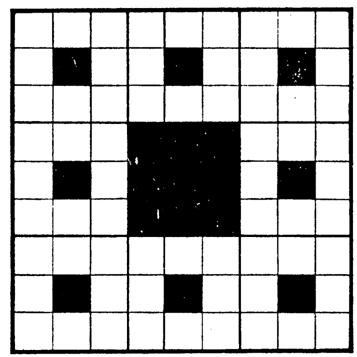
határértéket.

24. Igazoljuk, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek és a határértékük egy közös a szám, ekkor a két sorozat „összefésüléséből" keletkező

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$$

sorozat is konvergens és határértéke ugyanaz az a szám.

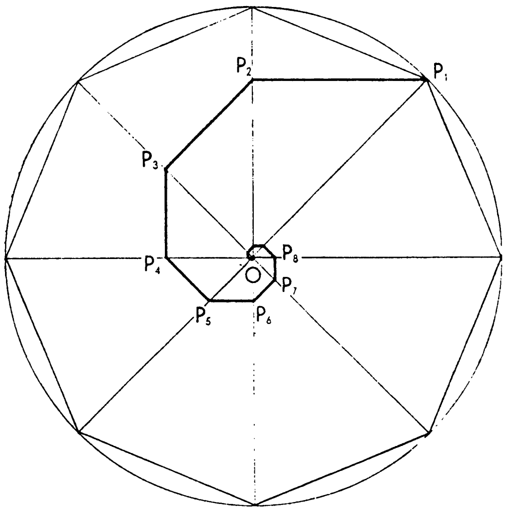
25. Egy egységnyi oldalú négyzetet 9 egybevágó négyzetre bontunk, ezek közül a középsőt beszínezzük. A második lépésben a megmaradó nyolc kis négyzet mindegyikét 9 egybevágó négyzetre bontjuk, majd mindegyikben a középsőt ismét beszínezzük. Az eljárást így folytatjuk. Mekkora lesz az n-edik lépés után beszínezett részek területének összege? Jelöljük s_n-nel az n-edik lépés után fehéren maradó rész területét. Határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ értékét. (A 9. ábrán az eljárás első két lépését szemléltettük.)



9. ábra

26. Egység sugarú körbe szabályos nyolcszöget írunk. Kiválasztjuk a nyolcszög egyik csúcsát; ebből a szomszédos csúcsba húzott sugárra merőlegest állítunk. A merőleges talppontjából ismét merőlegest állítunk a következő csúcsba húzott sugárra. Az eljárást így folytatjuk, mindig azonos irányban haladva.

Határozzuk meg az n-edik és $n+1$-edik lépésben kapott talppontokat összekötő szakaszok hosszát! Jelölje s_n az első n lépésben kapott szakaszok hosszának összegét. Számítsuk ki $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ értékét! (A 10. ábrán az eljárás első 10 lépését szemléltetjük.)



10. ábra

4. Műveletek konvergens sorozatokkal; monoton sorozatok

Kézenfekvő gondolat megvizsgálni azt a kérdést, hogy szabad-e konvergens sorozat tagjaival műveleteket végezni, azaz igaz-e az, hogy ha konvergens sorozatok tagjaival műveleteket végzünk, akkor ezek a műveletek „öröklődnek" a határértékre is. A kérdésre igenlő választ adhatunk.

Igazoljuk ezt gyakorlásképpen az összeadás műveletére.

Gyakorló feladat

13. Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n)=$ $=a+b$.

Megoldás:

Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan N, hogy ha $n>N$, akkor

(34) $\quad |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon.$

A (34) egyenlőtlenség bal oldalát így becsülhetjük felülről:

(35) $\quad |(a_n+b_n)-(a+b)| \leqq |a_n-a| + |b_n-b|.$

Mivel $a_n\to a$ és $b_n\to a$, az adott ε-hoz van olyan N_1, ill. N_2 küszöbindex, hogy ha $n>N_1$, akkor

(36) $\quad |a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2},$

és ha $n>N_2$, akkor

(37) $\quad |b_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

Így ha N-et az N_1 és N_2 közül a nagyobbiknak választjuk, akkor $n>N$-re (36) is és (37) is teljesül, de akkor (35), (36) és (37) alapján a (34) egyenlőtlenség is igaz.

Hasonló ötletekkel lehet igazolni a megfelelő állítást a többi műveletre is.

A sorozatoknak egy fontos osztályát alkotják az ún. *monoton sorozatok*. Egy (a_n) sorozatról akkor mondjuk, hogy *monoton növő (fogyó)*, ha minden $n\in \mathsf{T}$-re fennáll, hogy $a_n\leqq a_{n+1}$ ($a_n\geqq$ $\geqq a_{n+1}$). Ha az egyenlőséget nem engedjük meg, akkor *szigorúan monoton sorozatról* beszélünk. Monoton sorozatok konvergenciaviselkedését viszonylag egyszerűen el tudjuk majd dönteni, ehhez azonban még egy segédeszközre lesz szükség.

Legyen $\mathsf{H}\subset\mathsf{V}$ (olv.: „H részhalmaza V-nek", azaz a H elemei V-nek is elemei) és H nem üres halmaz. A H-ról akkor mondjuk, hogy *felülről korlátos számhalmaz*, ha van olyan f szám, hogy H minden x elemére $x\leqq f$. Hasonlóan egy $\mathsf{H}\subset\mathsf{V}$ nem üres halmazról akkor mondjuk, hogy *alulról korlátos számhalmaz*, ha van olyan a szám, hogy H minden x elemére $x\geqq a$. Egy számhalmazról akkor mondjuk, hogy *korlátos*, ha alulról meg felülről is korlátos. Például az N halmaz (a természetes számok halmaza), ami része a V-nek ($\mathsf{N}\subset\mathsf{V}$) alulról korlátos, pl. alsó korlátja az 1, de felülről nem korlátos. Az $\frac{1}{n}$ alakú számok halmaza, ahol $n \in T$ alulról is meg felülről is korlátos, mert felső korlátnak jó például az 1, alsó korlátnak pedig a 0. Az $\frac{1}{n}$ alakú számok halmaza tehát korlátos halmaz.

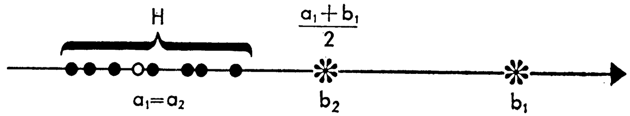
Egy felülről korlátos halmaznak nyilván végtelen sok felső korlátja van, hiszen ha egy f szám jó felső korlátnak, akkor minden, f-nél nagyobb szám is jó felső korlátnak. *Egy adott, felülről korlátos számhalmaz felső korlátai között mindig van legkisebb*; ez jellemző tulajdonsága a valós számok részhalmazainak.

Gyakorló feladat

14. Tegyük fel, hogy $H \subset V$, H nem üres és felülről korlátos. Mutassuk meg, hogy van olyan h szám, ami a H halmaznak felső korlátja és a H bármely felső korlátja nagyobb vagy egyenlő, mint h. Ezt a h számot a H halmaz *felső határának* nevezzük, jele: sup H (olv. szuprémum H).

Megoldás:

A bizonyításhoz a Cantor-axiómát használjuk fel. Legyen a_1 olyan szám, ami H-nak nem felső korlátja (ilyen van, mert ha $x \in H$, akkor bármely $a_1 < x$ szám jó) és b_1 egy felső korlátja H-nak (ilyen is van, mert feltettük, hogy H felülről korlátos). Felezzük meg az $[a_1, b_1]$ intervallumot. Az $\frac{a_1+b_1}{2}$ felező-



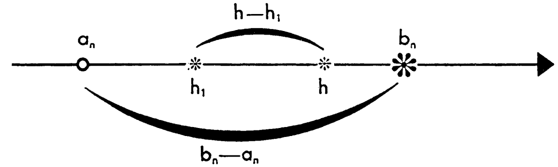
11. ábra

pontról vizsgáljuk meg, hogy felső korlátja-e H-nak vagy nem. Ha a felezőpont felső korlátja H-nak, akkor legyen $a_2 = a_1$ és $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, ha nem, akkor legyen $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$ és az $[a_2, b_2]$ intervallummal folytassuk az eljárást (11. ábra).

Ha már megtaláltuk az $[a_n, b_n]$ intervallumot, akkor vizsgáljuk meg az $\frac{a_n+b_n}{2}$ felezőpontot. Ha ez felső korlátja H-nak, akkor legyen $a_{n+1} = a_n$ és $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, ha nem, akkor legyen $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ és $b_{n+1} = b_n$. Az eljárást ezután az $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ intervallummal folytatjuk.

Így minden n természetes számhoz rekurzív definícióval hozzárendeltünk egy $[a_n, b_n]$ intervallumot és ezek nyilván „egymásba skatulyázott" intervallumsorozatot alkotnak. A Cantor-axióma szerint ekkor van közös pontjuk: h. Tegyük fel, hogy h-n kívül van egy másik, mondjuk $h_1 < h$ közös pont is. Ekkor nyilván minden n-re teljesülnie kell a

$$b_n - a_n > h - h_1 > 0 \tag{38}$$



12. ábra

egyenlőtlenségnek (12. ábra). A $b_n - a_n$ különbség viszont, ami az $[a_n, b_n]$ intervallum hossza, így írható fel:

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}},$$

hiszen az $[a_n, b_n]$ intervallumot az $[a_1, b_1]$-ből n—1-szeri egymást követő felezéssel kapjuk. Az $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$ sorozat 0-hoz tart (l. a 20. feladatot) és így $\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \to 0$ is fennáll. Ez azt jelenti, hogy $b_n - a_n$ akár milyen kis pozitív számnál, így $h - h_1$-nél is kisebb lesz, ha n elég nagy, ez pedig ellentmond (38)-nak. Így h az egyetlen olyan szám, ami mindegyik $[a_n, b_n]$ intervallumban benne van. Megmutatjuk, hogy:

$$h = \sup H.$$

Először azt lássuk be, hogy h felső korlátja a H-nak. Ha ez nem igaz, akkor van olyan $x \in H$, hogy $x > h$. Az $[a_n, b_n]$ intervallumok definíciója miatt viszont $a_n \leqq h$ minden n-re és $b_n \geqq x$, így azt kaptuk, hogy

$$b_n - a_n \geqq x - h > 0$$

minden n-re. Ez ellentmond annak, hogy $b_n - a_n \to 0$; h tehát felső korlátja H-nak. Teljesen hasonlóan lehet megmutatni, hogy h a legkisebb a felső korlátok közül, tehát valóban H felső határa (csak azt kell észrevenni, hogy ha f egy felső korlátja H-nak, akkor $f > a_n$ minden n-re).

Jelöljük az (a_n) sorozat elemeiből álló számhalmazt $\{a_n\}$-nel. Például az $a_n = 2$ definícióval megadott sorozat elemeiből álló számhalmaz a $\{2\}$ egyelemű halmaz. *Ha az $\{a_n\}$ számhalmaz felülről korlátos, akkor azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat felülről korlátos.*

15. Igazoljuk, hogy ha (a_n) monoton növő és felülről korlátos sorozat, akkor konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}.$$

Megoldás:

Jelöljük $\sup\{a_n\}$-et a-val. Azt kell megmutatnunk, hogy az a szám tetszőleges környezetén kívül az (a_n) sorozatnak csak véges sok eleme van. Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Az a szám ε sugarú környezete az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallum. Mivel $a - \varepsilon < a$, az $a - \varepsilon$ nem felső korlátja az $\{a_n\}$ halmaznak, tehát van olyan N index, hogy $a - \varepsilon < a_N$. Az (a_n) sorozat azonban monoton növő, így minden $n > N$-re $a_n \geqq a_N$, tehát az

$$(39) \qquad a - \varepsilon < a_n$$

egyenlőtlenség méginkább igaz. Másrészt $a_n \leqq a$ minden n-re fennáll, mert a felső korlátja az $\{a_n\}$ halmaznak, tehát

$$(40) \qquad a_n < a + \varepsilon$$

is fennáll minden n-re, vagyis az $n > N$-ekre is. A (39) és (40) egyenlőtlenségek azt mutatják, hogy $n > N$-re az (a_n) sorozat tagjai mind az a ε sugarú környezetében vannak, tehát a határérték valóban a.

A felső határ definíciójához hasonlóan vezethetjük be egy alulról korlátos halmaz alsó határának fogalmát: ha H egy alulról korlátos halmaz, akkor alsó korlátai közül a legnagyobbat H *alsó határának* nevezzük és inf H-nak (olv.: infimum H) nevezzük. A felső határ létezésére vonatkozó eredményünkből már következik az alsó határ létezése is.

A monoton növő, felülről korlátos sorozat konvergenciájához hasonlóan igazolható az is, hogy *minden monoton fogyó, alulról korlátos sorozat konvergens és határértéke a sorozat elemeiből álló számhalmaz alsó határa.*

Gyakorló feladatok

16. Igazoljuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens.

Megoldás:

A 2. feladat állítása éppen azt mondja ki, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton növő. A 4. feladat eredménye szerint viszont a sorozat felülről korlátos is, felső korlátnak jó például a 3. Ekkor viszont a 15. gyakorló feladatban bizonyított tétel szerint a sorozat konvergens. A sorozat határértékét e-vel jelöljük, tehát az e szám definíciója:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

Az e-ről igazolni lehet, hogy irracionális szám, sőt transzcendens is (vagyis nem gyöke egyetlen egész együtthatós egyenletnek sem). Az e értéke tíz tizedesjegy pontosságig:

$$e = 2{,}7182818285.$$

17. Igazoljuk, hogy az $\sqrt[n]{n}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

Megoldás:

A sorozat első 5 tagja a következő:

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}, \quad \sqrt[5]{5}.$$

Az 5. feladat eredménye alapján a sorozat a harmadik tagtól kezdve monoton fogyó. A sorozat konvergens vagy nem konvergens jellegét nyilván nem befolyásolja lényegesen az első két tag; ezeket el is hagyhatjuk. Általában is könnyű végiggondolni, hogy egy sorozat konvergenciája és határértéke nem változik, ha véges sok tagját elhagyjuk vagy megváltoztatjuk.

Az $\sqrt[n]{n} > 1$ egyenlőtlenség a sorozat második tagjától kezdve nyilván igaz.

A sorozat tehát monoton fogyó és alulról korlátos, vagyis konvergens.

A sorozat határértékét jelöljük a-val: $\sqrt[n]{n} \to a$. Az a számról azt már tudjuk, hogy $a \geqq 1$. Használjuk fel azt a tényt, hogy egy konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens és ugyanaz a határértéke, mint az eredeti sorozatnak. Vizsgáljuk a páros indexű részsorozatot, azaz a $\sqrt[2n]{2n}$ sorozatot:

(41) $$\sqrt[2n]{2n} = \sqrt[2n]{2} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{n}}.$$

A (41) egyenlőség bal oldalán álló sorozatra az előbbiek miatt igaz, hogy:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2n]{2n} = a.$$

A jobb oldalon $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (I. 17. feladat) miatt a $\sqrt[2n]{2}$ sorozat is 1-hez tart.

Az $\sqrt[n]{n} \to a$ és $a \geqq 1$ összefüggésekből következik, hogy $\sqrt{\sqrt[n]{n}} \to \sqrt{a}$, tehát a (41) egyenlőség két oldalának határértékét nézve az

$$a = \sqrt{a}$$

egyenlőséghez jutunk, innen vagy $a=1$ vagy $a=0$ következik. Mivel $a \geqq 1$, az $a=0$ eset nem lehet igaz, így azt kaptuk, hogy:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

18. Igazoljuk, hogy az

$$a_1 = \sqrt{2},$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

rekurzív definícióval megadott sorozat konvergens.

Megoldás:

Írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \quad \ldots$$

Ezeket vizsgálva az a sejtésünk alakul ki, hogy a sorozat monoton nő. Igazoljuk ezt teljes indukcióval:

$$a_1 < a_2,$$

mert

$$a_1^2 = 2 < 2 + \sqrt{2} = a_2^2.$$

Tegyük fel, hogy $a_n < a_{n+1}$ fennáll. Ekkor az egyenlőtlenséggel való számolás szabályai szerint

$$a_n + 2 < a_{n+1} + 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{a_{n+1} + 2} = a_{n+2}$$

is igaz és éppen ezt kellett megmutatni.

Igazoljuk még, hogy a sorozat felülről korlátos. $a_1 < 2$ nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $a_n < 2$, ekkor $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$, tehát a 2 felső korlátja a sorozatnak. Most már csak a határértéket kell kiszámítani. Ehhez írjuk fel a definiáló egyenletet:

(42) $$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

A (42) egyenlőség mindkét oldalának vegyük a határértékét. Ha $a_n \to a$, akkor nyilván $a_{n+1} \to a$ így (42)-ből azt kapjuk, hogy az a határérték az

$$a = \sqrt{2 + a}$$

egyenlet gyöke. Ez a gyök: $a = 2$ (az $a = -1$ nem jó gyök!), tehát a sorozat határértéke 2.

Feladatok

27. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ és $\lim_{n \to \infty} b_n = b$, akkor $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = ab$.

28. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, akkor van olyan N, hogy minden $n > N$-re $a_n \neq 0$.

29. Tegyük fel, hogy $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ és $a \neq 0$. Ekkor az előző feladat szerint az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozatnak legfeljebb véges sok tagja nincs értelmezve, ezeket hagyjuk el és jelöljük így a megmaradt sorozatot is. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$. Helyettesíthető-e az $a \neq 0$ feltétel azzal, hogy $a_n \neq 0$ minden $n \in$ T-re?

30. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{n\to\infty} a_n=a$, $a_n\geqq 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

31. Igazoljuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat monoton fogyó és

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

32. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

a) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;

b) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$;

c) $\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$;

d) $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$, ahol k tetszőleges egész;

e) $\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n$, ahol k tetszőleges egész $(k\neq 0)$;

f) $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$, ahol r racionális szám.

33. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemnegatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az $\sqrt[n]{a_1^n+\ldots+a_k^n}$ sorozat konvergens és adjuk meg a sorozat határértékét.

34. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

a) $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$,

b) $\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}$,

c) $\dfrac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$;

d) $\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$;

e) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$;

f) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

35. *a)* Igazoljuk teljes indukcióval, hogy tetszőleges, rögzített $k\in T$ és minden $n\in T$-re fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{k+1}\,n^{k+1}<1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k<\frac{1}{k+1}\,(n+1)^{k+1}.$$

b) Számítsuk ki a 34. *a)* és *b)* feladatok általánosításaként adódó

$$\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$$

sorozat határértékét, ahol k tetszőleges, rögzített természetes szám.

36. Igazoljuk, hogy minden rögzített k természetes számra igaz az

$$1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{k!}\leqq e$$

egyenlőtlenség.

37. Igazoljuk az előző és a 12. feladat felhasználásával, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

38. Az előző feladat felhasználásával igazoljuk, hogy az e szám irracionális. (Indirekt úton bizonyítsuk!)

39. A következő sorozatokról mutassuk meg, hogy konvergensek és határértékük 0 ($a>1$ valós szám, k rögzített, természetes szám):

a) $\dfrac{a^n}{n!}$;

b) $\dfrac{n^k}{a^n}$;

c) $\dfrac{n^k}{n!}$;

d) $\dfrac{n!}{n^n}$.

40. Legyen $a>0$ rögzített valós szám. Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következő rekurzióval:

$a_1>0$ tetszőleges valós szám,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right).$$

Igazoljuk, hogy:

a) $a_n \geqq \sqrt{a}$, ha $n \geqq 2$;

b) $a_n \geqq a_{n+1}$, ha $n \geqq 2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}$;

d) $a_{n+1}-\sqrt{a}=\dfrac{(a_n-\sqrt{a})^2}{2a_n}$,

$a_{n+1}+\sqrt{a}=\dfrac{(a_n+\sqrt{a})^2}{2a_n}$;

e) a *d)* feladat eredményének felhasználásával adjunk becslést az $a_n-\sqrt{a}$ eltérésre;

f) ha $a=5$ és $a_1=3$, akkor az (a_n) sorozat hányadik tagtól kezdve fogja a $\sqrt{5}$-öt 10^{-10}-nél kisebb hibával megközelíteni?

41. Legyen $a>0$ rögzített valós szám. Definiáljuk az (a_n) sorozatot a következő rekurzióval:

$a_1>0$ tetszőleges valós szám,

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{a}{a_n^2}\right).$$

Igazoljuk, hogy:

a) $a_n \geqq \sqrt[3]{a}$, ha $n \geqq 2$;

b) $a_n \geqq a_{n+1}$, ha $n \geqq 2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt[3]{a}$;

d) keressünk becslést a_n és $\sqrt[3]{a}$ eltérésére!

42. Legyen $a>0$ tetszőleges valós szám. Vizsgáljuk meg az

$a_1=\sqrt{a}$,

$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$

rekurzív definícióval megadott sorozat konvergenciaviselkedését és ha konvergens, keressük meg a határértékét.

43. Legyen $a>0$ és döntsük el az

$a_1=\sqrt{a}$,

$a_{n+1}=\sqrt{a\cdot a_n}$

sorozatról, hogy konvergens-e. Ha igen, mi a határértéke?

44. Igazoljuk, hogy a következő rekurzív definícióval megadott sorozatok konvergensek és számítsuk ki határértéküket:

a) $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$;

b) $a_1>0$ tetszőleges, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2+a_n}$.

45. Legyenek $0<b<a$ tetszőleges rögzített valós számok. A következő rekurzív definícióval egyszerre adunk meg két sorozatot:

$$a_1=a,$$

$$b_1=b,$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},$$

$$b_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}.$$

Igazoljuk, hogy

a) a_n monoton fogyó, b_n monoton növő;

b) az a_n és b_n számok mértani közepe minden n-re ugyanaz;

c) $0<a_{n+1}-b_{n+1}<\frac{a_n-b_n}{2}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\sqrt{ab}$

46. Legyenek $0<b<a$ rögzített valós számok. Legyen:

$$a_1=a,$$
$$b_1=b,$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},$$

$$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

Igazoljuk, hogy (a_n) is és (b_n) is konvergens sorozatok és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

47. Jelölje k_n, ill. K_n az egység sugarú körbe, ill. egység sugarú kör köré írt szabályos 2^{n+1}-szög kerületét. Így például $k_1=4\sqrt{2}$ és $K_1=8$. Igazoljuk, hogy

a) K_{n+1} a k_n és K_n harmonikus közepe, k_{n+1} a k_n és K_{n+1} mértani közepe;

b) K_n monoton fogyó, alulról korlátos, k_n monoton növő, felülről korlátos sorozat;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=\lim\limits_{n\to\infty} K_n$.

48. Igazoljuk, hogy az

$$f_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$$

sorozatnak minden rögzített x-re van véges határértéke. Vázoljuk fel az $f_1(x)$, $f_2(x)$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ függvény képét.

49. Igazoljuk, hogy az

$$f_n(x)=\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$$

sorozatnak minden $x\neq 0$-ra van véges határértéke. Ábrázoljuk az $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényt.

50. Mutassuk meg, hogy az

$$f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$

sorozatnak $x\geqq 0$ esetén van véges határértéke. Ábrázoljuk az $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvényt.

***51.** Igazoljuk, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata.

***52.** Bizonyítsuk be, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

***53.** Bizonyítsuk be az ún. Cauchy-féle konvergenciakritériumot: egy (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan N index, hogy minden n, $k>N$-re $|a_n-a_k|<\varepsilon$.

$*$**54.** Igazoljuk, hogy egy monoton növő sorozat vagy konvergens vagy $+\infty$-hez tart. Fogalmazzuk meg és igazoljuk a megfelelő állítást monoton fogyó sorozatra is.

$*$**55.** Az (a_n) és (b_n) sorozatok divergensek. Lehet-e konvergens az (a_n+b_n), ill. az (a_nb_n) sorozat?

$*$**56.** Az (a_n) sorozat konvergens, a (b_n) sorozat divergens. Mit állíthatunk az (a_n+b_n), ill. (a_nb_n) sorozatról?

57. Az (a_nb_n) sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$. Mit állíthatunk az (a_n) és (b_n) sorozatról?

58. Az (a_n) sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, a (b_n) sorozat tetszőleges. Mit mondhatunk az (a_nb_n) sorozatról?

59. Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|=+\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}=0$. Igaz-e az állítás megfordítása?

$*$**60.** Igazoljuk, hogy ha egy sorozat elemeiből álló számhalmaz nem korlátos felülről, akkor van a sorozatnak $+\infty$-hez tartó részsorozata.

5. Példák a sorozat határértékének alkalmazására

Az I. fejezet bevezetőjében már említettük azt a kapcsolatot, ami a *végtelen tizedes törtek* és a valós számok közt található. Most ezt a kérdést részletesebben megvizsgáljuk, azaz igazoljuk ezt az állítást: *minden valós szám előállítható végtelen tizedes tört alakban.*

Elég lesz csak a [0, 1] intervallumba tartozó valós számokat vizsgálni, az általános eset erre visszavezethető.

Először azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy egy

(43) $\quad 0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots \quad (0\leqq a_n\leqq 9$ egész)

„végtelen tizedes tört"-nek nevezett jelsorozat milyen értelemben jelent valós számot. Nyilván logikus megállapodás a (43) alakú végtelen tizedes törtet a

(44) $\quad b_n=\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\ldots+\dfrac{a_n}{10^n}$

sorozat határértékének tekinteni, amennyiben ez a sorozat konvergens.

Igazoljuk tehát, hogy a (44) sorozat konvergens. A sorozat monoton növő, mert minden n-re $b_{n+1}=b_n+\dfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$, ahol $a_{n+1}\geqq 0$, tehát $\dfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\geqq 0$ is igaz. A (b_n) korlátosságának igazolásához vizsgáljuk a

$$c_n=\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\ldots+\frac{9}{10^n}$$

sorozatot. Nyilván minden $n\in T$-re igaz, hogy

(45) $\quad b_n\leqq c_n$.

A c_n is monoton növő sorozat, ha tehát $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c$ létezik, akkor $c_n\leqq c$, így (45) miatt $b_n\leqq c$ is igaz, tehát (b_n) monoton növő, korlátos sorozat, azaz konvergens.

Azt kell még igazolnunk, hogy (c_n) konvergens sorozat. Végezzük el a következő átalakítást:

$$c_n=\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}\right).$$

Itt a zárójelben álló sorozat a 22. feladat szerint konvergens és határértéke $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10}}$, így

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{10}}=1.$$

A 60. feladat szerint az is igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} b_n\leqq 1,$$

másrészt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ nyilván nemnegatív, tehát a (43) végtelen tizedes tört a definiált értelemben valóban egy, a [0, 1] intervallumhoz tartozó valós számot állít elő.

Igazolható, hogy eredményünk megfordítása is igaz, azaz minden 0 és 1 közötti valós szám előállítható végtelen tizedes tört alakban.

Gyakorló feladat

19. Legyen $x \in [0, 1]$ tetszőleges valós szám. Igazoljuk, hogy x előállítható $0, a_1 \ldots a_n \ldots$ végtelen tizedes tört alakban, ahol $0 < a_n \leqq 9$ egész szám, és az a_n-ek között végtelen sok 9-től különböző van.

Megoldás:

Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot az $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$ számokkal és keressük ki azt az $\frac{1}{10}$ hosszúságú intervallumot, amelyre $\frac{a_1}{10} \leqq x < \frac{a_1+1}{10}$ igaz, ahol $a_1 = 0, 1, \ldots, 9$ közül pontosan az egyik igaz (mivel $x<1$, van ilyen a_1); ezután az $\left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right]$ intervallumot osszuk fel 10 egyenlő részre az

$\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2}, \frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2}, \ldots, \frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2}$ számokkal és keressük ki azt az $\frac{1}{10^2}$ hosszúságú intervallumot, amelyre $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2} \leqq x < \frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}$. Az eljárást korlátlanul folytathatjuk, ily módon minden n természetes számhoz hozzárendelünk egy

$$b_n = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}$$

számot, ahol $0 \leqq a_n \leqq 9$, egész és minden $n \in T$-re:

$$b_n \leqq x < b_n + \frac{1}{10^n}. \tag{46}$$

A (b_n) sorozat konvergenciája és a (46) egyenlőtlenség miatt (b_n) határértéke $x \left(\frac{1}{10^n} \to 0\right)$. Azt kell még megmutatnunk, hogy az a_n számok között végtelen sok 9-től különböző van.

Tegyük fel, hogy az előző konstrukcióval kapott végtelen tizedes tört ilyen alakú:

$$0, a_1 a_2 \ldots a_k 999 \ldots, \tag{47}$$

ahol a_k az utolsó, 9-től különböző jegy (csupa 9-ből nem állhat a tizedes tört, mert ez az előzők szerint az 1-et állítaná elő és $x<1$). Mutassuk meg, hogy akkor rosszul alkalmaztuk az eljárást és a (47) alakú végtelen tizedes tört helyett az x előállítása ilyen:

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_k' 000 \ldots, \tag{48}$$

ahol $a_k' = a_k + 1$ és utána csupa 0 következik ($a_k < 9$, ezért $a_k + 1 \leqq 9$).

Feltételünk szerint x-et a (47) alakú végtelen tizedes tört állítja elő. Ez a következő sorozat határértéke:

$$b_1 = \frac{a_1}{10}, \quad \ldots, \quad b_k = \frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_k}{10^k},$$

$$b_{k+1} = b_k + \frac{9}{10^{k+1}}, \quad \ldots, \quad b_{k+n} = b_k + \frac{9}{10^{k+1}}+\ldots+\frac{9}{10^{k+n}},$$

továbbá

$$x = \lim_{n \to \infty} b_{k+n} = \lim_{n \to \infty} \left[b_k + \frac{9}{10^{k+1}} \left(1+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)\right] =$$

$$= b_k + \frac{9}{10^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = b_k + \frac{1}{10^k} =$$

$$= \frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^k} = 0, a_1 a_2, \ldots, a_k' 00 \ldots.$$

Tehát igaz a (48) egyenlőség is és a konstrukció k-adik lépésében ezt kapjuk:

$$\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_k+1}{10^k} = x < \frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_k+2}{10^k},$$

vagyis az előző konstrukció helyesen alkalmazva az x (48) alakú előállításához vezet.

A 19. gyakorló feladat gondolatmenetéből az is kiderül, hogy ha csak olyan végtelen tizedes törteket engedünk meg, amelyekben végtelen sok kilencestől különböző tizedesjegy van, akkor minden valós szám tizedestört-előállítása egyértelmű. Ha ezt a feltételt nem kötjük ki, akkor a véges tizedes törtekkel előállítható valós számoknak lesz egy olyan tizedes tört alakja is, ahol egy helytől kezdve csupa kilences számjegy szerepel, pl. $0{,}1400\ldots=0{,}13999\ldots$.

A következőkben megvizsgáljuk a racionális számok végtelen tizedes törtekkel való előállítását. Szintén az I. fejezet bevezetőjeben utaltunk arra, hogy a *racionális számok* és csak ezek állíthatók elő *szakaszos végtelen tizedes törtekkel.*

A $\frac{p}{q}$ racionális szám végtelen szakaszos tizedes törtté alakításának egyik módja, hogy a $p:q$ kijelölt osztás elvégzését a szokásos módon korlátlanul folytatjuk. A következőkben egy másik eljárást fogunk ismertetni.

Gyakorló feladatok

20. Igazoljuk, hogy a $0{,}771212\ldots$ szakaszos végtelen tizedes tört racionális számot állít elő.

Megoldás:

A $0{,}771212\ldots$ tizedes tört alakban adott valós szám a következő határértékkel egyezik meg:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{77}{100}+\frac{12}{10^4}+\frac{12}{10^4\cdot10^2}+\ldots+\frac{12}{10^4\cdot10^{2n-2}}\right)=$$
$$=\frac{77}{100}+\frac{12}{10^4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{(10^2)^{n-1}}\right)=$$
$$=\frac{77}{100}+\frac{12}{10^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{77}{100}+\frac{12}{9900}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

21. Igazoljuk, hogy az $x=0,\ a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_lb_1\ldots b_l\ldots$ szakaszos végtelen tizedes tört alakban adott valós szám racionális.

Megoldás:

Az állítás bizonyítását a 20. gyakorló feladatban alkalmazott módszerrel végezhetjük. Az x valós számot egy sorozat határértékeként állíthatjuk elő, erről a határértékről kell megmutatni, hogy racionális szám.

$$x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{10^k}+\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_l}}{10^{k+l}}+\ldots+\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_l}}{(10^{k+ln}}\right),$$

ahol $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$, ill. $\overline{b_1b_2\ldots b_l}$ olyan tízes számrendszerben felírt számokat jelölnek, amelyeknek a jegyei sorra $a_1, \ldots, a_k$, ill. $b_1, \ldots, b_l$. Alkalmazzuk a 20. gyakorló feladat megoldásában bevált számolási „fogásokat":

$$x=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{10^k}+\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_l}}{10^{k+l}}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^l}+\ldots+\frac{1}{(10^l)^{n-1}}\right)=$$
$$=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{10^k}+\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_l}}{10^{k+l}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^l}}=$$
$$=\frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{10^k}+\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_l}}{10^k(10^l-1)},$$

ami nyilván racionális szám.

22. Állítsuk elő a $\frac{2}{11}$ racionális számot végtelen tizedes tört alakban.

Megoldás:

A 19. gyakorló feladatban leírt módszer itt is alkalmazható, ebből azonban nehezen tudnánk következtetni a kapott végtelen tizedes tört jellegére. Ehelyett egy másik, gyorsabb eljárást adunk meg.

Bővítsük az adott törtet úgy, hogy a nevező alkalmas k-ra 10^k-1 alakú legyen. A $\frac{2}{11}$ esetében nyilván jó lesz, ha 9-cel bővítünk:

$$\frac{2}{11}=\frac{18}{99}=\frac{18}{10^2-1};$$

Ezután végezzük el a következő átalakítást:

$$\frac{2}{11}=\frac{18}{10^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}.$$

Az $\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}$ kifejezés az $1+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{(10^2)^{n-1}}$ sorozat határértéke, tehát a konvergens sorozatokkal végezhető műveletek felhasználásával

$$\frac{2}{11}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{18}{10^2}+\frac{18}{(10^2)^2}+\ldots+\frac{18}{(10^2)^n}\right),$$

ami azt jelenti, hogy a $\frac{2}{11}$ tört keresett végtelen tizedes tört alakja a következő szakaszos tizedes tört:

$$\frac{2}{11}=0{,}1818\ldots$$

23. Igazoljuk, hogy ha q és 10 relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1, $(q, 10)=1$, akkor van olyan s szám, hogy $qs=10^k-1=99\ldots9$ (k db kilences számjegyből áll a szám).

Megoldás:

Írjuk fel a következő q db számot:

$$9,\ 99,\ 999,\ \ldots,\ 99\ldots9,$$

ahol az utolsó szám q db 9-es számjegyet tartalmaz. Két eset lehet: vagy a felírt q darab szám között van olyan, ami q-val osztható, vagy nincs. Az első esetben igaz az állítás. A második esetben kell, hogy legyen a felírtak között két olyan szám, ami q-val osztva azonos maradékot ad (q-val való osztáskor csak a $0, 1, \ldots, q-1$ számok adódhatnak maradékként és a felírt q darab szám között most nincs olyan, ami 0-t ad maradékul). E két szám különbsége nyilván osztható q-val és

$$999\ldots90\ldots0=9\ldots9\cdot 10\ldots0$$

alakú. Mivel 10 és q relatív prímek, q csak úgy lehet osztója a szorzatnak, ha a $99\ldots9$ alakú tényezőnek osztója; ezzel igazoltuk az állítást.

24. Igazoljuk, hogy ha $0<p<q$, valamint q és 10 relatív prímek, akkor $\frac{p}{q}$ felírható tiszta szakaszos végtelen tizedes tört alakban.

Megoldás:

Az előző feladatban igazoltuk, hogy az adott q-hoz van olyan s szám, hogy $q\cdot s=10^k-1$. Bővítsük ezzel az s-sel a törtet és végezzük el a következő átalakítást:

$$\frac{p}{q}=\frac{p\cdot s}{10^k-1}=\frac{ps}{10^k}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^k}}.$$

Az $\frac{1}{1-\frac{1}{10^k}}$ szám az $1+\frac{1}{10^k}+\ldots+\frac{1}{(10^k)^{n-1}}$ sorozat határértéke, a $\frac{p}{q}$ tört tehát a következő alakban adható meg:

$$\frac{p}{q}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ps}{10^k}+\frac{ps}{(10^k)^2}+\ldots+\frac{ps}{(10^k)^n}\right),$$

ami nyilván igazolja az állítást.

25. Bizonyítsuk be, hogy ha $0<p<q$, valamint $(q, 10)>1$, akkor a $\frac{p}{q}$ racionális szám vegyes szakaszos végtelen tizedes törtté alakítható.

Megoldás:

Válasszuk meg az l számot úgy, hogy l prímtényezői közt legfeljebb a 2 és 5 szerepeljen, $q=l\cdot r$ teljesüljön, továbbá r és 10 már relatív prímek legyenek. Ha $r=1$, akkor a $\frac{p}{q}$ alkalmas bővítéssel véges tizedes törtté alakítható. Ha $r>1$, akkor legyen s olyan szám, hogy $l\cdot s=10^k$ teljesüljön és bővítsük a $\frac{p}{q}$ törtet s-sel, majd végezzük el a következő átalakítást:

$$\frac{p}{q}=\frac{p\cdot s}{10^k\cdot r}=\frac{1}{10^k}\left(n+\frac{t}{r}\right),$$

ahol n nemnegatív egész szám és $0<t<r$, $(t, r)=1$.

Ebben az alakban $\frac{t}{r}$ már a 24. gyakorló feladatban megadott módszerrel végtelen tiszta szakaszos tizedes törtté alakítható, ehhez n-et adva, majd az $\frac{1}{10^k}$ számmal szorozva, vegyes szakaszos tizedes törtet kapunk.

Gyakorló feladat

26. Igazoljuk, hogy az $1,\ 1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{1+1},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}},\ \ldots$ sorozat konvergens. Számítsuk ki a határértékét is.

Megoldás:

A sorozat képzési szabályát a következő rekurzív definícióval lehet szabatosan megadni:

$$a_1=1,$$

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}.$$

Írjuk fel először a sorozat első néhány tagját két egész szám hányadosaként:

$$a_1=\frac{1}{1},\quad a_2=\frac{2}{1},\quad a_3=\frac{3}{2},\quad a_4=\frac{5}{3},\quad a_5=\frac{8}{5},\quad a_6=\frac{13}{8}.$$

A kapott törtek azt sejtetik, hogy a fellépő nevezők sorozatára a következő képzési szabály is érvényes:

$$u_1=1,$$
$$u_2=1,$$
$$u_{n+2}=u_n+u_{n+1}.$$

Az u_n sorozat első 7 tagja: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, így az a_n sorozat sejtett képzési szabálya:

$$(49)\qquad a_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Igazoljuk ezt az állítást teljes indukcióval. $n=1$-re igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, azaz (49) fennáll. Az a_n és az u_n sorozat képzési szabálya szerint:

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}=1+\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{u_{n+1}+u_n}{u_{n+1}}=\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}},$$

vagyis az állítást igazoltuk.

Az u_n sorozat igen nevezetes sorozat, az ún. *Fibonacci-féle sorozat*, ennek nagyon sok alkalmazása van. Az általunk vizsgált a_n sorozat tehát a Fibonacci-sorozat két szomszédos tagjának hányadosa.

Igazoljuk most az (a_n) sorozatról, hogy konvergens. Írjuk fel először külön-külön sorba az (a_n) sorozat páratlan, ill. páros indexű tagokból álló részsorozatát és vizsgáljuk ezeket monotonitás szempontjából:

$$(50)\qquad \begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{1} & < & \frac{3}{2} & < & \frac{8}{5} & < & \frac{21}{13} & < & \ldots & < & a_{2n-1} & < & a_{2n+1} & < & \ldots \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & \wedge & & \\
\frac{2}{1} & > & \frac{5}{3} & > & \frac{13}{8} & > & \frac{34}{21} & > & \ldots & > & a_{2n} & > & a_{2n+2} & > & \ldots
\end{array}$$

Itt már egy sejtést is felírhatunk: a páros indexű részsorozat monoton fogyó, a páratlan indexű részsorozat monoton növő és minden páros indexű tag nagyobb, mint bármely páratlan indexű. Igazoljuk ezt a sejtést teljes indukcióval. $n=1$-re az állítás igaz, ezt (50)-ből tudjuk:

$$a_1<a_2,\ a_1<a_3,\ a_2>a_4.$$

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, azaz:

$$(51)\qquad a_{2n-1}<a_{2n},\ a_{2n-1}<a_{2n+1},\ a_{2n}>a_{2n+2}.$$

Igazoljuk, hogy $n+1$-re is fennállnak a megfelelő

$$(52)\qquad a_{2n+1}<a_{2n+2},\ a_{2n+1}<a_{2n+3},\ a_{2n+2}>a_{2n+4}$$

egyenlőtlenségek. Először (52)-ből az első egyenlőtlenséget igazoljuk (a_n) definíciójának felhasználásával:

$$1+\frac{1}{a_{2n}}<1+\frac{1}{a_{2n+1}}$$

$$a_{2n}>a_{2n+1};$$

$$1+\frac{1}{a_{2n-1}}>1+\frac{1}{a_{2n}}$$

$$a_{2n-1}<a_{2n}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség az (51) indukciós feltevés szerint igaz és a lépések megfordíthatók, így (52)-ből az első egyenlőtlenséget igazoltuk. (52) második egyenlőtlenségét hasonló módon írjuk ki:

$$1+\frac{1}{a_{2n}}<1+\frac{1}{a_{2n+2}}$$

$$a_{2n}>a_{2n+2},$$

ez viszont az (51) indukciós feltevés harmadik egyenlőtlensége szerint igaz. Végül (52) harmadik egyenlőtlensége:

$$1+\frac{1}{a_{2n+1}}>1+\frac{1}{a_{2n+3}}$$

$$a_{2n+1}<a_{2n+3}$$

ez pedig az (52) már bizonyított második egyenlőtlensége.

Összegezzük, hogy mi következik az eddig bizonyítottakból! Az (a_n) sorozat (a_{2n-1}) részsorozata monoton növő és felülről korlátos, mert például $a_2=2$ egy felső korlátja, tehát konvergens. Az (a_{2n}) alakú részsorozat monoton fogyó és alulról korlátos, mert például $a_1=1$ egy alsó korlátja, tehát konvergens.

Azt kell még igazolnunk, hogy a két részsorozatnak ugyanaz a határértéke, mert ebből a 24. feladat eredménye alapján következik, hogy az (a_n) sorozat is konvergens.

Vizsgáljuk az a_{2n} és a_{2n-1} különbségét a Fibonacci-sorozattal való kapcsolat alapján:

$$(53)\qquad a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}-\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}=\frac{u_{2n+1}u_{2n-1}-u_{2n}^2}{u_{2n}u_{2n-1}}:$$

Az (53)-ban szereplő utolsó tört számlálóját $n=1$, 2-re kiszámolva azt találjuk, hogy 1-gyel egyenlő. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy

$$(54)\qquad u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$$

(ebből az állítás — n helyett $2n$-et téve — már következik). Az (54) egyenlőség $n=1$-re igaz, mert

$$u_3u_1-u_2^2=1\cdot 2-1^2=1.$$

Tegyük fel, hogy (54) igaz és igazoljuk, hogy n helyett $n+1$-re is igaz. (54) bal oldalán adjunk is hozzá és vonjunk is ki u_nu_{n+1}-et:

$$(55)\qquad u_{n+1}u_{n-1}+u_{n+1}u_n-(u_n^2+u_{n+1}u_n)=(-1)^n.$$

Az (55) egyenlőtlenségben kiemeléssel és az u_n sorozat definíciójának felhasználásával kapjuk:

$$u_{n+1}^2-u_{n+2}u_n=(-1)^n,$$

itt mindkét oldalt -1-gyel szorozva az

$$u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$$

egyenlőséget kapjuk és ezt kellett igazolni.

Eredményünk szerint az (53) egyenlőség így írható:

$$(56)\qquad a_{2n}-a_{2n-1}=\frac{1}{u_{2n}u_{2n-1}}.$$

Az u_n sorozat definíciójából látható, hogy ha $n\geqq 5$, akkor $u_n\geqq n$, tehát $u_n\to+\infty$, így $u_{2n}u_{2n-1}\to+\infty$ és az 59. feladat eredménye szerint $\dfrac{1}{u_{2n}u_{2n-1}}\to 0$. (56)-ból tehát következik, hogy az (a_{2n}) és (a_{2n-1}) sorozatok közös határértékhez tartoznak; jelöljük ezt a-val.

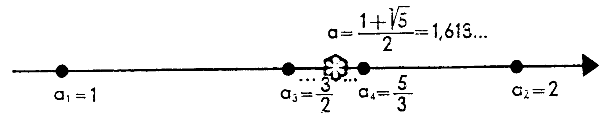
Mint láttuk, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

is fennáll. Már csak a értékét kell meghatároznunk. A rekurziós definiáló egyenletből a-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$a=1+\frac{1}{a}.$$

Ebből, mivel tudjuk, hogy $a>1$ $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ adódik [a 13. ábra szemlélteti az (a_n) sorozatot és a-t].



13. ábra

Az előző gyakorló feladatban tulajdonképpen az

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

végtelen lánctört értékét határoztuk meg.

A *végtelen lánctört* általános fogalmát a következő módon lehet definiálni: legyen q_1 nemnegatív egész szám és q_n ($n>1$-re) pozitív egész. Ekkor a

$$(57)\qquad q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots+\cfrac{1}{q_n+\dots}}}$$

szimbolikus kifejezést végtelen lánctörtnek, a $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ számokat pedig a lánctört jegyeinek nevezzük. Igazolni lehet, hogy az

$$a_n = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}},$$

ún. véges lánctörtekből álló sorozat mindig konvergens. Ennek megfelelően a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ valós számot nevezzük az (57) alatti végtelen lánctört értékének.

Az (a_n) sorozat definíciójából látszik, hogy minden tagja racionális szám. Állítsuk elő a_n-et két relatív prím egész szám hányadosaként:

$$a_n = \frac{P_n}{Q_n}.$$

A $\frac{P_n}{Q_n}$ törteket az (57) alakú végtelen lánctört közelítő törtjeinek nevezzük. A közelítő törtek sorozata — mint a következőkben látni fogjuk — monotonitás szempontjából általában is „úgy viselkedik" mint a 26. gyakorló feladatban vizsgált konkrét lánctört közelítő törtjeiből álló sorozat.

Gyakorló feladatok

27. Igazoljuk teljes indukcióval a következő összefüggéseket:

a) $P_{n+2} = P_{n+1}q_{n+2} + P_n$;

b) $Q_{n+2} = Q_{n+1}q_{n+2} + Q_n$;

c) $P_{n+2}Q_{n+1} - P_{n+1}Q_{n+2} = (-1)^n$.

Megoldás:

Ellenőrizzük, hogy a felírt összefüggések $n=1$-re igazak-e. Írjuk fel az első három közelítő törtet:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1q_2+1}{q_2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} = \frac{q_1q_2q_3 + q_3 + q_1}{q_2q_3+1}.$$

Azt kell ellenőriznünk még, hogy a kapott törtek számlálója és nevezője relatív prím. $(q_1, 1)=1$ nyilván igaz. $(q_1q_2+1, q_2)=(1, q_2)=1$, végül

$$[q_1(q_2q_3+1)+q_3,\ q_2q_3+1] = (q_3,\ q_2q_3+1) = (q_3, 1) = 1.$$

A kapott törtek tehát valóban közelítő törtek és az *a)*, *b)*, valamint *c)* állítások helyessége $n=1$-re egyszerű számolással ellenőrizhető.

Tegyük fel, hogy *a)*, *b)* és *c)* igaz és igazoljuk, hogy a megfelelő összefüggések n helyett $n+1$-et téve is igazak. Figyeljük meg, hogy a $\frac{P_n}{Q_n}$ közelítő törttől a $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ közelítő tört abban különbözik, hogy az első törtben szereplő q_n helyébe itt mindenütt $q_n + \frac{1}{q_{n+1}}$-et írunk.

Az indukciós feltevés szerint a lánctört $(n+2)$-edik közelítő törtje így írható:

$$\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}} = \frac{P_{n+1}q_{n+2}+P_n}{Q_{n+1}q_{n+2}+Q_n}. \tag{58}$$

A közelítő törtek szerkezetéből nyilvánvaló, hogy a P_{n+1}, P_n, ill. Q_{n+1}, Q_n kifejezésekben nem szerepel q_{n+2}, így az előző megjegyzés értelmében az $(n+3)$-adik közelítő törtet (58)-ból így állíthatjuk elő:

$$\frac{P_{n+3}}{Q_{n+3}} = \frac{P_{n+1}\left(q_{n+2} + \frac{1}{q_{+n3}}\right) + P_n}{Q_{n+1}\left(q_{n+2} + \frac{1}{q_{n+3}}\right) + Q_n}. \tag{59}$$

Alakítsuk át az (59) törtet úgy, hogy felhasználjuk közben az indukciós feltevést:

$$\frac{P_{n+3}}{Q_{n+3}} = \frac{P_{n+2}q_{n+3}+P_{n+1}}{Q_{n+2}q_{n+3}+P_{n+1}}. \tag{60}$$

Már csak azt kell igazolnunk, hogy a (60) jobb oldalán a számláló és a nevező relatív prímek. Tegyük fel, hogy ez nem igaz és a (60) jobb oldalán a számlálónak és a nevezőnek van 1-nél nagyobb közös osztója: d. Ekkor d nyilván osztója volna a

(61) $(P_{n+2}q_{n+3}+P_{n+1})Q_{n+2}-(Q_{n+2}q_{n+3}+Q_{n+1})P_{n+2}=$

$=P_{n+1}Q_{n+2}-Q_{n+1}P_{n+2}$

kifejezésnek is. Ez viszont az indukciós feltevés szerint $(-1)^{n+1}$-gyel egyenlő, tehát ellentmondásra jutottunk, ill. a (61) formula a *c)* azonosságot is igazolja.

28. Igazoljuk, hogy az (57) alakú végtelen lánctört páratlan indexű közelítő törtjei monoton növő, páros indexű közelítő törtjei monoton fogyó részsorozatot alkotnak és bármely páros indexű közelítő tört nagyobb, mint bármely páratlan indexű közelítő tört. Ezek felhasználásával mutassuk meg, hogy a lánctört közelítő törtjei konvergens sorozatot alkotnak.

Megoldás:

Először az előző feladatban igazolt *a)*, *b)* és *c)* összefüggések néhány egyszerű következményét írjuk fel. Az *a)* és *b)* összefüggésekből nyilván következik, hogy:

$$P_1<P_2<\ldots<P_n<\ldots$$

és

$$Q_1<Q_2<\ldots<Q_n<\ldots .$$

A *c)* összefüggés alapján rövid számolással adódik még:

(62) $$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}.$$

Írjuk fel a feladat első részének állítását:

$$\begin{array}{ccccccccc}\dfrac{P_1}{Q_1} & < & \dfrac{P_3}{Q_3} & <\ldots< & \dfrac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} & < & \dfrac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} & <\ldots \\ \wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge & \\ \dfrac{P_2}{Q_2} & > & \dfrac{P_4}{Q_4} & >\ldots> & \dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}} & > & \dfrac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} & >\ldots .\end{array}$$

A két szomszédos páratlan indexű közelítő tört különbségét (62) kétszeri alkalmazásával tudjuk megbecsülni:

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}+\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}-\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}=$$

$$=\frac{-1}{Q_{2n+1}Q_{2n}}+\frac{1}{Q_{2n}Q_{2n-1}}>0,$$

mert a Q sorozat szigorúan monoton nő. Hasonlóan becsülhetjük meg két szomszédos páros indexű közelítő tört különbségét:

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}-\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}+\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=$$

$$=\frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}}-\frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}}<0.$$

Egy páros és egy páratlan indexű szomszédos közelítő tört különbsége:

(63) $$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}-\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}=\frac{1}{Q_{2n}Q_{2n-1}}>0.$$

Az eddigiekből következik, hogy a páros indexű közelítő törtek sorozata monoton fogyó és alulról korlátos $\left(\text{egy jó alsó korlát pl. } \frac{P_1}{Q_1}\right)$, tehát konvergens. A páratlan indexű közelítő törtek sorozata monoton növő és felülről korlátos $\left(\text{felső korlátnak jó pl. } \frac{P_2}{Q_2}\right)$, tehát konvergens. Ahhoz, hogy a $\frac{P_n}{Q_n}$ sorozatról igazoljuk hogy konvergens azt kell még bizonyítanunk, hogy két részsorozat különbsége 0-hoz tart. A (63) összefüggésből azonban ez nyilván következik, hiszen a $Q_{2n}Q_{2n-1}$ sorozat $+\infty$-hez, tehát a reciproka 0-hoz tart.

Az *irracionális kitevőjű hatvány* szabatos definícióját is a sorozat határértékének fogalmával lehet megadni. A következő gyakorló feladatok ezt a definíciót készítik elő.

Pozitív valós szám racionális kitevőjű hatványát és a tulajdonságait ismertnek tételezzük fel. Az irracionális kitevőjű hatvány definícióját $a>1$ valós alap esetére fogjuk tárgyalni, ebből az $1>a>0$ esetre a definíciót már könnyű megadni.

Az $a>1$ alap esetén a racionális számokra értelmezett a^r függvény egyik fontos tulajdonsága, hogy szigorúan monoton növő, azaz ha $r_1<r_2$ akkor $a^{r_1}<a^{r_2}$. Felhasználjuk még majd a 17. feladat eredményét, vagyis azt, hogy $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

Gyakorló feladatok

29. Legyen (r_n) egy racionális számokból álló sorozat és tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} r_n=0$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n}=1.$$

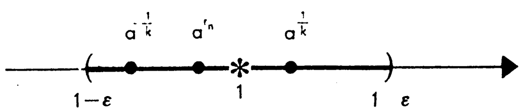
Megoldás:

Megmutatjuk, hogy az (a^{r_n}) sorozatnak az 1 tetszőleges környezetén kívül csak véges sok tagja van. Jelöljük ki az 1 egy tetszőleges környezetét. Válasszuk meg ezután a k természetes számot úgy, hogy $a^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{a}$ és $a^{-\frac{1}{k}}=\frac{1}{\sqrt[k]{a}}$ is már az 1-nek ebbe a környezetébe essen. Ezt megtehetjük, hiszen $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a}=$ $=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{a}}=1$. Ezután az így megválasztott k-hoz keressünk olyan N-et, hogy $n>N$-re

$$(64)\qquad -\frac{1}{k}<r_n<\frac{1}{k}$$

teljesüljön. Ezt az $r_n\to 0$ feltétel miatt szintén megtehetjük. Az a^r függvény monotonitása miatt azonban (64)-ből következik:

$$(65)\qquad a^{-\frac{1}{k}}<a^{r_n}<a^{\frac{1}{k}}$$



14. ábra

A (65) egyenlőtlenség azonban biztosítja, hogy az $n>N$-hez tartozó a^r sorozattagok az 1 kijelölt környezetében vannak (14. ábra).

30. Legyen α egy tetszőleges irracionális szám és (r_n) egy racionális számokból álló, monoton növő sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha$ (például az α számot előállító végtelen tizedes tört véges közelítő törtjeiből álló sorozat jó r_n-nek). Igazoljuk, hogy az (a^{r_n}) sorozat konvergens. A kapott eredmény felhasználásával mutassuk meg, hogy tetszőleges (a_n) racionális számokból álló sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} s_n=\alpha$ igaz, hogy az (a^{s_n}) sorozat konvergens és:

$$\lim_{n\to\infty} a^{s_n}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Megoldás:

Mivel az (r_n) sorozat monoton növő, ezért az (a^{r_n}) sorozat is monoton növő, így a konvergenciájához elég igazolni, hogy felülről korlátos. Legyen q egy olyan racionális szám, aminél az (r_n) sorozat tagjai mind kisebbek (ilyen van, mert r_n konvergens). Ekkor az a^r függvény monotonitása miatt

$$a^{r_n}<a^q$$

minden n-re fennáll. Ezzel igazoltuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ létezik.

Vizsgáljuk most az (a^{s_n}) sorozatot. Azt akarjuk bizonyítani, hogy konvergens és határértéke megegyezik az (a^{r_n}) sorozat határértékével. Ehhez elég megmutatni, hogy a két sorozat hányadosa 1-hez tart. Az előző feladat eredménye miatt azonban

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{r_n}}{a^{s_n}}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n-s_n}=1,$$

hiszen (r_n-s_n) racionális számokból álló, 0-hoz tartó sorozat.

A 30. gyakorló feladatban kapott eredmény alapján egy tetszőleges $a>1$ valós szám tetszőleges α irracionális kitevőjű hatványát a következőképpen definiáljuk: legyen (r_n) egy racionális számokból álló sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha$. Ekkor az (a^{r_n}) sorozat konvergens és

$$a^{\alpha}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

A definíció egyértelmű voltát is a 30. gyakorló feladatban bizonyítottak biztosítják.

Ezzel a definícióval az összes valós számra kiterjesztettük az a^x $(a>1)$ exponenciális függvény értelmezését. Az $1>a>0$ esetre az irracionális kitevőjű hatvány definícióját például így adhatjuk meg. Legyen:

$$a^{\alpha}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\alpha}},$$

hiszen $1>a>0$ esetén $\frac{1}{a}>1$, így ennek irracionális kitevőjű hatványát már értelmeztük. Igazolni lehet, hogy a hatványozás azonosságai továbbra is érvényben maradnak. Ugyancsak fennáll az a fontos tulajdonság, hogy $a>1$ esetén az a^x függvény szigorúan monoton növő, $0<a<1$ esetén pedig szigorúan monoton fogyó.

Az exponenciális függvény inverzeként definiált $\log_a x$ logaritmusfüggvények közül fontos szerepe van az e alapú logaritmusfüggvénynek. Ezt a következőkben $\ln x$-szel jelöljük.

Gyakorló feladatok

31. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n=+\infty$.

Megoldás:

Az $(\ln n)$ sorozat monoton növő, mert ha lenne olyan n, hogy

$$\ln n\geqq \ln(n+1),$$

akkor

$$e^{\ln n}=n\geqq e^{\ln(n+1)}=n+1$$

is fennállna az e^x exponenciális függvény monotonitása miatt, ami ellentmondás. Egy monoton növő sorozatról tudjuk, hogy vagy véges határértéke van, vagy $+\infty$-hez tart (53. feladat). Ha $\ln n\to a$ véges értékhez, akkor a sorozat monoton növése miatt

$$\ln n<a$$

lenne minden n-re, de akkor

$$e^{\ln n}=n<e^{a}$$

is igaz volna minden n-re, ez pedig ellentmondás. Így csak az állhat fenn, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} \ln n=+\infty.$$

32. Az $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ sorozatról (18. feladat) és az $(\ln n)$ sorozatról is tudjuk, hogy $+\infty$-hez tart. Vizsgáljuk meg, mit mondhatunk a két sorozat különbségéről. Igazoljuk:

a) minden $n>1$ egész számra igaz az

$$\frac{1}{n}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n<1$$

egyenlőtlenség;

b) az $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ sorozat monoton fogyó;

c) a *b)* feladatban szereplő sorozat konvergens.

Megoldás:

Az e szám definíciójából és a 31. feladatból következik:

(66) $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e$$

és

(67) $$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

A logaritmus tulajdonságaiból és a (66), (67) egyenlőtlenségből következik:

(68) $$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

A (68) egyenlőtlenséget alakítsuk át erre az alakra:

$$(69)\qquad \frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

Írjuk fel a (69) egyenlőtlenséget $n=1, 2, \ldots, (n-1)$-re:

$$\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<1,$$

$$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4}<\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{n-1}<\ln(n-1)-\ln(n-2)<\frac{1}{n-2},$$

$$\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}.$$

A kapott egyenlőtlenségeket összeadva az

$$(70)\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n,$$

$$(71)\qquad \ln n<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. A (70) egyenlőtlenség mindkét oldalához $(1-\ln n)$-et adva, ill. a (71) mindkét oldalához $\left(\frac{1}{n}-\ln n\right)$-et adva a bizonyítandó *a)* egyenlőtlenséget kapjuk.

A *b)* állítás bizonyításához írjuk fel a sorozat két szomszédos tagjának különbségét:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n-\left[1+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right]=$$

$$=\ln(n+1)-\ln n-\frac{1}{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}.$$

A kapott különbség a (68) egyenlőtlenség miatt pozitív, tehát a sorozat monoton fogy.

A *c)* állítás bizonyítását tulajdonképpen már elvégeztük. Az $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ sorozatról a *b)* szerint tudjuk, hogy monoton fogyó és *c)* szerint alulról korlátos, alsó korlátja például a 0 szám, így tehát konvergens. Jelöljük a sorozat határértékét c-vel:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c.$$

A c számnak, az ún. *Euler-féle állandó*nak ez a definíciója. Értéke öt tizedesjegy pontossággal:

$$c=0{,}57\,722\ldots\,.$$

Érdekes megjegyezni, hogy a c számról nem sikerült mindeddig eldönteni, hogy racionális vagy irracionális szám-e.

Feladatok

61. Írjuk fel a következő racionális számokat a tárgyalt módszerrel végtelen tizedes tört alakban:

a) $\frac{1}{7}$;

b) $\frac{2}{13}$.

62. A $[0, 1]$ intervallumbeli valós számok végtelen tizedes tört előállításának megfelelően beszélhetünk végtelen harmadostört (triadikus tört) előállításáról is. Itt csak a 0, 1, 2 triadikus jegyeket használjuk. Legyen b_n azoknak a $[0, 1]$ intervallumban fekvő részintervallumoknak az összhossza, amelyekbe tartozó valós számok felírhatók olyan triadikus tört alakjában, amelyben a 0 egész után az első n számjegy közt nincs 1. Számítsuk ki b_n-et. Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e és ha igen, mivel egyenlő $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

63. Írjuk fel a következő racionális számokat véges lánctört alakjában:

a) $\frac{8}{9}$;

b) $\frac{13}{5}$;

c) $\frac{8}{21}$.

64 *a)* Írjuk fel az $\frac{56}{44}$ törtet lánctört alakban. Alkalmazzuk az euklideszi algoritmust az 56 és 44 számokra. Hasonlítsuk össze a lánctört jegyeit az euklideszi algoritmus során kapott hányadosokkal!

b) Igazoljuk, hogy a pozitív racionális számok és csak azok írhatók fel véges lánctört alakban. Mit mondhatunk az $\frac{a}{b}$ szám lánctört alakjának jegyeiről?

65. Számítsuk ki a következő végtelen lánctörtek értékét:

a) $$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}};$$

b) $$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\dots}}}}}.$$

66. Igazoljuk, hogy a végtelen periodikus lánctört alakban felírható valós számok másodfokú algebrai számok, azaz egész együtthatós másodfokú polinomok gyökei.

67. Igazoljuk, hogy bármely valós x, y kitevőkre is érvényes marad az $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $(a>0)$ azonosság.

68. Igazoljuk a következőt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1.$$

69. Mutassuk meg, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

70. Igazoljuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

71. Számítsuk ki a következő sorozat határértékét:

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

72. A 32. gyakorló feladat eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right) = \ln 2.$$

73. Az előző feladat eredményének felhasználásával számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$;

b) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$;

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(4k^2-1)}$.

74. Igazoljuk, hogy az

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

sorozat konvergens.

75. Az előző feladatban vizsgált sorozat határértékének meghatározása már jóval összetettebb feladat. A következő feladatsorozat végén jutunk majd el ehhez az eredményhez:

a) Bizonyítsuk be, hogy igazak a következő azonosságok:

$$\sin(2n+1)\alpha = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\alpha \sin\alpha -$$

$$-\binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\alpha \sin^3\alpha + \ldots + (-1)^n \sin^{2n+1}\alpha,$$

$$\cos(2n+1)\alpha = \cos^{2n+1}\alpha - \binom{2n+1}{2}\cos^{2n-1}\alpha \sin^2\alpha + \ldots +$$

$$+(-1)^n\binom{2n+1}{2n}\cos\alpha \sin^{2n}\alpha;$$

b) bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin^{2n+1}\alpha} = \binom{2n+1}{1}\operatorname{ctg}^{2n}\alpha - \binom{2n+1}{3}\operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha +$$

$$+ \ldots + (-1)^n;$$

c) írjunk fel olyan egyenletet, amelynek gyökei a következő számok:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1},\quad \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1},\quad \ldots,\quad \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1};$$

d) hozzuk zárt alakra a következő összegeket:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1},$$

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}};$$

e) igazoljuk, hogy ha $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} > \frac{1}{\alpha^2} > \operatorname{ctg}^2\alpha;$$

f) a *d)* és *e)* feladat alapján adjunk alsó és felső becslést az

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

összegre és számítsuk ki $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$ értékét.

Az I. fejezetben kitűzött feladatok megoldásai

1. A bizonyítandó egyenlőség $n=1$-re igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz és nézzük az első $n+1$ természetes szám négyzetének összegét. Alakítsuk ezt át úgy, hogy közben használjuk fel az indukciós feltevést:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Eredményünk azt mutatja, hogy az állítás $n+1$-re is igaz, ezzel a formulát igazoltuk.

2. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget $n+1$ számra, amelyek közül n $1+\frac{1}{n}$-nel, egy pedig 1-gyel egyenlő:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

ahol a $<$ jelet azért írhattuk, mert a számok nem mind egyenlők. A kapott egyenlőtlenséget $n+1$-edik hatványra emelve a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

3. Az állítás $k=1$-re igaz, mert $1+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$. Tegyük fel, hogy $k<n$ és

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $1+\frac{1}{n}$-nel és alakítsuk át a kapott egyenlőtlenség jobb oldalát.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}<1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}=$$

$$=1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}-\frac{k+1}{n^2}.$$

Ahhoz, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz legyen, elég megmutatni, hogy

$$\frac{k^2}{n^3}-\frac{k+1}{n^2}<0,$$

hiszen, ha az egyenlőség jobb oldalából egy negatív számot elhagyunk, ezzel értékét növeljük. Ezt az egyenlőtlenséget átalakítva ezt kapjuk:

$$k^2<n(k+1),$$

ami a $k<n$ feltétel alapján nyilván igaz.

4. Alkalmazzuk az előző feladatban kapott egyenlőtlenséget $k=n$-re.

5. Emeljük az

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$$

bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalát $n(n+1)$-edik hatványra, majd osszunk végig n^n-nel:

$$n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A kapott egyenlőtlenség $n\geqq 3$-ra az előző feladatból következően igaz és a lépések megfordíthatók, tehát az eredeti egyenlőtlenség is igaz.

6. *a)* A 2. feladat megoldásában alkalmazott módszert követjük:

$$\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $n+1$-edik hatványra emelve a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

b) A bizonyítandó egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk, ha mindkét oldal reciprokát vesszük (ekkor természetesen az egyenlőtlenségjel megfordul):

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget még így is írhatjuk:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2},$$

ami az *a)* feladat eredménye miatt igaz.

7. A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló összeget csökkentjük, ha minden tagja helyett a legkisebbet, az $\frac{1}{2n}$ -et írjuk. Mivel az összeg n tagú, így éppen $\frac{1}{2}$ -et kapunk.

8. „Gyöktelenítsük” az $\sqrt[n]{a}-1$-et úgy, hogy osztunk is és szorzunk is az $\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{a}+1$ kifejezéssel:

$$\sqrt[n]{a}-1=\frac{a-1}{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{a}+1}.$$

A kapott tört nevezőjében az $\sqrt[n]{a^k}$ helyett 1-et írva ($k=n-1, \ldots, 1$) a tört értéke nő, mert $a>1$, így $\sqrt[n]{a^k}>1$ is fennáll. Ezen a módon éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

9. Egyszerű „keresztbeszorzással” kapjuk:

$$n^2-1<n^2,$$

ez nyilván igaz.

10. Az előző feladatban igazolt egyenlőtlenség többszöri alkalmazásával adjunk alsó és felső becslést az

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$$

kifejezésre:

$$\frac{1\cdot2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}<$$
$$<\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

A kapott egyenlőtlenségeket szorozzuk végig a középen álló törttel:

$$\frac{1}{4n}<\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\right)^2<\frac{1}{2n+1}$$

Ez az egyenlőtlenség ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel.

11. Az állítás $n=1$-re igaz. Tegyük fel, hogy

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+$$
$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

fennáll és szorozzuk meg mindkét oldalt $a+b$-vel, majd a kapott jobb oldalon végezzük el a kiemeléseket:

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\left[1+\binom{n}{1}\right]a^nb+\ldots+\left[\binom{n}{k-1}+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{k}\right]a^{n-k}b^{k+1}+\ldots+\left[\binom{n}{n-1}+1\right]ab^n+b^{n+1}.$$

Az $a^{n-k}b^{k+1}$-es tag együtthatóját így alakíthatjuk át:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$
$$=\frac{n!k+n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}.$$

Ha még megállapodunk abban, hogy $0!=1$, akkor ez az összefüggés $k=1$-re és $k=n$-re is igaz és éppen a bizonyítandót kapjuk.

12. Írjuk ki részletesen a binomiális tétel alkalmazásával az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ hatványt és alakítsuk át a kapott kifejezést! Felhasználva a binomiális együtthatónak ezt az alakját:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+$$

$$+\dots+\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\,\frac{n-1}{n}+\dots+$$

$$+\frac{1}{k!}\,\frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}}+\dots+\frac{1}{n!}\,\frac{n!}{n^n}.$$

A kapott kifejezésben a harmadik tagtól kezdve minden tagban a második tényező egy 1-nél kisebb szám, hiszen a törtek számlálója kisebb, mint a nevezője. Így, ha a második tényezők helyett sorra 1-et írunk, akkor a kifejezést növeljük és így éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

13. Igazoljuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}=\frac{1}{2},$$

a konvergencia definíciója alapján. Adjunk meg egy $\varepsilon>0$-t és becsüljük meg a sorozat n-edik tagjának a határértéktől vali eltérését

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n^2+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

ha $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

14. Alakítsuk át a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ kifejezést úgy, hogy szorzunk is és osztunk is $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$-nel, majd becsüljük felülről a kapott törtet:

$$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

A vizsgált $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ sorozatot két sorozat közé szorítottuk. A konstans 0 sorozat határértéke is 0 (l. 8. gyakorló feladat), az $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sorozat határértéke is nyilván 0, hiszen:

$$\left|0-\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon,$$

ha $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$, így a 10. gyakorló feladat eredménye szerint:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

15. A 10. feladat szerint:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Mind az $\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$, mind pedig az $\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ sorozat konvergens és határértéke 0, így a 10. gyakorlatbeli „rendőrszabály" szerint:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}=0.$$

16. Becsüljük meg a sorozat n-edik tagját úgy, hogy alkalmazzuk közben a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget: ha $n>1$, akkor

$$1>\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}.$$

A kapott becslésből a „rendőrszabály" alkalmazásával adódik:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1.$$

17. *a)* Ha $c=0$, akkor az állítás nyilván igaz. Ha $c\neq 0$, akkor becsüljük meg ca_n és ca eltérését:

$$|ca_n-ca|=|c||a_n-a|<\varepsilon,$$

ha az

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{|c|}$$

egyenlőtlenség fennáll. Az utóbbi, alkalmas N-nél nagyobb n-ekre nyilván igaz az $a_n\to a$ feltétel miatt. Eredményünk éppen azt mutatja, hogy $ca_n\to ca$ is igaz.

b) Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges adott szám. Az

$$|a_n+c-(a+c)|=|a_n-a|<\varepsilon$$

egyenlőtlenség $n>N$-ekre igaz, ahol N az $a_n\to a$ feltétel miatt az ε-hoz jó küszöbindex.

18. A 8. feladat alapján, ha $a>1$, akkor

$$0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n},$$

ahonnan

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\frac{a-1}{n}.$$

Mindkét oldalon 1-hez tartó sorozat van, tehát:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

19. Becsüljük meg alulról a 7. feladat eredményének felhasználásával az a_{2^k} alakú tagokat, ahol $k>1$:

$$a_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=$$

$$=1+\frac{k}{2}.$$

Ha most P tetszőleges valós szám, akkor válasszuk meg k-t úgy, hogy

$$1+\frac{k}{2}>P$$

teljesüljön. Az előző becslésből következik, hogy ha $n>2^k$, akkor

$$a_n>a_{2^k}>1+\frac{k}{2}>P,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

teljesül.

20. Ha $q>1$, akkor q előállítható így:

$$q=1+h,\quad \text{ahol}\quad h>0.$$

Alkalmazzuk q^n becslésére a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$q^n=(1+h)^n>1+nh.$$

Legyen P tetszőleges valós szám és tegyük fel, hogy $n>\frac{P-1}{h}$. Ekkor az előző egyenlőtlenség alapján

$$q^n>1+nh>P$$

fennáll, ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=+\infty$.

21. Azt kell igazolnunk, hogy $|q|<1$ esetén tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan N, hogy ha $n>N$, akkor

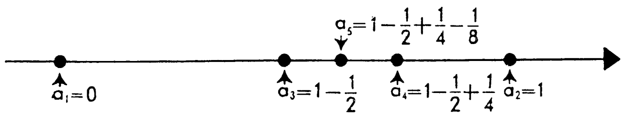
$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon.$$

Ha $q=0$, akkor az állítás nyilván igaz. A $q\neq 0$ esetben ez az egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\left|\frac{1}{q}\right|^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

egyenlőtlenséggel, ami az előző feladat eredménye és e feladat feltételei szerint fennáll ha $n>N$ alkalmas szám, hiszen $\left|\frac{1}{q}\right|>1$.

22. Írjuk fel a sorozat első néhány tagját egy átalakítás alkalmazásával és szemléltessük is ezeket a tagokat (15. ábra):



15. ábra

$$a_1=0,\quad a_2=1,$$

$$a_3=\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\,,$$

$$a_4=\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{1+1-\frac{1}{2}}{2}=1-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,,$$

$$a_5=\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\,.$$

Az eddigiek alapján az a sejtés alakulhat ki, hogy a következő összefüggés áll fenn:

$$a_{n+2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^n}\,.$$

Az összefüggés $n=1$-re, 2-re igaz. Tegyük fel, hogy $n-2$-re és $n-1$-re igaz és igazoljuk n-re:

$$a_{n+2}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}+1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}}{2}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{2^n}\,.$$

A mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képletet alkalmazva:

$$a_{n+2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Mivel $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$, a kapott alakból a 21. feladat alapján adódik:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3}\,.$$

23. A vizsgált sorozat n-edik tagja, $1+q+q^2+\ldots+q^n$ egy q hányadosú mértani sorozat első $n+1$ tagjának összege. Az összegképletet alkalmazva és felhasználva, hogy $|q|<1$, ezt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\ldots+q^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}\cdot q^{n+1}\right)=\frac{1}{1-q}\,.$$

24. Azt kell megmutatnunk, hogy az „összefésüléssel” kapott

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$$

sorozatnak az a szám tetszőleges környezetén kívül csak véges sok tagja van. Vegyük az a tetszőleges környezetét. Ezen kívül

(a_n)-nek is és (b_n)-nek is csak véges sok tagja van, így nyilván az összetett sorozatból is csak véges sok tag van az adott környezeten kívül.

25. Számítsuk ki először az n-edik lépésben elvégzett színezés után fehéren maradó rész területét. Az első lépésben az egységnyi terület $\frac{1}{9}$-ed részét színeztük be, tehát a fehéren maradó rész területe $\frac{8}{9}$. A második lépésben ismét a még fehér rész $\frac{1}{9}$-ét színeztük be, tehát a fehéren maradó rész ennek a $\frac{8}{9}$ része, tehát $\left(\frac{8}{9}\right)^2$. A gondolatmenetet így folytatva azt kapjuk, hogy az n-edik lépés után fehéren maradó rész területe $\left(\frac{8}{9}\right)^n$, és így az n-edik lépésben beszínezett rész területe:

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

Mint láttuk, $s_n=\left(\frac{8}{9}\right)^n$ és így $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=0$, hiszen $\left|\frac{8}{9}\right|<1$.

26. A 10. ábrán (1. a feladat kitűzését) legyen a kör középpontja O. Vizsgáljuk az OP_1P_2, OP_2P_3, $\ldots$, OP_nP_{n+1} háromszögeket. Ezek a háromszögek nyilván hasonlók, hiszen derékszögűek és az O csúcsnál levő szögük ugyanakkora, méghozzá $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$, tehát mindegyik derékszögű, egyenlőszárú háromszög. Ezek az egyenlőszárú derékszögű háromszögek olyan kapcsolatban vannak egymással, hogy minden k-ra az OP_kP_{k+1} háromszög befogója az $OP_{k+1}P_{k+2}$ átfogója ebből következik, hogy minden k-ra ennek a két háromszögnek a hasonlósági arányszáma ugyanaz, méghozzá OP_k és OP_{k+1} aránya $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (az egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójának $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szerese a befogója).

Mivel OP_1 hossza 1, ezért:

$$P_1P_2=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad P_2P_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,\quad \ldots,\quad P_nP_{n+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Az s_n értékét az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hányadosú mértani sorozat első n tagjának összegeként számítjuk ki:

$$s_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Az (s_n) határértékét már egyszerű kiszámítani:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

27. Becsüljük meg az (a_nb_n) sorozatnak és ab-nek az eltérését a következő azonosság felhasználásával:

$$a_nb_n-ab=(a_n-a)(b_n-b)+b(a_n-a)+a(b_n-b)$$

(az azonosságot egyszerűen úgy igazolhatjuk, hogy a jobb oldalon elvégezzük a beszorzást). Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon>0$ számot és keressünk ehhez olyan N-et, hogy $n>N$-re a_nb_n és ab eltérése ε-nál kisebb legyen:

$$|a_nb_n-ab|\leq|a_n-a|\,|b_n-b|+|b|\,|a_n-a|+|a|\,|b_n-b|\leq\varepsilon.$$

Mivel $a_n\to a$ és $b_n\to b$ fennáll, tetszőleges $1>\eta>0$ számot adunk meg, ehhez van olyan N index, hogy $n>N$-re

$$|a_n-a|<\eta$$

és

$$|b_n-b|<\eta$$

is teljesül. Ekkor az előző egyenlőtlenségek alapján:

$$|a_nb_n-ab|<\eta^2+|b|\eta+|a|\eta=$$

$$=\eta(\eta+|a|+|b|)<\eta(1+|a|+|b|).$$

Ha most az η-t az előre adott ε-hoz még úgy is választjuk, hogy

$$\eta<\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}$$

teljesüljön, akkor $|a_nb_n-ab|<\varepsilon$ is fennáll minden $n>N$-re. Ez éppen azt igazolja, hogy:

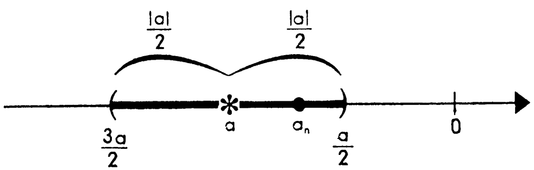
$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=ab.$$

28. A feltétel szerint $a_n\to a$ és $a\neq 0$. Jelöljük ki a-nak egy olyan környezetét, amelyben már nincs benne a 0 szám. Az (a_n) sorozatnak a kijelölt környezeten kívül csak véges sok tagja van, tehát van olyan N, hogy $n>N$ esetén a_n benne van ebben a környezetben, azaz $a_n\neq 0$.

29. Az $\frac{1}{a_n}$ és $\frac{1}{a}$ eltérését kell becsülnünk. Ehhez használjuk fel azt, hogy mivel $a_n\to a$ és $a_n\neq 0$, ezért, ha az a szám $\frac{|a|}{2}$ sugarú környezetét jelöljük ki, akkor az a_n alkalmas, N_1-nél nagyobb n-ekre ebbe a környezetbe tartozik, tehát fennáll az

$$|a_n|>\frac{|a|}{2}$$

egyenlőtlenség (16. ábra).



16. ábra

Adjunk meg most egy tetszőleges $\varepsilon>0$-t és becsüljük $n>N_1$-re $\frac{1}{a_n}$ és $\frac{1}{a}$ eltérését az előző egyenlőtlenség alkalmazásával:

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{a_n-a}{a\cdot a_n}\right|=\frac{|a_n-a|}{|a||a_n|}<|a_n-a|\frac{2}{|a|^2}<\varepsilon$$

ha fennáll, hogy

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon|a|^2}{2}.$$

Ez utóbbi $a_n\to a$ miatt alkalmas N_2-nél nagyobb n-ekre fennáll. Ha N-et az N_1 és N_2 közül a nagyobbiknak választjuk, akkor $n>N$ esetén fennáll:

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon.$$

Az $a_n\neq 0$ feltétel nem elég, mert például az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatra ez teljesül, de $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

30. Két esetet különböztetünk meg. Legyen először $a=0$. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$$

is igaz. Mivel $a_n\to 0$, tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz n-et egy alkalmas N számnál nagyobbra választva $a_n<\varepsilon^2$ teljesül, ekkor viszont

$$|\sqrt{a_n}-0|=\sqrt{a_n}<\varepsilon$$

is fennáll, tehát valóban $\sqrt{a_n}\to 0$.

Ha $a>0$, akkor ismét legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges adott szám:

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}<\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon,$$

ha teljesül, hogy

$$|a_n-a|<\varepsilon\sqrt{a}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség viszont $a_n\to a$ miatt fennáll, ha $n>N$, ahol N egy megfelelően választott szám. Ezzel erre az esetre is megmutattuk, hogy $\sqrt{a_n}\to\sqrt{a}$.

Hasonló módon igazolható, hogy ha $a_n \to a$, $a_n \geqq 0$, akkor tetszőleges k természetes számra $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.

31. A 6.*b)* feladat szerint az $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$ sorozat szigorúan monoton fogyó. Ugyanakkor alulról korlátos is a sorozat, mert

$$1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

nyilván fennáll.

Szemléltessük az $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$ sorozat és az $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$ sorozat tagjainak egymáshoz való viszonyát:

$$\begin{array}{ccccccccc}(1+1)^2 & > & \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 & > & \left(1+\frac{1}{3}\right)^4 & > \ldots > & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} & > \ldots \\ \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ (1+1)^1 & < & \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 & < & \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 & < \ldots < & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} & < \ldots .\end{array}$$

A határértéket egyszerűen kiszámíthatjuk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.$$

32. *a)* Használjuk fel a következő azonosságot:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

ahonnan $n>1$-re

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Mivel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e>0$ és $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$ (16. feladat),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

Érdemes még megjegyezni, hogy a 6. *a)* feladat szerint az $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton növekedve tart $\frac{1}{e}$-hez.

b) Először az $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ sorozatnál alkalmazott módszerrel (l. 2. feladat) megmutatjuk, hogy az $\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]$ sorozat is szigorúan monoton növő. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\cdot 1}<\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)+1}{n+1}=1+\frac{2}{n+1}.$$

Ezt $(n+1)$-edik hatványra emelve

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n<\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}$$

következik. Vizsgáljuk a páros indexű tagokból álló részsorozat határértékét:

$$\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2\to e^2.$$

Mivel a sorozat monoton növő, kell hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$$

is teljesüljön.

c) Az $a_n=\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$ sorozat helyett először az $a_n^3=\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{3n}$

sorozatot vizsgáljuk. Mivel ez az $\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]$ konvergens sorozat egy részsorozata, így ez is konvergens és határértéke az $\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]$ sorozat határértékével egyenlő:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^3=\frac{1}{e}.$$

Az $a_n^3>0$ egyenlőtlenség nyilván fennáll, így a 30. feladat megoldásának végén mondottak alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n^3}=\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt[3]{\frac{1}{e}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

d) Ha $k=0$, akkor:

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=1,$$

így a sorozat konvergens és határértéke 1.

A $k\neq 0$ esetre a *b)* feladatban alkalmazott módszerrel igazolható, hogy $k>0$ esetén $n=1$-től, $k<0$ esetén, amikor

$$1+\frac{k}{n}\geqq 0$$

teljesül (azaz $-k\leqq n$), a sorozat szigorúan monoton növő. Ha $k>0$, vizsgáljuk a kn alakú indexekhez tartozó részsorozatot:

$$\left(1+\frac{k}{kn}\right)^{kn}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k\to e^k,$$

tehát az egész sorozat is e^k-hoz tart. Ha $k<0$, akkor a $-kn$ alakú indexekhez tartozó részsorozatot nézzük:

$$\left(1-\frac{k}{kn}\right)^{kn}=\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-k}\to\left(\frac{1}{e}\right)^{-k}=e^k.$$

Így ebben az esetben is igaz, hogy a sorozat e^k-hoz tart. Az eredmény nyilván $k=0$-ra is igaz, tehát tetszőleges k egész számra:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k.$$

e) Ha $k>0$, akkor az $a_n=\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n$ jelöléssel:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn}=e,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n^k}=\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt[k]{e}=e^{\frac{1}{k}}.$$

Ha $k<0$, akkor is hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{kn}\right)^n=e^{\frac{1}{k}}.$$

f) Az eddigiek alapján, azt sejtjük, hogy a sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n=e^r.$$

Valóban, legyen $r=\frac{p}{q}$, ahol $q>0$. Ekkor a *d)* feladat szerint:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{qn}\right)^{qn}=e^p,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{qn}\right)^n=\sqrt[q]{e^p}=e^{\frac{p}{q}}.$$

33. Jelöljük az $a_1, \ldots, a_k$ számok közül a legnagyobbat A-val. Becsüljük a sorozatot alulról és felülről is:

$$A\leqq\sqrt[n]{a_1^n+\ldots+a_k^n}\leqq A\sqrt[n]{k}.$$

Mivel rögzített k-ra az $\sqrt[n]{k}$ sorozat 1-hez tart, ezért mindkét oldalon A-hoz tartó sorozattal becsültünk, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n \ldots + a_k^n} = A,$$

ahol A az $a_1, \ldots, a_k$ számok közül a legnagyobb.

34. *a)* Az 1. feladat eredménye alapján a sorozatot így írhatjuk:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Az átalakítás után kapott alakból leolvasható:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

b) Az 1. gyakorló feladat eredményét felhasználva alakítsuk át a sorozatot:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

c) Először hozzuk zárt alakra az első n páratlan szám négyzetének összegét:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+$$

$$+(2n-1)^2+(2n)^2-(2^2+4^2+\ldots+(2n)^2) =$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4(1^2+2^2+\ldots+n^2) =$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

A kapott eredmény felhasználásával már könnyen kiszámíthatjuk a sorozat határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{4}{3}.$$

d) Írjuk ki részletesen a sorozat n-edik tagját, majd hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) =$$

$$= \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 +$$

$$+ \sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} +$$

$$+ \sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3} +$$

$$+ \sqrt{6} - 2\sqrt{5} + \sqrt{4} +$$

$$\vdots$$

$$+ \sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2} +$$

$$+ \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} +$$

$$+ \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} =$$

$$= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

a 14. feladat szerint:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

e) Itt is először alakítsuk át a sorozat n-edik tagját annak az ötletnek a felhasználásával, hogy

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-$$

$$-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

f) Az előző *e)* feladatban alkalmazott átalakításhoz hasonló ötlettel alakítsuk át a sorozat n-edik tagját:

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1.$$

35.*a)* A bizonyítandó egyenlőtlenség $n=1$-re igaz:

$$\frac{1}{k+1}<1^k=1<\frac{1}{k+1}\cdot 2^{k+1}.$$

Tegyük fel, hogy

$$\frac{1}{k+1}n^{k+1}<1^k+2^k+\ldots+n^k<\frac{1}{k+1}(n+1)^{k+1}$$

igaz és adjunk hozzá mindegyik oldalhoz $(n+1)^k$-t:

$$\frac{1}{k+1}n^{k+1}+(n+1)^k<1^k+2^k+\ldots+n^k+(n+1)^k<$$

$$<\frac{1}{k+1}(n+1)^{k+1}+(n+1)^k.$$

Ahhoz, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz voltát $n+1$-re is megmutassuk, az egyenlőtlenség tranzitivitását felhasználva azt kell igazolni, hogy az

$$\frac{1}{k+1}(n+1)^{k+1}<\frac{1}{k+1}n^{k+1}+(n+1)^k$$

és az

$$\frac{1}{k+1}(n+1)^{k+1}+(n+1)^k<\frac{1}{k+1}(n+2)^{k+1}$$

egyenlőtlenségek fennállnak. Az elsőt szorozzuk $k+1$-gyel;

$$(n+1)^{k+1}<n^{k+1}+(n+1)^{k+1}+k(n+1)^{k+1},$$

ami nyilván igaz. A másodikat is szorozzuk $k+1$-gyel és a kapott jobb oldalon alkalmazzuk a binomiális tételt:

$$(n+1)^{k+1}+(k+1)(n+1)^k<(n+1)^{k+1}+\binom{k+1}{1}(n+1)^k+$$
$$+\ldots+1,$$

ez is nyilván igaz.

b) Az *a)* feladatban bizonyított egyenlőtlenséget alkalmazva a sorozat n-edik tagját így becsülhetjük:

$$\frac{1}{k+1}<\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}<\frac{1}{k+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}.$$

Ebből a „rendőrszabály” alkalmazásával adódik:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

36. A k rögzített természetes számhoz válasszuk n-et úgy, hogy $k<n$ teljesüljön. Használjuk fel a 12. feladat megoldásában alkalmazott átalakítást:

$$e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\,\frac{n(n-1)}{n^2}+$$

$$+\frac{1}{3!}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots+\frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n^n}>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán olyan sorozat van, amelynek minden $n>k$ indexű tagja e-nél kisebb. Ekkor nyilván a sorozat határértéke $n\to\infty$ esetén is kisebb, mint e vagy egyenlő vele:

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]=$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}\leqq e.$$

A feladat eredményét így is fogalmazhatjuk: az $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ sorozatnak e egy felső korlátja.

37. Az előző és a 12. feladat alapján igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqq e,$$

ebből viszont $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ miatt következik, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

38. Tegyük fel, hogy $e=\frac{p}{q}$. Mivel $2<e<3$, e biztosan nem egész szám, így $q\geqq 2$. Válasszuk n-et úgy, hogy $n>q$ teljesüljön. A feltétel szerint:

$$e=\frac{p}{q}=\frac{(q-1)!p}{q!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{q!(q+1)}+\ldots+\frac{1}{q!(q+1)\ldots n}\right).$$

A konvergens sorozatokkal végezhető műveleteket felhasználva fennáll a következő összefüggés is:

$$(q-1)!p=q!\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{q!(q+1)}+\ldots+\frac{1}{q!(q+1)\ldots n}\right)=$$

$$=q!+q!+\ldots+1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots+\frac{1}{(q+1)\ldots n}\right).$$

Innen

$$(q-1)!p-(q!+q!+\ldots+1)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots+\frac{1}{(q+1)\ldots n}\right)$$

következik. Ebben az egyenlőségben a bal oldalon egész szám áll. Vizsgáljuk a jobb oldalt:

$$0<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots+\frac{1}{(q+1)\ldots n}<$$

$$<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(q+1)^n}.$$

Mivel a felső becslésként kapott sorozat monoton növő, így minden tag kisebb, mint a határérték, ez pedig:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(q+1)^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{q+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{1}{q}\leq\frac{1}{2}.$$

Mindezekből a $(q-1)!\,p-(q!+q!+\ldots+1)$ egész számra a következő becslést kapjuk:

$$0<(q-1)!p-(q!+q!+\ldots+1)<\frac{1}{2},$$

ez pedig nyilván lehetetlen. Így ellentmondásba kerültünk azzal a feltétellel, hogy e racionális szám; e tehát csak irracionális szám lehet.

39. *a)* Legyen $n_0>a$ rögzített, természetes szám és az $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$ sorozat n_0-nál nagyobb indexű tagjait becsüljük felülről:

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{a^{n-n_0}}{(n_0+1)\ldots n}<$$

$$<\frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot\frac{a^{n-n_0}}{n_0^{n-n_0}}=\frac{n_0^{n_0}}{n_0!}\cdot\left(\frac{a}{n_0}\right)^n.$$

Mivel $1<a<n_0$, $0<\frac{a}{n_0}<1$, az $\left(\frac{a}{n_0}\right)^n$ sorozat és ennek konstansszorosa is 0-hoz tart, tehát a „rendőrszabály" alkalmazásával:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

b) Igazoljuk először azt, hogy az n szerinti $\left(\frac{n^k}{a^n}\right)$ $(a>1)$ sorozat elég nagy indextől kezdve szigorúan monoton fogyó: ha

$$\frac{n^k}{a^n}>\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}},$$

akkor

$$a>\left(1+\frac{1}{n}\right)^k,$$

és ebből

$$\frac{1}{\sqrt[k]{a}-1}<n.$$

A szigorú monoton fogyás tehát az $\frac{1}{\sqrt[k]{a}-1}$-nél nagyobb indexű tagoktól kezdve fennáll. Mivel a sorozat tagjai pozitívak, ezért a sorozat konvergens; jelöljük a határértékét x-szel. Az x értékének meghatározásához használjuk fel azt, hogy a páros indexű tagok részsorozata is x-hez tart:

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^k}{a^{2n}}=\lim_{n\to\infty}2^k\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^n\cdot\frac{n^k}{a^n}=$$

$$=2^k\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,$$

mivel $a>1$ miatt $0<\frac{1}{a}<1$, és az $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)$ sorozat 0-hoz tart.

c) Az $\left(\frac{n^k}{n!}\right)$ sorozatot tetszőleges $a>1$ segítségével így állíthatjuk elő:

$$\frac{n^k}{n!}=\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{n^k}{a^n}.$$

Mivel két, 0-hoz tartó sorozat szorzata is 0-hoz tart, ezért:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n!}=0.$$

d) Az $a_n=\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ sorozatról először mutassuk meg, hogy monoton fogyó:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1,$$

tehát $a_n>a_{n+1}$. A határértéket, ami létezik, mert a sorozat monoton fogyó és alulról korlátos (a tagok pozitívak), jelöljük h-val. A h értékét már könnyű kiszámítani:

$$h=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}h\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=h\cdot\frac{1}{e},$$

ahonnan $h=0$ következik, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

Feladatunk eredményét a következő formában is meg szokták fogalmazni: az (a^n) $(a>1)$ sorozat lassabban tart $+\infty$-hez, mint az $(n!)$ sorozat, és gyorsabban tart $+\infty$-hez, mint az (n^k) sorozat, az (n^n) sorozat pedig $(n!)$-nál is gyorsabban tart $+\infty$-hez.

40. *a)* A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva, becsüljük a_{n+1}-et, ha $n\geq 1$:

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a}.$$

b) Az *a)* feladat eredményét alkalmazva:

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{a_n^2-a}{a_n}\geq 0,$$

ha $n\geq 2$.

c) Az (a_n) sorozat *b)* szerint monoton fogyó, *a)* szerint alulról korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$\lim_{n\to\infty}a_n=x.$$

A sorozatot definiáló rekurziós egyenlet mindkét oldalának határértékét véve azt kapjuk, hogy x a következő egyenletnek tesz eleget:

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right),$$

ahonnan $x\geq\sqrt{a}$ miatt $x=\sqrt{a}$ adódik.

d) Mindkét azonosságot egyszerű számolással megkaphatjuk. Például az elsőt így igazolhatjuk:

$$a_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)-\sqrt{a}=$$

$$=\frac{a_n^2-2a_n\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2}{2a_n}=\frac{(a_n-\sqrt{a})^2}{2a_n}.$$

e) A *d)*-ben bizonyított azonosságok alapján a következő egyenlőségeket írhatjuk fel:

$$\frac{a_n-\sqrt{a}}{a_n+\sqrt{a}}=\left(\frac{a_{n-1}-\sqrt{a}}{a_{n+1}+\sqrt{a}}\right)^2=\left(\frac{a_{n-2}-\sqrt{a}}{a_{n+2}+\sqrt{a}}\right)^{2^2}=\ldots=$$

$$=\left(\frac{a_1-\sqrt{a}}{a_1+\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

Ebből $a_n-\sqrt{a}$-ra a sorozat monoton fogyó voltát felhasználva a következő becslés adható:

$$0<a_n-\sqrt{a}=\left(\frac{a_1-\sqrt{a}}{a_1+\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}(a_n+\sqrt{a})<$$

$$<\left(\frac{a_1-\sqrt{a}}{a_1+\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}(a_2+\sqrt{a}).$$

f) Az *e)* feladatban kapott felső becslést vizsgáljuk $a_1=3$, $a=5$ esetre és keressünk olyan n-et, amire ez az érték 10^{-10}-nél már biztosan kisebb. Ahhoz, hogy könnyebben számolhassunk, írjunk $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ helyett $\frac{1}{5}$-öt és $a_2+\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(3+\frac{5}{3}\right)+\sqrt{5}=\frac{7}{3}+\sqrt{5}$ helyett 5-öt. Ezzel nyilván növeljük a felső becslést:

$$0<a_n-\sqrt{5}<\left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}}\cdot 5<\frac{1}{10^{10}}\,.$$

Az utolsó egyenlőtlenség $n=5$-re már igaz, mert $2^{5-1}=16$

$$\frac{1}{5^{15}}<\frac{1}{10^{10}},$$

$$10^{10}<5^{15},$$

$$2^{10}<5^5,$$

$$4^5<5^5$$

ekvivalens átalakítások, az utolsó egyenlőtlenség pedig nyilván fennáll. Így azt kaptuk, hogy a_5 már 10^{-10}-nél kisebb hibával, tehát tizedes tört alakban legalább 10 tizedesjegy pontossággal adja meg $\sqrt{5}$ értékét. Ez is azt mutatja, hogy a vizsgált sorozat „jó" abból a szempontból, hogy elég „gyorsan" konvergál a határértékhez.

41. *a)* Az előző feladat *a)* részéhez hasonlóan alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$a_{n+1}=\frac{a_n+a_n+\frac{a}{a_n^2}}{3}\geqq\sqrt[3]{a_n^2\cdot\frac{a}{a_n^2}}=\sqrt[3]{a},$$

ha $n\geqq 1$.

b) Itt is az előző *b)* feladat mintájára okoskodhatunk:

$$a_n-a_{n+1}=\frac{a_n-\frac{a}{a_n^2}}{3}=\frac{a_n^3-a}{3a_n^2}\geqq 0$$

az *a)* részben kapott eredmény miatt, ha $n\geqq 2$.

c) Az *a)* és *b)* feladat szerint a sorozat monoton fogyó, alulról korlátos, tehát konvergens. A rekurziós egyenlet mindkét oldalának határértékét véve, az x határértékre a következő egyenletet kapjuk:

$$x=\frac{1}{3}\left(2x+\frac{a}{x^2}\right),$$

innen pedig $x=\sqrt[3]{a}$ adódik.

d) Azt az esetet nézzük, amikor $a>1$ (az $1>a>0$ eset erre visszavezethető). Az

$$a_{n+1}-\sqrt[3]{a}=\frac{(a_n-\sqrt[3]{a})^2(2a_n+\sqrt[3]{a})}{3a_n^2}$$

azonosságot a jobb oldalon kijelölt műveletek elvégzésével könynyen igazolhatjuk. Ezt felhasználva becsüljük az $a_n-\sqrt[3]{a}$ eltérést, használjuk fel közben, hogy ha $n>1$, akkor $a_n>\sqrt[3]{a}>1$:

$$0<a_n-\sqrt[3]{a}<\frac{(a_{n-1}-\sqrt[3]{a})^2}{a_{n-1}}<(a_{n-1}-\sqrt[3]{a})^2.$$

A kapott becslést ismételten alkalmazva ezt kapjuk:

$$0<(a_n-\sqrt[3]{a})<(a_2-\sqrt[3]{a})^{2^{n-2}}.$$

42. A feladat a 18. gyakorló feladat általánosítása; az ott alkalmazott módszer célhoz vezet itt is. Mutassuk meg először teljes indukcióval, hogy a sorozat monoton növő.

$$a_1=\sqrt{a}<a_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$$

nyilván igaz. Mutassuk meg, hogy az $a_n<a_{n+1}$ feltevésből következik az $a_{n+1}<a_{n+2}$ egyenlőtlenség:

$$a_n<a_{n+1}$$

$$a+a_n<a+a_{n+1},$$

$$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}<\sqrt{a+a_{n+1}}=a_{n+2}.$$

Még azt kell igazolnunk, hogy a sorozat felülről korlátos. Igazoljuk ezt is teljes indukcióval. Ekkor olyan K számot kell keresni, amire $a_n\leqq K$-ból $a_{n+1}\leqq K$ következik. Ehhez — az

$$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}\leqq\sqrt{a+K}$$

egyenlőtlenség alapján — elég, ha

$$\sqrt{K+a}\leqq K$$

fennáll. Ez a feltétel

$$K+a\leqq K^2,$$

$$a\leqq K^2-K$$

alakban írható és ha $K=1+a$, akkor ez a választás megfelelő lesz.

Mivel a sorozat monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens. Az x határérték a következő egyenletnek tesz eleget:

$$x=\sqrt{a+x},$$

$$x^2-x-a=0,$$

ahonnan $x>0$ miatt

$$x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}.$$

43. Az előző feladatban alkalmazott módszerrel itt is célhoz érhetünk. Legyen $a>1$. A sorozat monoton növő, mert

$$a_1=\sqrt{a}<\sqrt{a\sqrt{a}}=a_2$$

nyilván igaz és ha

$$a_n<a_{n+1},$$

akkor

$$a_{n+1}=\sqrt{aa_n}<\sqrt{aa_{n+1}}=a_{n+2}.$$

Szintén teljes indukcióval igazolható, hogy a a sorozat egy felső korlátja; a sorozat határértéke pedig az $x=\sqrt{ax}$ egyenletből $x=a$.

44. *a)* A sorozat monoton növő, ezt teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk:

$$a_1=\frac{1}{2}<a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}.$$

Tegyük fel, hogy

$$a_n<a_{n+1},$$

akkor

$$a_n^2<a_{n+1}^2,$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{a_n^2}{2}<\frac{1}{2}+\frac{a_{n+1}^2}{2}=a_{n+2}.$$

A sorozat felső korlátjának az 1 jó lesz, mert egyrészt

$$a_1=\frac{1}{2}<1$$

másrészt ha $a_n<1$ igaz, akkor

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{a_n^2}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

is fennáll. Az a határérték az

$$a=\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}$$

egyenlet gyöke: $a=1$.

b) A sorozat monoton fogyó, mert

$$a_n>\frac{a_n}{2+a_n},$$

$$2a_n+a_n^2>a_n,$$

$$a_n^2+a_n>0$$

fennáll minden n-re és mivel $a_n>0$ minden n-re, a sorozat konvergens is. Az x határérték az

$$x=\frac{x}{2+x}$$

egyenlet nemnegatív gyöke: $x=0$.

45. *a)* A sorozat definíciója szerint a_{n+1}, ill. b_{n+1} az a_n és b_n számok számtani, ill. harmonikus közepe, így a 4. és 5. gyakorló feladat eredménye alapján $a_{n+1}\geqq b_{n+1}$ minden n-re: $a_1>b_1$ pedig a definícióból közvetlenül adódik. A számtani közép, ill. a harmonikus közép definíciójából következik, hogy értéke a két szám közül a kisebbnél nagyobb, a nagyobbnál kisebb. Ezek alapján a

$$b_n\leqq b_{n+1}\leqq a_{n+1}\leqq a_n$$

egyenlőtlenségek minden n-re igazak.

b) Az

$$a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_nb_n$$

egyenlőség minden n-re igaz, így az a_n és b_n számok mértani közepe minden n-re:

$$\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{ab}.$$

c) Az *a)* feladat eredményéből világos, hogy az (a_n) sorozat monoton fogyó és alulról korlátos, a (b_n) sorozat monoton növő és felülről korlátos, tehát mindkettő konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} b_n\leqq \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Azt akarjuk igazolni, hogy itt az egyenlőségjel érvényes. Becsüljük felülről az $a_{n+1}-b_{n+1}$ különbségét:

$$0<a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=$$

$$=\frac{a_n-b_n}{2}\cdot\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}<\frac{a_n-b_n}{2}.$$

Ebből adódik, hogy:

$$0<a_n-b_n<\frac{a-b}{2^{n-1}},$$

azaz $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, tehát valóban $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

d) Még a közös x határértéket kell meghatároznunk, de ez a *b)*-ben bizonyított összefüggés szerint:

$$x^2=\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} ab=ab,$$

tehát $x=\sqrt{ab}$, az a_n és b_n számok közös mértani közepe.

46. Az előző feladatban követett gondolatmenetet alkalmazhatjuk. Minden n-re igaz, hogy $b_n\leqq a_n$, mert két szám mértani közepe is kisebb vagy egyenlő a számok számtani közepénél. Kihasználva még, hogy a_{n+1} és b_{n+1} is középértékek, azt kapjuk, hogy a

$$b_n\leqq b_{n+1}\leqq a_{n+1}\leqq a_n$$

egyenlőtlenségek minden n-re igazak. Ebből az előző feladat mintájára következik:

$$\lim_{n\to\infty} b_n\leqq \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Becsüljük meg a_{n+1} és b_{n+1} eltérését:

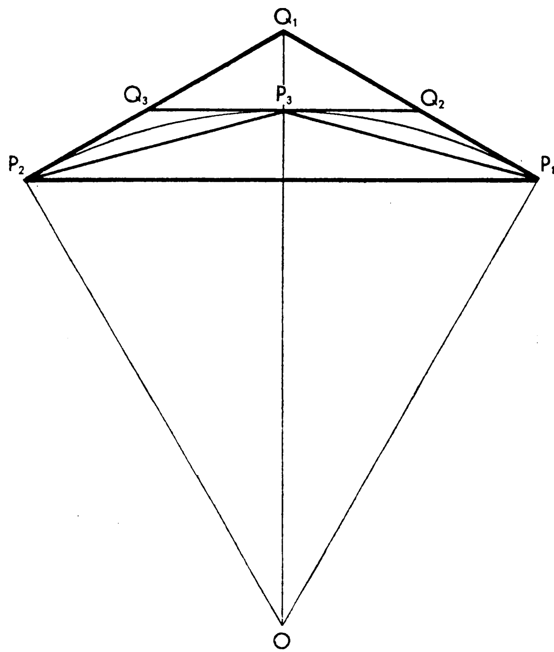
$$0<a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}=\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2}{2}=$$

$$=\frac{a_n-b_n}{2}\cdot\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}<\frac{a_n-b_n}{2}.$$

Innen az előző feladathoz hasonlóan adódik;

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n.$$

47. Vizsgáljuk meg, hogy milyen kapcsolat van az egység sugarú kör köré és a körbe írt szabályos 2^{n+1}-szög, valamint a 2^{n+2}-szög oldalai között. A 17. ábrán az O pont az egység sugarú kör középpontja, P_1 és P_2 a körbe írt 2^{n+1}-szög két szomszédos



17. ábra

csúcspontja, P_3 (és így P_1 és P_2 is) a körbe írt $2\cdot 2^{n+1}=2^{n+2}$-szög csúcspontja. Q_1 a kör köré írt 2^{n+1}-szög egy csúcspontja, Q_2 és Q_3 pedig a kör köré írt 2^{n+2}-szög két szomszédos csúcspontja. Jelölje a_n a körbe, A_n a kör köré írt 2^{n+1}-szög egy oldalának hosszát. Ekkor az ábráról a következő összefüggéseket olvashatjuk le:

$$P_1P_2=a_n,\quad P_1P_3=P_3P_2=a_{n+1},$$

$$Q_1P_1=\frac{A_n}{2},\quad Q_2Q_3=A_{n+1},\quad Q_2P_3=Q_2P_1=\frac{A_{n+1}}{2}.$$

A $P_1P_2P_3$ háromszög hasonló a $P_1P_3Q_2$ háromszöghöz, hiszen mindkettő egyenlőszárú és a P_2 csúcsnál levő szög a „nagy" háromszögben egyenlő a P_3-nál levő „kis" háromszögbeli szöggel, mert P_1P_2 párhuzamos Q_2Q_3-mal. Ennek alapján a következő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{A_{n+1}}{2}}{a_{n+1}}.$$

Az egyenlőséget így alakíthatjuk át:

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot\frac{A_{n+1}}{2}}.$$

Használjuk fel azt a tényt, hogy a szabályos sokszög kerületét megkapjuk, ha egy oldalának hosszát megszorozzuk az oldalak számával:

$$k_{n+1}=2^{n+1}a_{n+1}=\sqrt{2^na_n\cdot 2^{n+1}A_{n+1}}=\sqrt{k_n\cdot K_{n+1}};$$

ezzel éppen az egyik bizonyítandó egyenlőséget kaptuk.

A másik egyenlőség bizonyításához vegyük észre, hogy a $Q_1P_2P_1$ háromszög is hasonló a $Q_1Q_3Q_2$ háromszöghöz. Ennek alapján:

$$\frac{\frac{A_n}{2}}{a_n}=\frac{\frac{A_n}{2}-\frac{A_{n+1}}{2}}{A_{n+1}}.$$

Az egyenlőséget átalakítjuk:

$$A_{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{A_n}+\frac{1}{a_n}}.$$

Ebből K_{n+1}-re a következőt kapjuk:

$$K_{n+1}=2^{n+1}A_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{2^nA_n}+\frac{1}{2^na_n}}=\frac{2}{\frac{1}{K_n}+\frac{1}{k_n}},$$

ami éppen azt jelenti, hogy K_{n+1} a K_n és k_n harmonikus közepe.

b) Igazoljuk, hogy minden n-re:

$$k_n<k_{n+1}<K_{n+1}<K_n.$$

Az nyilvánvaló, hogy $k_1=4\sqrt{2}<8=K_1$. Tegyük fel, hogy $k_n<K_n$, mivel K_{n+1} ezek harmonikus közepe, ezért $k_n<K_{n+1}<K_n$. A k_{n+1} a k_n és K_{n+1} mértani közepe, ezért $k_n<k_{n+1}<K_{n+1}$ is igaz, azaz $k_{n+1}<K_{n+1}$ is fennáll. Így teljes indukcióval igazoltuk, hogy $k_n<K_n$ amiből — mint láttuk — a bizonyítandó egyenlőtlenség már következik.

A monoton, korlátos sorozatok tulajdonsága alapján már tudjuk, hogy (k_n) és (K_n) konvergens sorozatok és

$$\lim_{n\to\infty} k_n \leqq \lim_{n\to\infty} K_n.$$

c) Azt akarjuk bizonyítani, hogy a két határérték megegyezik.

Adjunk felső becslést először a $\left(\frac{K_{n+1}}{k_{n+1}}\right)^2$ hányadosra:

$$\left(\frac{K_{n+1}}{k_{n+1}}\right)^2=\left(\frac{2k_nK_n}{(K_n+k_n)\sqrt{k_nK_{n+1}}}\right)^2=\frac{2K_n}{K_n+k_n}=$$

$$=\frac{2}{1+\frac{1}{\frac{K_n}{k}}}<\frac{K_n}{k_n},$$

mivel $1<\frac{K_n}{k_n}$ és két szám harmonikus közepe kisebb, mint a nagyobbik szám. Alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget egymás után $(n-1)$-szer:

$$\sqrt{2}=\frac{K_1}{k_1}>\left(\frac{K_2}{k_2}\right)^2>\left(\frac{K_3}{k_3}\right)^{2^2}>\ldots>\left(\frac{K_n}{k_n}\right)^{2^{n-1}},$$

ahonnan

$$1<\frac{K_n}{k_n}<\sqrt{2}.$$

Ebből a „rendőrszabály” szerint következik, hogy $\frac{K_n}{k_n}\to 1$, azaz

$$\lim_{n\to\infty} k_n=\lim_{n\to\infty} K_n.$$

48. Az $[f_n(x)]$ sorozat határértékének vizsgálatakor három esetet érdemes megkülönböztetni. Ha $|x|<1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0,$$

így

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=1.$$

Ha $|x|=1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

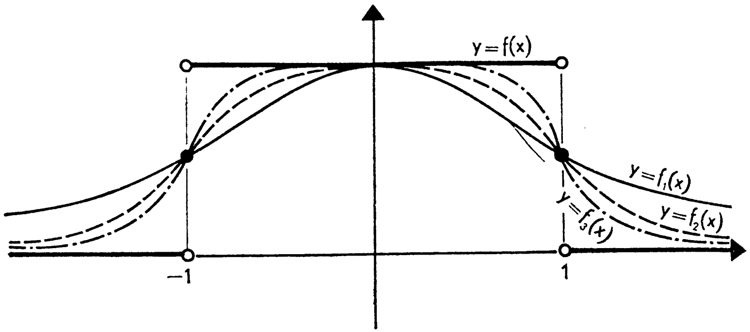
Ha $|x|>1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty}(1+x^{2n})=+\infty$$

és ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=0.$$

Az $f_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $f_2(x)=\frac{1}{1+x^4}$ és $f_3(x)=\frac{1}{1+x^6}$ függvények grafikonjának vázlatos felrajzolását megkönnyíti, ha észrevesszük, hogy páros függvények és értékkészletük a (0, 1] intervallum. A 18. ábrán ugyanabban a koordináta-rendszerben rajzoltuk meg az $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ és $f(x)$ függvény grafikonját.



18. ábra

49. Itt is három esetet különböztetünk meg. Ha $|x|<1$, $x\neq 0$, akkor $f_n(x)$-et így alakítsuk át:

$$f_n(x)=\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$ miatt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=-1.$$

Ha $|x|>1$, akkor ezt az átalakítást alkalmazzuk:

$$f_n(x)=\frac{x\ -x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}.$$

Mivel $\left|\frac{1}{x}\right|<1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}=0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x)=1.$$

Végül, ha $|x|=1$, akkor például az első átalakítást alkalmazva

$$f_n(x)=\frac{1-1}{1+1}=0,$$

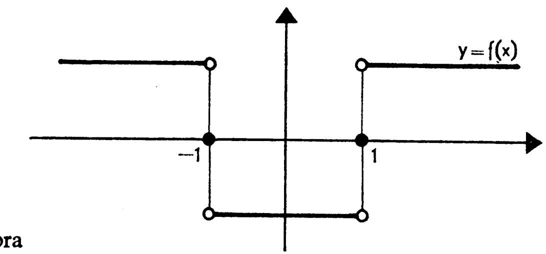
és így

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$$

is teljesül. Az

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x|>1, \\ -1, & \text{ha} \quad |x|<1 x\neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad |x|=1 \end{cases}$$

függvény képét könnyű felrajzolni (19. ábra).



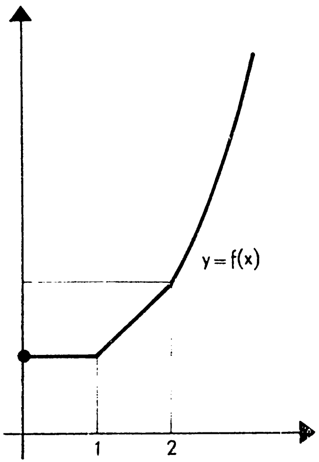
19. ábra

50. A feladat megoldásához alkalmazzuk a 33. feladatban kapott eredményt. Eszerint

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\begin{cases} 1, \text{ ha } 0\leqq x\leqq 1, \\ x, \text{ ha } 1<x\leqq 2, \\ \frac{x^2}{2}, \ \textit{ha} \ \ 2<x. \end{cases}$$

Itt felhasználtuk, hogy ha $0\leqq x\leqq 1$, akkor $\frac{x^2}{2}<1$ is igaz, ill. ha

$1<x\leqq 2$, akkor $\frac{x^2}{2}\leqq x$, valamint ha $2<x$, akkor $x<\frac{x^2}{2}$. Az $f(x)$ határérték (vagy limesz) függvény képe a 20. ábrán látható.



20. ábra

51. Legyen (a_n) egy tetszőleges sorozat. Három esetet különböztetünk meg.

I. Az első eset legyen az, amikor az adott sorozatnak nincs legnagyobb tagja $\left(\text{ilyen például az } 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots, \frac{1}{n},\right.$ $\left. n, \ldots \text{ sorozat}\right)$. Ekkor legyen a_{n_1} a sorozat egy tetszőleges tagja. Válasszunk ki ezután az n_1-nél nagyobb indexű tagok közül egy a_{n_2}-t úgy, hogy $a_{n_1}<a_{n_2}$ teljesüljön. Ezt nyilván megtehetjük, mert ellenkező esetben a_{n_1} volna a sorozat legnagyobb tagja. Ezután folytassuk a kiválasztást: az n_2-nél nagyobb indexű tagok között keressünk olyan a_{n_3}-at, hogy $a_{n_2}<a_{n_3}$ teljesüljön, és így tovább. Ha a_{n_k}-t kiválasztottuk, akkor az n_k-nál nagyobb indexű tagok között keressünk olyan $a_{n_{k+1}}$-et, hogy $a_{n_k}<a_{n_{k+1}}$ teljesüljön. Az eljárás nyilván korlátlanul folytatható, mert ha valahol elakadnánk, ez azt jelentené, hogy az utoljára kiválasztott tag a legnagyobb a sorozatban. A kiválasztás eredménye olyan

$$a_{n_1}<a_{n_2}<\ldots<a_{n_k}<a_{n_{k+1}}<\ldots$$

sorozat, amely az (a_n)-nek szigorúan monoton növő részsorozata.

II. Ha az eredeti sorozatban van ugyan legnagyobb tag, de véges sok tag elhagyásával olyan sorozatot kapunk, amiben már nincs legnagyobb tag $\left(\text{ilyen például az } 1, 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right.$ $\left. \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots \text{ sorozat}\right)$, akkor az előző eljárást a módosított sorozatra alkalmazva jutunk az eredeti sorozat egy szigorúan monoton növő részsorozatához.

III. Vizsgáljuk meg a harmadik esetet, amikor akárhogyan hagyunk is el véges sok tagot a sorozatból, a megmaradt tagok között mindig van legnagyobb $\left(\text{ilyen például az } 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2},\right.$ $\left. \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \ldots \text{ sorozat}\right)$. Ekkor egy monoton fogyó részsorozatot tudunk kiválasztani a következőképpen: legyen a sorozat legnagyobb tagja a_{n_1}. Az a_{n_1} után következő tagok között is van legnagyobb, legyen ez a_{n_2}. Nyilván igaz, hogy $a_{n_1}\geqq a_{n_2}$. Az eljárást így folytatva — miután kiválasztottuk az a_{n_k}-t — az n_k-nál nagyobb indexű tagok között is van legnagyobb, mert ellenkező esetben a véges sok alsó n_k darab tag elhagyásával olyan sorozathoz jutnánk, amelyben nincs legnagyobb tag, ellentétben a feltevéssel. Legyen az a_{n_k} után következő tagok között a legnagyobb az $a_{n_{k+1}}$ és így tovább. Ezzel az eredeti sorozatnak egy

$$a_{n_1}\geqq a_{n_2}\geqq\ldots\geqq a_{n_k}\geqq a_{n_{k+1}}\ldots$$

monoton fogyó részsorozatát kaptuk.

52. Legyen (a_n) egy korlátos sorozat és használjuk fel az előző feladatban bizonyított eredményt. Eszerint (a_n)-nek van egy (a_{n_k}) monoton részsorozata. Mivel az eredeti sorozat korlátos volt, a részsorozata is korlátos. A monoton, korlátos sorozat konvergens, tehát az (a_n) sorozatnak van konvergens részsorozata.

53. A Cauchy-féle konvergenciakritérium más megfogalmazásban azt mondja ki, hogy az (a_n) sorozat konvergenciájának *szükséges és elégséges feltétele*, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz létezzen olyan N index, hogy minden n, $k>N$-re $|a_n-a_k|<\varepsilon$ teljesüljön.

Igazoljuk először, hogy *a feltétel szükséges*, vagyis, ha (a_n) konvergens, akkor fennáll a Cauchy-kritérium. Mivel (a_n) konvergens, így tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan N, hogy minden $n>N$-re $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, ahol a a sorozat határértéke. Legyen $n>N$ és $k>N$; ekkor

$$|a_n-a_k|\leqq|a_n-a|+|a-a_k|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Mutassuk meg ezután, hogy *a feltétel elégséges*, vagyis ha egy (a_n) sorozatra igaz a Cauchy-kritérium, akkor a sorozat konvergens.

Tegyük fel, hogy (a_n) kielégíti a Cauchy-kritériumot. Először azt igazoljuk, hogy ekkor (a_n) korlátos sorozat. Válasszuk ε-t 1-nek és keressünk egy ehhez jó N_1 küszöbindexet. Ekkor, mivel $N_1+1>N_1$, minden $n>N_1$-re igaz az

$$|a_n-a_{N_1+1}|<1,$$

vagy az ezzel ekvivalens

$$a_{N_1+1}-1<a_n<a_{N_1+1}+1$$

egyenlőtlenség. Legyen k az a_1, a_2, $\ldots$, a_{N_1}, $a_{N_1+1}-1$ számok közül a legkisebb, K az a_1, a_2, $\ldots$, a_{N_1}, $a_{N_1+1}+1$ számok közül a legnagyobb. Ekkor az előző egyenlőtlenség alapján minden n-re igaz, hogy

$$k\leqq a_n\leqq K,$$

vagyis az (a_n) sorozat korlátos. Az 52. feladat szerint ekkor kiválasztható a sorozatból egy (a_{n_k}) konvergens részsorozat. Legyen (a_{n_k}) határértéke a, azaz tegyük fel, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k}=a$$

és bizonyítsuk be, hogy $a_n\to a$ is igaz. Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon>0$-t és legyen N a Cauchy-kritérium alapján egy $\frac{\varepsilon}{2}$-hez jó küszöbindex. Becsüljük az $|a_n-a|$ különbséget:

$$|a_n-a|\leqq|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

ha n, $n_k>N$ és n_k-t még olyan nagyra is választjuk, hogy $|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ teljesüljön. (Ez $a_{n_k}\to a$ miatt lehetséges.) Ezzel beláttuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a.$$

54. Legyen (a_n) egy monoton növő sorozat. Ha (a_n) felülről korlátos, akkor konvergens; tehát tegyük fel, hogy (a_n) felülről nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy akármilyen P számot adunk is meg, van olyan a_N eleme a sorozatnak, hogy $P<a_N$ teljesül. A sorozat ugyanakkor monoton növő, amiből következik, hogy minden $n>N$-re $a_N<a_n$. A két egyenlőtlenség alapján, minden $n>N$-re

$$a_n>P$$

áll fenn, ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty.$$

A monoton fogyó sorozatokra vonatkozó megfelelő állítást így fogalmazhatjuk meg: ha (a_n) monoton fogyó sorozat, akkor vagy konvergens vagy $-\infty$-hez tart.

Legyen (a_n) egy monoton fogyó sorozat. Ha (a_n) alulról korlátos, akkor konvergens. Tegyük fel, hogy (a_n) alulról nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy akármilyen P számot választunk, van olyan N index, hogy az $a_N < P$ egyenlőtlenség igaz. Mivel az (a_n) sorozat monoton fogyó, ha $n > N$, akkor $a_n < a_N$, így a két egyenlőtlenség alapján minden $n > N$-re:

$$a_n < P,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

55. Legyen az (a_n) sorozat a következő:

$$\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \ldots,\ (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1},\ \ldots$$

a (b_n) sorozat pedig az előző sorozat -1-szerese, azaz:

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots,\ (-1)^n\frac{n}{n+1},\ \ldots.$$

Az (a_n) sorozat nyilván divergens, hiszen a páratlan indexű tagokból álló részsorozata:

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \ldots,\ \frac{2n-1}{2n},\ \ldots$$

1-hez tart, a páros indexű tagokból álló részsorozat, a

$$-\frac{2}{3},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{6}{7},\ \ldots,\ -\frac{2n}{2n+1},\ \ldots$$

sorozat -1-hez tart. Egy konvergens sorozatnak pedig nem lehet két különböző határértékhez tartó részsorozata. Így nyilván a (b_n) is divergens.

Az (a_n+b_n) sorozat az azonosan zérus sorozat, ami konvergens és határértéke 0.

Az (a_nb_n) sorozat a következő:

$$-\frac{1}{4},\ -\frac{4}{9},\ -\frac{9}{16},\ \ldots,\ -\frac{n^2}{(n+1)^2},\ \ldots.$$

Ez is konvergens és határértéke -1.

Két divergens sorozat összege is meg szorzata is lehet konvergens (nyilván divergens is!).

56. Ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor az (a_n+b_n) sorozat csak divergens lehet, hiszen ha konvergens volna, akkor az (a_n+b_n) és (a_n) konvergens sorozatok különbsége, a (b_n) sorozat is konvergens lenne.

Az (a_nb_n) sorozatról általában nem igaz, hogy divergens. Nézzük meg például az $a_n=\frac{1}{n}$ és $b_n=n$ sorozatok szorzatát: $a_nb_n=1$, ami konvergens; ha viszont $a_n=\frac{1}{n}$ és $b_n=n^2$, akkor $a_nb_n=n$, ami divergens. Ezekben az esetekben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, ezért nem tudtunk következtetni az (a_nb_n) sorozat konvergenciaviselkedésére. Ha azon túl, hogy (a_n) konvergens és (b_n) divergens még azt is kikötjük, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$, akkor már arra következtethetünk, hogy (a_nb_n) is divergens, hiszen ha konvergens volna, akkor a 0-tól különböző határértékhez tartozó (a_n) sorozattal osztva, a kapott (b_n) sorozat is konvergens lenne.

57. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$, akkor lehet, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ is létezik, és legalább az egyik határérték 0. Lehet, hogy az (a_n) és (b_n) közül csak az egyik sorozat konvergens és a határértéke 0, a másik divergens; pl. legyen $a_n=\frac{1}{n^2}$, $b_n=n$, ekkor $a_nb_n=\frac{1}{n}\to 0$. Előfordulhat az is, hogy mindkét sorozat divergens. Nézzük például a következő két sorozatot:

$$1,\ \frac{1}{4},\ 3,\ \frac{1}{16},\ 5,\ \frac{1}{36},\ \ldots,\ 2n-1,\ \frac{1}{4n^2},\ \ldots,$$

$$1,\ 2,\ \frac{1}{9},\ 4,\ \frac{1}{25},\ 6,\ \ldots,\ \frac{1}{(2n-1)^2},\ 2n,\ \ldots.$$

Nyilván mindkét sorozat divergens, hiszen mindkettőnek van $+\infty$-hez tartó részsorozata, ugyanakkor a szorzatuk, az

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots,\ \frac{1}{2n-1},\ \frac{1}{2n},\ \ldots$$

sorozat konvergens és a határértéke 0.

58. Az (a_nb_n) sorozat lehet divergens: legyen például $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n^2$, ekkor $a_nb_n=n\to+\infty$. Az (a_nb_n) konvergens is lehet úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n\neq 0$: például $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$ esetén $a_nb_n=1\to 1$. Ha (b_n) konvergens, akkor nyilván $a_nb_n\to 0$ áll fenn. Megmutatjuk most, hogy ha csak annyit teszünk fel a (b_n)-ről, hogy korlátos sorozat és az (a_n) 0-hoz tart, akkor is igaz, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$.

Ha ugyanis (b_n) korlátos, akkor van olyan $K>0$ szám, hogy minden n-re a

$$|b_n|<K$$

áll fenn. Legyen $\varepsilon>0$ és becsüljük meg az $|a_nb_n|$ nagyságát:

$$|a_nb_n|=|a_n|\,|b_n|<K|a_n|<\varepsilon,$$

ha az $|a_n|<\frac{\varepsilon}{K}$ egyenlőtlenség fennáll. Ez alkalmas N-nél nagyobb n-ekre igaz, hiszen $a_n\to 0$. Eredményünk éppen azt jelenti, hogy $a_nb_n\to 0$.

59. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$ és igazoljuk, hogy az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat 0-hoz tart. Adjunk meg egy $\varepsilon>0$-t és becsüljük $\left|\frac{1}{a_n}\right|$-et:

$$\left|\frac{1}{a_n}\right|=\frac{1}{|a_n|}<\varepsilon,$$

ha csak az

$$|a_n|>\frac{1}{\varepsilon}$$

egyenlőtlenség fennáll, ami alkalmas N-nél nagyobb indexekre $|a_n|\to+\infty$ miatt igaz.

Az állítás megfordítása, vagyis, hogyha $\frac{1}{a_n}\to 0$, akkor $|a_n|\to+\infty$ szintén igaz — az előző gondolatmenet alapján látható.

60. Hogy az (a_n) sorozat tagjaiból álló számhalmaz nem korlátos felülről, ez azt jelenti, hogy tetszőleges k természetes számhoz van olyan a_{n_k} tagja a sorozatnak, hogy $a_{n_k}>k$ és $n_k>n_{k-1}$. Ha ugyanis valamilyen természetes számra nem találnánk ilyen tagot, akkor a sorozat felülről korlátos volna. Az így kapott (a_{n_k}) részsorozat nyilván $+\infty$-hez tart, hiszen tetszőleges P számhoz megkeresve azt a természetes számot, amelyre $k_0\geq P$ áll fenn, ez a k_0 jó lesz küszöbindexnek, mert ha $k>k_0$, akkor $a_{n_k}>k\geq k_0\geq P$ igaz.

61. *a)* A 7 legkisebb, csupa 9 számjegyből álló többszöröse a $999\,999=10^6-1$, méghozzá $999\,999=7\cdot 142\,857$. Így az $\frac{1}{7}$ törtet a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{1}{7}=\frac{142\,857}{999\,999}=\frac{142\,857}{10^6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^6}}.$$

Ebből $\frac{1}{7}$-re a következő végtelen tizedes tört előállítást kapjuk:

$$\frac{1}{7}=0,\dot{1}42\,85\dot{7}\ldots$$

b) A 13-nak is a $999\,999 = 10^6 - 1$ a legkisebb csupa 9-ből álló többszöröse és $999\,999 = 13 \cdot 76\,923$. Ennek alapján a $\frac{2}{13}$ így írható fel:

$$\frac{2}{13} = \frac{153\,846}{999\,999} = \frac{153\,846}{10^6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^6}},$$

azaz végtelen tizedes tört alakban:

$$\frac{2}{13} = 0,\dot{1}53\,84\dot{6}\ldots$$

62. Végtelen triadikus tört egy olyan

$$0,a_1a_2 \ldots a_n \ldots$$

alakú jelsorozat, ahol a_n minden n-re a 0, 1, 2 számjegyek valamelyike. Az adott triadikus tört értékén azt a valós számot értjük, amely az

$$\frac{a_1}{3}, \; \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2}, \; \ldots, \; \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n}, \; \ldots$$

(konvergens) sorozat határértéke. Nyilván minden ilyen triadikus tört értéke [0, 1]-beli valós szám. A tizedes törtekkel kapcsolatos bizonyítás mintájára igazolható, hogy minden, a [0, 1]-be tartozó, 1-től különböző valós szám felírható olyan végtelen triadikus tört alakjában, amelyben végtelen sok 2-től különböző triadikus jegy van. Ha azokat a triadikus törteket is megengedjük, amelyben valahonnan kezdve csupa 2 jegy szerepel, akkor az olyan számokat, amelyek a

$$0,a_1a_2 \ldots a_k00 \ldots,$$

„véges" triadikus tört alakban írhatók, ahol $k \geqq 1$ és a_k az utolsó 0-tól különböző jegy, még így is írhatjuk:

$$0, \; a_1a_2 \ldots a'_k22 \ldots,$$

ahol $a'_k = a_k - 1$ és utána csupa 2 jegy áll. Például az $\frac{1}{6}$ triadikus alakja

$$0,0111 \ldots,$$

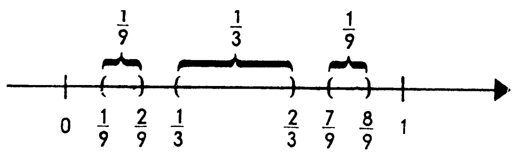
mert

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^n} \right) =$$
$$= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6}.$$

A 0,121212... triadikus tört értéke pedig a következő:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-1}} + \frac{2}{3^{2n}} \right) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} \right) \left(1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-2}} \right) =$$
$$= \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{5}{8}.$$

Ez után a bevezető után térjünk át a feladat megoldására és először is határozzuk meg h_n értékét. Osszuk fel a [0, 1] intervallumot az $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ számokkal három, $\frac{1}{3}$ hosszúságú részintervallumra. A $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ intervallumba tartozó valós számok felírhatók végtelen triadikus tört alakjában úgy, hogy a 0 utáni első jegy 0 $\left(\text{még az } \frac{1}{3} = 0{,}022\ldots \text{ triadikus tört is ilyen}\right)$. Hasonlóan a $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ intervallumba tartozó valós számok olyan triadikus tört alakban írhatók, ahol a 0 egész utáni első jegy 2 $\left(\frac{2}{3}=0{,}2\ldots;\ 1=0{,}222\ldots\right)$. Az $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ nyílt intervallumba tartozó valós számok viszont csak olyan alakú triadikus törtként írhatók fel, ami így kezdődik: 0,1. Hagyjuk el tehát a [0, 1]-ből az $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ intervallumot. A második lépésben a megmaradt két zárt intervallumot osszuk fel az $\frac{1}{9},\frac{2}{9}$, ill. a $\frac{7}{9},\frac{8}{9}$ számokkal három-három részintervallumra. Az előző gondolatmenethez hasonlóan látható, hogy a $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$ ill. a $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9},1\right]$ intervallumokba tartozó valós számok felírhatók olyan triadikus tört alakjában, ahol a 0 egész utáni második számjegy 1-től különböző. Az $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$, ill. $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ intervallumok elemei viszont a 0 egész utáni második helyen az 1 számjegy felhasználásával írhatók triadikus alakban. Így a második lépésben kapjuk meg ezeket az intervallumokat, ezek együttes hossza $2\cdot\frac{1}{9}$ (21. ábra). A meg-



21. ábra

maradt mtervallumokba tartozó valós számoknak van tehát olyan triadikus tört alakja, amelyben a 0 egész után az első két helyen 1-től különböző jegy szerepel. Az eljárást így folytatva látható, hogy az n-edik lépésben 2^{n-1} darab $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú nyílt részintervallumot kell elhagynunk ahhoz, hogy a megmaradó számoknak legyen olyan triadikus tört alakja, ahol az első n helyen a 0 egész után 1-től különböző jegy van. Az így megmaradó intervallumok h_n összhosszát úgy kapjuk, hogy 1-ből kivonjuk az elhagyott részintervallumok hosszának összegét:

$$h_n=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)=1-\frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ebből már nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n\to\infty} h_n=0.$$

A kapott eredményt úgy értelmezhetjük, hogy a [0, 1] intervallumban csak „0 összhosszúságú” azoknak a pontoknak a halmaza, amiknek van olyan triadikus tört alakja, amikor az 1jegy nem szerepel. Ezt a halmazt *Cantor-halmaznak* is nevezik.

63. *a)* A következő átalakítássorozattal célhoz érünk:

$$\frac{8}{9}=\frac{1}{1+\frac{1}{8}}\ ;$$ a lánctörtjegyek: 0, 1, 8.

b) $$\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}=2+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}\ ;$$

a lánctört jegyei: 2, 1, 1, 2.

c) $$\frac{8}{21}=\frac{1}{2+\frac{5}{8}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}}=$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}};$$

a kapott lánctört jegyei: 0, 2, 1, 1, 1, 2.

64. *a)* Írjuk fel az $\frac{56}{44}$ véges lánctört alakját:

$$\frac{56}{44}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}.$$

Az euklideszi algoritmus két pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának megkeresésére szolgál. 44 és 56 legnagyobb közös osztóját a következő módon kereshetjük meg:

$$56=44\cdot 1+12$$
$$44=12\cdot 3+8$$
$$12=8\cdot 1+4$$
$$8=4\cdot 2.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a felírt maradékos osztási eljárásban az utolsó nem 0 maradék, a 4 szolgáltatja 44 és 56 legnagyobb közös osztóját (figyeljük meg az eljárást: az első lépésben az egyik adott számot osztottuk a másikkal, a következő lépésekben pedig mindig az előző osztót osztottuk az előző maradékkal).

Észrevehető, hogy a kapott lánctörtjegyek: 1, 3, 1, 2 rendre megegyeznek az osztási eljárás során kapott hányadosokkal.

b) A bizonyítandó állításnak az a része, hogy a véges lánctört alakban felírható valós számok racionálisak, nyilvánvaló, hiszen egy véges lánctört olyan „emeletes tört”, amit azonos átalakításokkal $\frac{p}{q}$ alakra hozhatunk, ahol p és q egész számok. Igazoljuk, hogy általában is az $\frac{a}{b}$ tört véges lánctört alakjának jegyei megegyeznek az (a, b) legnagyobb közös osztó megkeresésére szolgáló euklideszi algoritmusban kapott hányadosokkal.

Az a, b számokra ($b\neq 0$) az euklideszi algoritmust általában a következő alakban írhatjuk fel:

$$a=bq_0+r_1,$$
$$b=r_1q_1+r_2,$$
$$r_1=r_2q_2+r_3,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n,$$
$$r_{n-1}=r_n\cdot q_n,$$

ahol $q_0\geqq 0$, $q_1, \dots, q_n$ pozitív egészek, $r_1>r_2>\dots>r_n>0$ és r_n az utolsó nem 0 maradék. Igazolható, hogy r_n valóban a és b legnagyobb közös osztója. Mi csak az előbb kimondott állítást igazoljuk. Osszuk végig az első egyenlőséget b-vel, a másodikat r_1-gyel, s í. t. az $n+1$-ediket r_n-nel:

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_1}{b},$$
$$\frac{b}{r_1}=q_1+\frac{r_2}{r_1},$$
$$\frac{r_1}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_{n-1}+\frac{r_n}{r_{n-1}},$$
$$\frac{r_{n-1}}{r_n}=q_n.$$

A most felírt egyenlőségekből már egyszerűen következik $\frac{a}{b}$ lánctört előállítása:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}},$$

ami éppen a bizonyítandó állítást adja. Ezzel egyszersmind az is kiderült, hogy bármely pozitív, $\frac{a}{b}$ racionális szám véges lánctört alakban írható.

65.*a)* Az

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

végtelen lánctört az

$$a_1=1+\frac{1}{2}$$

$$a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}$$

rekurzív definícióval megadott sorozat határértéke. Erről a sorozatról már a gyakorló feladatok során kapott általános eredményekből tudjuk, hogy konvergens. Határértékét, vagyis a lánctört értékét a következő egyenletből tudjuk meghatározni:

$$x=1+\frac{1}{1+x},$$

ahonnan $x=\sqrt{2}$.

b) Az

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\dots}}}}}$$

lánctört például a következő rekurzív definícióval adható meg:

$$a_1=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$$

$$a_{n+1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

Az (a_n) sorozat nyilván részsorozata a lánctört közelítő törtjeiből álló sorozatnak, így konvergens és határértéke a lánctört értéke. Az x határérték a következő egyenletnek tesz eleget:

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}$$

ahonnan, mivel $x>0$, $x=\frac{4+\sqrt{37}}{7}$.

66. Egy lánctörtet akkor nevezünk periodikusnak, ha a lánctört jegyeinek sorozata periodikus q_2-től kezdve, azaz, ha a lánctört a következő alakú:

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{\ddots\; q_n+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{\ddots\; q_n+\cfrac{1}{q_2+\dots}}}}}}}$$

Ennek a lánctörtnek az értéke a következő rekurzióval definiált sorozat határértéke:

$$a_1=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{}{\ddots\;\cfrac{1}{q_n}}}},$$

$$a_{n+1}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\dots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n+a_n-q_1}}}.$$

Az (a_n) sorozat x határértékét az

$$x=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{}{\ddots\;\cfrac{1}{q_n+x-q_1}}}$$

egyenletből számíthatjuk ki. Ez az egyenlet a jobb oldalon álló kifejezés azonos átalakításával

$$x=\frac{ax+b}{cx+d}$$

alakra hozható, ahol a, b, c, d egész számok. Ebből következik már, hogy x egy egész együtthatós másodfokú polinom gyöke.

67. Legyenek x és y irracionális számok, (r_n) és (s_n) pedig olyan racionális számokból álló sorozatok, amelyekre $r_n\to x$ és $s_n\to y$ igaz. Ekkor a 30. gyakorló feladat szerint $a^{r_n}\to a^x$, $a^{s_n}\to a^y$, $a^{r_n+s_n}\to a^{x+y}$ (hiszen $r_n+s_n\to x+y$). A racionális számokra érvényes az egyenlő alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosság, tehát minden n-re:

$$a^{r_n}\cdot a^{s_n}=a^{r_n+s_n}.$$

Konvergens sorozatok szorzata is konvergens és határértéke a tényezők határértékének szorzata, ezért az előző egyenlőségből ezt kapjuk:

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y},$$

és ezt kellett igazolnunk. A többi esetet hasonló módon lehet elintézni.

68. A 31. feladatból tudjuk, hogy minden $n>1$-re igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Ebből ekvivalens átalakításokkal az $\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ kifejezésre a következő becslést kapjuk:

$$1<\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}<\frac{n}{n-1}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}=1$, a „rendőrszabály" szerint:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1.$$

69. Használjuk fel itt is a 31. feladatból ismert

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

azonosságot. Ebből az $\ln x$ függvény szigorú monoton növése miatt:

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}<1<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Ebből, az egyenlőtlenség két—két oldalát külön-külön figyelembe véve a következő becslést kapjuk:

$$\frac{n}{n+1}<\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}<1,$$

ahonnan a „rendőrszabály" szerint:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1.$$

70. Az 5. feladat szerint az $\sqrt[n]{n}$ sorozat a 3. tagtól kezdve szigorúan monoton fogyó, tehát $n\geqq 3$-ra

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, tehát $n\geqq 3$-ra:

$$\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1}.$$

Az $\frac{\ln n}{n}$ sorozat tehát szigorúan monoton fogyó, alulról korlátos, mert minden tagja pozitív, tehát konvergens. Jelöljük a határértékét x-szel. Ekkor a páros indexű tagokból álló részsozat is x-hez tart:

$$x=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2n)}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 2}{2n}+\frac{1}{2}\,\frac{\ln n}{n}\right)=\frac{1}{2}\,x.$$

A kapott egyenletből $x=0$, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

71. Részletesen kiírjuk a sorozat n-edik tagját és közben felhasználjuk az

$$\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=$$

$$=\ln(k-1)-2\ln k+\ln(k+1)$$

azonosságot:

$$\begin{aligned}
&\ln 1-2\ln 2+\ln 3+\\
&+\ln 2-2\ln 3+\ln 4+\\
&+\ln 3-2\ln 4+\ln 5+\\
&+\ln 4-2\ln 5+\ln 6+\\
&\qquad\vdots\\
&+\ln(n-2)-2\ln(n-1)+\ln n+
\end{aligned}$$

$$+\ln(n-1)-2\ln n+\ln(n+1)=$$
$$=-\ln 2+\ln(n+1)-\ln n=$$
$$=-\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Mivel a 69. feladatból következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln 2.$$

72. Vizsgáljuk először a páros indexű tagokból álló részsorozatot. Ez így alakítható át:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

A 32. gyakorló feladat eredményét abban a formában használjuk fel, hogy

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\varepsilon_n,$$

ahol c az Euler-féle konstans, ε_n pedig egy konvergens, 0-hoz tartó sorozat. Ennek az összefüggésnek a felhasználásával a vizsgált részsorozat így írható:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=\ln 2n+c+\varepsilon_{2n}-(\ln n+c+\varepsilon_n)=$$
$$=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n,$$

ahol $\varepsilon_{2n}\to 0$, $\varepsilon_n\to 0$ miatt $\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n\to 0$, tehát:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

A páratlan indexű részsorozat határértéke ezek alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\ln 2.$$

Így a két részsorozat „összefésüléséből” adódó sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$$

73. *a)* A 72. feladatban alkalmazott átalakításból látható, hogy

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Ebből rögtön következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

b) A sorozat n-edik tagját alakítsuk át a következőképpen:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{4n-1}=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Számítsuk ki az átalakítás felhasználásával a határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots\frac{1}{4n}\right)-$$
$$-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=$$
$$=\frac{3}{2}\ln 2.$$

c) Írjuk ki részletesen a sorozat n-edik tagját a következő átalakítás felhasználásával:

$$\frac{1}{k(4k^2-1)}=\frac{4k}{4k^2-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}-2\frac{1}{2k}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(4k^2-1)}=$$
$$=1+\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-2\cdot\frac{1}{4}+$$
$$+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-2\cdot\frac{1}{6}+$$
$$\vdots$$
$$+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}-2\cdot\frac{1}{2n-2}+$$
$$+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-2\cdot\frac{1}{2n}=$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-1-\frac{1}{2n+1}$$

Innen már látható, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(4k^2-1)}=2\ln 2-1.$$

74. Az $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ sorozat monoton növő. Igazoljuk, hogy korlátos is. Becsüljük felülről a sorozatot:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<$$
$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$
$$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2.$$

A sorozat tehát konvergens.

75. *a) Első megoldás*: teljes indukcióval igazoljuk egyszerre a két azonosságot. $n=0$-ra nyilván mindkettő fennáll. Tegyük fel, hogy n-re igazak, mutassuk meg, hogy $n+1$-re is fennállnak. Ehhez használjuk fel, hogy

$$\sin(2n+3)\alpha=\sin[(2n+1)\alpha+2\alpha]=$$
$$=\sin(2n+1)\alpha\cos 2\alpha+\cos(2n+1)\alpha\sin 2\alpha=$$
$$=\sin(2n+1)\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\cos(2n+1)\alpha 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos(2n+3)\alpha=\cos[(2n+1)\alpha+2\alpha]=$$
$$=\cos(2n+1)\alpha\cos 2\alpha-\sin(2n+1)\alpha\sin 2\alpha=$$
$$=\cos(2n+1)\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-\sin(2n+1)\alpha 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Ebből, az indukciós feltevést felhasználva és alkalmazva a binomiális együtthatókra vonatkozó következő összefüggést:

$$\binom{2n+1}{k-1}+2\binom{2n+1}{k}+\binom{2n+1}{k+1}=\binom{2n+2}{k}+$$
$$+\binom{2n+2}{k+1}=\binom{2n+3}{k+1},$$
éppen a bizonyítandó azonosságokat kapjuk. A részletes számolást itt nem végezzük el.

Második megoldás: Alkalmazzuk a $\cos\alpha+i\sin\alpha$ komplex szám $2n+1$-edik hatványának kiszámítására egyrészt a *Moivre-tételt*, másrészt a binomiális tételt. Ezután figyelembe véve, hogy két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha külön a valós és külön a képzetes részük egyenlő, éppen a bizonyítandó azonosságokat kapjuk.

b) Az előző, *a)* feladatban igazoltuk, hogy
$$\sin(2n+1)\alpha=\binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\alpha\sin\alpha-$$
$$-\binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\alpha\sin^3\alpha+\ldots+(-1)^n\sin^{2n+1}\alpha.$$
Osszuk végig az egyenlőséget $\sin^{2n+1}\alpha$-val:
$$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin^{2n+1}\alpha}=\binom{2n+1}{1}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^{2n}-$$
$$-\binom{2n+1}{3}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^{2n-2}+\ldots+(-1)^n,$$
ami $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ miatt éppen a bizonyítandó azonosság.

c) A *b)* feladatban bizonyított azonosság jobb oldala a $\operatorname{ctg}^2\alpha$-nak egy polinomja. Ha ebben az azonosságban α helyére rendre a $\dfrac{\pi}{2n+1}, \dfrac{2\pi}{2n+1}, \ldots, \dfrac{n\pi}{2n+1}$ számokat helyettesítjük, akkor a bal oldalon álló tört számlálója 0 lesz, hiszen:
$$\sin(2n+1)\frac{k\pi}{2n+1}=\sin k\pi=0,$$

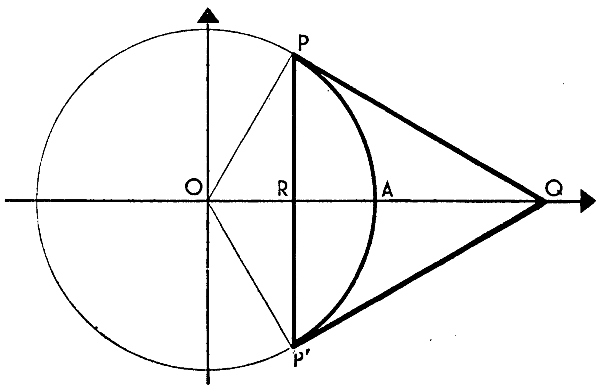
ha $k=1, 2, \ldots, n$. Ezért a
$$\binom{2n+1}{1}x^n-\binom{2n+1}{3}x^{n-1}+\ldots+(-1)^n$$
polinom gyökei az előírt n darab különböző szám és csak ezek, mert a polinom n-edfokú és egy n-edfokú polinomnak legfeljebb n különböző gyöke van. (Az hogy az előírt számok mind különbözők abból következik, hogy ha $k=1, 2, \ldots, n$, akkor a $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ alakú számok 0 és $\dfrac{\pi}{2}$ közé eső különböző számok, és hogy a $\operatorname{ctg} x$ függvény a $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban szigorúan monoton fogy.)

d) A két összeg közül először az elsőt vizsgáljuk. Az összeg tagjai éppen az előző, *c)* feladat megoldásában talált polinom gyökei. Használjuk fel a polinom gyökei és együtthatói közti összefüggést, vagyis azt, hogy egy n-edfokú polinom gyökeinek összege az $(n-1)$-edfokú tag együtthatójának ellentettje, osztva az n-edfokú tag együtthatójával. A mi esetünkben tehát:
$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}=$$
$$=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$
A másik összeg átalakításához használjuk fel az
$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\operatorname{ctg}^2\alpha$$
azonosságot:
$$\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^2\dfrac{2\pi}{2n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sin^2\dfrac{n\pi}{2n+1}}=$$

$$= n + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} =$$

$$= n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

e) Legyen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. A 22. ábrán egy origó középpontú, egy-



22. ábra

ségsugarú kört rajzoltunk. Itt a PA ív hossza α és a szögfüggvények definíciója szerint $PR = \sin \alpha$, $PQ = \operatorname{tg} \alpha$ (PQ a kört P-ben érinti). A P' a P-nek az x tengelyre vonatkozó tükörképe, így:

$$PP' = 2 \sin \alpha,$$

$$PQ + QP' = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Használjuk fel azt, hogy definíció szerint a körív hossza a körívbe írt töröttvonalak hosszának felső határa. Ezért, mivel PP' egy a PAP' ívdarabba írt töröttvonal (és van ennél hosszabb beírt töröttvonal is pl. ilyen volna a PA és AP' szakaszokból álló):

$$2 \sin \alpha < 2\alpha.$$

A PQ és QP' szakaszokból álló töröttvonal hossza a PAP' ívbe írt töröttvonalak hosszának egy felső korlátja (ennél még kisebb felső korlát is van), így a beírt töröttvonalak hosszának felső határánál, vagyis az ívhossznál nagyobb, tehát:

$$2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

E két egyenlőtlenségből következik, hogy

$$0 < \sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha,$$

ahonnan

$$\frac{1}{\sin \alpha} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha > 0,$$

majd négyzetre emelve

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} > \frac{1}{\alpha^2} > \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

ha $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

f) Alkalmazzuk az *e)* feladatban bizonyított egyenlőtlenséget

$$\alpha = \frac{k\pi}{2n+1}\text{-re} \quad (k = 1, 2, \ldots, n):$$

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} > \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} > \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1},$$

ha $k = 1, 2, \ldots, n$. Adjuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket és alkalmazzuk a *d)* feladatban kapott azonosságokat:

$$\frac{2n(n+1)}{3} > \frac{(2n+1)^2}{1^2\pi^2} + \frac{(2n+1)^2}{2^2\pi^2} + \ldots + \frac{(2n+1)^2}{n^2\pi^2} >$$

$$> \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Ebből, ekvivalens átalakításokkal az $1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ kifejezésre a következő becslést kapjuk:

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}>1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2},$$

a „rendőrszabály" alapján azt kapjuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

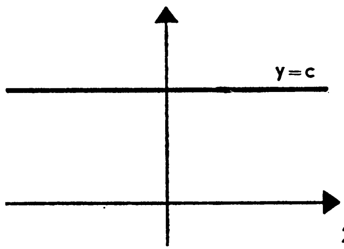
II. EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

1. Függvények és grafikonjaik

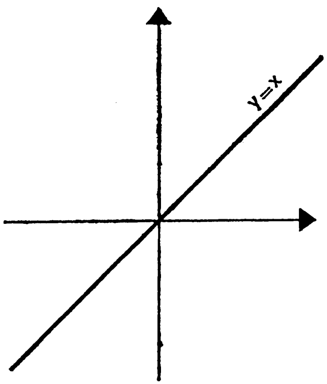
Ebben a fejezetben valós változós, valós értékű függvényekkel foglalkozunk, azaz olyan függvényekkel, amelyek a valós számok egy részhalmazát — a *függvény értelmezési tartományát* — a valós számok egy részhalmazára — *a függvény értékkészletére* — képezik le. Részhalmazon itt mindkét esetben magát a halmazt is értjük. Függvények jelölésére általában az f, g, h stb. betűket fogjuk használni. Az $f(x)$, $g(x)$ jelek az f, ill. a g függvénynek az x valós számhoz rendelt értékét jelölik. Gyakran magát a függvényt is $f(x)$-szel, $g(x)$-szel, $h(x)$-szel jelöljük, így pl. beszélni fogunk az x^2 függvényről, a $\sin x$ függvényről stb. Függvényeket — a sorozatokhoz hasonlóan — sokféle módon adhatunk meg. Igen gyakran egy képlettel adunk meg egy függvényt, pl. $\sqrt{1-x^2}$, és ezt úgy értjük, hogy az adott függvény értelmezési tartománya mindazokból a valós számokból áll, amire a képletnek értelme van (itt a $[-1, 1]$ intervallum az értelmezési tartomány). Gyakran azonban egy utasítás definiál egy függvényt. Például $f(x)$ legyen az a függvény, amely az x oldalhosszúságú szabályos háromszög területének értékét adja meg. Természetesen $f(x)$-nek csak $x>0$-ra van értelme. Ezt az $f(x)$-et képlettel is megadhatjuk:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad ha \quad x>0.$$

A következőkben először az lesz a célunk, hogy elemi eszközök felhasználásával tapasztalatokat gyűjtsünk függvényekről. Példákat fogunk nézni függvények különböző megadására és sok függvény grafikonját fogjuk felrajzolni. Ismertnek tekintjük az $f(x)=c$ (c tetszőleges konstans), x, x^2 és $\frac{1}{x}$ függvényeket és grafikonjaikat (23., 24., 25. és 26. ábrák).



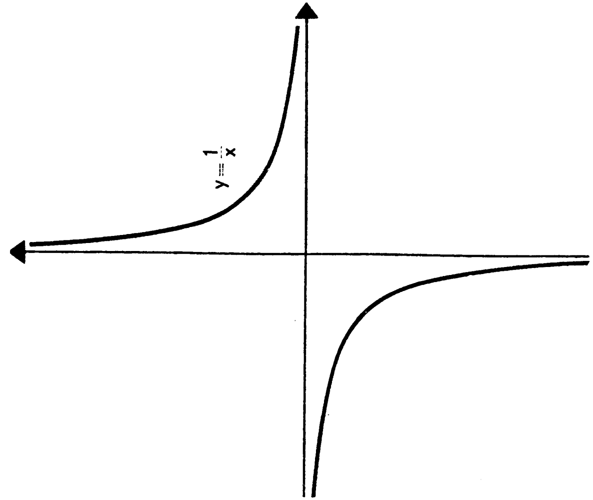
23. ábra



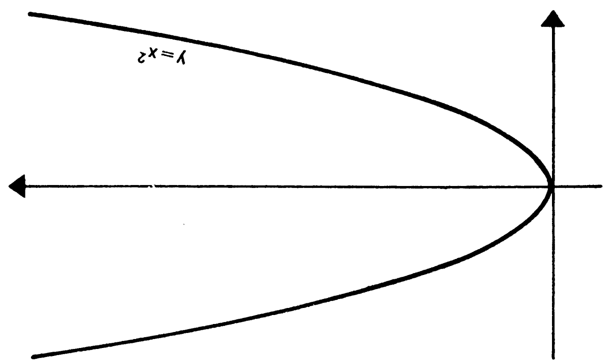
24. ábra

Az $|x|$ függvényt az I. fejezet 1. pontjában már definiáltuk. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza (27. ábra).

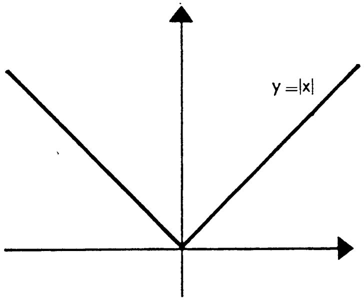
Egy további egyszerű függvény az „x egész része" vagy „entier x" (olv.: „antyié x") függvény, amelyet így jelölünk: $[x]$ és a következő definícióval adhatunk meg: $[x]=n$, ha n az az egész szám, amelyre az $n \leqq x < n+1$ egyenlőtlenség igaz. Az x függvény értelmezési tartománya tehát az összes valós szám, értékkészlete viszont az egész számok halmaza. A függvény képét a definíció alapján könnyen felrajzolhatjuk (28. ábra).



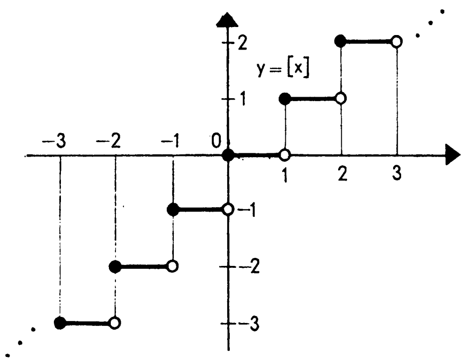
26. ábra



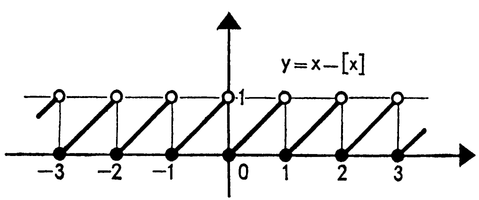
25. ábra



27. ábra



28. ábra



29. ábra

Gyakorló feladatok

1. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $x-[x]$;

b) $x\cdot[x]$;

c) $\dfrac{x}{[x]}$;

d) $\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

e) $x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

Megoldás:

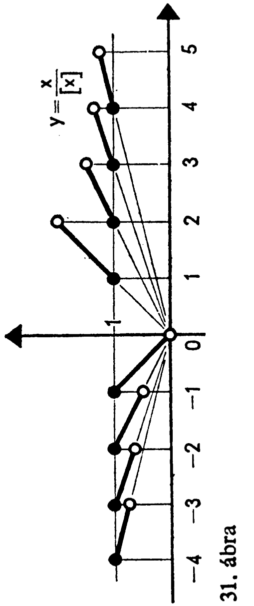
a) A függvény grafikonját az x és az $[x]$ függvények grafikonja alapján lehet könnyen megrajzolni (29. ábra).

b) Az $x\cdot[x]$ függvény értéke ha $0\leqq x<1$, akkor $[x]=0$ miatt $x\cdot[x]=0$. Ha $1\leqq x<2$, akkor $[x]=1$, így $x[x]=x$, ha $-1\leqq x<0$, akkor $[x]=-1$, így $x[x]=-x$, általában ha $n\leqq x<n+1$, ahol n egész $[x]=n$, tehát $x[x]=nx$. A függvény képét a 30. ábrán rajzoltuk meg.

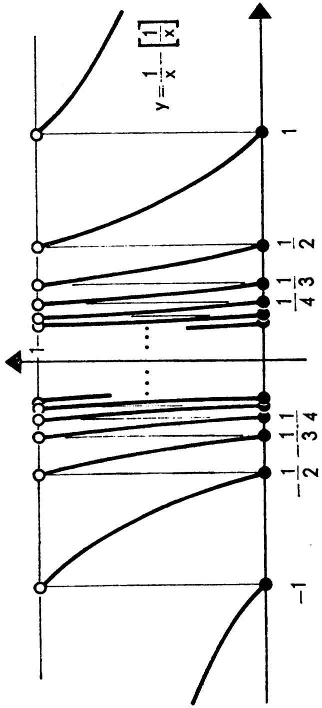
c) Az $\dfrac{x}{[x]}$ a $[0, 1)$ intervallumban nincs értelmezve, hiszen itt $[x]=0$. Minden más helyen értelmezve van és ha $n\leqq x<n+1$, ahol $n\neq 0$ egész szám, ekkor $\dfrac{x}{[x]}=\dfrac{x}{n}$. A függvény képe a 31. ábrán látható.

d) Először az $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ függvény viselkedését vizsgáljuk. Ha $n\leqq\dfrac{1}{x}<n+1$, n egész szám ($n\neq 0, -1$), akkor $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$. Az egyenlőtlenség az $\dfrac{1}{n}\geqq x>\dfrac{1}{n+1}$ esetben igaz. Ha $x>1$, ekkor $0<\dfrac{1}{x}<1$ miatt $\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$, végül ha $x\leqq -1$, akkor $0>\dfrac{1}{x}\geqq -1$ és $\left[\dfrac{1}{x}\right]=-1$.

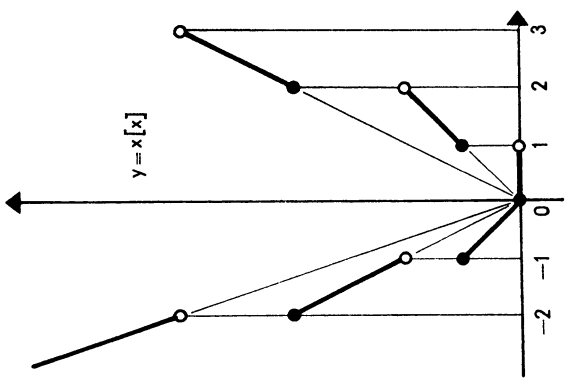
Ezek alapján az $\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$ függvényt az $\dfrac{1}{x}$ függvény görbéjének darabjaiból állíthatjuk elő (32. ábra).



31. ábra

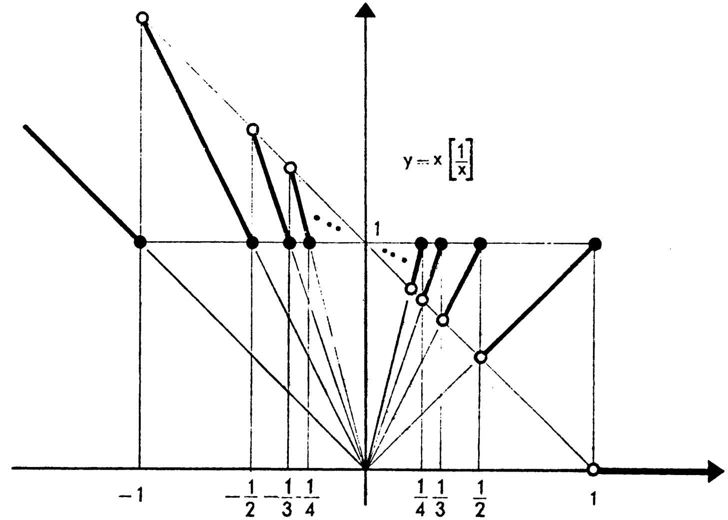


32. ábra



30. ábra

e) Az $x\left[\frac{1}{x}\right]$ függvény grafikonját szintén az $\left[\frac{1}{x}\right]$ függvény értékeinek figyelembevételével állíthatjuk össze (l. a *d)* feladat megoldását). A grafikon egyenes darabokból, pontosabban félegyenesekből és szakaszokból áll (33. ábra). (A szakaszok egyik végpontja az $y=1$ egyenesre, másik végpontja az $y=-x+1$ egyenesre illeszkedik.)



33. ábra

2. Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $\sqrt{x}$;

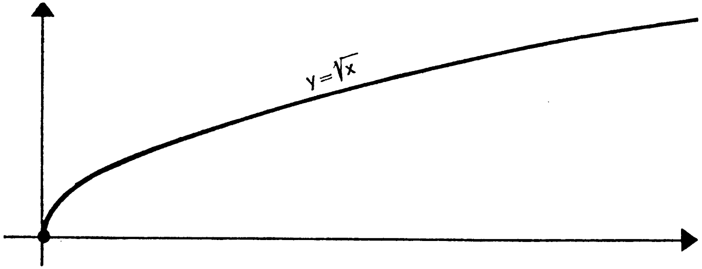
b) $\sqrt{x-[x]}$;

c) $|x+3|+|x-2|$;

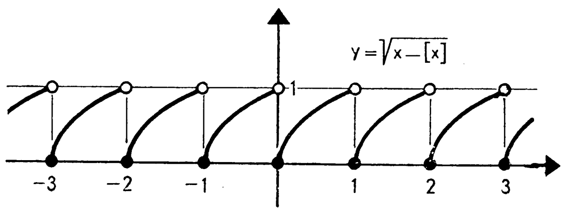
d) $|x^2+x-6|$;

e) $|3x|-x^2$;

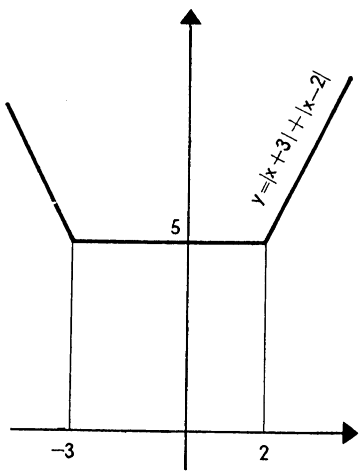
f) $\left|\frac{|x|+2}{|x|-2}\right|$.



34. ábra



35. ábra



36. ábra

Megoldás:

a) A $\sqrt{x}$ függvény az x^2 függvény $[0, +\infty)$ intervallumhoz tartozó ágának inverz függvénye, definícióját így adhatjuk meg: $\sqrt{x}$ az $x \geqq 0$-ra van értelmezve, értéke is nemnegatív és $(\sqrt{x})^2 = x$. A függvény grafikonját az inverz függvény tulajdonsága szerint úgy kaphatjuk meg, hogy az x^2 függvény grafikonjának a $[0, +\infty)$ intervallumhoz tartozó ágát az $y = x$ egyenesre tükrözzük. A $\sqrt{x}$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is $[0, +\infty)$ (34. ábra).

b) Az $[x]$ függvény definícióját felhasználva, ha az n egész számra $n \leqq x < n+1$ igaz, akkor $\sqrt{x-[x]} = \sqrt{x-n}$, amiből következik, hogy a függvény mindenütt értelmezve van, hiszen $n+1 > x \geqq n$ miatt $1 > x-n \geqq 0$ és a függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvény grafikonjának a $[0, 1)$ intervallumhoz tartozó darabjából állíthatjuk össze (35. ábra).

c) Az $|x|$ definíciója alapján a függvényt a következő alakban írhatjuk:

$$|x+3|+|x-2| = \begin{cases} -2x-1, & \text{ha} \quad x < -3, \\ 5, & \text{ha} \quad -3 \leqq x < 2, \\ 2x+1, & \text{ha} \quad 2 \leqq x. \end{cases}$$

A függvény grafikonja a 36. ábrán látható.

d) Az x^2+x-6 polinom két gyöke -3 és 2. Mivel az x^2 együtthatója pozitív szám: 1, a függvény értéke a két gyök között, tehát a $(-3, 2)$ intervallumban negatív, a $(-\infty, -3]$ és $[2, +\infty)$ intervallumban nemnegatív. Az abszolút érték definíciója alapján az ábrázolandó függvényt így írhatjuk tehát:

$$|x^2+x-6| = \begin{cases} x^2+x-6, & \text{ha} \quad x \leqq -3 \quad \text{vagy} \quad x \geqq 2, \\ -x^2-x+6, & \text{ha} \quad -3 < x < 2. \end{cases}$$

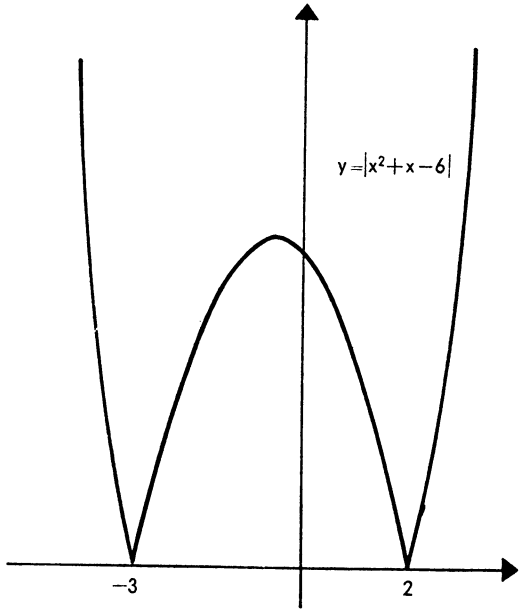
A függvény grafikonját ennek megfelelően paraboladarabokból rakhatjuk össze (37. ábra).

e) Az abszolút érték definíciójának felhasználásával írjuk ki részletesen az ábrázolandó függvényt:

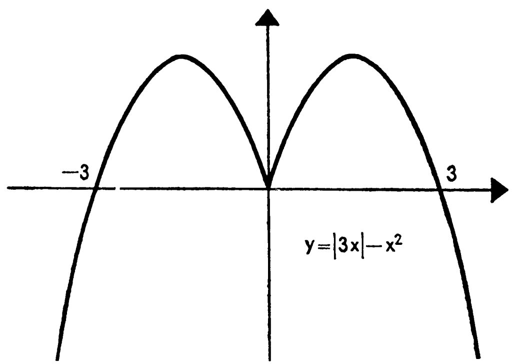
$$|3x|-x^2 = \begin{cases} 3x-x^2, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \\ -3x-x^2, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$

A függvény grafikonja tehát paraboladarabokból áll (38. ábra).

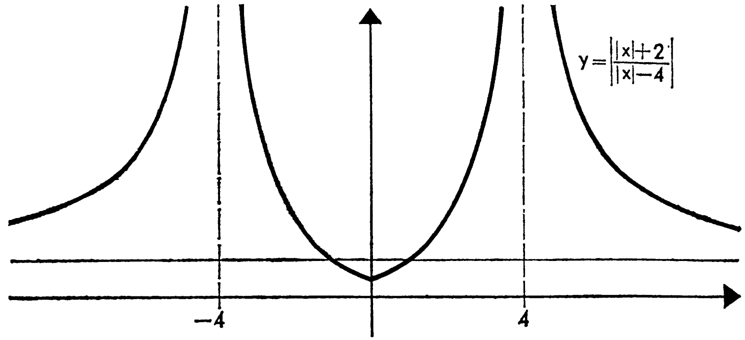
f) Az előző feladatokban alkalmazott módszerrel itt is írjuk ki két lépésben részletezve a függvény definícióját:



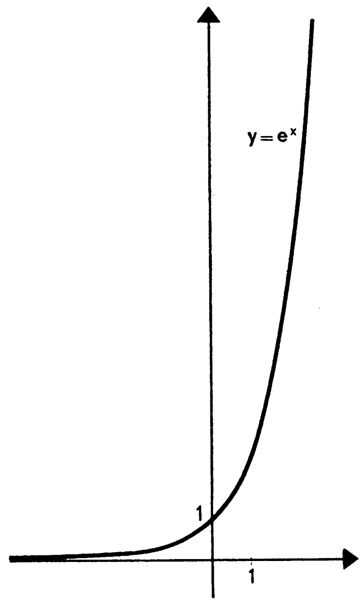
37. ábra



38. ábra



39. ábra



40. ábra

$$\left|\frac{|x|+2}{|x|-4}\right| = \begin{cases} \dfrac{|x|+2}{4-|x|}, \text{ ha } |x|<4, & \begin{cases} \dfrac{2-x}{4+x} = \dfrac{6}{x+4}-1, & \text{ha } -4<x<0,\\ \dfrac{x+2}{4-x}=\dfrac{6}{4-x}-1, & \text{ha } 0\leqq x<4,\end{cases} \\ \dfrac{|x|+2}{|x|-4}, \text{ ha } |x|>4, & \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-4}=\dfrac{6}{x-4}+1, & \text{ha } x>4,\\ \dfrac{x-2}{x+4}=1-\dfrac{6}{x+4}, & \text{ha } x<-4.\end{cases}\end{cases}$$

Ennek alapján a függvény grafikonját az $\frac{1}{x}$ függvény transzformációival kapott függvények grafikonjának darabjaiból állíthatjuk össze (39. ábra).

Az I. fejezet 4. pontjában definiáltuk a pozitív valós számok irracionális kitevőjű hatványát. Ennek alapján az e^x függvény tulajdonságait is vizsgálhatjuk. [Az e szám az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke, l. I. fejezet 3. pont]. A függvény értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$ értékkészlete a $(0, +\infty)$ intervallum (40. ábra). Az e^x függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növő, inverz függvényének, a $\log_e x = \ln x$ (41. ábra) függvénynek értelmezési tartománya $(0, +\infty)$ értékkészlete $(-\infty, +\infty)$.

Szükségünk lesz a jól ismert $\sin x$ és $\cos x$ függvényekre is (42. és 43. ábra). Mindkettő értelmezési tartománya a teljes számegyenes, értékkészlete $[-1, 1]$, mindkettő 2π szerint periodikus, azaz a

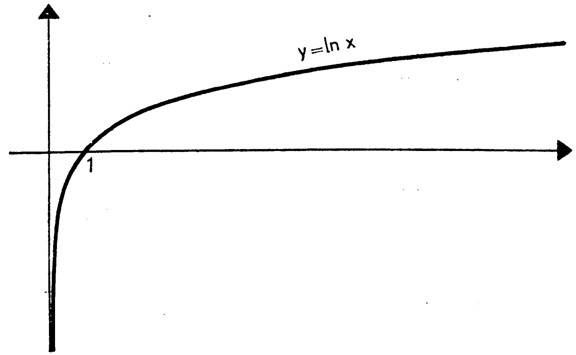
$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x$$

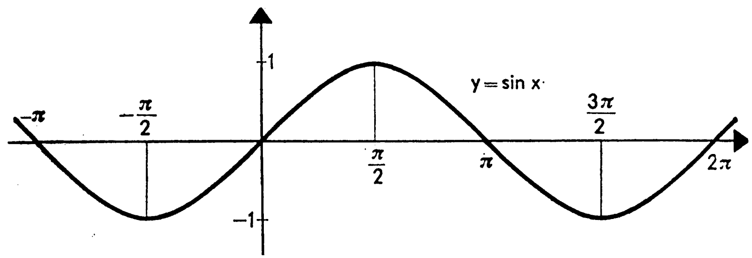
egyenlőségek minden x-re fennállnak. E két függvény szoros kapcsolatát a

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

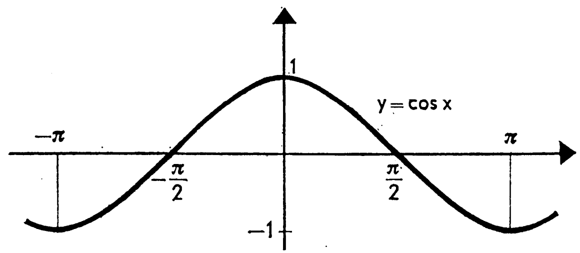
is kifejezi.



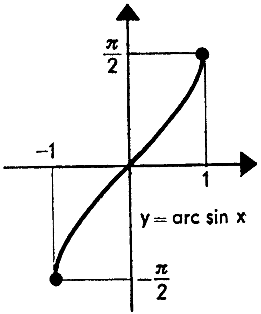
41. ábra



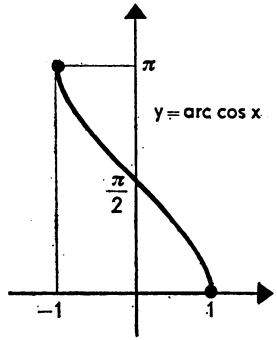
42. ábra



43. ábra



44. ábra

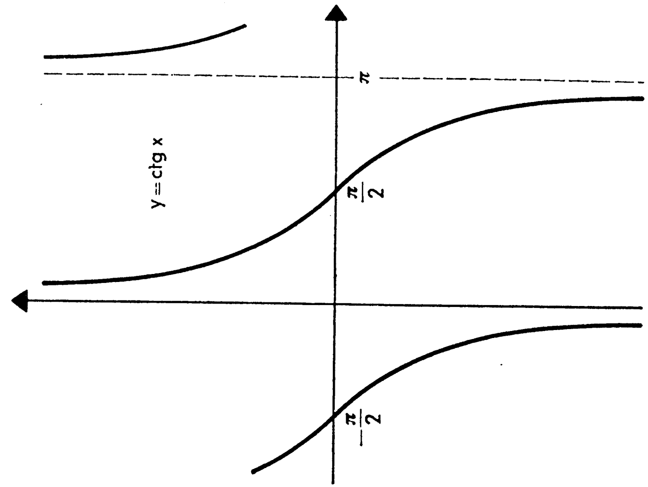


45. ábra

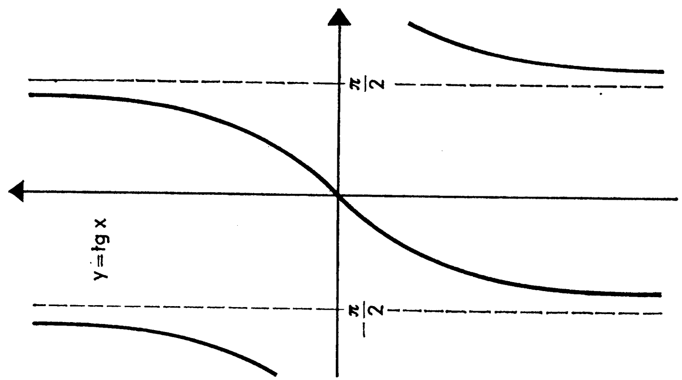
A sin x függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban szigorúan monoton növő, itt van inverz függvénye: arc sin x (olv. „arkusz szinusz") (44. ábra). Az arc sin x függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$, értékkészlete a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum. A cos x függvény a $[0, \pi]$ intervallumban szigorúan monoton fogyó, itt van inverz függvénye: arc cos x (olv.: „arkusz koszinusz") (45. ábra). Az arc cos x függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$, értékkészlete a $[0, \pi]$ intervallum.

A tg x és ctg x függvények π szerint periodikusak. A tg x értelmezési tartománya a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ alakú számok kivételével a valós számok halmaza, ahol k tetszőleges egész szám, értékkészlete $(-\infty, +\infty)$ (46. ábra). A ctg x függvény a $(k\pi, (k+1)\pi)$ alakú intervallumokban van értelmezve, ahol k egész szám, értékkészlete szintén $(-\infty, +\infty)$ (47. ábra).

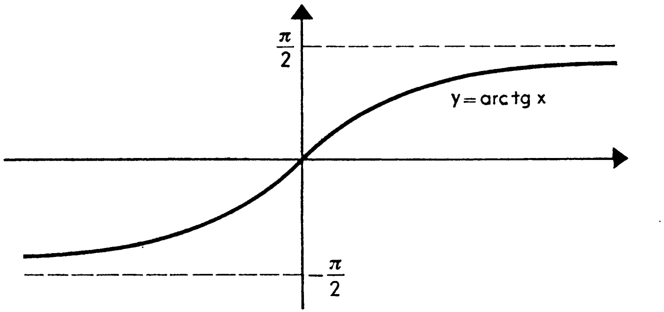
A tg x-nek a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-ben szigorúan monoton növő ága van, ehhez tartozó inverz függvénye az arc tg x (olv.: „arkusz tangens") függvény (48. ábra), amelynek értelmezési tartománya



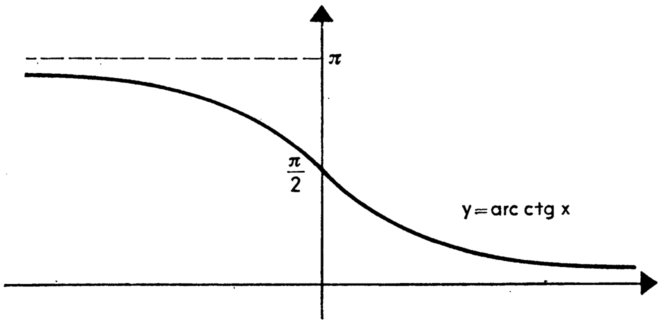
47. ábra



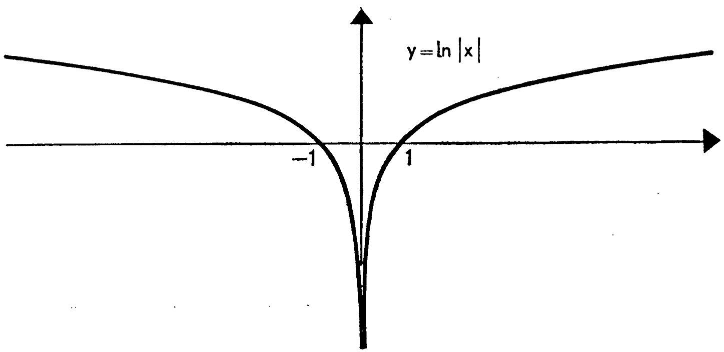
46. ábra



48. ábra



49. ábra



50. ábra

$(-\infty, +\infty)$, értékkészlete $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Hasonló módon a $\operatorname{ctg} x$ a $(0, \pi)$-ben szigorúan monoton fogy, inverze az $\operatorname{arc\,ctg} x$ (olv.: „arkusz kotangens") (49. ábra), értékkészlete $(0, \pi)$.

Gyakorló feladatok

3. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $\ln |x|$;

b) $2+3^{|1-|x||}$;

c) $|\ln |x-1||$;

d) $x^{\log_x x}$

Megoldás:

a) A függvény értelmezési tartománya a 0-tól különböző valós számok:

$$\ln |x| = \begin{cases} \ln x, & \text{ha } x>0, \\ \ln(-x), & \text{ha } x<0. \end{cases}$$

A függvényt ennek alapján már könnyű ábrázolni (50. ábra).

b) Az abszolút érték definíciója alapján írjuk ki részletesen a függvény definícióját:

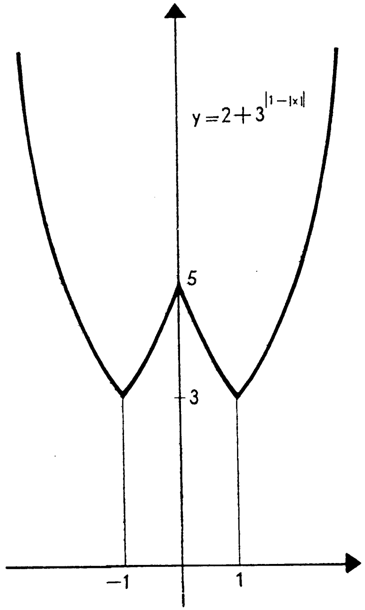
$$2+3^{|1-|x||} = \begin{cases} 2+3^{1-|x|}, \quad \text{ha} \quad |x| \leqq 1 \begin{cases} 2+3^{1-x}, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 1, \\ 2+3^{1+x}, & \text{ha } -1 \leqq x < 0 \end{cases} \\ 2+3^{|x|-1}, \quad \text{ha} \quad |x|>1 \begin{cases} 2+3^{x-1}, & \text{ha } x>1, \\ 2+3^{-x-1}, & \text{ha } x<-1. \end{cases} \end{cases}$$

A függvény képét a 3. függvény görbéjének egyes „darabjaiból" állíthatjuk össze (51. ábra).

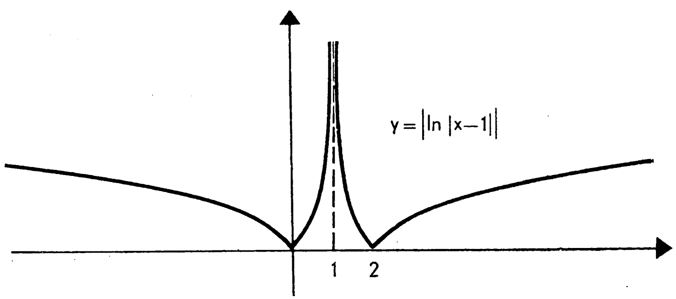
c) Ismét azt az utat érdemes követni, hogy írjuk fel a függvény definícióját esetszétbontással:

$$|\ln |x-1|| = \begin{cases} \ln |x-1|, \quad \text{ha} \quad |x-1| \geqq 1 \begin{cases} \ln(x-1), & \text{ha } x \geqq 2, \\ \ln(1-x), & \text{ha } x \leqq 0, \end{cases} \\ -\ln |x-1|, \quad \text{ha} \quad 0<|x-1|<1 \begin{cases} -\ln(x-1), & \text{ha } 1<x<2, \\ -\ln(1-x), & \text{ha } 0<x<1. \end{cases} \end{cases}$$

A függvényt ábrázoló görbe az 52. ábrán látható.



51. ábra



52. ábra

d) A $\log_x x$ függvény értelmezési tartománya a pozitív, 1-től különböző valós számok (1 alapú logaritmust nem értelmeztünk), azaz a (0, 1) és $(1, +\infty)$ nyílt intervallumok. Ezekben mindenütt $\log_x x=1$, tehát $x^{\log_x x}=x$, ha x a (0, 1) vagy az $(1, +\infty)$ nyílt intervallumok eleme (53. ábra).

4. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $[x]|\sin \pi x|$;

b) $\sin(\operatorname{arc}\sin x)$;

c) $\operatorname{arc}\sin(\sin x)$;

d) $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

Megoldás:

a) A $\sin \pi x$ függvény grafikonja úgy származtatható a $\sin x$ függvény képéből, hogy a görbét az x tengellyel párhuzamos irányban π-szeresére zsugorítjuk, azaz a függvény 0 helyei az egész számok lesznek. Az abszolút érték alkalmazásával a $\sin \pi x$ függvény képének az x tengely alá eső részeit tükrözni kell az x tengelyre. Az $[x]$ függvény értéke két szomszédos egész szám között állandó, így már megrajzolhatjuk az összetett függvény képét is (54. ábra).

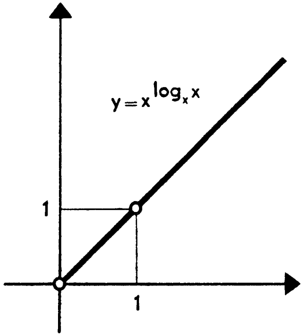
b) Mivel az $\operatorname{arc}\sin x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ intervallum, a $\sin(\operatorname{arc}\sin x)$ függvény is ugyanitt van értelmezve és értéke az inverz függvény definíciója alapján x (55. ábra).

c) A $\sin x$ függvény értelmezési tartománya $(-\infty, +\infty)$, értékkészlete a $[-1, 1]$ intervallum, így az $\operatorname{arc}\sin(\sin x)$ függvény is mindenütt értelmezve van, értékkészlete a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallum. A függvény 2π szerint periodikus:

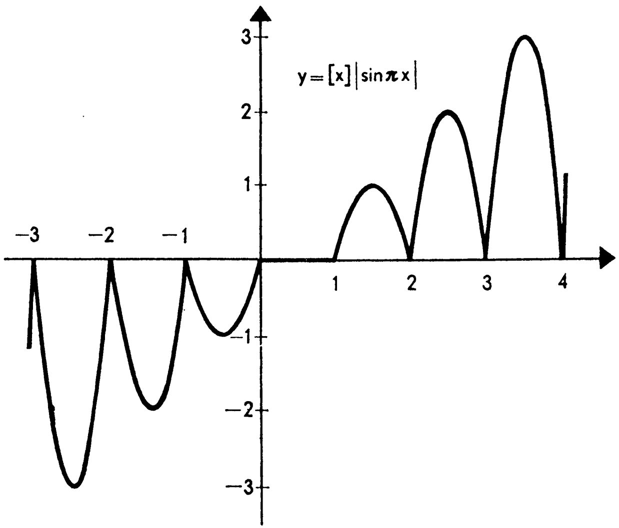
$$\operatorname{arc}\sin(\sin(x+2\pi))=\operatorname{arc}\sin(\sin x)$$

tetszőleges valós x-re. Így elég a függvényt egy 2π hosszúságú intervallumon vizsgálni; válasszuk ki a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumot. Ha $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, akkor az $\operatorname{arc}\sin x$ definíciója alapján:

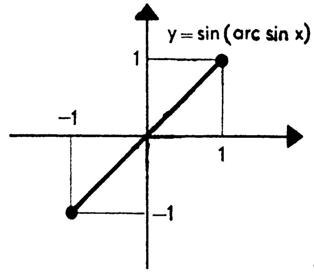
$$\operatorname{arc}\sin(\sin x)=x.$$



53. ábra



54. ábra



55. ábra

Ha $\frac{\pi}{2}<x\leqq\frac{3\pi}{2}$, akkor $-\frac{\pi}{2}\leqq\pi-x<\frac{\pi}{2}$ és $\sin(\pi-x)=\sin x$, ezért:

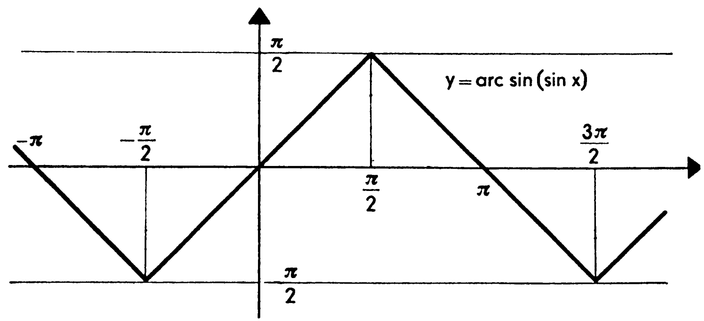
$$\text{arc sin}(\sin x)=\text{arc sin}(\sin(\pi-x))=\pi-x.$$

Az elmondottak alapján a függvény grafikonját az 56. ábrán szemléltetjük.

d) Az $\text{arc tg}\, x+\text{arc tg}\,\frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty, 0)$ és $(0, +\infty)$ nyílt intervallumok. Először vizsgáljuk a függvényt a $(0, +\infty)$ intervallumban és használjuk fel a

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

összefüggést, ami $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ esetén érvényes. Mivel $x>0$, $\frac{1}{x}>0$ is áll, így $0<\text{arc tg}\,\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}$, ezért



56. ábra

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)}=x.$$

A $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ tehát olyan, 0 és $\frac{\pi}{2}$ közötti szám, aminek a tangense x. Az arc tg x a pozitív x-ekre szintén ilyen szám és mivel a tangens függvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-ben szigorúan monoton növő, ezért ez csak úgy lehet, hogy minden $0<x$-re

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,tg} x,$$

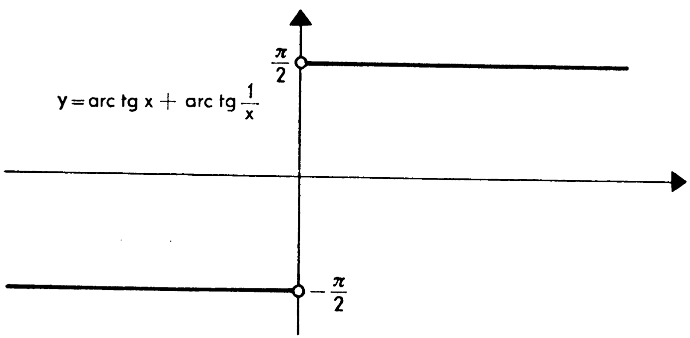
azaz

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Mivel az arc tg x páratlan függvény, ezért ha $x<0$, azaz $-x>0$, akkor

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=-\left[\operatorname{arc\,tg}(-x)+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{x}\right)\right]=-\frac{\pi}{2}.$$

Ezek alapján a függvény grafikonja két félegyenesből áll (57. ábra).



57. ábra

5. Adjunk vázlatos képet a következő függvények grafikonjáról:

a) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$;

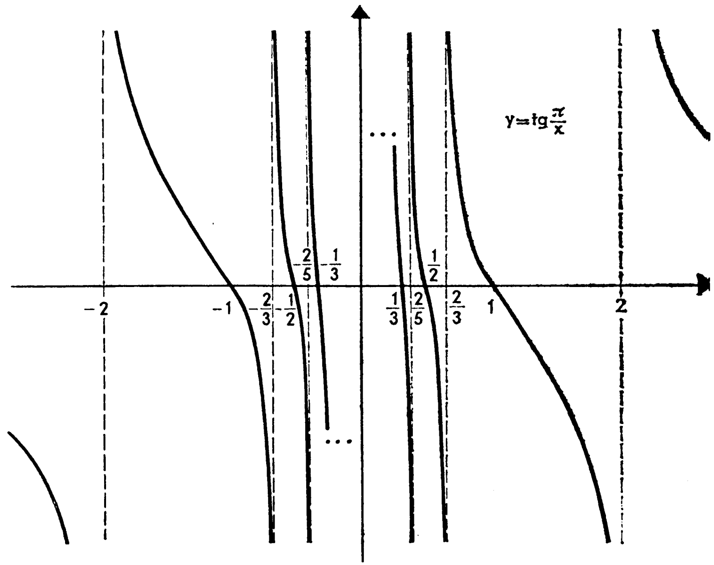
b) $x\sin\frac{\pi}{x}$;

c) $\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{x}$.

Megoldás:

a) Keressük ki először a függvény zérushelyeit: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}=0$ akkor igaz, ha $\frac{\pi}{x}=k\pi$ (ahol $k=\pm1, \pm2, \ldots$), azaz $\frac{1}{x}=k$, $x=\frac{1}{k}$. A függvény a $\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$) helyeken nincs értelmezve, azaz ott, ahol

$$x=\frac{2}{2k+1}.$$



58. ábra

Két, szomszédos $\frac{2}{2k+1}$ alakú hely között a függvény végig fogy, hiszen a

$\operatorname{tg} x$ szigorúan monoton nő két, szomszédos $\frac{\pi}{2}+k\pi$ alakú hely között. Vegyük észre még, hogy a függvény páratlan, azaz:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{-x}=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}.$$

Ennek alapján az 58. ábrán látható vázlatos képet kapjuk.

b) Itt is először a függvény zérushelyeit keressük meg. Mivel $x=0$-ra nincs értelmezve a függvény, értéke csak ott lesz 0, ahol $\sin\frac{\pi}{x}=0$, vagyis a $\frac{\pi}{x}=k\pi$ $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, $x=\frac{1}{k}$ helyeken. Azt is érdemes észrevenni, hogy mivel $-1\leqq\sin\frac{\pi}{x}\leqq 1$, ezért $x>0$-ra

$$-x\leqq x\sin\frac{\pi}{x}\leqq x$$

és egyenlőség csak ott áll fenn, ahol $\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|=1$. Más szavakkal

$$x\sin\frac{\pi}{x}=x,\quad \text{ha}\quad \frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad \text{vagyis}\quad x=\frac{2}{4k+1}\quad (k=0,1,2,\ldots)$$

és

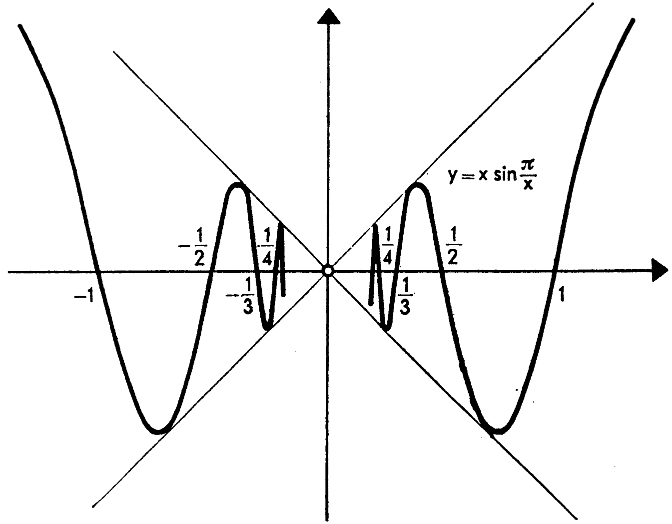
$$x\sin\frac{\pi}{x}=-x,\quad \text{ha}\quad \frac{\pi}{x}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\quad x=\frac{2}{4k+3}\quad (k=0,1,2,\ldots).$$

A függvény páros függvény, mert

$$(-x)\sin\frac{\pi}{-x}=x\sin\frac{\pi}{x}.$$

Ezek alapján a függvény grafikonjának vázlatos képét az 59. ábrán rajzoltuk fel.

c) A feladatot a *b)* feladat mintájára oldhatjuk meg. A függvény 0 helyei itt is az $\frac{1}{k}$ alakú számok $(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, $x>0$-ra itt is érvényes a megfelelő



59. ábra

$$-\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{x}\leqq\frac{1}{x}$$

egyenlőtlenség és az egyenlőségjel is ugyanazokon a helyeken érvényes, mint a *b)* feladatban (60. ábra).

Feladatok

1. Vázoljuk a következő függvények grafikonját:

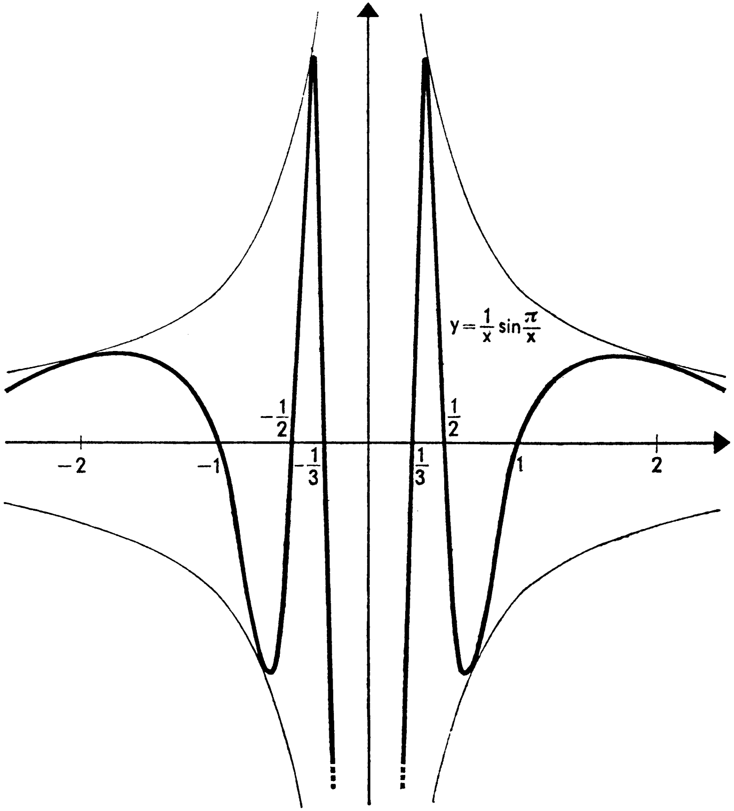
a) $\frac{[x]}{x}$;

b) $x^2-[x^2]$;

c) $x+\sqrt{x-[x]}$;

d) $\sqrt{x+|x-1|}$;

e) $\frac{x-1}{|x|}$.



60. ábra

2. Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

a) $\ln\frac{1}{x}$;

b) $e^{\ln x}$

c) $e^{[x]}$;

d) $e^{-|x|}$.

3. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a) $\sqrt{1-\sin^2 x}$;

b) $x+\arcsin(\sin x)$;

c) $\frac{\pi}{3}-|\operatorname{arc\,tg}(x-2)|$,

d) $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

4. Vázoljuk fel a következő, sorozatok határértékeként definiált függvények grafikonját:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$, ha $x\geqq 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}$, ha $x\geqq 0$.

5. Szemléltessük a következő függvény grafikonját:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{ha } 0\leqq x<\pi,\\ 2f(x-\pi) & \text{egyébként.}\end{cases}$$

2. Függvény határértéke és folytonossága

Egy sor geometriai, fizikai, kémiai stb. fogalom szabatos definíciójának megadásakor azt tapasztaljuk, hogy olyan szabatos matematikai fogalomra van szükség, ami azt fejezi ki, hogy egy adott függvény értékei „közelednek” valamilyen meghatározott számhoz, amikor a független változó értékei „közelednek” egy rögzített helyhez.

Nézzünk néhány, ezzel kapcsolatos példát.

1. Tegyük fel, hogy egy anyagi pont mozgása során a megtett út hosszát, mint az idő függvényét az $f(x)$ függvény írja le ($x>0$). Egy $a>0$ rögzített időpontban akarjuk meghatározni a mozgó pont pillanatnyi sebességét.

Ekkor a következőképpen járhatunk el. Veszünk egy $x>a$ időpontot és kiszámítjuk az a-tól x-ig eltelt idő alatt a mozgó pont átlagsebességét. Ez nyilván

$$v(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

A kapott átlagsebesség — ha az $x-a$ „elég kicsi" — jó közelítéssel megadja az a-beli pillanatnyi sebességet. Nyilván annál pontosabb lesz a közelítés, minél közelebb választjuk az x időpontot a-hoz, $v(x)$ annál jobban „megközelíti" azt a számot, amit az a időpontbeli pillanatnvi sebességen akarunk érteni.

2. Tegyük fel, hogy $g(x)$ jelenti egy vezeték adott pontján az x időpontig átfolyt töltésmennyiséget. Értelmezni akarjuk egy adott a időpontban a vezetéknek a kiszemelt pontján átfolyó áram erősségét. Az a időponttól $x>a$ időpontig eltelt $x-a$ időtartam alatt az átlagos áramerősség nyilván

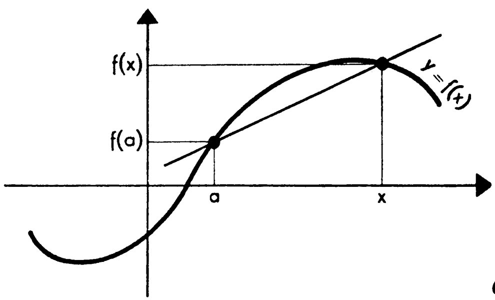
$$i(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Az a időpontbeli pillanatnyi áramerősségen azt a számot célszerű érteni, amit ez az $i(x)$ függvény „megközelít", ha x „közeledik" a-hoz.

Hasonló módon lehetne szabatos fogalmat adni például a radioaktív bomlás sebességére, a teljesítményre, a kémiai reakciósebességre.

3. Nézzünk még egy fontos szemléletes példát a geometria területéről. Egy $y=f(x)$ egyenletű görbe $x=a$, $y=f(a)$ pontjához húzott érintőjét szeretnénk definiálni. Az érintőegyenes nyilván az $(a, f(a))$ ponton áthaladó egyenesek közt van, így elég a meredekségét meghatározni (61. ábra). Vegyünk fel egy az a-tól különböző x helyet és írjuk fel az $(a, f(a))$, $(x, f(x))$ pontokon át húzott szelő meredekségét:

$$m(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$



61. ábra

Az érintőt úgy célszerű definiálni, mint a szelő határhelyzetét, amikor x „közeledik" a-hoz. Az így adódó érintő meredekségét nyilván az a szám adja meg, amihez $m(x)$ „közeledik", ha x „közeledik" a-hoz.

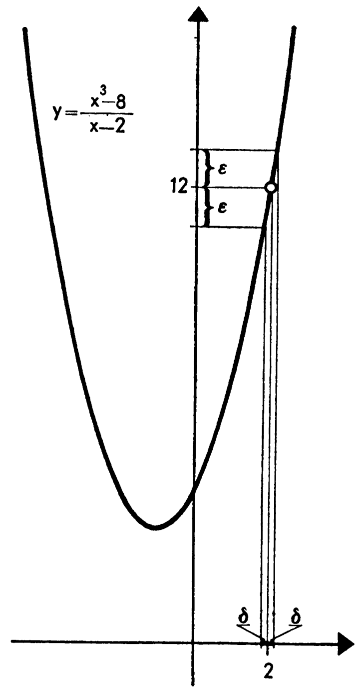
Vizsgáljunk ezután egy konkrét függvényt. Legyen ez a függvény az

$$f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}.$$

Az $f(x)$ értelmezési tartománya a 2-től különböző valós számok és felhasználva, hogy $8=2^3$ az értelmezési tartományban mindenütt igaz, hogy:

$$f(x)=x^2+2x+4 \quad (x\neq 2).$$

A függvényt könnyen ábrázolhatjuk is (62. ábra).



62. ábra

Az $f(x)$ függvény értelmezési tartományában mindenütt megegyezik a $g(x)=x^2+2x+4$ függvénnyel. A $g(x)$ függvény az $x=2$ helyen is értelmezve van, és értéke 12. Az $f(x)$ 2-höz közeli helyen felvett értékeit kiszámítva azt tapasztaljuk, hogy ezek 12-höz közel lesznek. Egészen pontosan a következő igaz: akármilyen $\varepsilon>0$ számot adunk is meg az $f(x)$ értékek 12-től való eltérése ennél is kisebb lesz, ha x-et a 2 hely alkalmas kis δ sugarú környezetéből választjuk úgy, hogy $x\neq 2$ (62. ábra). Bizonyítsuk be ezt az állítást. Adjunk meg egy $\varepsilon>0$ számot és becsüljük meg $f(x)$ és 12 eltérését:

(1) $\quad |f(x)-12|=|x^2+2x+4-12|=|x-2|\,|x+4|.$

Tegyük fel, hogy x benne van a 2 szám 1 sugarú környezetében, azaz

(2) $\quad -1<x-2<1$

fennáll. A (2) egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$5<x+4<7,$$

amiből az (1) kifejezést így becsülhetjük:

(3) $\quad |f(x)-12|<7|x-2|.$

Ha x-et úgy választjuk, hogy $|x-2|<1$ mellett $|x-2|<\frac{\varepsilon}{7}$ is fennálljon és $x\neq 2$, akkor a (3) egyenlőség nyilván teljesül. Jelölje δ az $\frac{\varepsilon}{7}$ és 1 közül a kisebbik számot, ekkor azt kaptuk, hogy ha

$$0<|x-2|<\delta,$$

akkor

$$|f(x)-12|<\varepsilon$$

igaz. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Általában azt mondjuk, hogy *az a hely egy környezetében értelmezett $f(x)$ függvény határértéke az a helyen az A szám, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\delta>0$, hogy ha*

$$0<|x-a|<\delta,$$

akkor

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

fennáll. Azt, hogy $f(x)$ határértéke az a helyen A, így is jelöljük: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, vagy $f(x)\to A$, ha $x\to a$.

Az előzőkben tehát éppen azt igazoltuk, hogy:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12.$$

Gyakorló feladatok

6. Vázoljuk az $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ függvény grafikonját és igazoljuk a definíció alapján, hogy:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{2}.$$

Megoldás:

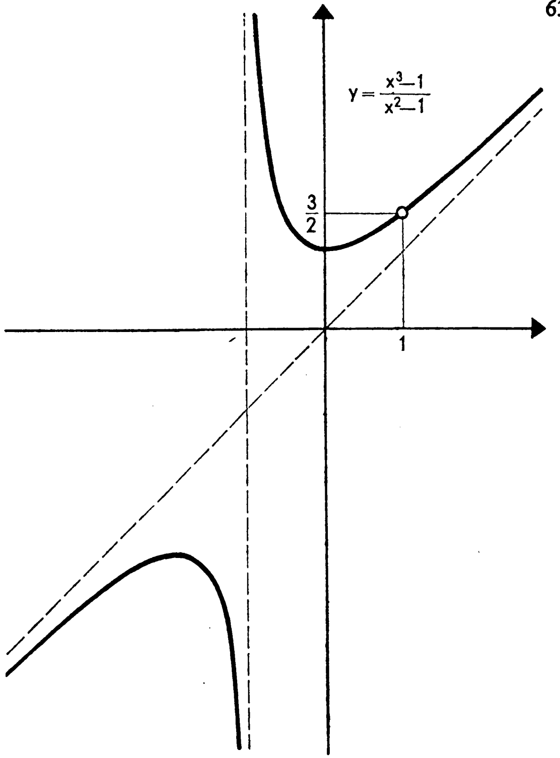
Az $f(x)$ függvény $x=1$-re nincs értelmezve, minden más valós számra értelmezve van. Az értelmezési tartományában mindenütt érvényes a következő átalakítás:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{x^2+x+1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}.$$

A kapott alakból már leolvashatjuk, hogy az $f(x)$ függvény görbéjét az 1-től különböző helyeken az x és az $\dfrac{1}{x+1}$ függvények grafikonjának összegeként állíthatjuk elő (63. ábra).

Adjunk meg most egy tetszőleges $\varepsilon>0$ számot és becsüljük meg $f(x)$ és $\frac{3}{2}$ eltérését. Tegyük fel, hogy x már benne van az 1 hely 1 sugarú környezetében, azaz $0<x<2$, $x\neq 1$:

63. ábra



(4) $$\left|\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right|=|x-1|\,\frac{2x+1}{2(x+1)}<\frac{5}{2}\,|x-1|.$$

Ha most x-et úgy választjuk, hogy az eddigi feltételeken kívül

$$|x-1|<\frac{2}{5}\,\varepsilon$$

is teljesüljön, akkor nyilván (4) szerint

$$\left|f(x)-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

is fennáll. Ha tehát δ az 1 és $\frac{2}{5}\,\varepsilon$ számok közül a kisebbiket jelenti, akkor

amennyiben

$$0<|x-1|<\delta$$

igaz, akkor

$$\left|f(x)-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$$

is fennáll, ami éppen azt jelenti, hogy $f(x)\to\frac{3}{2}$, ha $x\to 1$.

7. Ábrázoljuk az

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

függvényt és igazoljuk a definíció alapján, hogy $f(x)\to 4$, ha $x\to 2$.

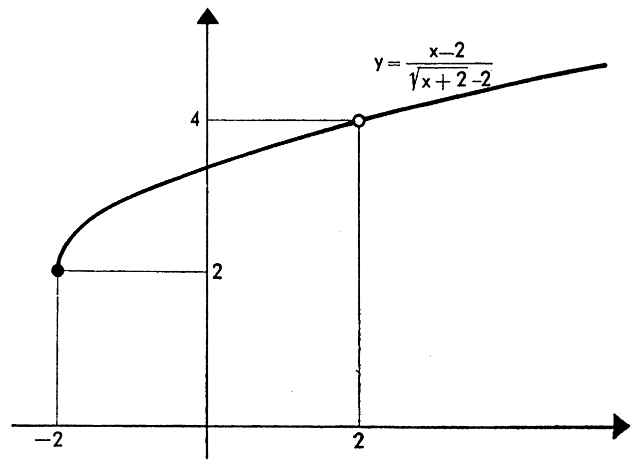
Megoldás:

Az $f(x)$ függvény $[-2,\,2)$ és a $(2,\,+\infty)$ intervallumokban van értelmezve. Alakítsuk át az $f(x)$-et definiáló törtet úgy, hogy gyöktelenítjük a nevezőt:

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\sqrt{x+2}+2,\quad x\neq 2.$$

A kapott alakból már könnyen ábrázolhatjuk $f(x)$-et (64. ábra).

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges adott szám és becsüljük meg $f(x)$ és 4 eltérését



64. ábra

(5) $$\left|\sqrt{x+2}+2-4\right|=\left|\sqrt{x+2}-2\right|=\frac{|x-2|}{\sqrt{x+2}+2}<\frac{1}{2}|x-2|.$$

Közben felhasználtuk, hogy $\sqrt{x+2}\geqq 0$.) Ha most x-et úgy választjuk, hogy $x\geqq -2$, $x\neq 2$ és

$$|x-2|<2\varepsilon,$$

akkor az (5) egyenlőtlenség miatt

$$|f(x)-4|<\varepsilon$$

is teljesül, ami azt jelenti, hogy $f(x)\to 4$, ha $x\to 2$.

8. Igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{\pi}{x}=0.$$

Megoldás:

A függvény grafikonjának vázlatos rajzát az 59. ábrán adtuk meg.

Mivel $\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leqq 1$,

ezért

(6) $$\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right|\leqq |x|, \quad \text{ha} \quad x\neq 1.$$

Ha $\varepsilon>0$ egy tetszőleges adott szám, akkor (6) alapján:

$0<|x|<\varepsilon$-ból

$$\left|x\sin\frac{\pi}{x}\right|<\varepsilon$$

következik, ami azt jelenti, hogy igazoltuk az állítást.

9. Igazoljuk, hogy az 1*e)* gyakorló feladatban vizsgált és a 33. ábrán vázolt függvényre igaz a következő állítás:

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

Megoldás:

Az ábráról közvetlenül leolvashatók és az egész rész definíciója alapján bizonyíthatók a következő egyenlőtlenségek:

(7) $$1-x\leqq x\left[\frac{1}{x}\right]\leqq 1, \quad \text{ha} \quad x>0,$$

(8) $$1\leqq x\left[\frac{1}{x}\right]\leqq 1-x, \quad \text{ha} \quad x<0.$$

A (7) és (8) egyenlőtlenségek alapján:

(9) $$-x\leqq x\left[\frac{1}{x}\right]-1\leqq 0, \quad \text{ha} \quad x>0,$$

(10) $$0\leqq x\left[\frac{1}{x}\right]-1\leqq -x, \quad \text{ha} \quad x<0.$$

A (9) és (10) egyenlőtlenségekből következik, hogy $x\neq 0$-ra:

(11) $$\left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right|\leqq |x|.$$

Ha most $\varepsilon>0$ tetszőleges szám, akkor minden olyan x-re, amire

$$0<|x|<\varepsilon$$

igaz, (11) szerint fennáll, hogy:

$$\left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right|<\varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $\delta=\varepsilon$ megfelelő és $x\left[\frac{1}{x}\right]\to 1$, ha $x\to 0$.

A határérték definíciójának megfogalmazása előtt vizsgált példában a következőt tapasztaltuk: az $\frac{x^3-8}{x-2}$ függvény az értelmezési tartományában, tehát az $x=2$ hely kivételével mindenütt megegyezett az x^2+2x+4 függvénnyel. Az utóbbi függvény az $x=2$ helyen is értelmezve van, itt értéke 12, ami megegyezik a határértékével, hiszen az $\frac{x^3-8}{x-2}$ függvény határértéke a 2 helyen

12 volt, így a 2-től különböző helyen vele egyenlő függvény határértéke is 12. A függvénynek a 2 helyen felvett értéke nem játszik szerepet a 2 helyen vett határértékben. Az x^2+2x+4 függvényről tehát azt tapasztaltuk, hogy a 2 helyen a határértéke megegyezett a helyettesítési értékével.

Általában azt mondjuk, hogy *az $f(x)$ függvény az* a *helyen folytonos, ha itt értelmezve van, a határértéke létezik és megegyezik a helyettesítési értékkel*, azaz:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Az előzők szerint például az x^2+2x+4 függvény a 2 helyen folytonos, mert:

$$\lim_{x \to 2} (x^2+2x+4) = 12.$$

Gyakorló feladatok

10. Igazoljuk, hogy az $|x|$ függvény a 0 helyen folytonos.

Megoldás:

A függvény a 0 helyen értelmezve van és itt értéke 0. Így azt kell megmutatnunk, hogy:

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor az

$$||x| - 0| = |x|$$

egyenlőség miatt, ha $|x| < \varepsilon$, akkor $||x| - 0| < \varepsilon$ is fennáll, tehát $\delta = \varepsilon$ választással teljesül a határérték definíciójában megkívánt egyenlőtlenség.

11. Igazoljuk, hogy az x függvény mindenütt folytonos.

Megoldás:

Rögzítsünk tetszőlegesen egy a helyet és igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Ez az összefüggés nyilvánvaló, hiszen ha $\varepsilon > 0$-t megadjuk, akkor $\delta = \varepsilon$ megfelelő és így a határérték definíciójának feltétele teljesül.

12. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény az $x=0$ helyen folytonos.

Megoldás:

A 8. gyakorló feladatban igazoltuk, hogy:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0),$$

tehát $f(x)$ folytonos a 0 helyen.

13. Igazoljuk, hogy a $\sin x$ függvény mindenütt folytonos.

Megoldás:

Rögzítsünk egy tetszőleges a számot és mutassuk meg, hogy:

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Alkalmazzuk a szinuszfüggvényre vonatkozó addíciós tételből igazolható

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$$

azonosságot. Mivel a koszinuszfüggvény értékei -1 és 1 között vannak és $|\sin x| \leqq |x|$,

(12) $$|\sin x - \sin a| = 2 \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \leqq |x-a|.$$

Így, ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges adott szám, akkor $\delta = \varepsilon$ jó lesz, mert a (12) egyenlőtlenség miatt, ha

$$|x-a| < \varepsilon$$

akkor

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

is fennáll.

Feladatok

6. Igazoljuk, hogy:

a) $$\lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a;$$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, ha $a>0$.

7. Legyen:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & ha \quad x \text{ racionális szám}, \\ 0, & \text{ha} \quad x \quad \text{irracionális szám}. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0,$$

és

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}=0.$$

8. Legyen c tetszőleges valós szám. Igazoljuk, hogy az $f(x)=c$ függvény mindenütt folytonos.

9. Igazoljuk, hogy a $\cos x$ függvény mindenütt folytonos.

10. Definiáljuk az $f(x)$ függvényt a következőképpen:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha} \quad x=\frac{p}{q}, \quad q>0, \quad (p, q)=1, \\ 0, & \text{ha} \quad x \text{ irracionális szám, vagy } x=0. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $f(x)$-nek mindenütt van határértéke, továbbá az irracionális helyeken és a 0 helyen még folytonos is.

11. Igazoljuk, hogy az $\sqrt[n]{x}$ függvény ($n>1$ természetes szám) minden pozitív x helyen folytonos.

3. A határérték és a műveletek

Az előző fejezetben azt tapasztaltuk, hogy közvetlenül a definíció alapján gyakran körülményes dolog a határértékfeladatok megoldása. A következőkben az lesz a célunk, hogy megismertessük az olvasót a határértékszámítás technikáját egyszerűsítő eszközökkel.

Már az I. fejezetben a sorozatok határértékével kapcsolatban láttuk, hogy hasznos dolog tisztázni a határátmenet és a műveletek kapcsolatát. Sorozatok határértékére igaz volt, hogy a határátmenet és a műveletek elvégzésének sorrendje felcserélhető. A függvény határértéke és a sorozat határértéke között szoros kapcsolat van, amit a következő fontos tétel fejez ki:

Az $f(x)$ függvénynek az $x=a$ helyen akkor és csak akkor A a határértéke, ha minden olyan x_n sorozatra, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $(x_n\neq a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ teljesül.

Gyakorló feladat

14. Igazoljuk az előző állításnak azt a részét, hogy ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, akkor minden $x_n\to a$, $x_n\neq a$ sorozatra $f(x_n)\to A$.

Megoldás:

Adjunk meg egy $\varepsilon>0$-t és mutassuk meg, hogy ehhez van olyan N, hogy ha $n>N$, akkor

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon.$$

A $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ feltétel miatt ehhez az ε-hoz van olyan $\delta>0$, hogy ha $0<|x-a|<\delta$, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$. Mivel $x_n\to a$, $x_n\neq a$, a $\delta>0$-hoz van olyan N index, hogy ha $n>N$, akkor $0<|x_n-a|<\delta$, de akkor, ha $n>N$ $|f(x_n)\to A|<\varepsilon$ is teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy $f(x_n)\to A$.

Az állítás másik részének bizonyítását feladatként fogjuk majd megoldani.

Nézzük most meg a tétel néhány fontos követelményét.

Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *és* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, *akkor* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=$ $=A+B$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$ *és ha* $B\neq 0$, *akkor* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

(Az utolsóval kapcsolatban l. a 12. feladatot.)

Gyakorló feladat

15. Igazoljuk, hogy ha $f(x)\to A$, $g(x)\to B$, ha $x\to a$, akkor $f(x)\cdot g(x)\to$ $\to A\cdot B$, $x\to a$ esetén.

Megoldás:

Elég azt igazolni, hogy ha tetszőleges $x_n \to a$, $x_n \neq a$ sorozatot választunk, akkor $f(x_n) \cdot g(x_n) \to A \cdot B$.

Legyen tehát x_n egy tetszőleges, olyan sorozat, amelyre $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Ekkor a sorozat és függvény határértékének kapcsolatára vonatkozó tétel alapján $f(x_n) \to A$ és $g(x_n) \to B$ is teljesül; de akkor a szorzatsorozat határértéke a határértékek szorzata, vagyis $f(x_n) \cdot g(x_n) \to A \cdot B$.
A többi állítást is hasonló módon lehet igazolni.

A most megfogalmazott eredménynek egy fontos következménye:

Ha $f(x)$ és $g(x)$ az a helyen folytonos függvények, akkor $f(x)+g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ is folytonosak az a helyen és ha $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is folytonos az a helyen.

Gyakorló feladat

16. Igazoljuk az összeg folytonosságára vonatkozó állítás helyességét.

Megoldás:

A feltétel szerint $f(x)$ és $g(x)$ folytonosak az a helyen, tehát $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Ekkor az összeg határértékére vonatkozó tétel szerint $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big) = f(a)+g(a)$, ami éppen azt jelenti, hogy az $f(x)+g(x)$ függvény folytonos az a helyen.

Eddigi eredményeink alapján most egy csapásra sok függvényről igazolni tudjuk, hogy minden olyan helyen, ahol értelmezve van, folytonos. Ezeknek a függvényeknek a folytonosságát azután jól lehet hasznosítani bizonyos típusú határérték-feladatok megoldására. Ezt a következő gyakorló feladatok megoldása során fogjuk tapasztalni.

Gyakorló feladatok

17. Legyen $f(x)$ egy legalább elsőfokú, valós együtthatós polinomfüggvény, azaz

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

ahol $n \geqq 1$ természetes szám, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok, $a_0 \neq 0$. Igazoljuk, hogy $f(x)$ mindenütt folytonos.

Megoldás:

A 11. gyakorló feladat szerint az x függvény mindenütt folytonos és a 8. feladat alapján a konstans függvény is mindenütt folytonos. A szorzat folytonosságára vonatkozó tétel ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy x^k, ahol $k \geqq 1$ tetszőleges természetes szám, mindenütt folytonos függvény. Ismét a szorzat folytonosságát alkalmazva, az $a_k x^{n-k}$ alakú függvények $k=0, 1, \ldots, n$-re mindenütt folytonos függvények, így ezek összege, $f(x)$ is mindenütt folytonos.

18. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két valós együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy az $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ racionális törtfüggvény minden olyan helyen folytonos, ahol értelmezve van, azaz ahol $g(x) \neq 0$.

Megoldás:

Az előző, 17. gyakorló feladatban megmutattuk, hogy $f(x)$ és $g(x)$ mindenütt folytonosak. A hányados folytonosságára vonatkozó tétel alapján tehát $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is minden olyan helyen folytonos, ahol $g(x) \neq 0$.

19. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3-2x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$,

a tetszőleges valós szám; $n \geqq 1$, $n \in T$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

a tetszőleges valós szám, $n \geqq 1$, $n \in T$.

Megoldás:

a) Az $x=1$ helyen a számláló is, meg a nevező is 0. Algebrai azonosságok alkalmazásával egyszerűsítsük a törtet:

$$(13) \qquad \frac{x^3-1}{x^3-2x+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x-1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x-1}.$$

A (13) egyenlőség jobb oldalán álló racionális törtfüggvény a 18. gyakorló feladat szerint folytonos az 1 helyen és értéke az 1 hely egy környezetében az 1 kivételével mindenütt megegyezik az $\dfrac{x^3-1}{x^3-2x+1}$ függvény értékeivel.

Így a két függvény határértéke is megegyezik. A (13) jobb oldalán álló, az 1 helyen folytonos függvénynek viszont a határértéke az 1 helyen a helyettesítési értékével egyezik meg, tehát:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2+x-1} = \frac{1+1+1}{1+1-1} = 3.$$

b) Itt is az *a)* feladat megoldásában követett gondolatmenet vezet röviden célhoz:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-1} = -\frac{1}{3}.$$

Itt is kihasználtuk, hogy az $\dfrac{x-3}{x^2-1}$ függvény már folytonos a 2 helyen, így itt a határértéke megegyezik a helyettesítési értékével.

c) Az *a)* és *b)* feladat megoldásának mintájára járhatunk el itt is:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} (x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

d) Itt $(x-a)^2$-nel kell egyszerűsíteni, ehhez többször kell alkalmazni az előző feladatban is felhasznált azonosságot:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}-na^{n-1}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^{n-1}-a^{n-1}+x^{n-2}a-a^{n-1}+\ldots+xa^{n-2}-a^{n-1}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} (x^{n-2}+x^{n-3}a+\ldots+xa^{n-3}+a^{n-2}+a(x^{n-3}+\ldots+a^{n-3})+$$

$$+\ldots+a^{n-2}) =$$

$$= (n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+\ldots+a^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}.$$

Az eddigi eszközeinkkel például a $\sin(x^2+2)$ függvényről elég nehézkesen tudnánk igazolni, hogy mindenütt folytonos. Ez a függvény az $f(x)=\sin x$ és a $g(x)=x^2+2$ függvényekből közvetett függvényképzéssel keletkezik: $\sin(x^2+2)=f(g(x))$. Mutassuk meg, hogy általában igaz az az állítás, hogy folytonos függvényekből képezett közvetett függvény is folytonos, azaz pontosabban ha $g(x)$ az a helyen folytonos és $f(x)$ a $g(a)$ helyen folytonos függvény, akkor $f(g(x))$ folytonos az a helyen.

Gyakorló feladatok

20. Igazoljuk a most kimondott állítást!

Megoldás:

A sorozat és függvény határértéke közötti kapcsolatot használjuk fel. Válasszunk egy tetszőleges, $x_n \to a$ sorozatot (itt nem kell kikötnünk, hogy $x_n \neq a$, mert folytonosságról van szó!). Ekkor $g(x_n)\to g(a)$, mert g folytonos az a helyen, de f folytonos a $g(a)$ helyen, tehát $f(g(x_n))\to f(g(a))$, ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a)).$$

Ennek alapján már könnyen következtethetünk például arra, hogy a $\sin(x^2+2)$ függvény mindenütt folytonos, mert a $\sin x$ és az x^2+2 függvények mindenütt folytonosak, így a közvetett függvény is mindenütt folytonos.

21. Mutassuk meg, hogy ha $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ az a hely egy környezetében (esetleg az a helyet kivéve) mindenütt értelmezve vannak, itt minden $x \neq a$-ra

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

teljesül és $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A$, akkor $\lim_{x \to a} h(x) = A$ is fennáll. (A függvény határértékére vonatkozó ún. „rendőrszabály".)

Megoldás:

Az állítás egyszerűen következik a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételből és a függvény és sorozat határértéke közötti kapcsolatból. Elég megmutatni azt, hogy tetszőleges $x_n \to a$, $x_n \neq a$ sorozatra $h(x_n) \to A$. A feltételből következik, hogy $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to A$ és

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n),$$

de akkor $h(x_n) \to A$ is fennáll.

22. Igazoljuk, hogy $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Megoldás:

Mutassuk meg először azt, hogy ha $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{14}$$

Ehhez felhasználjuk azt a — $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ definíciójából következő — egyenlőtlenséget, hogy ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Ebből, azonos átalakításokkal azt kapjuk, hogy ha

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \text{akkor} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Mivel $\cos x$ és $\frac{\sin x}{x}$ páros függvények az egyenlőtlenség akkor is igaz lesz, ha $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ teljesül.

A (14) egyenlőtlenségben az alsó korlát, $\cos x$ mindenütt folytonos (9. feladat), így a 0 helyen is, tehát:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Ebből már a „rendőrszabály" alapján következik, hogy:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

23. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, $(n > 1$ egész$)$;

c) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Megoldás:

a) Trigonometrikus azonosságok alkalmazásával alakítsuk át először a vizsgált kifejezést a következő módon:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2. \tag{15}$$

Itt az $f(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ függvény határértékét kell meghatározni a 0 helyen. Az $f(x)$ függvényt a következő módon származtathatjuk: a

$$g(x) = \frac{x}{2}$$

függvényt helyettesítjük a

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha}\quad x\neq 0,\\ 1, & \text{ha}\quad x=0\end{cases}$$

függvény x változója helyébe, azaz $f(x)=h(g(x))$ (legalábbis a 0 hely kivételével). A $g(x)$ függvény folytonos mindenütt, így a 0 helyen is és $g(0)=0$. A $h(x)$ függvény az előző, 22. gyakorló feladat eredménye alapján szintén mindenütt folytonos, még a $g(0)=0$ helyen is, hiszen:

$$\lim_{x\to 0} h(x)=1.$$

Ekkor — a közvetett függvény folytonosságára vonatkozó eredményünk szerint — $h(g(x))$ is folytonos a 0 helyen és

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} h\big(g(x)\big)=h\big(g(0)\big)=h(0)=1.$$

A keresett határérték tehát a (15) átalakítás alapján:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

b) Alakítsuk át a kifejezést.

$$(16)\qquad \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+(\sqrt[n]{1+x})^{n-2}+\ldots+\sqrt[n]{1+x}+1},\quad \text{ha}\quad x\neq 0.$$

A (16) egyenlőség jobb oldalán álló függvény folytonos a 0 helyen, mert $\sqrt[n]{1+x}$ az $f(x)=\sqrt[n]{x}$ és $g(x)=1+x$ függvényekből van összetéve: $\sqrt[n]{1+x}=$ $=f(g(x))$ és $g(x)$ folytonos a 0 helyen, $f(x)$ pedig folytonos a $g(0)=1$ helyen (11. feladat). Így az $\sqrt[n]{1+x}$-ből összeadással, szorzással és osztással felépülő függvény is folytonos a 0 helyen (a nevező a 0 helyen nem nulla!). Ezek felhasználásával:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}+\ldots+1}=\frac{1}{n}.$$

c) Itt algebrai és trigonometrikus azonosságok alkalmazásával alakítjuk át a kifejezést:

$$\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}=\frac{-2\operatorname{tg} x}{2\sin x\cos x(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})}=$$

$$=-\frac{1}{\cos^2 x(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})},\quad \text{ha}\quad x\neq k\pi,\ k \text{ egész szám.}$$

A kapott kifejezésről ismét könnyen látható, hogy a π helyen folytonos függvényt definiál, tehát:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}-\frac{1}{\cos^2 x(\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x})}=-\frac{1}{2}.$$

d) Először alakítsuk át itt is a kifejezést a következő módon:

$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}.$$

A kapott alakból már az eddigi eredmények alapján könnyen kiszámíthatjuk a határértéket:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

24. Vizsgáljuk meg, hogy az adott függvényeknek a megjelölt helyen van-e határértéke, ha létezik a határérték, számítsuk is ki:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{1}{1-x}}$,

d) $\lim\limits_{x\to \pi} (x-\pi)\sin\frac{1}{x-\pi}$.

Megoldás:

a) Igazoljuk, hogy a $\sin\frac{1}{x}$ függvénynek nincs határértéke a 0 helyen. Ehhez elég megmutatni, hogy van két olyan x_n és x_n' sorozat, amelyre $x_n\to 0$, $x_n'\to 0$, $x_n\neq 0$, $x_n'\neq 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}$. Ha ugyanis volna a $\sin\frac{1}{x}$ függvénynek határértéke a 0 helyen, akkor minden ilyen sorozatra a függvényértékek sorozata is ehhez a közös határértékhez tartana. Legyen $x_n=\frac{1}{n\pi}$, $x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, ahol $n\geq 1$, egész. Nyilván mindkét sorozat határértéke $n\to\infty$-re 0, viszont

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

b) Itt is azt fogjuk megmutatni, hogy a függvénynek nincs határértéke a 0 helyen. Legyen $x_n=\frac{1}{n}$, $x_n'=-\frac{1}{n}$, $n\geq 1$, egész. Mindkét sorozat a 0-hoz tart és ugyanakkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{x_n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n'|}{x_n'}=-1,$$

tehát a függvénynek nem lehet határértéke a 0 helyen.

c) Itt vizsgáljuk a függvény értékeit az $x_n=\frac{n-1}{n}$ sorozat mentén. Mivel $x_n\to 1$, $x_n\neq 1$, ha van a függvénynek az 1 helyen határértéke, akkor az x_n sorozat mentén a függvényértékek sorozata is ehhez a határértékhez kell hogy tartson. Ugyanakkor:

$$\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{1-x_n}}=\lim_{n\to\infty}2^n=+\infty,$$

tehát $\lim\limits_{x\to 1}2^{\frac{1}{1-}}$ nem létezik.

d) A keresett határérték 0, mert

$$\left|(x-\pi)\sin\frac{1}{x-\pi}\right|\leq|x-\pi|<\varepsilon,$$

ha $0<|x-\pi|<\varepsilon$, ami éppen azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\sin\frac{1}{x-\pi}=0$.

Feladatok

12. Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq 0$, akkor van a-nak olyan környezete, ahol $f(x)\neq 0$, ha $x\neq a$.

13. Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq 0$, akkor $\frac{1}{f(x)}$ az a egy környezetében $(x\neq a)$ értelmezve van és $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{A}$.

14. Igazoljuk, hogy ha minden $x_n\to a$, $x_n\neq a$ sorozatra $f(x_n)$ konvergens, akkor $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ létezik.

15. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{k}{1-x^k}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $(k, n \in \mathrm{T})$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$.

16. Számítsuk ki a következő trigonometrikus függvények határértékét:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{\sin nx}$, $(k, n \in \mathrm{T})$;

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x^3}}{1-\cos x}$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

17. Legyen:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x=0. \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha} \quad x=\dfrac{p}{q}, \quad q\geqq 1,\ p,\ q \text{ egészek},\ (p, q)=1, \\ 0, & \text{ha} \quad x \text{ irracionális, vagy } x=0. \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a következő határértékek:

$$\lim_{x\to 0} g(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(g(x)).$$

18. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ folytonos a b helyen és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, akkor $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(b)$.

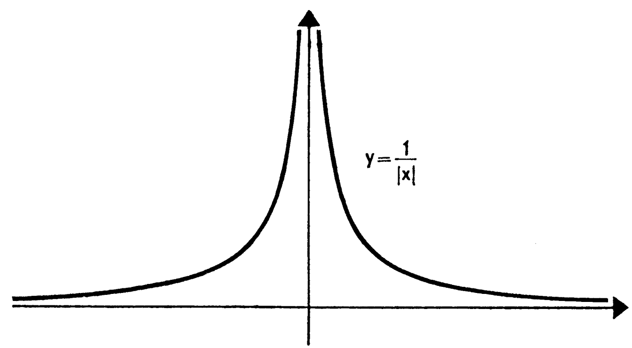
4. A határérték fogalmának kibővítése

A számsorozat határértékének fogalmát általánosítottuk oly módon, hogy beszéltünk $+\infty$-hez, $-\infty$-hez tartó sorozatról is. A függvény határértékét is általánosítani fogjuk úgy, hogy beszélni fogunk olyan függvényről is, ami egy adott a helyen $+\infty$-hez, vagy $-\infty$-hez tart.

Ábrázoljuk például az $\dfrac{1}{|x|}$ függvényt. Az abszolút érték definíciója alapján:

$$\frac{1}{|x|}=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x>0, \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x<0; \end{cases}$$

a függvény képét a 65. ábrán rajzoltuk meg.



65. ábra

Az $\frac{1}{|x|}$ függvény a 0 hely környezetében úgy viselkedik, hogy ha x közel van a 0-hoz, akkor a függvény értéke nagy lesz. Pontosabban, tetszőleges P számhoz van olyan $\delta>0$, hogy ha $0<|x|<\delta$ teljesül, akkor $\frac{1}{|x|}>P$ is fennáll $\left(\text{ha } P>0\text{, akkor } \delta=\frac{1}{P} \text{ jó, ha } P\leqq 0\text{, akkor bármilyen } \delta>0 \text{ jó}\right)$.

Általában azt mondjuk, hogy *az $f(x)$ függvény határértéke az a helyen $+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, ha tetszőleges P számhoz van olyan $\delta>0$, hogy ha*

$$0<|x-a|<\delta,$$

akkor

$$f(x)>P$$

is fennáll.

Az előzők szerint például $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$. Hasonló módon definiálhatjuk a $-\infty$-t mint határértéket: *az $f(x)$ függvénynek az a helyen a határértéke $-\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, ha tetszőleges N számhoz van olyan $\delta>0$, hogy ha*

$$0<|x-a|<\delta,$$

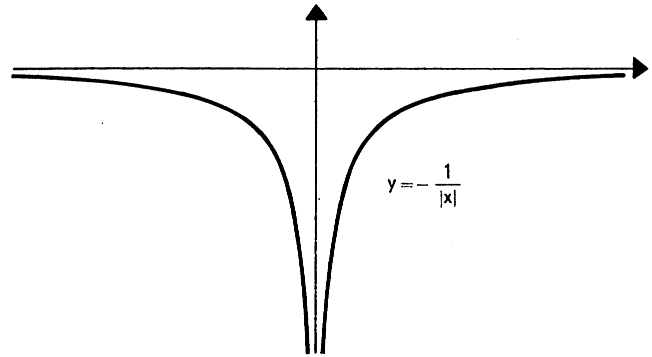
akkor

$$f(x)<N$$

is fennáll.

A $-\frac{1}{|x|}$ függvénynek a 0 helyen $-\infty$ a határértéke, ezt az előzők alapján könnyű igazolni (66. ábra).

A függvények viselkedését a $+\infty$-ben is vizsgálni fogjuk. Ezen azt értjük, hogy nagy x-ekre hogyan viselkedik a függvény értéke.



66. ábra

Az $f(x)$ függvénynek a $+\infty$-ben a határértéke A, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan ω szám, amelyre, ha $x>\omega$, akkor:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Gyakorló feladatok

25. Igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Megoldás:

Adjunk meg tetszőlegesen egy $\varepsilon>0$ számot. Ehhez $\omega=\frac{1}{\varepsilon}$ jó lesz, mert ha

$$x>\frac{1}{\varepsilon},$$

akkor

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\varepsilon.$$

26. Adjunk szabatos definíciót a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ határértékfogalomra és igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x\to+\infty} [x]=+\infty.$$

Megoldás:

Az $f(x)$ függvénynek a $+\infty$-ben $+\infty$ a határértéke, ha tetszőleges P számhoz van olyan ω szám, amelyre, ha $x>\omega$, akkor:

$$f(x)>P.$$

Igazoljuk a definíció alapján, hogy:

$$\lim_{x\to+\infty} [x]=+\infty$$

Adjunk meg egy P számot és legyen k az első olyan egész szám, amire $k>P$ igaz. Ekkor az $[x]$ definíciója szerint, ha $x>k$, akkor $[x]\geqq k>P$, ami éppen azt jelenti, hogy $[x]\to+\infty$, ha $x\to+\infty$.

27. Adjunk szabatos definíciót a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ határértékfogalmakra és igazoljuk, hogy

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{[x]}=1$

és

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty.$

Megoldás:

Az $f(x)$ függvénynek a $-\infty$-ben a határértéke A, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan ω szám, hogy

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

fennáll, ha

$$x<\omega.$$

Az $f(x)$ függvénynek a $-\infty$-ben $-\infty$ a határértéke, ha tetszőleges N számhoz van olyan ω szám, hogy

$$f(x)<N,$$

ha teljesül, hogy $x<\omega$

a) Az 1.*c)* gyakorló feladatban ábrázoltuk az $\frac{x}{[x]}$ függvényt. Becsüljük meg először a függvényértéknek 1-től való eltérését negatív x-ekre. Legyen $n\geqq 1$ egész és tegyük fel, hogy $-n\leqq x<-n+1$. Ekkor $[x]=-n$, tehát:

$$(17)\qquad 1\geqq\frac{x}{[x]}>1-\frac{1}{n}.$$

A (17) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(18)\qquad \left|\frac{x}{[x]}-1\right|<\frac{1}{n},$$

ha $-n\leqq x<-n+1$ teljesül. Adjunk most meg egy tetszőleges $\varepsilon>0$ számot és válasszuk meg n-et úgy, hogy $\frac{1}{n}<\varepsilon$ teljesüljön és legyen $x<-n+1$. Ekkor a (18) egyenlőségből következik, hogy

$$\left|\frac{x}{[x]}-1\right|<\varepsilon,$$

ami éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{[x]}=1.$$

b) Mutassuk meg először, hogy ha $x<-1$, akkor $x^3<x$:

ha $x<-1$,

akkor

$$-x>1,$$

$$x^2>-x,$$

innen pedig következik, hogy

$$-x^3>-x,$$

ami ekvivalens az $x^3<x$ egyenlőtlenséggel, mivel feltettük, hogy $x<-1$ fennáll. Adjunk meg most egy tetszőleges N valós számot és legyen $\omega=\min(N,\ -1)$. Ha $x<\omega$, akkor az előző egyenlőtlenség miatt $x^3<x<N$ is fennáll és ezt kellett igazolnunk.

A határérték-fogalomnak még egy további általánosítására lesz szükségünk: a jobb és bal oldali határérték fogalmára. Az 1*a)* gyakorló feladatban vizsgáltuk az $x-[x]$ függvényt. Ennek az egész helyeken nincs határértéke. Ha viszont jobbról közeledünk egy egész helyhez, akkor a függvény értéke 0-hoz közeledik, balról közeledve egy egész helyhez a függvényérték 1-hez közeledik.

A jobb és bal oldali határérték szabatos definícióját így adhatjuk meg: *Az $f(x)$ függvénynek az a helyen a jobb oldali (bal oldali) határértéke A, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $\delta>0$ szám, hogy ha $0<x-a<\delta$ $(0<a-x<\delta)$ teljesül, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$ is igaz.*

Azt, hogy $f(x)$-nek az a helyen a jobb oldali határértéke A, így jelöljük:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A,$$

azt pedig, hogy a bal oldali határértéke A, így:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=A.$$

Gyakorló feladat

28. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor

$$\lim_{x\to n+0} (x-[x])=0,$$
$$\lim_{x\to n-0} (x-[x])=1.$$

Megoldás:

Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon>0$ számot és legyen δ az ε és az 1 közül a kisebbik, azaz legyen $\delta=\min(\varepsilon, 1)$. Tegyük fel, hogy

$$0<x-n<\delta.$$

A δ választása miatt ekkor $n<x<n+1$ is teljesül, ami azt jelenti, hogy $[x]=n$, tehát

$$|x-[x]-0|=x-n<\varepsilon.$$

Ha $0<n-x<\delta$, akkor $n-1<x<n$, így $[x]=n-1$, tehát

$$|x-[x]-1|=n-x<\varepsilon.$$

$$|x-[x]-1|=n-x<\varepsilon.$$

Természetesen a jobb és bal oldali határérték definícióját kiterjeszthetjük úgy, hogy megengedjük a $+\infty$-t és $-\infty$-t mint határértéket. Ha rendszerezni akarjuk az eddig tárgyalt határértékdefiníciókat, akkor ezt így tehetjük meg: egy $f(x)$ függvény határértékét nézhetjük

egy *a* helyen,
egy *a* helyen jobb oldalról, bal oldalról,
a $+\infty$-ben és
a $-\infty$-ben.

Ez összesen öt lehetőség. Minden helyen beszélhetünk véges határértékről, $+\infty$-ről vagy $-\infty$-ről: ez három lehetőség. Együttvéve tehát $3\cdot5=15$ fajta határértékről beszélhetünk. Edd g kilenc definíciót adtunk meg, a még hátralevő hat definíció szabatos megfogalmazását feladatként fogjuk kitűzni.

A függvény és a sorozat határértéke között fennálló fontos kapcsolatról szóló tétel, amit a 3. pontban fogalmaztunk meg a többi határérték esetére is kiterjeszthető. Példaként fogalmazzuk meg a $-\infty$-ben vett $+\infty$ határérték esetére vonatkozó tételt: *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *összefüggés akkor és csak akkor áll fenn, ha minden* $x_n\to-\infty$ *sorozatra* $f(x_n)\to+\infty$ *igaz.* Az állítás bizonyítása az eredeti tétel bizonyításához hasonló módon történhet.

A sorozat és függvény határérték közötti kapcsolatból a $+\infty$-ben, $-\infty$-ben és véges helyen jobb oldali és bal oldali véges határérték esetére is következik, hogy *a határátmenet és a műveletek sorrendje felcserélhető* (a megfelelő feltételek teljesülése esetén).

A következő néhány gyakorló feladatban azt fogjuk vizsgálni, hogy mit mondhatunk olyan esetekben egy művelet eredményeként kapott függvény határértékéről, amikor a művelet valamelyik, vagy mindkét komponensének határértéke $+\infty$, $-\infty$ vagy osztás esetén a nevező határértéke 0.

Gyakorló feladatok

29. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ és $\lim_{x\to\alpha} g(x)=A$, akkor $\lim_{x\to\alpha}(f(x)+ +g(x))=+\infty$ (itt α lehet egy véges a szám, lehet $+\infty$, $-\infty$, de lehet az $a+0$, $a-0$ jelek valamelyike is).

Megoldás:

Alkalmazzuk a sorozat és függvény határértéke közötti kapcsolatról szóló tételt. Legyen x_n egy tetszőleges sorozat, amely α-hoz tart (ha α véges akkor kössük ki, hogy $\alpha\neq x_n$, ha $\alpha=a+0$, akkor $x_n>\alpha$, ha $\alpha=a-0$, akkor $x_n<\alpha$). A feltevés szerint $f(x_n)\to+\infty$ és $g(x_n)\to A$, de akkor a sorozatok határértékével kapcsolatos eredményekből tudjuk, hogy $f(x_n)+g(x_n)\to+\infty$. Eredményünk azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=+\infty.$$

30. Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ és $\lim_{x\to\alpha} g(x)=A$, akkor $A>0$ esetén $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x)=+\infty$, $A<0$ esetén $\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x)=-\infty$ és $A=0$ esetén az $f(x)g(x)$ függvény viselkedéséről az α környezetében nem tudunk mit mondani.

Megoldás:

Az $A>0$ és $A<0$ eseteket az előző, 29. gyakorló feladat megoldásához hasonlóan lehet elintézni. Az $A=0$ esetet vizsgáljuk meg részletesen. Legyen $\alpha=+\infty$ és $f(x)=x^2$. Ekkor $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ teljesül.

a) $g(x)=\frac{1}{x}$, akkor $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ és $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.

b) $g(x)=\frac{1}{x^2}$, akkor $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ és $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1=1$.

c) $g(x)=\frac{1}{x^3}$, akkor $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ és $\lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

d) $g(x)=\frac{1}{x^2}\sin x$, akkor $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, mert $|g(x)|\leq\frac{1}{x^2}$, ha $x>0$ és

$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sin x$ nem létezik, mert ha $x_n=n\pi$ ($n>0$ egész), akkor $\lim_{\to+\infty} g(x_n)=0$, ha $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ ($n>0$ egész), akkor $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)=1$.

Hasonló példákat lehet megadni $\alpha=-\infty$, véges, $\alpha=a+0$, $\alpha=a-0$ esetre is.

Tovább vizsgálhatnánk az eddigi minták alapján a többi esetet is. Jó külön is megjegyezni, hogy a következő típusú határértékekről nem tudunk mit mondani: „$\infty\cdot 0$", „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$" és „$\infty-\infty$".

Az ilyen típusú határértékeknél minden konkrét esetben külön vizsgálat szükséges annak eldöntésére, létezik-e a kérdéses határérték és ha igen, mivel egyenlő. A feladatok során gyakran találkozunk majd ilyen esetekkel.

A jobb és bal oldali határérték fogalmának mintájára definiálni lehet a jobb és bal oldali folytonosságot:

Az $f(x)$ függvény az a helyen jobbról (balról) folytonos, ha itt értelmezve van, létezik a jobb oldali (bal oldali) határértéke és az megegyezik a függvényértékkel:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)\quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)\right).$$

A definíció alapján például nagyon egyszerűen látható, hogy az $[x]$ függvény minden egész helyen jobbról folytonos.

Fontos szerepük van a zárt intervallumban folytonos függvényeknek. *Egy f függvényről akkor mondjuk, hogy az $[a, b]$ intervallumban folytonos, ha minden $a<x<b$ helyen folytonos, a-ban jobbról folytonos, b-ben pedig balról folytonos.*

Feladatok

19. Adjuk meg a következő határérték-fogalmak szabatos definícióját:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;$

c) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty;$

d) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty;$

f) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty.$

20. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1};$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x+2}{3x^3-10};$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}.$

21. Jelöljön $p_m(x)$ ($m\geqq 1$ egész) m-edfokú valós együtthatós polinomot. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p_n(x)}{p_k(x)} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{p_n(x)}{p_k(x)}$$

határértékeket (n, $k\in$ T).

22. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ folytonos az a helyen, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$ $=a$, akkor $\lim\limits_{x\to+\infty} f(g(x))=f(a)$.

23. Mutassuk meg, hogy ha $\lim\limits_{x\to\alpha} |f(x)|=+\infty$ (α jelölhet egy véges a számot, lehet a $+\infty$, a $-\infty$ szimbólum vagy $a+0$, $a-0$ alakú), akkor

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)}=0.$$

24. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}),$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{9x^2+1}-3x);$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+5}+5x);$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right).$

25. Számítsuk ki a megadott függvényeknek a megadott helyen a jobb és bal oldali határértékét:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$, $a=1;$

b) $f(x)=\sqrt{x-[x]}$, $a=0;$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, $a=0;$

d) $f(x)=\operatorname{tg} x$, $a=\dfrac{\pi}{2}.$

26. Igazoljuk, hogy az $f(x)$ függvénynek az a helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha a-ban létezik a jobb és bal oldali határértéke is és a kettő megegyezik.

27. Bizonyítsuk be, hogy egy függvény az a helyen akkor és csak akkor folytonos, ha itt jobbról is folytonos és balról is folytonos.

28. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ egy $[a,b]$ intervallumban folytonos, akkor itt korlátos, azaz van olyan k és K szám, hogy minden $x \in [a, b]$-re $k \leqq f(x) \leqq K$ teljesül.

29. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban folytonos, akkor van olyan $x_1 \in [a, b]$ és $x_2 \in [a, b]$, hogy minden $x \in [a, b]$-re $f(x_1) \leqq f(x) \leqq f(x_2)$ (Weierstrass-tétel).

5. Monoton függvények határértéke

A számsorozatoknak fontos osztályát alkotják a monoton sorozatok, mert minden monoton sorozatnak van véges vagy végtelen határértéke. A függvények között hasonló okokból játszanak fontos szerepet a monoton függvények.

Legyen $f(x)$ *egy* (a, b) *intervallumban értelmezett monoton növő (fogyó) függvény. Tetszőleges* $c \in (a, b)$*-ben az* $f(x)$*-nek van jobb és bal oldali véges határértéke;* $f(x)$*-nek az* a*-ban létezik tágabb értelemben vett jobb oldali határértéke, mégpedig ez vagy véges, vagy* $-\infty$ $(+\infty)$; *a* b*-ben pedig tágabb értelemben vett bal oldali határértéke van, ez vagy véges, vagy* $+\infty$ $(-\infty)$.

Gyakorló feladatok

31. Igazoljuk az előbb megfogalmazott tételnek azt a részét monoton növő függvényére, hogy ha $c \in (a, b)$, akkor létezik a

$$\lim_{x \to c-0} f(x)$$

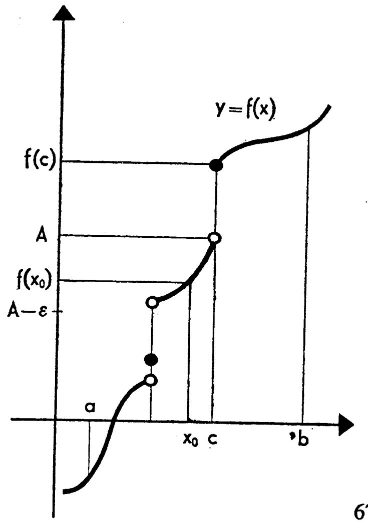
véges határérték.

Megoldás:

A bizonyítás gondolatmenete hasonló a monoton sorozatok határértékének létezéséről szóló tétel igazolásakor alkalmazott módszerhez. A 67. ábra szemlélteti a bizonyítást.

Jelöljük K-val az (a, c) intervallumban felvett függvényértékek halmazát. A K halmaz felülről korlátos, mert $f(x)$ az (a, b)-ben monoton növő, így ha $a < x < c$, akkor $f(x) \leqq f(c)$, tehát $f(c)$ a K egy felső korlátja. Ekkor, az I. fejezetben igazolt tétel alapján, K-nak van legkisebb felső korlátja, másképpen felső határa; legyen ez A, azaz

$$A = \sup K.$$



67. ábra

Megmutatjuk, hogy $\lim_{x \to c-0} f(x) = A$. Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot és keressünk ehhez jó δ-t. Az $A - \varepsilon$ szám nem felső korlátja K-nak, így van olyan $a < x_0 < c$, hogy $f(x_0) > A - \varepsilon$. Ha most tetszőleges x-et választunk x_0 és c között, akkor a függvény monoton növése és A definíciója miatt

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqq f(x) \leqq A < A + \varepsilon,$$

azaz

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

ha $0 < c - x < c - x_0 = \delta$.

A tétel többi állítását hasonló módon lehet igazolni.

32. Igazoljuk, hogy az e^x függvény mindenütt folytonos.

Megoldás:

Az e^x definíciójából következik, hogy a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növő. Így az előző tételből következik, hogy tetszőleges a helyen létezik $\lim_{x \to a-0} e^x = A$ és $\lim_{x \to a+0} e^x = B$ határérték és $A \leqq e^a \leqq B$. Elég igazolni, hogy $A=B$, mert ha ez igaz, akkor a 26. feladat eredménye szerint itt van határértéke és ez megegyezik az e^a helyettesítési értékkel.

Indirekt úton okoskodunk. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $A<B$. Ekkor A definíciója miatt van olyan $r_n \to a$, $r_n < a$ racionális számsorozat, hogy $e^{r_n} \to A$ és a B definíciója szerint van olyan $s_n \to a$, $s_n > a$ racionális számsorozat, hogy $e^{s_n} \to B$. Mivel

$$s_n - r_n \to 0, \quad e^{s_n - r_n} = \frac{e^{s_n}}{e^{r}} \to 1,$$

másrészt

$$\lim_{n\to\infty} (e^{s_n - r_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} e^{s_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} e^{r_n}} = \frac{B}{A} > 1,$$

ezzel ellentmondásra jutottunk.

33. *a)* Igazoljuk, hogy tetszőleges $x_1 < x_2$-re igaz az

$$(19) \qquad e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$$

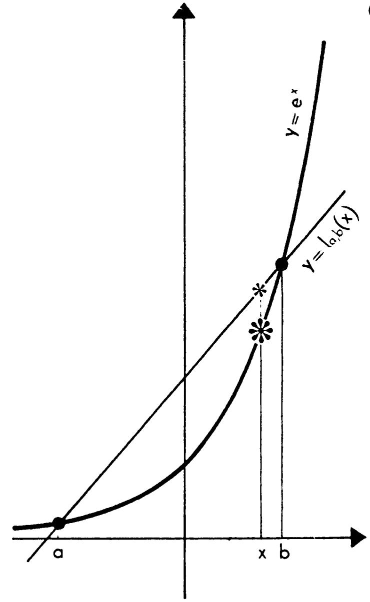
egyenlőtlenség.

b) Bizonyítsuk be, hogy az e^x függvény a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban konvex, vagyis tetszőleges $a<b$-re az $[a, b]$ intervallum két végpontjához tartozó görbepontokat összekötő húr a függvénygörbe felett van (68. ábra). Ezt az állítást pontosan a következő egyenlőtlenség fejezi ki: ha $a<x<b$, akkor:

$$(20) \qquad e^x \leq \frac{e^b - e^a}{b - a}(x-a) + e^a = l_{a,b}(x).$$

c) Mutassuk meg, hogy az $\frac{e^x - 1}{x}$ függvény monoton növő a $(-\infty, 0)$ és $(0, +\infty)$ intervallumokban.

68. ábra



d) Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Megoldás:

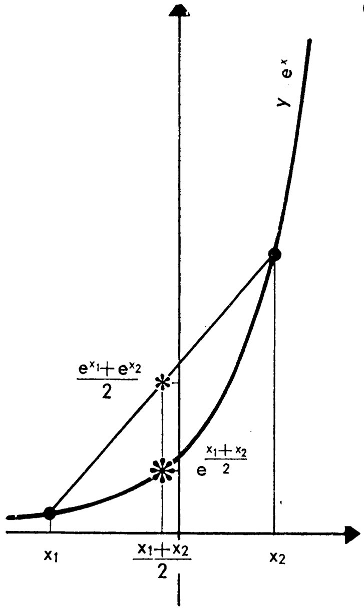
a) Az állítást a 69. ábrán szemléltettük. A (19) egyenlőtlenség bal oldalát a következő alakban is írhatjuk:

$$e^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{e^{x_1+x_2}} = \sqrt{e^{x_1} \cdot e^{x_2}}.$$

Ezt felhasználva a bizonyítandó

$$\sqrt{e^{x_1} \cdot e^{x_2}} < \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$$

69. ábra



egyenlőtlenség igaz a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint, hiszen $x_1 < x_2$ miatt $e^{x_1} < e^{x^2}$.

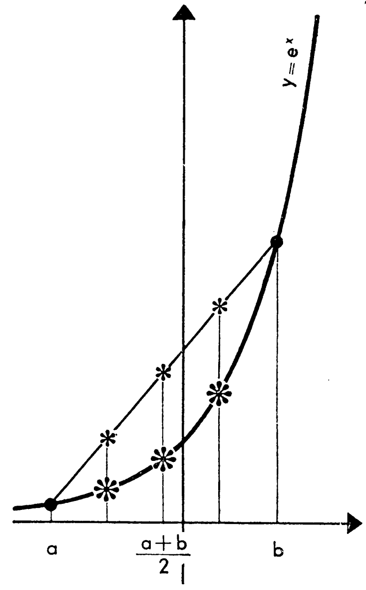
b) Az állítást az előző, *a)* feladat eredményének és az e^x folytonosságának felhasználásával igazolhatjuk.

Az adott $[a, b]$ intervallum $\frac{a+b}{2}$ felezőpontjában az *a)* feladat alapján igaz, hogy:

$$e^{\frac{a+b}{2}} < l_{a,b}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{e^a+e^b}{2}.$$

Az $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ és $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ intervallumok felezőpontjára szintén az *a)* feladat eredményéből következik, hogy igaz az állítás (70. ábra). Például az

70. ábra



$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ intervallum $\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}$ felezőpontjára a következőképpen látható be a (20) egyenlőtlenség:

$$e^{\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}} < \frac{e^a+e^{\frac{a+b}{2}}}{2} < \frac{e^a+\frac{e^a+e^b}{2}}{2} = l_{a,b}\left(\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\right).$$

A felezési eljárást folytatva, teljes indukcióval látható, hogy tetszőleges n természetes számra az n-edik lépés után kapott 2^{n-1} pont mindegyikére igaz a (20) egyenlőtlenség.

Vizsgáljuk most az (a, b)-ben megadott x pontot. Az $[a, b]$ intervallumra alkalmazva az előző felezési eljárást, a kapott felezőpontokból meg tudunk konstruálni egy olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sorozatot, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ és minden n-re igaz, hogy:

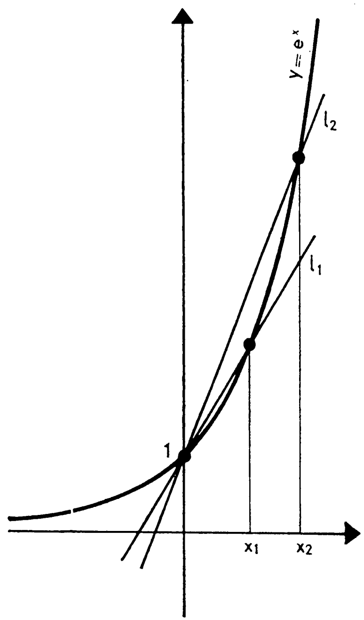
$$e^{x_n} < l_{a,b}(x_n).$$

Az e^x függvény és $l_{a,b}(x)$ folytonossága miatt tehát:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} \leqq \lim_{n\to\infty} l_{a,b}(x_n) = l_{a,b}(x).$$

c) Legyen $0 < x_1 < x_2$ két szám. Azt kell megmutatnunk, hogy:

$$\frac{e^{x_1}-1}{x_1} \leqq \frac{e^{x_2}-1}{x_2}.$$



71. ábra

Az állítást a 71. ábrán szemléltettük, ennek alapján látható, hogy az állítás geometriailag azt jelenti, hogy az l_2 egyenes iránytangense nagyobb vagy egyenlő, mint az l_1-é.

A *b)* feladat eredményét az $[1, x_2]$ intervallumra alkalmazva azt kapjuk, hogy az x_1-hez tartozó görbepont az l_2 húr alatt van, ebből viszont már következik, hogy az l_1 egyenes iránytangense kisebb vagy egyenlő, mint l_2-é.
Az állítás a $(-\infty, 0)$ intervallumra is hasonló módon látható be.

d) A *c)* feladat eredményét felhasználva, például a $(0, 1)$ intervallumban az $\dfrac{e^x-1}{x}$ függvény monoton növő és alulról korlátos, mert pozitív ($e > 1$). Ekkor a monoton függvény határértékének létezéséről szóló tétel alapján létezik a

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{e^x-1}{x} = A$$

véges határérték. Az A értékének meghatározásához elég egy speciális, jobbról a 0-hoz tartó sorozatot választani és kiszámítani a sorozat elemeihez tartozó függvényértékek sorozatának határértékét. Legyen ez a sorozat az $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, erre teljesül, hogy 0-hoz tart és a tagjai pozitívak.

Az I. fejezet 68. feladatában igazoltuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1,$$

tehát $A = 1$. Hasonlóan látható:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

is igaz; ebből a 26. feladat szerint következik az állítás.

33. Igazoljuk, hogy ha $a > 0$, akkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a.$$

Megoldás:

Ha $a = 1$, akkor az állítás nyilván igaz, így tegyük fel, hogy $a \neq 1$. Alkalmazzuk a 32. feladat eredményét. Ennek alapján az

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & \text{ha} \quad x\neq 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x=0 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos. Alakítsuk át az $\dfrac{a^x-1}{x}$ kifejezést a következőképpen:

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot \ln a=f(x\ln a)\cdot \ln a.$$

Az $x \ln a$ függvény folytonos a 0 helyen, itt értéke 0, így a közvetett függvény folytonossága alapján:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\cdot \lim_{x\to 0} f(x\ln a)=\ln a.$$

A fejezet 1. pontjában már vázlatosan felrajzoltuk az $\ln x$ függvény és a trigonometrikus függvények inverzeinek a képét. Ezekkel a függvényekkel kapcsolatos határértékfeladatok megoldásakor szükségünk lesz arra a tényre is, hogy ezek a függvények az értelmezési tartományukban folytonosak.

Az inverz függvény általános fogalmát a következőképpen adhatjuk meg: *ha az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya az* E *halmaz, értékkészlete a* K *halmaz és x_1, $x_2 \in \mathsf{E}$ $x_1\neq x_2$ esetén $f(x_1)\neq f(x_2)$, akkor f-nek az* E*-hez tartozó inverz függvényének nevezzük azt a φ függvényt, amelynek értelmezési tartománya* K *és bármely $u\in \mathsf{K}$-ra $\varphi(u)=v$ akkor és csak akkor igaz, ha $f(v)=u$.*

Az inverz függvény definíciójából következik, hogy ha φ az f inverze, akkor minden $u\in \mathsf{K}$-ra $f(\varphi(u))=u$.

Az inverz függvények folytonosságáról szóló tétel bizonyításakor szükségünk lesz egy, a zárt intervallumon folytonos függvényekről szóló alapvető tételre, amit *Bolzano-tételnek* is neveznek. Ez a következőt mondja ki: *ha $f(x)$ folytonos a zárt $[a, b]$ intervallumon, akkor f felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.*

Eddigi eredményeink felhasználásával már könnyen igazolhatjuk a következő általános tételt:

Ha f szigorúan monoton növő (csökkenő) és folytonos $[a, b]$-ben, akkor f értékkészlete $[a, b]$-ben $[f(a), f(b)]$, (ill. $[f(b), f(a)]$),

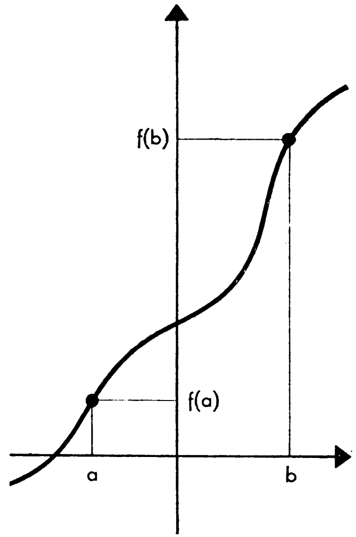
f-nek létezik az $[a, b]$-hez tartozó φ inverz függvénye és ez is szigorúan monoton növő (csökkenő) és folytonos $[f(a), f(b)]$-ben (ill. $[f(b), f(a)]$-ban.)

Gyakorló feladat

34. Igazoljuk az előzőleg kimondott, inverz függvények folytonosságáról szóló tételt.

Megoldás:

A bizonyítást arra az esetre végezzük el, amikor f szigorúan monoton növő $[a, b]$-ben. (A szigorúan monoton csökkenő esetre hasonló módon lehetne eljárni.)



72. ábra

A Bolzano-tételből és f szigorúan monoton növéséből következik, hogy f-nek $[a, b]$-hez tartozó értékkészlete $[f(a), f(b)]$ (72. ábra). A szigorúan monoton növés miatt az is nyilván igaz, hogy különböző $[a, b]$-beli helyekhez különböző $[f(a), f(b)]$-beli függvényértékek tartoznak. Így a φ inverz függvény létezik és értelmezési tartománya $[f(a), f(b)]$. Igazoljuk, hogy φ szigorúan monoton növő $[f(a), f(b)]$-ben! Legyen u_1 és u_2 két olyan szám, amelyre:

$$f(a)\leq u_1 < u_2 \leq f(b),$$

és indirekt módon tegyük fel, hogy

$$v_1 = \varphi(u_1) \geqq \varphi(u_2) = v_2.$$

Ebből f monoton növése miatt

$$f(\varphi(u_1)) = u_1 \geqq u_2 = f(\varphi(u_2))$$

következne, ellentétben a feltevéssel.

Mivel φ szigorúan monoton növő $[f(a), f(b)]$-ben, ezért minden $c \in (f(a), f(b))$-ben van jobb és bal oldali határértéke. Ahhoz, hogy φ itt folytonos is, elég megmutatni, hogy

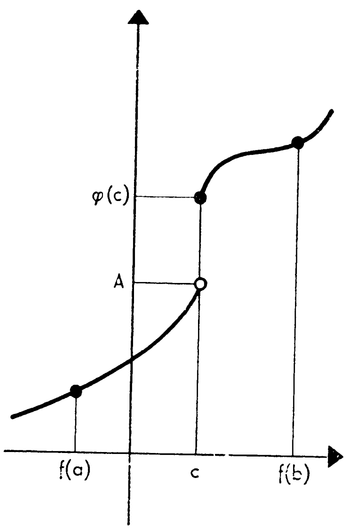
$$\lim_{x \to c-0} \varphi(x) = \varphi(c) = \lim_{x \to c+0} \varphi(x). \tag{21}$$

Tegyük fel, hogy például

$$A = \lim_{x \to c-0} \varphi(x) < \varphi(c).$$

Ekkor φ szigorú monoton növése miatt az $(A, \varphi(c))$ intervallumbeli értékek kimaradnának φ-nek az $[f(a), f(b)]$-hez tartozó értékkészletéből, így megint ellentmondáshoz jutottunk (73. ábra).

Hasonlóan lehet megmutatni, hogy (21)-ben a második egyenlőség is érvényes és azt is, hogy φ az $f(a)$-ban jobbról, $f(b)$-ben balról folytonos.



73. ábra

A 34. gyakorló feladatban igazolt tételből következik, hogy például az arc sin x függvény a $[-1, 1]$ intervallumban szigorúan monoton növő és folytonos, az arc cos x függvény a $[-1, 1]$ intervallumban szigorúan monoton fogyó és folytonos. A tételt igazolni lehet általánosabb formában is, például $(-\infty, +\infty)$-ben szigorúan monoton és folytonos függvényre vagy egy, az (a, b)-ben szigorúan monoton, folytonos függvényre, amelyre

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty.$$

Ezekből azután következik, hogy az arc tg x, arc ctg x $(-\infty, +\infty)$-ben folytonos függvények, az ln x a $(0, +\infty)$-ben folytonos, szigorúan monoton növő függvény.

Gyakorló feladatok

35. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Megoldás:

Alakítsuk át az $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ függvényt a következő módon:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x-1} = \frac{1}{\dfrac{e^{\ln(1+x)} - 1}{\ln(1+x)}}.$$

Mivel az ln $(1+x)$ függvény folytonos a 0 helyen, így $\lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$,

tehát a 33. gyakorló feladat eredménye alapján:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\dfrac{e^{\ln(1+x} - 1}{\ln(1+x)}} = 1.$$

36. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Megoldás:

Alakítsuk át az $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ kifejezést a következő módon:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, ezért a 35. gyakorló feladat alapján:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=e.$$

37. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)^{g(x)}=A^B.$$

Megoldás:

A vizsgált $f(x)^{g(x)}$ alakú függvényt így írhatjuk:

$$e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Mivel az $\ln x$ függvény folytonos az A helyen, ezért

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)\cdot\ln f(x)=B\ln A.$$

innen pedig az e^x függvény folytonossága alapján adódik, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=A^B.$$

38. Az előző gyakorló feladatokban kapott eredmények felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$;

c) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Megoldás:

a) Alakítsuk át a vizsgált függvényt, majd alkalmazzuk az előző két gyakorló feladat eredményét:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\right]^{\frac{x}{2x+1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

b) Átalakítással és a 35. gyakorló feladat eredményének alkalmazásával érhetünk célhoz:

$$\lim_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}}=e.$$

c) Ismét átalakításokat célszerű végezni:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{1}{e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{\frac{x}{e}-1}=\frac{1}{e}.$$

d) Használjuk fel azt, hogy $x=\sin(\arcsin x)$; az $\arcsin x$ folytonos a 0 helyen:

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}}=1.$$

Feladatok

30. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

31. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}\quad (a, b>0)$;

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad (a>0)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\quad (a, b>0)$.

32. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ monoton növő az $(a, +\infty)$ intervallumban, akkor $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ véges határérték létezik, amenynyiben $f(x)$ felülről korlátos $(a, +\infty)$-ben, ha pedig $f(x)$ nem korlátos felülről $(a, +\infty)$-ben, akkor $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

33. A már többször alkalmazott felezési eljárással igazoljuk a Bolzano-tételt, vagyis azt, hogy egy $[a, b]$ zárt intervallumban folytonos $f(x)$ függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket felvesz.

34. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 0+0} \ln x=-\infty.$$

35. Vizsgáljuk meg az $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ függvényt, van-e határértéke a $-\infty$-ben, $+\infty$-ben, a 0 helyen. Vázoljuk fel a függvény grafikonját.

36. Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}=a^b.$$

37. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1),\quad a>0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n,\quad a, b>0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n,\quad a_1, \ldots, a_k>0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$; x tetszőleges.

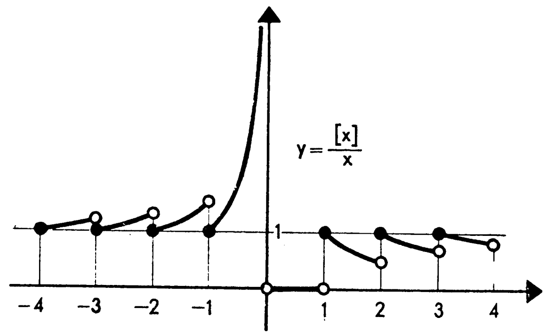
38. Legyen $f(x)$ egy $[a, +\infty)$ alakú intervallumon folytonos függvény, amelyre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ véges határérték létezik. Igazoljuk, hogy $f(x)$ korlátos az $[a, +\infty)$ intervallumban.

39. Legyen $p(x)$ egy páratlan fokszámú valós együtthatós polinom. A Bolzano-tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy $p(x)$-nek van gyöke a valós számok körében, azaz van olyan x_0 valós szám, amire $p(x_0)=0$.

40. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ egy $[a, b]$ zárt intervallumban monoton függvény és minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz, akkor f folytonos is $[a, b]$-ben.

A II. fejezetben kitűzött feladatok megoldásai

1.*a)* Az $\frac{[x]}{x}$ függvény értelmezési tartománya a $(-\infty, 0)$ és $(0, +\infty)$ nyílt intervallumok egyesítése. A függvény grafikonját az $\frac{1}{x}$ függvény görbéjének darabjaiból állíthatjuk össze: 74. ábra.

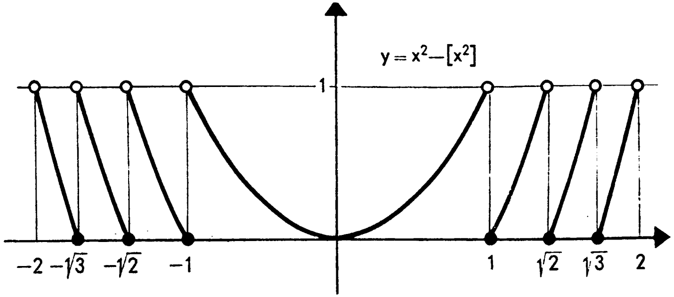


74. ábra

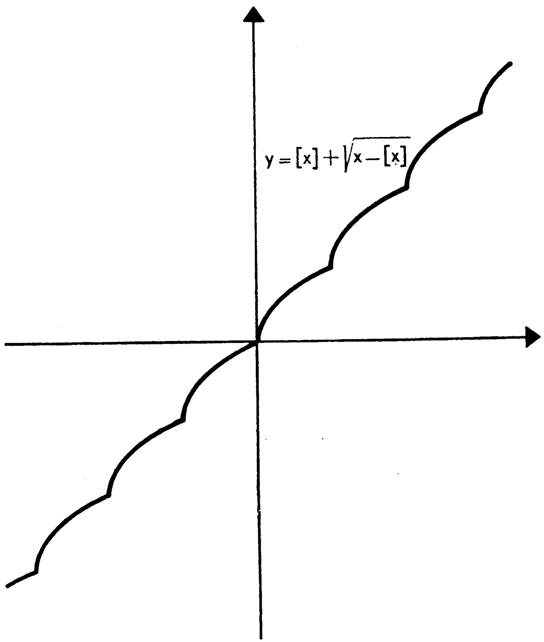
b) Az $x^2-[x^2]$ függvény értelmezési tartománya a teljes számegyenes, a függvény grafikonját az x^2 függvény görbéjének darabjaiból állíthatjuk össze: 75. ábra.

c) Használjuk fel a 2.*b)* gyakorló feladat eredményét. Ennek alapján könnyen felrajzolható az $x+\sqrt{x-[x]}$ függvény grafikonja: 76. ábra.

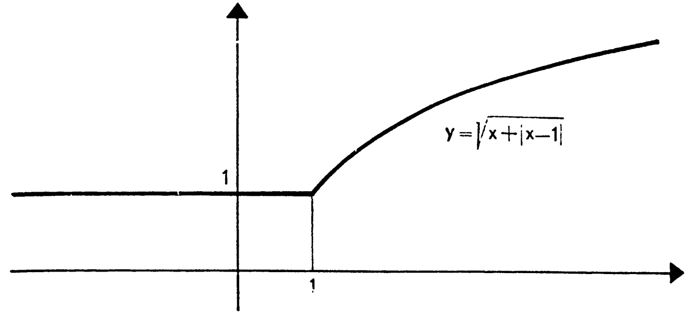
d) Az abszolút érték definícióját felhasználva alakítsuk át a $\sqrt{x+|x-1|}$ kifejezést:



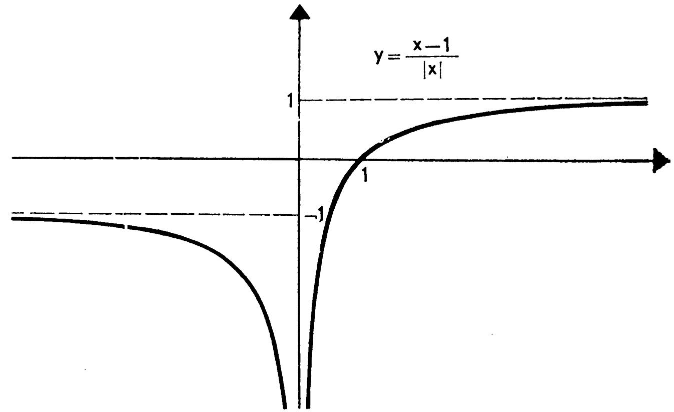
75. ábra



76. ábra



77. ábra

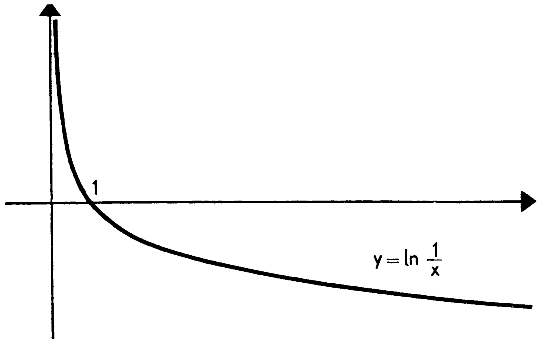


78. ábra

$$\sqrt{x+|x-1|}=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x<1,\\ \sqrt{2x-1}, & \text{ha} \quad x\geqq 1.\end{cases}$$

Ennek alapján már könnyen felrajzolhatjuk a függvény grafikonját: 77. ábra.

e) Itt is az abszolút érték definícióját használjuk fel átalakításra:



79. ábra

$$\frac{x-1}{|x|}=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x>0,\\ \dfrac{1}{x}-1, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

A függvény grafikonját a 78. ábrán rajzoltuk fel:

2. *a)* A logaritmus azonosságainak alkalmazásával alakítsuk át a kifejezést:

$$\ln\frac{1}{x}=-\ln x.$$

A függvény grafikonja a 79. ábrán látható.

b) A függvény értelmezési tartománya a $(0, +\infty)$ intervallum. Az $\ln x$ definícióját alkalmazva kapjuk:

$$e^{\ln x}=x, \quad \text{ha} \quad x>0.$$

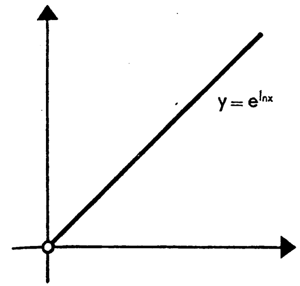
A függvény grafikonja a 80. ábrán látható.

c) Az $[x]$ függvény szakaszonként konstans, így ugyanilyen tulajdonságú lesz az $e^{[x]}$ függvény is (81. ábra).

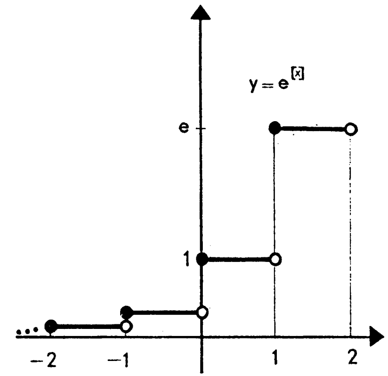
d) Az $|x|$ definíciója alapján írjuk ki részletesen a függvény definícióját:

$$e^{-|x|}=\begin{cases}e^{x}, & \text{ha} \quad x<0,\\ e^{-x}, & \text{ha} \quad x\geqq 0.\end{cases}$$

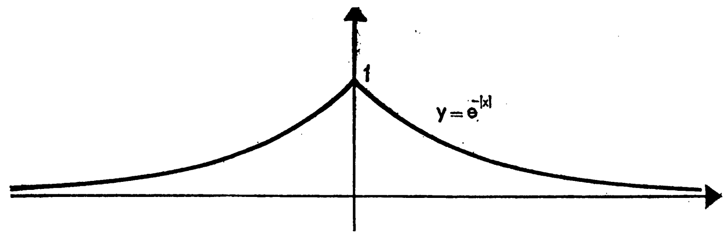
A függvény görbéje a 82. ábrán látható.



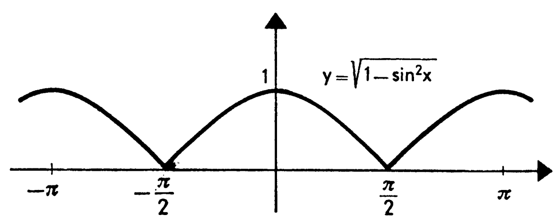
80. ábra



81. ábra



82. ábra



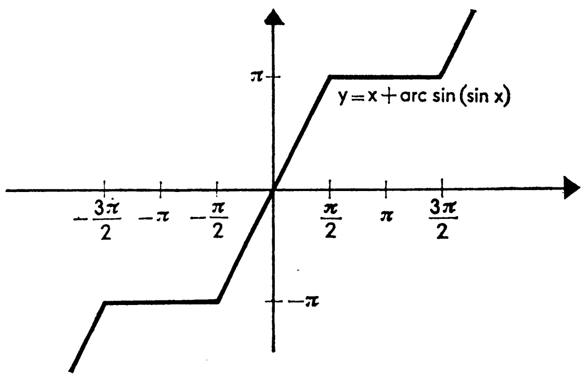
83. ábra

3. *a)* A megfelelő trigonometrikus azonosságot és a négyzetgyök definícióját alkalmazva ezt kapjuk:

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{\cos^2 x}=|\cos x|.$$

A $\cos x$ függvény képének ismeretében az $|\cos x|$ függvény grafikonját is könnyen felrajzolhatjuk (83. ábra).

b) A 4.*b)* gyakorló feladatban ábrázoltuk az $\arcsin(\sin x)$ függvény grafikonját. Ennek alapján felrajzolhatjuk az $x + \arcsin(\sin x)$ függvény grafikonját is (84. ábra).



84. ábra

c) Az abszolút érték definícióját felhasználva így írhatjuk át a függvény definícióját:

$$\frac{\pi}{3} - |\operatorname{arc\,tg}(x-2)| = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \operatorname{arc\,tg}(x-2), & \text{ha} \quad x \geqq 2, \\ \frac{\pi}{3} + \operatorname{arc\,tg}(x-2), & \text{ha} \quad x < 2. \end{cases}$$

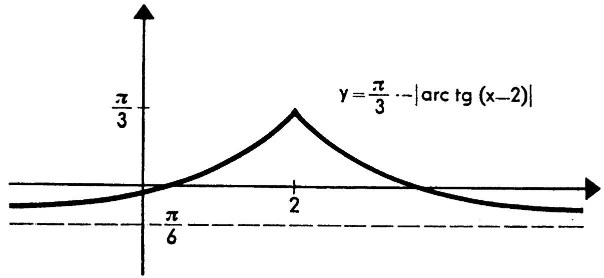
A függvény grafikonját az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény grafikonjának darabjaiból egyszerű transzformációkkal állíthatjuk elő (85. ábra).

d) Először átalakítjuk a vizsgált függvényt definiáló kifejezést.

A $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

azonosságból következik, hogy ha $|x| \leqq 1$, akkor

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} x.$$



85. ábra

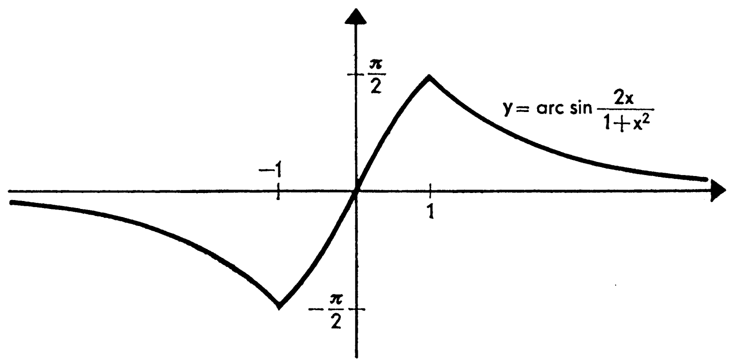
Ha $x > 1$, akkor az $\arcsin x$ függvény definíciója alapján:

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x,$$

ha pedig $x < -1$, akkor

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x.$$

Ezek alapján a függvény grafikonját már felrajzolhatjuk (86. ábra).



86. ábra

4. *a)* A $\sin x$ függvényről tudjuk, hogy ha $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, akkor $\sin^2 x=1$, ha $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, akkor $0\leqq\sin^2 x<1$ (k egész). Ezt felhasználva a határértékként definiált függvényt a következőképpen állíthatjuk elő:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}(\sin^2 x)^n=\begin{cases}1, & \text{ha}\quad x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{ha}\quad x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

A függvény képét a 87. ábrán vázoltuk.

b) Számítsuk ki először a keresett határértéket úgy, hogy két oldalról megbecsüljük az $\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$ kifejezést!

$$e^{x+1}<\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}<\sqrt[n]{2e^{n(x+1)}}=e^{x+1}\sqrt[n]{2},\quad \text{ha}\quad x\geqq 0.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, ezért

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}=e^{x+1},\quad \text{ha}\quad x\geqq 0.$$

Az $f(x)$ függvény képét a 88. ábrán rajzoltuk meg.

c) Itt is először a határértéket számítsuk ki! Az $x>2$ esetben a következő becslést alkalmazhatjuk:

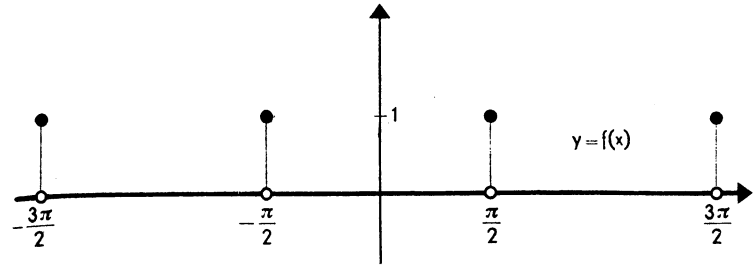
$$\ln x<\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}<\frac{\ln 2\cdot x^n}{n}=\ln x+\frac{\ln 2}{n},$$

ahonnan következik, hogy

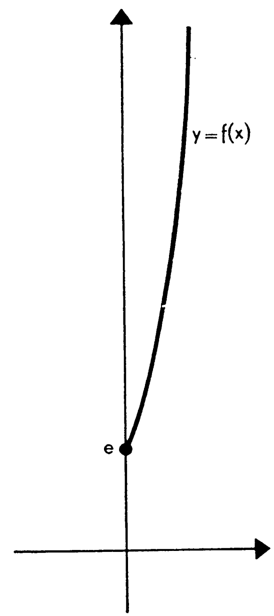
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}=\ln x,\quad \text{ha}\quad x>2.$$

A $0\leqq x\leqq 2$ esetben

$$\ln 2\leqq\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}\leqq\frac{\ln 2^{n+1}}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln 2,$$



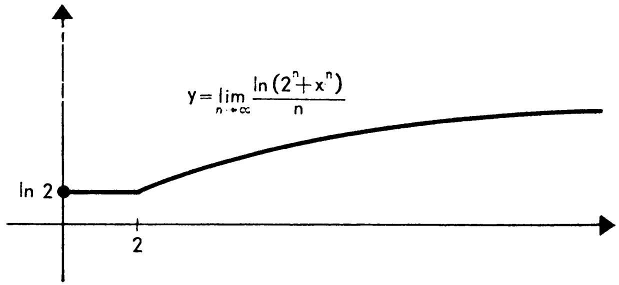
87. ábra



88. ábra

tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n+x^n)}{n} = \ln 2, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 2.$$



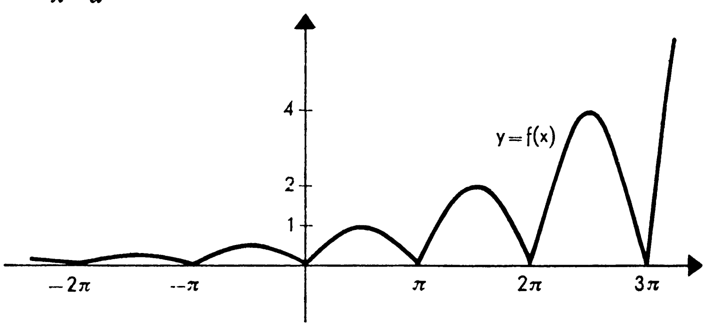
89. ábra

A függvény képét a 89. ábrán rajzoltuk meg.

5. Az $f(x)$ függvény értéke $[0, \pi)$-ben $\sin x$. A $[\pi, 2\pi)$ intervallumban mindenütt 2-szer akkora az értéke, mint a π-vel kisebb helyen, és így tovább. A $[-\pi, 0)$ intervallumban $f(x)$ értéke fele akkora, mint a π-vel nagyobb helyen stb. Ezek alapján már könnyű megrajzolni a függvény képét (90. ábra).

6. *a)* Adjunk meg egy $\varepsilon>0$-t és keressünk hozzá jó δ-t. Ha $x \neq a$, akkor érvényes az

$$\frac{x^2-a^2}{x-a} = x+a$$



90. ábra

egyenlőség, tehát

$$\left|\frac{x^2-a^2}{x-a} - 2a\right| = |x+a-2a| = |x-a|, \quad \text{ha} \quad x \neq a. \tag{22}$$

A (22) egyenlőség azt mutatja, hogy $\delta=\varepsilon$ választással teljesülnek a határérték-definíció kikötései.

b) Adjunk meg egy tetszőleges $\varepsilon>0$-t és keressünk hozzá megfelelő δ-t. Alakítsuk át először a függvényt definiáló képletet:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}, \quad \text{ha} \quad x \neq a.$$

Becsüljük meg a határérték és a függvényérték eltérését:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right| = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{a}|}{2\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \tag{23}$$

$$= \frac{|x-a|}{2\sqrt{a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2} < \frac{|x-a|}{2a\sqrt{a}}.$$

A (23) egyenlőtlenség alapján, ha $\delta = \varepsilon \cdot 2a\sqrt{a}$, és

$$|x-a| < \varepsilon \cdot 2a\sqrt{a}, \quad x \geqq 0,$$

akkor

$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right| < \varepsilon.$$

7. Igazoljuk először, hogy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Adjunk meg egy $\varepsilon>0$-t és tegyük fel, hogy $|x| \leqq 1$. Ekkor az $x^2 \leqq |x|$ egyenlőtlenséget alkalmazva

$$|f(x)-0| \leqq |x| < \varepsilon,$$

ha $\delta = \min(1, \varepsilon)$. Ez azt jelenti, hogy $f(x)$ folytonos a 0-ban.

Legyen $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. A $g(x)$ függvény az $f(x)$ definíciója alapján így adható meg:

$$g(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ha adott $\varepsilon>0$-hoz $\delta=\varepsilon$-t választunk, akkor ez nyilván jó lesz a $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ egyenlőség igazolására. (Megjegyezzük, hogy az $f(x)$ függvény grafikonját gyakorlatilag nem tudjuk megrajzolni.)

8. A szemlélet alapján nyilvánvalónak tűnik, hogy a konstans függvény mindenütt folytonos. De azért meg kell mutatnunk, hogy ez a definícióból következik. Ha $\varepsilon>0$-t megadunk, akkor nyilván tetszőleges $\delta>0$ jó lesz hozzá, mert tetszőleges a-ra és tetszőleges x-re:

$$|f(x)-f(a)|=0.$$

9. A $\cos x$ függvény folytonosságát a $\sin x$ függvény folytonosságának igazolásakor használt módszerrel bizonyíthatjuk. Használjuk fel a

$$\cos x-\cos a=-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}$$

azonosságot. Ennek alkalmazásával a következő becslést kapjuk:

$$|\cos x-\cos a|=2\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leqq|x-a|,$$

ami azt jelenti, hogy tetszőleges a esetén adott $\varepsilon>0$-hoz $\delta=\varepsilon$ jó lesz.

10. Azt fogjuk megmutatni, hogy tetszőleges a valós számra: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Ebből már következik, hogy a függvény irracionális helyeken és a 0 helyen folytonos, hiszen itt a függvényérték is 0.

Adjunk meg egy rögzített a helyet és egy tetszőleges $\varepsilon>0$ számot. Ehhez az $\varepsilon>0$-hoz kell keresnünk olyan, alkalmas $\delta>0$ számot, hogy az a hely δ sugarú környezetében az a kivételével a függvényérték már mindenütt ε-nál kisebb legyen (a függvényérték mindenütt nemnegatív, így ha kisebb ε-nál, akkor a 0-tól való eltérése is kisebb lesz ε-nál).

Egy jó δ-t a következő módon kereshetünk: legyen n_0 az a legkisebb pozitív egész szám, amire igaz, hogy $\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$. Keressük meg ezután az $1, 2, \ldots, n_0$ nevezőjű, $\dfrac{p}{q}$ alakú (p, q egész) racionális számok közül az a-hoz legközelebb levőket, amik a-tól különböznek. A kapott véges sok szám közül jelöljük r-rel az a-hoz legközelebb esőt (ha kettő ilyen van, akkor ezek egyenlő távolságra vannak a-tól, az egyik legyen r). Az $|a-r|=\delta$ választás megfelelő lesz, hiszen az $(a-\delta,\ a+\delta)$ intervallumban az a-tól különböző helyek vagy irracionálisak és itt a függvényérték 0 vagy olyan $\dfrac{p}{q}$ alakú racionális számok, ahol a függvényérték $\dfrac{1}{q}$ és $q>n_0$, tehát n_0 választása miatt $0<\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{n_0}<\varepsilon$.

11. Egy ismert algebrai azonosság felhasználásával becsüljük meg $\sqrt[n]{x}$ eltérését egy tetszőleges $a>0$ helyen vett függvényértéktől:

$$(24)\qquad \left|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right|=\frac{|x-a|}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{a}+\ldots+(\sqrt[n]{a})^{n-1}}<$$

$$<\frac{|x-a|}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}}, \quad \text{ha} \quad x \geqq 0.$$

Adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = (\sqrt[n]{a})^{n-1}\varepsilon$ jó lesz; ez a (24) egyenlőtlenségből látható.

12. Alkalmazzuk a határérték definícióját egy $0 < \varepsilon < |A|$ számra és válasszunk egy ehhez jó δ-t. Így, ha $x \neq a$ az a szám δ sugarú környezetében van, akkor

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

teljesül, amiből ε választása miatt következik, hogy $f(x) \neq 0$.

13. Alkalmazzuk a 12. feladat eredményét és a sorozat és függvény határértékének kapcsolatára vonatkozó tételt. Válasszunk egy tetszőleges $x_n \to a$, $x_n \neq a$ sorozatot. Mivel $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, ezért $f(x_n) \to A$ és véges sok kivételtől eltekintve $f(x_n) \neq 0$. Ekkor

$$\frac{1}{f(x_n)} \to \frac{1}{A}, \text{ ami azt jelenti, hogy } \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}.$$

14. Először mutassuk meg, hogy ha minden $x_n \to a$, $x_n \neq a$-ra az $f(x_n)$ konvergens, akkor minden ilyen $f(x_n)$ sorozatnak ugyanaz a határértéke. Indirekt módon, tegyük fel, hogy van két olyan $x_n \to a$, $x_n \neq a$ és $x'_n \to a$, $x'_n \neq a$ sorozat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = A'$ és $A \neq A'$. Az $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$ „összefésüléssel" keletkező sorozat tagjai a-tól különbözők és a sorozat a-hoz tart. Így az $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots$ sorozatnak is konvergensnek kellene lennie, ami nem lehet, mert két különböző határértékhez tartozó részsorozata van. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát az állítás igaz.

Jelöljük az $x_n \to a$, $x_n \neq a$ sorozatokhoz tartozó $f(x_n)$ konvergens sorozatok közös határértékét A-val és mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Ezt is indirekt úton igazoljuk. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ez a határérték definíciója alapján azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám, amelyhez — ha tetszőleges $\delta > 0$-t adunk is meg — mindig található olyan x_δ, hogy $0 < |x_\delta - a| < \delta$ és $|f(x_\delta) - A| \geqq \varepsilon$. Az ilyen tulajdonságú ε-hoz válasszuk sorra δ-nak az $\frac{1}{n}$ számokat ($n \in T$). Így egy $x_{\frac{1}{n}} = x_n$ sorozathoz jutunk, amelynek tagjaira $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $x_n \to a$, $x_n \neq a$ fennáll. Az $f(x_n)$ sorozat mégsem tart A-hoz, hiszen minden n-re $|f(x_n) - A| \geqq \varepsilon > 0$ áll fenn, így ellentmondásra jutottunk.

15. *a)* Emeljük ki a számlálóból is, meg a nevezőből is az $x+1$ tényezőt, majd egyszerűsítsünk vele:

$$(25) \qquad \frac{x^2+3x+2}{x^3+1} = \frac{x+2}{x^2-x+1}, \quad \text{ha} \quad x \neq -1.$$

A (25) jobb oldalán álló függvény már folytonos a -1 helyen, így határértéke megegyezik a helyettesítési értékével, tehát:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+1} = \frac{1}{3}.$$

b) Bővítsük először a törtet $(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)$-vel:

$$(26)\qquad \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}, \quad \text{ha} \quad x\neq 1.$$

A (26) egyenlőség jobb oldalán álló függvény folytonos az 1 helyen, így határértéke megegyezik helyettesítési értékével:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\frac{1}{2}.$$

c) A határérték kiszámítása egyszerű, ha előbb elvégezzük a következő algebrai átalakításokat:

$$\frac{k}{1-x^k}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{k+kx+\ldots+kx^{n-1}-n-nx-\ldots-nx^{k-1}}{(1-x)(1+x+\ldots+x^{k-1})(1+x+\ldots+x^{n-1})}=$$

$$=\frac{k(x-1)+k(x^2-1)+\ldots+k(x^{n-1}-1)-n(x-1)-n(x^2-1)-\ldots-n(x^{k-1}-1)}{(1-x)(1+x+\ldots+x^{k-1})(1+x+\ldots+x^{n-1})}=$$

$$=\frac{n+n(x+1)+\ldots+n(x^{k-2}+\ldots+1)-k-k(x+1-\ldots-k(x^{n-2}+\ldots+1}{(1+x+\ldots+x^{k-1})(1+x+\ldots+x^{n-1})},$$

ha $x\neq 1$.

Az utoljára kapott függvény már folytonos az 1 helyen, így az eredeti függvény határértéke:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{k}{1-x^k}-\frac{n}{1-x^n}\right)=$$

$$=\frac{n(1+2+\ldots+(k-1))-k(1+\ldots+(n-1))}{k\cdot n}=\frac{k-n}{2}.$$

d) Először trigonometrikus azonosságokat alkalmazunk a kifejezés átalakítására:

$$\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \quad \text{ha} \quad x\neq\frac{\pi}{2}.$$

A kapott $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ függvény már folytonos a $\frac{\pi}{2}$ helyen, így a keresett határérték:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1.$$

16.*a)* A feladat megoldásakor a $\frac{\sin x}{x}\to 1$, ha $x\to 0$ határértéket használhatjuk fel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{kx}}{\frac{\sin nx}{nx}}\cdot\frac{k}{n}=\frac{k}{n}.$$

b) Először trigonometriai azonosságok alkalmazásával alakítsuk át a függvényt definiáló kifejezést:

$$\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg} x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}, \quad \text{ha} \quad x\neq\frac{\pi}{4}.$$

Az átalakítással kapott kifejezés a $\frac{\pi}{4}$ helyen folytonos függvényt definiál, így:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{2}.$$

c) A 23.*a)* gyakorló feladatból ismert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ határértékre vezethetjük vissza a feladatot:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x^3}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos x^3}{x^6}}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}} \cdot \frac{x^4}{1+\sqrt{\cos x^3}} = 0.$$

d) Itt egyszerű algebrai átalakításokkal is célhoz érhetünk:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} = -3.$$

17. Az $f(x)$ függvény a 0 hely kivételével azonos a konstans 1 függvénnyel, így $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. A $g(x)$ függvény tulajdonságait a 10. feladatban vizsgáltuk és megállapítottuk, mindenütt 0 a határértéke, így $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ is létezik.

Az $f(g(x))$ közvetett függvényre a következőt kapjuk:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \text{ racionális}, \\ 0, & \text{ha} \quad x \text{ irracionális}. \end{cases}$$

A $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ határérték nem létezik, mert ha egy 0-hoz tartó racionális számokból álló sorozatot választunk $\left(\text{pl. az } \left(\frac{1}{n}\right)\text{-et}\right)$, e mentén a függvényértékek sorozata 1-hez tart, míg egy 0-hoz tartó, irracionális számokból álló sorozat $\left(\text{pl. a } \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right)$ mentén a függvényértékek 0-hoz tartanak. Hasonló gondolatmenettel látható, hogy az $f(g(x))$ függvénynek sehol sincs határértéke.

Példánk azt mutatja, hogy a közvetett függvénynek még akkor sem mindig van határértéke, ha mind a külső, mind a belső függvénynek létezik véges határértéke.

18. Az állítást a sorozat és függvényhatárérték közötti kapcsolat felhasználásávaj igazolluk. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges $x_n \to a$, $x_n \neq a$ sorozatra $f(g(x_n)) \to f(b)$. A $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ feltételből következik, hogy $g(x_n) \to b$. Azt nem állíthatjuk, hogy $g(x_n) \neq b$, de erre nincs is szükségünk, mert ha $g(x_n) = b$, akkor $f(g(x_n)) = f(b)$ és f folytonossága a b helyen tehát biztosítja, hogy az $f(g(x_n))$ sorozat b-hez tart. (A 17. feladat azt mutatta, hogy ha f-ről csak annyit kötünk ki, hogy van határértéke a b helyen, akkor a problémát az okozza, hogy a $g(x_n) \neq b$ feltétel nem teljesül).

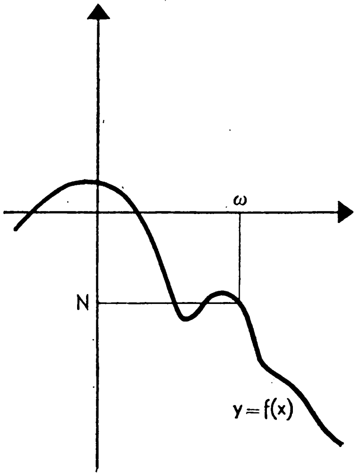
19.*a)* Az $f(x)$ függvény határértéke a $+\infty$-ben $-\infty$, ha tetszőleges N számhoz van olyan ω, hogy ha $x > \omega$, akkor $f(x) < N$ (91. ábra).

b) Az $f(x)$ függvény határértéke a $-\infty$-ben $+\infty$, ha tetszőleges P számhoz van olyan ω, hogy ha $x < \omega$, akkor $f(x) > P$ (92. ábra).

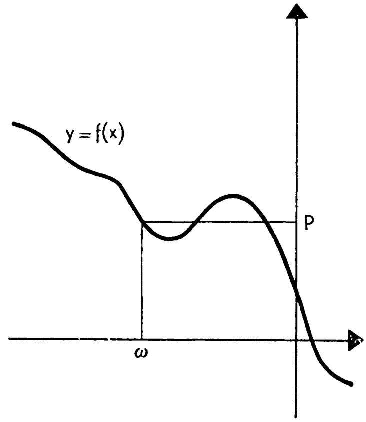
c) Az $f(x)$ függvény jobb oldali határértéke az a helyen $+\infty$, ha tetszőleges P számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < x - a < \delta$, akkor $f(x) > P$ (93. ábra).

d) Az $f(x)$ függvény jobb oldali határértéke az a helyen $-\infty$, ha tetszőleges N számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < x - a < \delta$, akkor $f(x) < N$ (94. ábra).

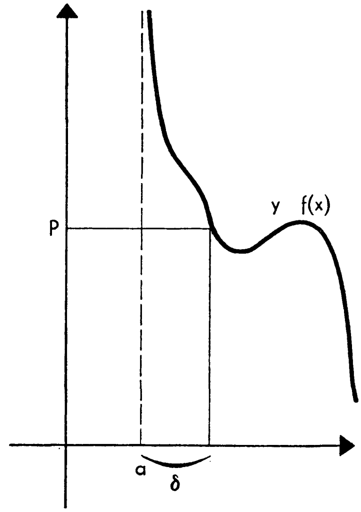
e) Az $f(x)$ függvény bal oldali határértéke az a helyen $+\infty$, ha tetszőleges P számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < a - x < \delta$, akkor $f(x) > P$ (95. ábra).



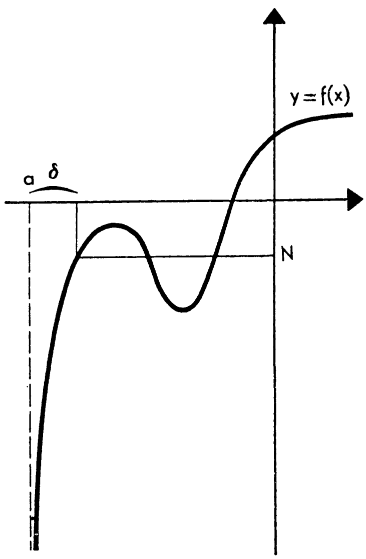
91. ábra



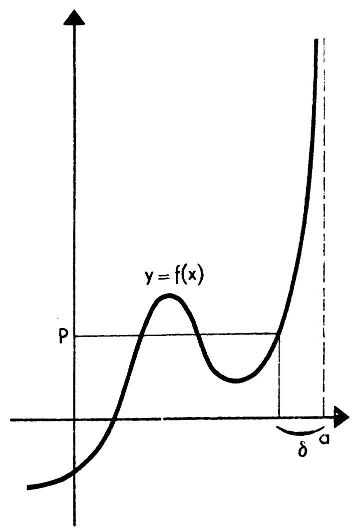
92. ábra



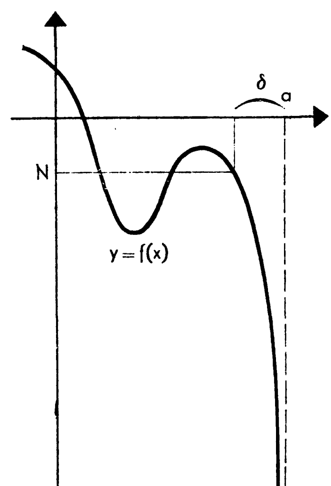
93. ábra



94. ábra



95. ábra



96. ábra

f) Az $f(x)$ függvény bal oldali határértéke az a helyen $-\infty$, ha tetszőleges N számhoz van olyan $\delta>0$, hogy ha $0<a-x<\delta$, akkor $f(x)<N$ (96. ábra).

20. *a)* Osszuk el a számlálót is és a nevezőt is x^2-tel:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x+10}{5x^2-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}}{5-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=+\infty.$$

b) A számlálót is és a nevezőt is x^3-nal osszuk:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+2}{3x^3-10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{3-\frac{10}{x^3}}=0.$$

c) Itt is x^3-nel osszuk a számlálót is és a nevezőt is:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-2x^2+5x-3}{2x^3-x+12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{12}{x^3}}=\frac{3}{2}.$$

21. Legyen

$$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n+1}+\ldots+a_n,$$

$$p_k(x)=b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b^k,$$

ahol $a_0\neq0$ és $b_0\neq0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p_n(x)}{p_k(x)}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^{n-k}+a_1x^{n-k-1}+\ldots+\frac{a_n}{x^k}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_k}{x^k}}=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } a_0b_0>0\\ -\infty, & \text{ha } a_0b_0<0\end{cases}\ \text{és } n>k\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_k}{x^k}}=\dfrac{a_0}{b_0},\quad \text{ha } n=k,\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{a_0}{x^{k-n}}+\frac{a_1}{x^{k-n+1}}+\ldots+\frac{a_n}{x^k}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_k}{x^k}}=0,\quad \text{ha } k>n.\end{cases}$$

Az előző átalakításból a $-\infty$-ben vett határértéket is kiolvashatjuk:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{p_n(x)}{p_k(x)}=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } a_0b_0>0,\ n>k \text{ és } n-k \text{ páros,}\\ & \text{vagy } a_0b_0<0,\ n>k \text{ és } n-k \text{ páratlan}\\ -\infty, & \text{ha } a_0b_0>0,\ n>k \text{ és } n-k \text{ páratlan,}\\ & \text{vagy } a_0b_0<0,\ n>k \text{ és } n-k \text{ páros,}\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{ha } n=k,\\ 0, & \text{ha } k>n.\end{cases}$$

22. Azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $x_n\to+\infty$ sorozatra $f(g(x_n))\to f(a)$. Mivel $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=a$, $g(x_n)\to a$ és ebből f folytonossága miatt következik, hogy $f(g(x_n))\to f(a)$.

23. Itt is a sorozat és függvény határértéke közötti kapcsolatot alkalmazzuk: A feltétel szerint tetszőleges $x_n\to\alpha$, $x_n\neq\alpha$ sorozatra $|f(x_n)|\to+\infty$. Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{|f(x_n)|}=\left|\frac{1}{f(x_n)}\right|\to0,$$

de ez csak úgy lehet, ha

$$\frac{1}{f(x_n)}\to0$$

is igaz, tehát

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}=0.$$

24.*a)* A következő algebrai átalakításokkal érhetünk célhoz:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

b) Itt is az *a)* feladatban alkalmazott módszert célszerű követni:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0.$$

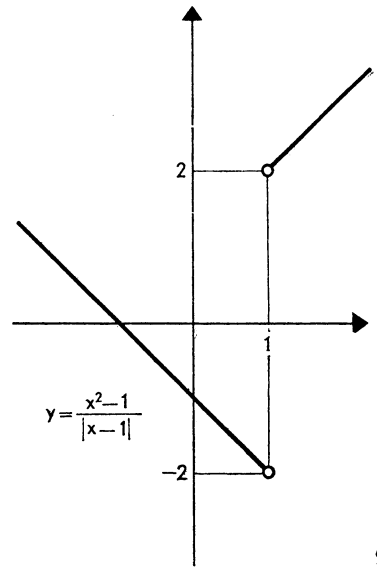
c) Itt is a konjugálttal célszerű osztani és szorozni:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}+5x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-23x^2+5}{\sqrt{2x^2+5}-5x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-23x+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}-5}=-\infty.$$

d) Közös nevezőre hozás után a 21. feladat eredményét alkalmazhatjuk:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8}=\frac{2}{9}.$$



97. ábra

25.*a)* A függvény grafikonját a 97. ábrán rajzoltuk meg.

Az 1 helytől jobbra a függvény az $x+1$ függvénnyel azonos, így jobb oldali határértéke megegyezik az $x+1$ függvény 1 helyhez tartozó értékével:

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2.$$

Az 1 helytől balra az $\frac{x^2-1}{|x-1|}$ függvény a $-x-1$ függvénnyel azonos, így:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2.$$

b) A függvény képét a 2*b)* gyakorló feladatban rajzoltuk meg (35. ábra). A függvény a $[0, 1)$ intervallumban a $\sqrt{x}$ függvénnyel azonos, így ha megmutatjuk, hogy a $\sqrt{x}$ függvény a 0 helyen jobbról folytonos, akkor ebből következik:

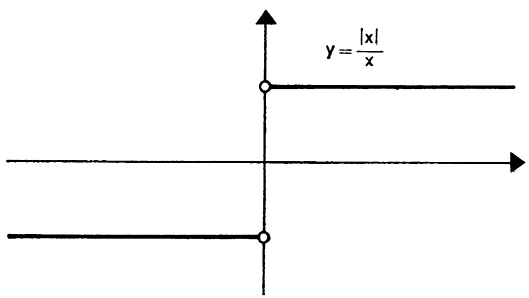
$$\lim_{x\to 0+0} \sqrt{x-[x]}=0.$$

Adjunk meg egy $\varepsilon>0$ számot, ehhez $\delta=\varepsilon^2$ jó lesz, mert ha $0\leqq x<\varepsilon^2$, akkor $\sqrt{x}<\varepsilon$ nyilván teljesül, tehát a $\sqrt{x}$ függvény a 0 helyen jobbról folytonos. A 0 bal oldali környezetében a $\sqrt{x-[x]}$ függvény a $\sqrt{x+1}$ függvénnyel azonos, így:

$$\lim_{x\to 0-0} \sqrt{x-[x]}=1.$$

c) Trigonometrikus azonosság alkalmazásával alakítsuk át az $f(x)$-et definiáló formulát:

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}=\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x}=$$
$$=\sqrt{2}\,\frac{|\sin x|}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}\,.$$



98. ábra

Az $\frac{|x|}{x}$ függvényt a 98. ábrán ábrázoltuk.

A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ határérték felhasználásával látható, hogy

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\sqrt{2}$$

és

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=-\sqrt{2}.$$

d) A $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ azonosságot felhasználva látható be a definíció alapján, hogy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x=+\infty$$

és

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x=-\infty.$$

26. Először tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ és mutassuk meg, hogy ekkor $f(x)$-nek az a helyen van jobb oldali és bal oldali határértéke és mindkettő A. A feltétel azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy ha $0<|x-a|<\delta$, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$. Ebből viszont következik, hogy ha

$$0<x-a<\delta,$$

akkor is fennáll

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

és ha

$$0<a-x<\delta,$$

akkor is teljesül

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Eredményünk éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=A \tag{27}$$

és

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A. \tag{28}$$

Tegyük fel most, hogy a (27) és (28) egyenlőségek fennállnak. A definíció szerint ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz vannak olyan $\delta_1>0$ és $\delta_2>0$ számok, hogy

ha $0<x-a<\delta_1$, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$,

ha pedig $0<a-x<\delta_2$, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Jelölje δ a δ_1 és δ_2 számok közül a kisebbet; ekkor $0<|x-a|<\delta$ esetén $|f(x)-A|<\varepsilon$, ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

27. Az állítás egyszerűen következik a definíciókból és a 26. feladat eredményéből.

28. Indirekt úton fogjuk igazolni, hogy az állításban szereplő K szám létezik. Tegyük fel, hogy nincs ilyen K. Ez azt jelenti, hogy akármilyen K számot adunk is meg, ehhez van olyan $x_K\in[a, b]$, hogy $f(x_K)>K$. Válasszuk K-nak sorra a természetes számokat. Így minden n természetes számhoz találunk olyan $x_n\in[a, b]$-t, hogy $f(x_n)>n$. Az (x_n) sorozat az $[a, b]$ intervallum egyes pontjaiból áll, tehát korlátos, így az I. fejezet 52. feladatának eredménye szerint van egy (x_{n_k}) konvergens részsorozata; legyen $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0$. Mivel minden k-ra $a\leq x_{n_k}\leq b$ igaz, így az x_0 határérték is benne van az $[a, b]$ intervallumban. Mivel $f(x)$ folytonos $[a, b]$-ben, így x_0-ban is (ha $x_0=a$, akkor jobbról, ha $x_0=b$, akkor balról) folytonos. Mivel $x_{n_k}\to x_0$, $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ is fennáll, ellentétben azzal, hogy $f(x_{n_k})>n_k$ és $n_k\to+\infty$. Ellentmondásra jutottunk, tehát az állításban szereplő K szám létezik. Hasonlóan lehet igazolni k létezését is.

29. Az előző feladatban igazoltuk, hogy az $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumban felvett értékeinek halmaza korlátos. Jelöljük M-mel ennek a halmaznak a felső határát, m-mel az alsó határát (l. I. fejezet 14. gyakorló feladat). Azt kell igazolni, hogy az $[a, b]$ intervallumban van olyan x_1 és x_2 hely, ahol $f(x_1)=m$ és $f(x_2)=M$.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy minden $[a, b]$-beli x-re $f(x)<M$, azaz $0<M-f(x)$. Ekkor az $\dfrac{1}{M-f(x)}$ függvény is folytonos $[a, b]$-ben, tehát korlátos is, azaz van olyan K szám, hogy

$$0<\frac{1}{M-f(x)}<K. \tag{29}$$

A (29) egyenlőtlenség átalakításával ezt kapjuk:

$$f(x)<M-\frac{1}{K}<M, \quad \text{ha} \quad x\in[a, b].$$

Eredményünk ellentmond annak, hogy M az $[a, b]$-beli $f(x)$ értékek halmazának felső határa, tehát a feltevés helytelen volt.

Hasonlóan igazolható, hogy a függvény m értékét is felveszi $[a, b]$-ben.

Megjegyezzük, hogy a 28. feladat megoldásában alkalmazott módszer itt is célravezet.

30. *a)* Ismert határértékekre való visszavezetéssel és az e^x függvény folytonosságának felhasználásával érhetünk célhoz:

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}=\lim_{x\to 0} e^{\cos^2 x\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=e.$$

b) Az átalakítások során trigonometrikus azonosságokat is célszerű alkalmazni:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}}{\frac{\cos x}{\cos 2x}-1}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\left[\frac{\cos x(1-\cos x)}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]}=e^{\frac{3}{2}}$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x-1}\cdot \operatorname{tg} x=1.$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-2}}\right]^{\frac{-2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x-1}{x+1}}=e^0=1.$$

31. *a)* A 33. gyakorló feladat eredményét alkalmazzuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}.$$

b) Ebben a feladatban összetettebb átalakításokkal jutunk célhoz, tudjuk visszavezetni a kiszámítandó határértéket ismert határértékekre:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{a^x-a^a}{x-a}-\frac{x^a-a^a}{x-a}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^a\frac{a^{a\ln\frac{x}{a}}-1}{a\ln\frac{x}{a}}\cdot\frac{\ln\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}-1}\right)=$$

$$=a^a\ln a-a^a=a^a(\ln a-1).$$

c) Érdemes észrevenni, hogy az $f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ függvény értéke az 1 helyen: $f(1)=\frac{a+b}{2}$, az a és b számok számtani közepe; a 2 helyen: $f(2)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ az a és b számok ún. négyzetes közepe; a -1 helyen: $f(-1)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, az a és b számok harmonikus közepe. Érdemes még kiszámolni a függvény határértékét $+\infty$-ben és $-\infty$-ben. Ha a számolást elvégezzük azt kapjuk, hogy $-\infty$-ben a határérték az a és b közül a kisebbik, $+\infty$-ben a nagyobbik.

Térjünk át ezután feladatunk megoldására. Azt a módszert alkalmazzuk, hogy $\ln f(x)$ határértékét számítjuk ki a 0 helyen, ebből — az $\ln x$ és e^x függvények folytonosságát felhasználva — $f(x)$ határértékét is megkapjuk.

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^x+b^x}{2}}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}\cdot\frac{\frac{a^x+b^x}{2}-1}{x}=$$

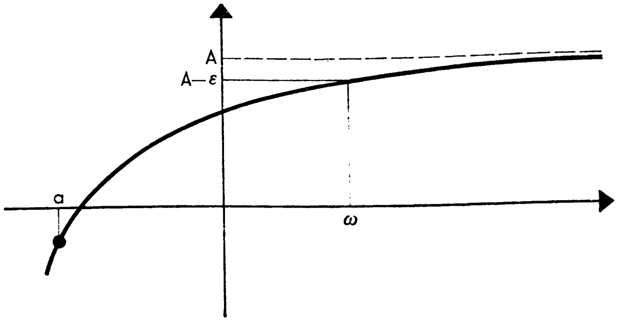
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a^x+b^x}{2}}{\frac{a^x+b^x}{2}-1}\cdot\lim_{\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)=\ln\sqrt{ab}.$$

Így $\lim_{x\to 0} f(x)=\sqrt{ab}$, azaz a és b mértani közepe.

32. Legyen $f(x)$ az $(a, +\infty)$ intervallumban monoton növő függvény és tegyük fel, hogy $f(x)$ felülről korlátos $(a, +\infty)$-ben. Ez azt jelenti, hogy az $(a, +\infty)$ intervallumban felvett függvényértékek halmaza felülről korlátos. Jelöljük ennek a halmaznak a felső határát, azaz a legkisebb felső korlátját A-val. Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ (99. ábra).

Adjunk meg egy $\varepsilon>0$-t. Az $A-\varepsilon$ szám már nem felső korlátja $f(x)$-nek $(a, +\infty)$-ben, így van olyan $\omega\in(a, +\infty)$, amelyre



99. ábra

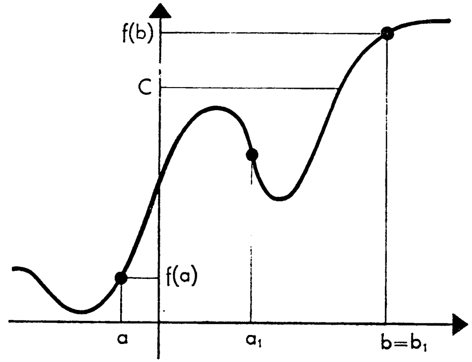
$A-\varepsilon<f(\omega)$. Az $f(x)$ függvény monoton növését kihasználva azt kapjuk, hogy minden $x>\omega$-ra $A-\varepsilon<f(\omega)\leqq f(x)\leqq A$, azaz

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Ha $f(x)$ felülről nem korlátos $(a, +\infty)$-ben, akkor tetszőleges P számhoz van olyan $\omega\in(a, +\infty)$, hogy $f(\omega)>P$, de $f(x)$ monoton növése miatt ekkor minden $x>\omega$-ra $f(x)>P$ is igaz, tehát $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

33. Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos $[a, b]$-ben és például $f(a)<f(b)$ és legyen c egy $f(a)$ és $f(b)$ közti szám. Azt kell igazolnunk, hogy az $[a, b]$ intervallumban van olyan x, ahol $f(x)=c$ (100. ábra). A feltevés szerint $f(a)<c<f(b)$. Felezzük meg az $[a, b]$ intervallumot és legyen $[a_1, b_1]$ az a félintervallum, amelyikre igaz az $f(a_1)\leqq c\leqq f(b_1)$ egyenlőtlenség. Az $[a_1, b_1]$ intervallumot ismét felezzük meg és hasonló módon válasszuk meg az $[a_2, b_2]$ intervallumot. Az eljárást minden határon túl folytatva, egy $[a_n, b_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatot kapunk, amelynek a közös része egyetlen x pont, hiszen az $[a_n, b_n]$ intervallum hossza

$$\frac{b-a}{2^n}\to 0, \quad \text{ha} \quad n\to\infty.$$



100. ábra

Ebből az is következik, hogy $a_n\to x$ és $b_n\to x$, az f folytonossága miatt — mivel $x\in[a_0, b_0]=[a, b]$, — így $f(a_n)\to f(x)$ és $f(b_n)\to f(x)$ is fennáll. Ugyanakkor a konstrukció miatt $f(a_n)\leqq c\leqq f(b_n)$, így

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(x)\leqq c\leqq f(x)=\lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

ami csak úgy állhat fenn, ha $f(x)=c$.

34. Az e^x függvény a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban szigorúan monoton növő, így a $-\infty$-ben is és a $+\infty$-ben is van véges vagy végtelen határértéke. A határérték megállapításához elég egy speciális $+\infty$-hez, ill. $-\infty$-hez tartó sorozatot venni és az e mentén felvett függvényértékek sorozatát vizsgálni. Az n, ill. $-n$ sorozat $+\infty$-hez, ill. $-\infty$-hez tart és

$$\lim_{n\to+\infty} e^n=+\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=0,$$

így

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0.$$

Hasonló eszközökkel igazolható a másik két állítás is.

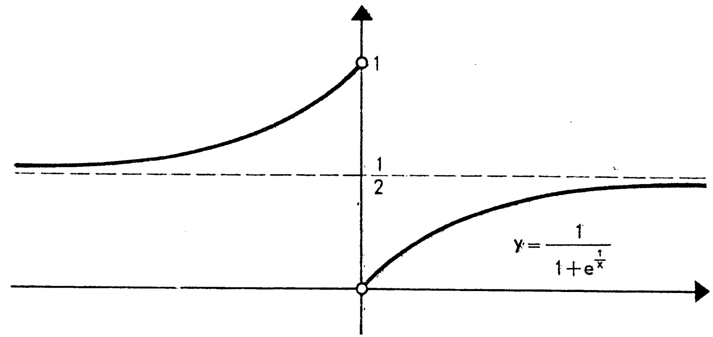
35. Az $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ függvény tulajdonságainak megállapításához a 34. feladatban igazolt határértékre és az $\dfrac{1}{x}$ függvény vizsgálatára van szükségünk. A definíciók alapján közvetlenül látható, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to0-0}\frac{1}{x}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to0+0}\frac{1}{x}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Ezek felhasználásával a következőket kapjuk:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to0-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,$$
$$\lim_{x\to0+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}.$$

A függvény vázlatos képét a 101. ábrán rajzoltuk meg.



101. ábra

36. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>0$, ezért véges sok kivételtől eltekintve $a_n>0$; ezekre az $a_n^{b_n}=e^{b_n\ln a_n}$ egyenlőség igaz. A logaritmusfüggvény folytonossága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ln a_n=b\ln a$, az exponenciális függvény folytonossága miatt pedig:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}=\lim_{n\to\infty} e^{b_n\ln a_n}=e^{b\ln a}=a^b.$$

37. *a)* A 33. gyakorló feladatban igazoltuk, hogy $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$. Mivel $\dfrac{1}{n}\to0$, ha $n\to\infty$, a függvény és sorozat határértéke közötti kapcsolat alapján:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a.$$

b) Itt az *a)* feladat megoldásához hasonlóan a 31*c)* feladat eredményét használjuk fel. Ott igazoltuk, hogy

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{ab}.$$

Mivel $\frac{1}{n}\to 0$, ha $n\to\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}}}=\sqrt{ab}.$$

c) A határérték kiszámításához a 31.*c)* feladatban alkalmazott módszert követjük. Legyen

$$b_n=\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n$$

és határozzuk meg az $\ln b_n$ sorozat határértékét. A 36. feladat eredményének alkalmazásával ebből már b_n határértékét könnyen megkapjuk, hiszen:

$$\text{(27)}\qquad \lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} e^{\ln b_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln b_n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_n=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}}{k}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}\frac{\ln\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}}{k}}{\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}-k}{k}}\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{a_2}-1}{\frac{1}{n}}+\ldots+\frac{\sqrt[n]{a_k}-1}{\frac{1}{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{k}(\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_k)=\ln\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k},$$

mivel

$$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\ldots+\sqrt[k]{a_k}}{k}\right)}{\frac{\sqrt[n]{a_1}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}-k}{k}}\to 1.$$

A (27) összefüggés szerint

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k},$$

vagyis a keresett határérték az $a_1, \ldots, a_k$ pozitív számok mértani közepe.

d) Először is azt kell észrevenni, hogy mivel tetszőleges x-re $\frac{x}{n}\to 0$, ha $n\to\infty$, ezért elég nagy n-re már $1+\frac{x}{n}>0$, tehát a keresett határértéknek van értelme. A 35. gyakorló feladat eredményét felhasználva:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\cdot x=x,$$

tehát:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

38. Indirekt úton igazoljuk az állítást. Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos $[a, +\infty)$-ben. Ha $f(x)$ felülről nem korlátos, akkor minden n természetes számhoz van olyan $x_n\in[a, +\infty)$, hogy $f(x_n)>n$. Az x_n pontsorozat vagy korlátos — és ekkor van egy konvergens, $x_{n_k}\to x_0$ részsorozata, ahol $x_0\in[a, +\infty)$, vagy nem korlátos — és ekkor van egy $x_{n_k}\to+\infty$ részsorozata. Az első esetben f-nek x_0-beli folytonossága miatt $f(x_{n_k})\to f(x_0)$, a második esetben

$$f(x_{n_k})\to\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

szintén véges értékhez, ez pedig ellentmond annak, hogy $f(x_{n_k})>n_k$ minden k-ra. Hasonló módon lehet ellentmondáshoz jutni azzal a feltevéssel, hogy $f(x)$ alulról nem korlátos $[a, +\infty)$-ben.

Az állítás direkt úton, a határérték definíciója alapján is igazolható.

39. Legyen $p(x)=a_0x^{2k+1}+a_1x^{2k}+\ldots+a_{2k+1}$ $(a_0\neq 0)$ és igazoljuk először a következőt:

$$\lim_{x\to+\infty} p(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } a_0>0,\\ -\infty, & \text{ha } a_0<0,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{ha } a_0>0,\\ +\infty, & \text{ha } a_0<0.\end{cases}$$

Legyen először $a_0>0$ és $p(x)$-et alakítsuk át a következőképpen:

$$(28)\quad p(x)=x^{2k+1}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{2k+1}}{x^{2k+1}}\right).$$

A $p(x)$ polinom (28) alatti felbontásában a második tényező határértéke $-\infty$-ben is meg $+\infty$-ben is a_0, így:

$$\lim_{x\to+\infty} p(x)=a_0 \lim_{x\to+\infty} x^{2k+1}=+\infty$$

és

$$\lim_{x\to-\infty} p(x)=a_0 \lim_{x\to-\infty} x^{2k+1}=-\infty.$$

Hasonlóan járhatunk el az $a_0<0$ esetben is.

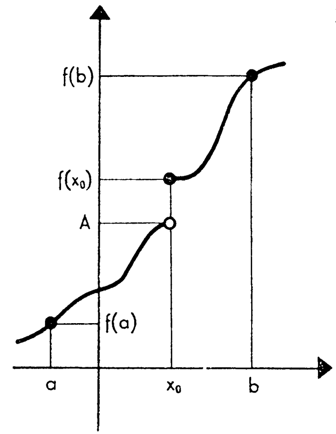
Az elmondottakból következik, hogy ki tudunk jelölni egy olyan zárt $[a, b]$ intervallumot, hogy a két végpontban a $p(x)$ függvény értéke ellenkező előjelű. A $p(x)$, mivel polinom, folytonos a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban, így az $[a, b]$ intervallumban is. A 0 érték a $p(a)$ és $p(b)$ értékek között van, így Bolzano tétele szerint van az (a, b)-ben olyan hely, ahol $p(x_0)=0$.

40. Legyen például $f(x)$ monoton növő $[a, b]$-ben és tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van olyan $x_0\in(a, b)$, hogy x_0-ban f nem folytonos. Mivel f monoton növő $[a, b]$-ben, léteznek a

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=B$$

határértékek. Mivel f nem folytonos x_0-ban, $f(x_0)=A$ és $f(x_0)=B$ közül legfeljebb egyik állhat fenn. Feltehetjük, hogy $f(x_0)\neq A$ teljesül, akkor nyilván csak $A<f(x_0)$ állhat fenn (102. ábra). Ha most $x>x_0$, akkor $f(x)\geqq f(x_0)$ a monoton növés miatt, ha $x<x_0$, akkor $f(x)\leqq A$, mert A az x_0-tól balra felvett függvényértékek felső határa. Így az $(A, f(x_0))$ nyílt intervallumból nem



102. ábra

vesz fel a függvény értékeket; ellentmondásra jutottunk azzal a feltevéssel, hogy $f(x)$ minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz. Hasonlóan lehet igazolni, hogy $f(x)$ a-ban jobbról és b-ben balról folytonos.

III. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS MINT SPECIÁLIS HATÁRÉRTÉK ÉS ALKALMAZÁSA HATÁRÉRTÉK-FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

1. A differenciálhányados fogalma, alkalmazása határérték-feladatok megoldására

Már a II. fejezet 2. pontjában, a függvény határértéke fogalmának bevezetésekor láttuk, hogy a határérték alkalmazásaiban az olyan típusú feladatok játszanak fontos szerepet, ahol egy adott $f(x)$ függvényre és egy adott a helyre a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

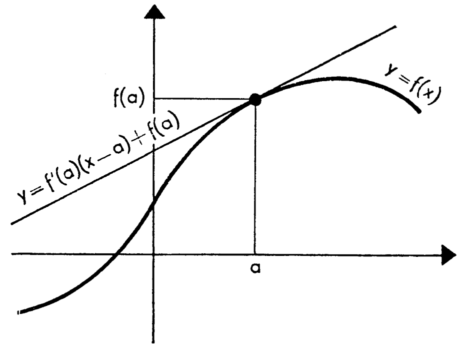
határértéket kell meghatározni.

Ha egy $f(x)$ függvényre egy rögzített a helyen a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$$

véges határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az a helyen differenciálható és itt a differenciálhányadosa $f'(a)=A$.

A definíció alapján a II. fejezet 2. pontjában mondottakat figyelembe véve, ha például $f(x)$ egy mozgás út—idő függvénye, akkor egy a pontban a mozgás sebességét $f'(a)$ adja meg. Ha $g(x)$ egy vezetéken az x idő alatt átfolyt töltésmennyiséget jelenti, akkor $g'(a)$ jelenti az a időpontban az áramerősséget. A differenciálhányados szemléletes geometriai jelentése a következő: ha az $f(x)$ függvény differenciálható az a helyen, akkor húzható az $y=f(x)$ görbe $(a, f(a))$ pontjához érintő és az érintő iránytangense $f'(a)$ (103. ábra). Ennek megfelelően, a görbe $(a, f(a))$ pontjához húzott érintő egyenlete: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ (l. II. fejezet 2. pontja).



103. ábra

Gyakorló feladat

1. A definíció alapján igazoljuk, hogy a következő függvények tetszőleges a helyen differenciálhatók és számítsuk ki a differenciálhányadost is:

a) x^n ($n \geqq 1$ egész);
b) $\sin x$;
c) $\cos x$;
d) e^x.

Megoldás:

a) A II. fejezet 19.*c)* gyakorló feladatában igazoltuk, hogy tetszőleges valós a számra:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1},$$

tehát az x^n függvény differenciálhányadosa tetszőleges a helyen létezik és értéke na^{n-1}.

b) Legyen a egy tetszőleges valós szám, a

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

határértéket kell kiszámítanunk. Ezt trigonometrikus átalakítások alkalmazásával ismert határértékfeladatokra vezethetjük vissza:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a} \frac{\sin (x-a+a)-\sin a}{x-a}=$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\cos a\,\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin a\,\frac{\cos(x-a)-1}{x-a}\right)=\cos a.$$

c) Hasonló eszközökkel számítjuk ki a

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$$

határértéket:

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a+a)-\cos a}{x-a}=$$

$$= \lim_{x\to a}\left(\cos a\,\frac{\cos(x-a)-1}{x-a}-\sin a\,\frac{\sin(x-a)}{x-a}\right)=-\sin a.$$

d) Az exponenciális függvény tulajdonságainak felhasználásával itt is ismert határérték kiszámítására vezethetjük vissza a feladatot:

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}e^a\,\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=e^a.$$

Ha egy $f(x)$ függvény egy intervallum minden pontjában differenciálható, akkor $f'(x)$-szel jelöljük és $f(x)$ *deriváltfüggvényének* nevezzük azt a függvényt, amelynek értéke az intervallum minden a helyén $f(x)$ differenciálhányadosával, $f'(a)$-val egyenlő.

Az 1. gyakorló feladat eredményét tehát így is fogalmazhatjuk: az x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x függvények a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban differenciálhatók és

$$(x^n)'=nx^{n-1},$$
$$(\sin x)'=\cos x,$$
$$(\cos x)'=-\sin x,$$
$$(e^x)'=e^x.$$

Az $f(x)=c$ függvény, ahol c tetszőleges valós szám, szintén differenciálható $(-\infty, +\infty)$-ben és a derivált függvény azonosan 0, hiszen

$$\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0,$$

tetszőleges a-ra.

Gyakorló feladat

2. Mutassuk meg, hogy a differenciálhatóság erősebb követelmény, mint a folytonosság; azaz, ha $f(x)$ differenciálható az a helyen, akkor folytonos is az a helyen.

Megoldás:

A feltevés szerint:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

A határérték definíciója szerint ekkor

$$f'(a)-1<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(a)+1,$$

ha $|x-a|<\delta$. Ebből következik, hogy

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|<K$$

(ahol K egy, az x-től független szám), ha $|x-a|<\delta$, azaz

$$|f(x)-f(a)|<K|x-a|<\varepsilon,$$

ha $|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{K}$ is teljesül. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

vagyis $f(x)$ folytonos az a helyen.

Bonyolultabb kifejezésekkel megadott függvények differenciálhatóságának vizsgálatát és a deriváltfüggvény meghatározását egyszerűbbekre vezethetjük vissza, ha megvizsgáljuk a függvények közötti műveletek és a differenciálhányados kiszámítása közötti kapcsolatot.

Gyakorló feladatok

3. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ és $g(x)$ az a helyen differenciálható függvények, akkor összegük, szorzatuk és — ha $g(a)\neq 0$, akkor — f és g hányadosa is differenciálható az a helyen és

(1) $\quad (f(x)+g(x))'_{x=a}=f'(a)-g'(a).$

(2) $\quad (f(x)g(x))'_{x=a}=f'(a)g(a)-f(a)g'(a).$

(3) $\quad \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=a}=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$

Megoldás:

Közvetlenül a differenciálhányados definícióját alkalmazva érhetünk célhoz. Az (1) formula igazolására a következő határértéket kell kiszámítanunk:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-[f(a)+g(a)]}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=$$

$$=f'(a)+g'(a).$$

Közben természetesen felhasználtuk, hogy az f és g függvények az a helyen differenciálhatók.

A (2) formula igazolása hasonló módszerrel megy; itt felhasználjuk azt is, hogy a differenciálható függvény folytonos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=$$

$$=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

A (3) összefüggést, a hányados differenciálási szabályát is ezzel a módszerrel igazolhatjuk:

$$\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(a)\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

4. Igazoljuk, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor differenciálható az a helyen, ha az a egy környezetében előállítható

(4) $\quad f(x)=f(a)+A(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)$

alakban, ahol $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ és az A rögzített szám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A=f'(a)$. A (4) előállítás azt mutatja, hogy $f(x)$ az a egy környezetében jól közelíthető az $f(a)+A(x-a)$ lineáris függvénnyel, mert a (4) egyenlőség jobb oldalának harmadik tagja még $(x-a)$-val osztva is 0-hoz tart, ha x tart a-hoz.

Megoldás:

Tegyük fel először, hogy $f(x)$ differenciálható az a helyen és mutassuk meg, hogy előállítható a (4) alatti alakban. A feltétel azt jelenti, hogy a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

véges határérték létezik. Ezt a következő formában is írhatjuk:

(5) $\quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)=\varepsilon(x),$

ahol $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$. Az (5) egyenlőségből, átrendezéssel, a következőt kapjuk,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a),$$

ahol $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$, tehát az $f'(a)=A$ helyettesítéssel éppen a (4) alatti előállításhoz jutottunk.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f(x)$ előállítható (4) alakban. Ebből — megfelelő átrendezéssel — az

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A+\varepsilon(x),\quad x\neq a,$$

alakhoz jutunk, ahonnan (felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$$

adódik. Azt kaptuk tehát, hogy $f(x)$ differenciálható az a helyen és $A=f'(a)$.

5. Igazoljuk a 4. gyakorló feladat felhasználásával a közvetett függvény differenciálhatóságáról szóló következő állítást: ha $f(x)$ differenciálható az a helyen és $g(x)$ differenciálható az $f(a)$ helyen, akkor $h(x)=g(f(x))$ is differenciálható az a helyen és

$$h'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a).$$

Megoldás:

A differenciálhatóságnak a 4. gyakorlatban kapott ekvivalens átfogalmazását használjuk fel a bizonyításban. Írjuk fel ennek alapján az f és g függvények differenciálhatóságát:

$$(6)\qquad f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+\varepsilon_1(x)(x-a),$$

$$(7)\qquad g(u)-g(f(a))=g'(f(a))(u-f(a))+\varepsilon_2(u)(u-f(a)),$$

ahol $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x)=0$ és $\lim\limits_{u\to f(a)}\varepsilon_2(u)=0$. A (6) és (7) összefüggések felhasználásával és alkalmas csoportosításban a h függvény megváltozását, azaz a $h(x)-h(a)$ különbséget a következő alakban írhatjuk fel:

$$h(x)-h(a)=g(f(x))-g(f(a))=g'(f(a))f'(a)(x-a)+$$
$$+[g'(f(a))\varepsilon_1(x)+f'(a)\varepsilon_2'(f(x))+\varepsilon_1(x)\varepsilon_2'(f(x))](x-a).$$

Itt $\varepsilon_2'(u)$ legyen az $\varepsilon_2(u)$-nak az a kiterjesztése, amelyet úgy értelmezünk, hogy $\varepsilon_2'(u)=\varepsilon_2'(u)$, ha $u\neq f(a)$ és $\varepsilon_2'(f(a))=0$. Erre azért van szükség, mert $f(x)=f(a)$ még fennállhat akkor is, ha $x\neq a$.

Az állítás igazolásához azt kell már csak megmutatnunk, hogy

$$\lim_{x\to a}[g'(f(a))\varepsilon_1(x)+f'(a)\varepsilon_2'(f(x))+\varepsilon_1(x)\varepsilon_2'(f(x))]=0,$$

ez pedig az ε_1 és ε_2 függvények tulajdonságai miatt nyilván fennáll.

6. Az eddigi eredmények felhasználásával igazoljuk, hogy a $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x $(a>0)$ függvények az értelmezési tartományukban mindenütt differenciálhatók.

Megoldás:

A $\operatorname{tg} x$ függvényről a $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ előállítás alapján a hányados differenciálási szabályának felhasználásával látható, hogy

$$\operatorname{tg}' x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

A $\operatorname{ctg} x$ függvényre hasonló módon adódik a

$$\operatorname{ctg}' x=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

összefüggés. Az $a^x=e^{x\ln a}$ előállítás alapján a szorzat és a közvetett függvény differenciálási szabályával kapjuk, hogy

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

7. Igazoljuk az inverz függvény differenciálási szabályát: tegyük fel, hogy f szigorúan monoton növő és folytonos az a hely egy környezetében és az a helyen differenciálható, továbbá $f'(a)\neq 0$. Ekkor a II. fejezet 34. gyakorló feladatában bizonyítottak szerint létezik f-nek φ inverze az $f(a)$ hely egy környezetében (ez is szigorúan monoton növő és folytonos). Mutassuk meg, hogy φ differenciálható az $f(a)$ helyen és

$$\varphi'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}.$$

Megoldás:

Vezessük be az $f(u)=v$, azaz $\varphi(v)=u$ jelölést és a definíció alapján számoljuk ki a φ függvény differenciálhányadosát az $f(a)$ helyen:

$$\lim_{v\to f(a)}\frac{\varphi(v)-\varphi(f(a))}{v-f(a)}=\lim_{u\to a}\frac{1}{\dfrac{f(u)-f(a)}{u-a}}=\frac{1}{f'(a)}.$$

Az f és φ folytonosságát és szigorú monotonitását is felhasználtuk.

Ha bevezetjük az $f(a)=b$ jelölést, akkor eredményünket a következő formában is megadhatjuk:

$$(8)\qquad \varphi'(b)=\frac{1}{f'(\varphi(b))}.$$

8. A 6. gyakorló feladat alapján igazoljuk, hogy $\ln x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ az értelmezési tartományban mindenütt differenciálhatók, $\arcsin x$, $\arccos x$ a $(-1, 1)$ nyílt intervallumban differenciálhatók. Adjuk meg a derivált függvényeket is.

Megoldás:

Az inverz függvény differenciálhatóságának feltételei mindegyik esetben teljesülnek, így csak a (8) összefüggés és a megfelelő azonosságok alkalmazásával ki kell számítanunk a derivált függvényeket:

$$\ln' x=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arc\,tg}' x=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arc\,tg} x)}}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)+1}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$\operatorname{arc\,ctg}' x=-\frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2(\operatorname{arc\,ctg} x)}}=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arc\,ctg} x)}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\arcsin' x=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\left(\text{mivel } -\frac{\pi}{2}\leqq \arcsin x\leqq \frac{\pi}{2}\right.$ és itt a $\cos x\geqq 0$, ezért a gyök pozitív értékét kell venni$\Big)$,

$$\arccos' x=-\frac{1}{\sin(\arccos x)}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

(az előzőhöz hasonlóan látható, hogy itt is a nevezőben a gyök pozitív).

9. Számítsuk ki a következő függvények derivált függvényét:

a) x^x;

b) x^{x^x};

c) $\ln\sin x$.

Megoldás:

a) Írjuk fel az x^x függvényt $e^{x\ln x}$ alakban. Innen a szorzat és a közvetett függvény differenciálási szabályának felhasználásával adódik, hogy a függvény az értelmezési tartományában ($x>0$) mindenütt differenciálható és

$$(x^x)'=x^x(\ln x+1).$$

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan írjuk fel az x^{x^x} függvényt $e^{x^x\ln x}$ alakban.

Az *a)* eredményének alkalmazásával adódik, hogy $x>0$-ra a függvény differenciálható és

$$(x^{x^x})'=x^{x^x}\cdot x^x\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right),$$

c) A függvény azokon a helyeken van értelmezve, ahol $\sin x>0$, azaz $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. Az értelmezési tartományában mindenütt differenciálható és deriváltja:

$$(\ln\sin x)'=\operatorname{ctg} x.$$

10. A differenciálhányados definíciójának és a differenciálási szabályok segítségével számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, $2k\pi<a<(2k-1)\pi$, k egész;

b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^{x^x}-a^{a^x}}{x-a}$, $a>0$;

c) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$, $a>0$, $\beta\neq 0$.

Megoldás:

a) A logaritmusfüggvény folytonosságának felhasználásával elég meghatározni a függvény logaritmusának határértékét; ha $\sin a>0$, akkor — ha x elég közel van a-hoz — $\sin x>0$ is áll:

$$\lim_{x\to a}\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\sin x-\ln\sin a}{x-a}=\operatorname{ctg} a,$$

felhasználva a 8.*c)* gyakorlat eredményét. Ennek alapján:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=e^{\operatorname{ctg} a}.$$

Ha $\sin a<0$, akkor — x-et elég közel véve a-hoz — $\sin x<0$ is teljesül; ekkor a következő átalakítást használjuk:

$$\lim_{x\to a}\ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\ln\left(\frac{-\sin x}{-\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\ln(-\sin x)-\ln(-\sin a)}{x-a}=\operatorname{ctg} a.$$

b) Egyszerű átalakítással elérhetjük, hogy két különbségi hányados különbségének határértékét kell kiszámítanunk:

$$\text{(9)}\qquad \lim_{x\to a}\frac{x^{x^x}-a^{a^x}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{x^x}-a^{a^a}}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}.$$

A (9) egyenlőség jobb oldalának első tagja a 8. *b)* gyakorló feladat alapján adódik, a második tag pedig az a^{a^x} függvény a helyen vett differenciálhányadosa:

$$(a^{a^x})'_{x=a} = (a^{a^x} a^x \ln^2 a)_{x=a} = a^{a^a} a^a \ln^2 a.$$

A keresett határérték tehát:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^{x^x} - a^{a^x}}{x-a} = a^{a^a} a^a \left(\ln^2 a + \frac{1}{a} + \ln a - \ln^2 a \right) = a^{a^a+1} \left(\ln a + \frac{1}{a} \right).$$

c) Itt $(x-a)$-val osztva a számlálót és a nevezőt, két különbségi hányados hányadosává alakíthatjuk a függvényt:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x-a}}{\dfrac{x^\beta - a^\beta}{x-a}}.$$

Az x^α függvény differenciálhányadosát kell csak kiszámítanunk:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

A keresett határérték tehát a következő:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha a^{\alpha-1}}{\beta a^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}, \quad \beta \neq 0.$$

A jobb- és baloldali határérték és a folytonosság mintájára célszerű definiálni a jobb- és baloldali differenciálhatóságot: *egy $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy az a helyen jobbról (balról) differenciálható, ha az a hely egy jobb oldali (bal oldali) környezetében értelmezve van és az*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

különbségi hányadosnak létezik jobboldali (baloldali) véges határértéke az a helyen. A határértéket, ha létezik, az $f(x)$ függvény a helyen vett jobb oldali (bal oldali) differenciálhányadosának nevezzük és $f'_+(a)$-val ($f'_-(a)$-val) jelöljük.

Egy $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy az a helyen végtelen a differenciálhányadosa, ha az a helyhez tartozó különbségi hányados $+\infty$-hez vagy $-\infty$-hez tart, ha x tart a-hoz.

Feladatok

1. Vizsgáljuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

definícióval megadott függvény hol differenciálható.

2. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha} \quad x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvény a 0 helyen differenciálható.

3. Lehet-e két, nem differenciálható függvény összege, szorzata differenciálható?

4. Adjuk meg azokat a helyeket, ahol a $\sqrt{1-\cos^2 \pi x}$ függvény differenciálható. Igazoljuk, hogy ahol a függvény nem differenciálható, ott léteznek a jobboldali és baloldali differenciálhányadosok.

5. Állapítsuk meg, hogy a következő függvények hol differenciálhatók és határozzuk meg a derivált függvényeket:

a) $(\sin x)^{\cos x}$;

b) $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1+x^3}{1+x^2}$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

d) $\ln(\ln(\ln x))$;

c) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

6. A differenciálhányados definíciójának felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x^{\alpha}}{\sin \pi x^{\beta}}, \beta \neq 0;$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x - x^2}{x-2};$

c) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)};$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}.$

7. Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvényeknek hol van (esetleg féloldali) végtelen differenciálhányadosa:

a) $\arcsin x;$

b) $\arccos x;$

c) $\sqrt[3]{x};$

d) $\sqrt{1-x^2};$

e) $\sqrt{|x|}.$

2. A derivált függvény alkalmazása a monotonitás vizsgálatára

Már a II. fejezetben láttuk, hogy monoton függvények határértékét elég könnyű meghatározni, hiszen ha például az $f(x)$ függvény egy $(a, +\infty)$ alakú intervallumban monoton, akkor a $+\infty$-ben tudjuk, hogy létezik véges vagy végtelen határértéke. Elég tehát egy speciális, $+\infty$-hez tartó sorozat mentén megvizsgálni a függvényértékek sorozatának határértékét. Az elmondottak alapján a határértékfeladatok megoldása szempontjából is fontos, hogy a differenciálhányados segítségével olyan, viszonylag egyszerű kritériumot tudjunk megadni, aminek alapján differenciálható függvények monotonitási viselkedését eldönthetjük.

Ha az $f(x)$ függvény az (a, b) intervallumban monoton növő (fogyó) és differenciálható, akkor minden $x \in (a, b)$-re $f'(x) \geqq 0$ $(f'(x) \leqq 0)$.

Gyakorló feladat

11. Igazoljuk az előző állítást.

Megoldás:

A bizonyítás közvetlenül adódik a monotonitás és a differenciálhányados definíciójából. Tegyük fel, hogy $f(x)$ monoton növő (a, b)-ben és $x_0 \in (a, b)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $f'(x_0) \geqq 0$.

Vizsgáljuk az x_0 hely (a, b)-be tartozó környezetében az x_0-hoz tartozó

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{10}$$

különbségi hányadost. A függvény monoton növése miatt, ha $x > x_0$, akkor $f(x) \geqq f(x_0)$, tehát ha (10)-ben a nevező pozitív, akkor a számláló nemnegatív, így a hányados nemnegatív. Ha $x < x_0$, akkor $f(x) \leqq f(x_0)$, tehát ha a (10) tört nevezője negatív, akkor a számláló nempozitív, tehát a tört nemnegatív. Mivel nemnegatív függvény határértéke nemnegatív, így:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geqq 0.$$

Hasonlóan igazolható a monoton fogyó függvényre vonatkozó állítás.

Az alkalmazások szempontjából számunkra az előzőleg megfogalmazott és a 11. gyakorló feladatban igazolt állítás megfordítása lesz fontos. Ehhez még néhány segédeszközre lesz szükségünk, ezeket fogjuk a következő gyakorló feladatokban megadni.

Gyakorló feladatok

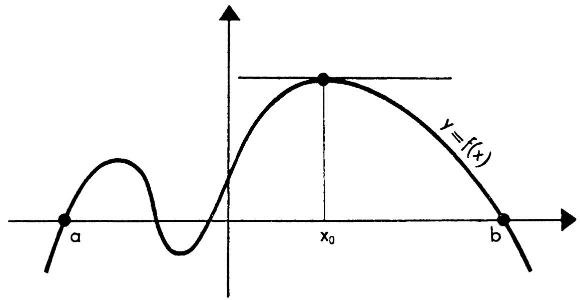
12. A II. fejezet 29. feladatában igazolt Weierstrass-tétel felhasználásával igazoljuk a következő, Rolle-tétel néven ismert állítást: ha $f(x)$ folytonos $[a, b]$-ben, differenciálható (a, b)-ben és $f(a)=f(b)=0$, akkor van olyan $x_0 \in (a, b)$ hely, ahol $f'(x_0)=0$.

Megoldás:

Ha $f(x)\equiv 0$ $[a, b]$-ben, akkor $f'(x)\equiv 0$ is fennáll, tehát nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy van olyan $x\in(a, b)$, ahol $f(x)>0$. Ekkor a Weierstrass-tétel alapján van olyan $x_0\in(a, b)$, hogy $f(x_0)>0$ és minden $x\in(a, b)$-re $f(x)\leq f(x_0)$. Azt fogjuk megmutatni, hogy $f'(x_0)=0$ (104. ábra). Vizsgáljuk az

$$(11)\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

különbségi hányados előjelét. Az x_0 választása miatt a számláló előjele mindig nempozitív, míg a nevező $x>x_0$ esetben pozitív, $x<x_0$ esetben negatív.



104. ábra

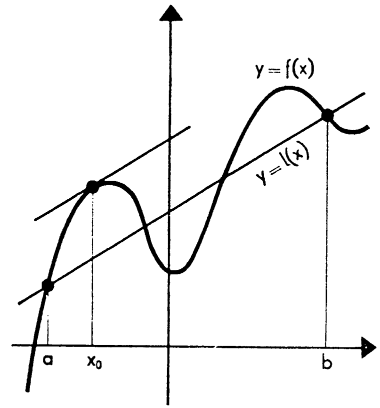
Így az x_0 akármilyen kis környezetében is nézzük, a (11) felvesz nemnegatív és nempozitív értékeket is. Így csak

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0$$

állhat fenn.

Hasonló módon igazolható az állítás, ha azt az esetet nézzük, amikor van olyan x, hogy $f(x)<0$.

13. Igazoljuk az előző, 12. gyakorlatban bizonyított Rolle-tétel felhasználásával a tétel következő, Lagrange-tételnek nevezett általánosítását: ha $f(x)$ folytonos $[a, b]$-ben, differenciálható (a, b)-ben, akkor van olyan $x_0\in(a, b,)$ hogy $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (105. ábra).



105. ábra

Megoldás:

Írjuk fel az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó szelő $y=l(x)$ egyenletét:

$$l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),$$

és vizsgáljuk az $f(x)-l(x)$ függvényt.

A $g(x)=f(x)-l(x)$ függvény folytonos $[a, b]$-ben, differenciálható (a, b)-ben és $g(a)=g(b)=0$. Így a $g(x)$ függvényre alkalmazható az előző, 12. gyakorló feladatban bizonyított Rolle-tétel. Eszerint van olyan $x_0\in(a, b)$, ahol:

$$g'(x_0)=f'(x_0)-l'(x_0)=0.$$

$l'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tehát azt kaptuk, hogy van olyan $x_0\in(a, b)$, ahol:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

14. A 13. gyakorló feladat eredményének felhasználásával igazoljuk a 11. gyakorló feladatban bizonyított tétel megfordítását: ha $f(x)$ egy $[a, b]$ intervallumban folytonos, (a, b)-ben differenciálható függvény és $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) minden $x\in(a, b)$-re, akkor $f(x)$ monoton növő (fogyó) $[a, b]$-ben.

Megoldás:

Vizsgáljuk az $f'(x)\geq 0$ esetet.

Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges x_1, $x_2\in[a, b]$-re, ha $x_1<x_2$, akkor $f(x_1)\leq f(x_2)$. Az $[x_1, x_2]$ intervallumra teljesülnek a 13. gyakorló feladatban bizonyított Lagrange-tétel feltételei:

$$(12)\quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0)\geqq 0,$$

ahol $x_0 \in (x_1, x_2)$. Mivel (12)-ben a különbségi hányados nevezője, (x_2-x_1) pozitív, ezért $f(x_2)-f(x_1)\geqq 0$, tehát $f(x_2)\geqq f(x_1)$ áll fenn.

Az $f'(x)\leqq 0$ esetre hasonló módon bizonyítható az állítás.

Megjegyzés: A 11. és 14. gyakorlatban igazolt eredmények nyílt intervallumra, végtelen intervallumra is kiterjeszthetők; az alkalmazásokban ezeknek az eseteknek is fontos szerepe van.

15. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából a következő függvényeket:

a) $x \ln x$;

b) $\dfrac{\ln x}{x}$;

c) $\dfrac{x}{e^x}$.

Megoldás:

a) Az $f(x)=x\ln x$ függvény az értelmezési tartományában, a $(0, +\infty)$ intervallumban mindenütt differenciálható, így alkalmazható a 14. gyakorlatban bizonyított tétel:

$$f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$$

előjelét kell megvizsgálnunk. Ha $0<x<\dfrac{1}{e}$, akkor $f'(x)$ előjele negatív, ha $\dfrac{1}{e}<x<+\infty$, akkor $f'(x)>0$, így a függvény $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$-ben monoton fogy, $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$-ben monoton nő. Ebből az is nyilvánvaló, hogy az $\dfrac{1}{e}$ helyen minimuma van a függvénynek, itt $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$.

b) A $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ függvény értelmezési tartományában, $(0, +\infty)$-ben vizsgáljuk a derivált függvényt:

$$g'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Mivel a nevező pozitív, $g'(x)$ előjele az $1-\ln x$ előjelével egyezik meg. Így $g'(x)>0$, ha $0<x<e$ és $g'(x)<0$, ha $e<x<+\infty$. Látható, hogy $(0, e)$-ben $g(x)$ nő, $(e, +\infty)$-ben $g(x)$ fogy, az e helyen a függvénynek maximuma van, $g'(e)=0$.

c) Alkalmazzuk a bevált módszert a $h(x)=\dfrac{x}{e^x}$ függvényre $(-\infty, +\infty)$-ben:

$$h'(x)=\left(\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}.$$

A derivált függvény előjelét a számláló határozza meg: $h'(x)>0$, ha $x<1$ és $h'(x)<0$, ha $x>1$. A $(-\infty, 1)$ intervallumban $h(x)$ monoton nő, $(1, +\infty)$-ben monoton fogy, az 1 helyen maximuma van a függvénynek, $h'(1)=0$.

16. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$.

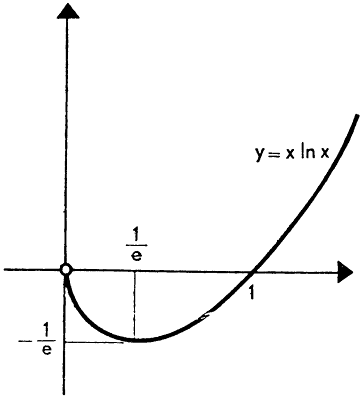
Megoldás:

a) Az előző, 15. gyakorló feladat *a)* részében kapott eredmény szerint a függvény a $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ intervallumban monoton fogyó és felülről korlátos, hiszen $x<1$ miatt $\ln x<0$, így $x\ln x<0$ is fennáll. A monoton függvények határértékére vonatkozó tétel szerint a $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$ véges határérték létezik. Ahhoz, hogy a határértéket kiszámítsuk, elég egy speciális, jobbról 0-hoz tartó sorozat mentén vett függvényértékek sorozatát vizsgálni. Válasszuk az (e^{-n}) sorozatot, erről tudjuk, hogy $e^{-n}>0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e^n}=0$. A függvényértékek sorozatának határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\ln e^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{e^n}\right)=0:$$

Így a keresett határérték:

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x=0.$$

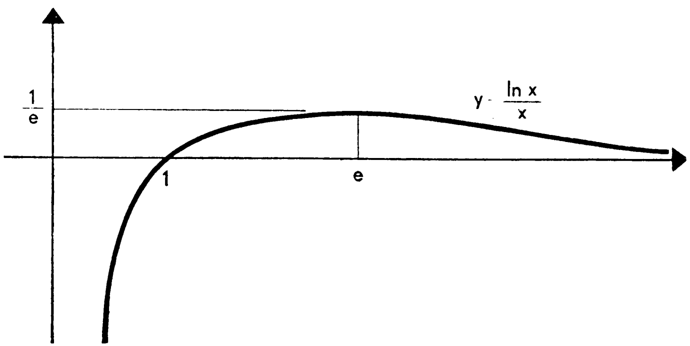


106. ábra

Az $x \ln x$ függvény vázlatos grafikonját a 106. ábrán szemléltettük.

b) Az *a)* gyakorlat megoldásában követett módszer itt is célhoz vezet. Az $\dfrac{\ln x}{x}$ függvény az $(e, +\infty)$ intervallumban monoton fogyó, így a $+\infty$-ben véges, vagy esetleg $-\infty$ a határértéke. Vizsgáljuk a függvényértékek sorozatát a $+\infty$-hez tartó (e^n) sorozat mentén:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln e^n}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0,$$



107. ábra

így a keresett határérték:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Eredményünket abban a formában is meg szokták fogalmazni, hogy az $\ln x$ függvény lassabban tart a $+\infty$-hez, mint x. Az $\dfrac{\ln x}{x}$ függvény vázlatos grafikonját a 107. ábrán szemléltettük.

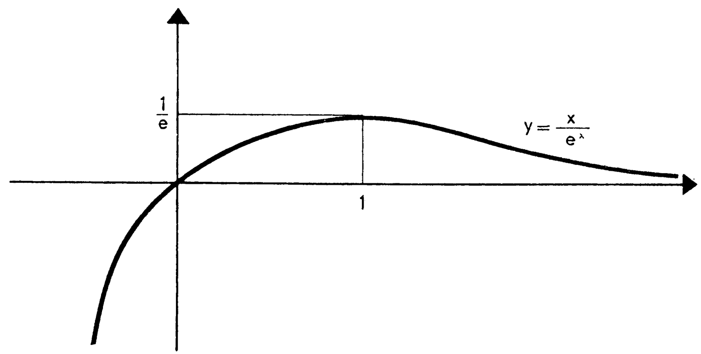
c) Az $\dfrac{x}{e^x}$ függvény az előző gyakorló feladat *c)* része szerint az $(1, +\infty)$ intervallumban monoton fogyó. Vizsgáljuk a függvényértékek sorozatát az (n) $+\infty$-hez tartó sorozat mentén:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0,$$

így a keresett határérték:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Eredményünket így is megfogalmazhatjuk: az x lassabban tart $+\infty$-hez, mint e^x. Az $\dfrac{x}{e^x}$ függvény vázlatos képét a 108. ábrán adtuk meg:



108. ábra

∗**8.** A monotonitásra vonatkozó elégséges feltétel felhasználásával igazoljuk, hogy ha $f'(x)\equiv 0$ egy (a, b) intervallumban és $f(x)$ folytonos $[a, b]$-ben, akkor $f(x)$ konstans $[a, b]$-ben.

∗**9.** Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ az $[a, b]$-ben folytonos, (a, b)-ben differenciálható, $f'(x)\geqq 0$ (a, b)-ben és nincs olyan részintervalluma (a, b)-nek, ahol $f'(x)$ azonosan 0, akkor f szigorúan monoton növő $[a, b]$-ben.

∗**10.** Igazoljuk a Lagrange-tétel következő általánosítását, az ún. Cauchy-féle középérték tételt: ha $f(x)$ és $g(x)$ $[a, b]$-ben folytonos, (a, b)-ben differenciálható függvények és $g'(x)\neq 0$, ha $x\in(a, b)$, akkor van olyan $x_0\in(a, b)$, amire fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

11. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,$$

ahol $a>1$, $\alpha>0$.

12. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,$$

ahol $\alpha>0$.

13. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

14. Igazoljuk, hogy az

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{ha}\quad x=0\end{cases}$$

függvény differenciálható a 0 helyen.

15. Számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, $n\geqq 0$ egész;

b) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x\ln(1-x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

16. A monotonitási kritérium alkalmazásával igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

a) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$, ha $x>0$;

b) $x-\dfrac{x^3}{3}<\operatorname{arc\,tg} x<x-\dfrac{x^3}{6}$, ha $0<x\leqq 1$.

17. Az előző, 16. feladat egyenlőtlenségeinek felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x-x}{x^2}$.

18. Igazoljuk, hogy ha $x>0$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{e}{2x+2}<e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\frac{e}{2x+1}.$$

19. Az előző feladat egyenlőtlenségének alkalmazásával számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right].$$

20. Vizsgáljuk meg hol nő, hol fogy a (0, 1) intervallumban értelmezett $(1-x)^{1-x}\,x^x$ függvény és állapítsuk meg határértékét az értelmezési tartomány szélein.

3. Magasabbrendű deriváltak; Taylor-formula; L'Hospital-szabály

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény kétszer differenciálható az a *helyen, ha az* a *hely egy környezetében differenciálható és az $f'(x)$ derivált függvény differenciálható az* a *helyen.* Az $(f'(x))'_{x=a}$ differenciálhányadost az f függvény a helyen vett második differenciálhányadosának vagy második deriváltjának nevezzük és $f''(a)$-val jelöljük. Hasonlóan definiálható a háromszori differenciálhatóság. *Általában, tetszőleges $n>1$ természetes számra akkor mondjuk, hogy az f függvény az* a *helyen* n*-szer differenciálható, ha az* a *hely egy környezetében* (n−1)*-szer differenciálható és a függvény* (n−1)*-edik derivált függvénye, $f^{(n-1)}(x)$ az* a *helyen differenciálható.*

Gyakorló feladatok

17. Igazoljuk, hogy a következő függvények az értelmezési tartományukban akárhányszor differenciálhatók és számítsuk ki az n-edik ($n\geqq 1$ természetes szám) deriváltjukat:

a) e^x;

b) $\sin x$;

c) $\cos x$;

d) $\ln(1+x)$;

e) $(1+x)^\alpha$, α tetszőleges.

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy e^x mindenütt differenciálható és $(e^x)'=e^x$. Ebből nyilván következik, hogy tetszőleges n pozitív egész számra $(e^x)^{(n)}=e^x$.

b) A $\sin x$ függvény mindenütt differenciálható és $(\sin x)'=\cos x$. A $\cos x$ függvény is mindenütt differenciálható és $(\cos x)'=-\sin x$. Ebből adódik, hogy $(\sin x)''=-\sin x$, $(\sin x)'''=(-\sin x)'=-\cos x$ és $(\sin x)^{(4)}=(-\cos x)'=\sin x$ szintén mindenütt érvényes egyenlőségek. Innen teljes indukcióval látható, hogy

$$(\sin x)^{(n)}=\begin{cases}\cos x, & \text{ha } n=4k+1,\\ -\sin x, & \text{ha } n=4k+2,\\ -\cos x, & \text{ha } n=4k+3,\\ \sin x, & \text{ha } n=4k.\end{cases}$$

c) A *b)* feladat alapján a következőt kapjuk:

$$(\cos x)^{(n)}=\begin{cases}-\sin x, & \text{ha } n=4k+1,\\ -\cos x, & \text{ha } n=4k+2,\\ \sin x, & \text{ha } n=4k+3,\\ \cos x, & \text{ha } n=4k.\end{cases}$$

d) A $\ln(1+x)$ függvény értelmezési tartománya a $(-1,+\infty)$ intervallum, itt mindenütt differenciálható és $[\ln(1+x)]'=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$. A kapott derivált függvény szintén differenciálható, ha $x>-1$ és

$$[\ln(1+x)]''=-(1+x)^{-2}.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$[\ln(1+x)]'''=2(1+x)^{-3}.$$

Tegyük fel, hogy $n>1$-re

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!(1+x)^{-n}. \tag{13}$$

A (13) egyenlőség jobb oldalán álló képlettel definiált függvény szintén differenciálható, ha $x>-1$ és

$$[\ln(1+x)]^{(n+1)}=(-1)^n n!(1+x)^{-n-1}.$$

Ezzel teljes indukcióval igazoltuk, hogy a (13) képlet minden $n\geqq 1$ egész számra igaz.

e) Az $(1+x)^\alpha$ függvény a $(-1, +\infty)$ intervallumban tetszőleges α-ra értelmezve van és deriválható:

$$[(1+x)^\alpha]' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

Tegyük fel, hogy $n \geqq 1$-re igaz, hogy az $(1+x)^\alpha$ függvény n-edik deriváltja a $(-1, +\infty)$ intervallumban létezik és

$$(14) \qquad [(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

A (14) egyenlőség jobb oldalán álló függvény a $(-1, +\infty)$ intervallumban differenciálható és

$$[(1+x)^\alpha]^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}.$$

Így teljes indukcióval igazoltuk, hogy a (14) formula érvényes tetszőleges $n \geqq 1$ természetes számra.

18. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény $(-\infty, +\infty)$-ben akárhányszor differenciálható és $f^{(n)}(0) = 0$ tetszőleges n természetes számra.

Megoldás:

A 14. feladat eredménye szerint f differenciálható a 0 helyen és $f'(0) = 0$.

Ha $x \neq 0$, akkor $f'(x) = 2\dfrac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Így azt kell igazolnunk, hogy az

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható a 0 helyen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

a 15.*a)* feladat eredménye szerint. Ha $x \neq 0$, akkor $f''(x)$-et kiszámítva látható, hogy $f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} p\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ahol $p(x)$ polinom és $p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ úgy keletkezik $p(x)$-ből, hogy x helyett $\dfrac{1}{x}$-et írunk. Tegyük fel, hogy $n > 1$-re f mindenütt n-szer differenciálható és

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} q\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0,\ q(x) \text{ polinom}, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Az $(n+1)$-edik derivált $x \neq 0$-ra a differenciálási szabályok alkalmazásával $e^{-\frac{1}{x^2}} r\left(\dfrac{1}{x}\right)$ alakúnak adódik, ahol $r(x)$ is polinom. Ha $x = 0$, akkor

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} q\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = 0,$$

a 15.*a)* feladat eredménye szerint. Ezzel teljes indukcióval igazoltuk az állítást.

19. A $p(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 6x - 1$ polinom a 0 helyen akárhányszor differenciálható. Keressünk összefüggést a $p(0)$, $p'(0)$, $p''(0)$, $p'''(0)$, $p^{(4)}(0)$, $p^{(5)}(0)$ értékek és a polinom együtthatói között.

Megoldás:

Számítsuk ki a $p(x)$ függvény első öt derivált függvényét:

$$p'(x) = 20x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 6,$$

$$p''(x) = 80x^3 + 36x^2 - 12x,$$

$$p'''(x) = 240x^2 + 72x - 12,$$

$$p^{(4)}(x) = 480x + 72,$$

$$p^{(5)}(x) = 480.$$

A deriváltak értéke a 0 helyen: $p(0) = -1$, $p'(0) = 6$, $p''(0) = 0$, $p'''(0) = -12$, $p^{(4)}(0) = 72$, $p^{(5)}(0) = 480$. A számolás menetéből látható, hogy a polinom ezekkel a következő alakban állítható elő:

$$p(x)=\frac{p^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{p^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'(0)}{1!}x+p(0).$$

20. Igazoljuk, hogy a 19. gyakorló feladatban talált típusú előállítás tetszőleges

$$q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

polinomra is igaz.

Megoldás:

Az állítás közvetlen számolással igazolható. Számítsuk ki a $q^{(k)}(x)$ derivált függvényeket és a $q^{(k)}(0)$ értékeket $k=0, 1, \ldots, n$ esetére:

$$q(0)=a_0$$

$$q'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1},\quad q'(0)=a_1,$$

$$q''(x)=2!a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2},\quad q''(0)=2!a_2,$$

$$q'''(x)=3!a_3+\ldots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3},\quad q'''(0)=3!a_3,$$

.

.

.

$$q^{(n)}(x)=n!a_n,\quad q^{(n)}(0)=n!a_n.$$

A kapott összefüggések alapján a $q(x)$ polinomot így állíthatjuk elő:

$$q(x)=q(0)+\frac{q'(0)}{1!}x+\frac{q''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{q^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Legyen $f(x)$ a 0 hely egy környezetében $n+1$-szer differenciálható függvény, ahol n természetes szám. Ekkor az adott $f(x)$ függvényhez hozzárendelhetünk egy

$$p_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

polinomot (ez természetesen nem egyezik meg általában a függvénnyel). Célszerű megvizsgálni, hogy milyen összefüggés van az adott függvény és a $p_n(x)$ polinom között, pontosabban hogyan állítható elő az

$$f(x)-p_n(x)$$

különbség.

Gyakorló feladat

21. Alkalmazzuk a Cauchy-középértéktételt (10. feladat) a $h(x)=f(x)-p_n(x)$ és $g(x)=x^{n+1}$ függvényekre és ezek derivált függvényeire és így igazoljuk, hogy

$$(15)\qquad f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

ahol ξ 0 és x közötti szám, x pedig benne van 0-nak abban a környezetében, ahol f $(n+1)$-szer differenciálható.

Megoldás:

Először azt vegyük észre, hogy az előző, 20. gyakorló feladat eredménye alapján:

$$h(0)=h'(0)=\ldots=h^{(n)}(0)=0;$$

A g függvény első n deriváltja szintén 0 a 0 helyen:

$$g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(n)}(0)=0,$$

viszont $g^{(n+1)}(x)\equiv(n+1)!$, konstans. Alkalmazzuk most a Cauchy-féle középérték tételt h-ra és g-re:

$$(16)\qquad \frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h(x)-h(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{h'(\xi 1)}{g'(\xi_1)},$$

ahol ξ_1 egy 0 és x közötti megfelelő szám. A (16) egyenlőség jobb oldalára újra alkalmazható a Cauchy-középérték tétel:

$$(17)\qquad \frac{h'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{h'(\xi_1)-h'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{h''(\xi_2)}{g''(\xi_2)},$$

itt ξ_2 egy ξ_1 és 0 közötti megfelelő szám. Az előző gondolatmenetet n-szer egymás után alkalmazva a következőhöz jutunk:

$$(18)\qquad \frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})}=\frac{h^{(n-1)}(\xi_{n-1})-h^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(0)}=\frac{h^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}:$$

Végül, a (18) egyenlőség jobb oldalán újra alkalmazhatjuk a Cauchy-tételt:

$$(19)\qquad \frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h^{(n)}(\xi_n)-h^{(n)}(0)}{g^{(n)}(\xi_n)-g^{(n)}(0)}=\frac{h^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}:$$

Itt ξ a 0 és ξ_n közé eső, tehát a 0 és x közötti alkalmas szám. Írjuk most be (19) jobb oldalába a h és g $(n+1)$-edik deriváltját:

$$h^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-p_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x),$$

hiszen egy n-edfokú polinom $n+1$-edik deriváltja 0:

$$(20)\qquad \frac{h(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

A kapott (20) egyenlőségbe $g(x)$ és $h(x)$ jelentését beírva és az egyenlőséget átrendezve azt kapjuk:

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

A 21. gyakorló feladat eredményét fogalmazzuk meg még egyszer: ha $f(x)$ a 0 hely egy környezetében $(n+1)$-szer differenciálható, akkor ebben a környezetben $f(x)$ a következő alakban állítható elő:

$$(21)\qquad f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ahol ξ egy 0 és x közötti (x-től függő) szám. A (21) előállítást az $f(x)$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-formulájának nevezik. A (21) egyenlőség jobb oldalának utolsó tagja a maradéktag ún. Lagrange-féle alakban, az előtte álló kifejezés pedig az $f(x)$ 0 helyhez tartozó Taylor-polinomja.

Ha az $f(x)$ függvényről azt is tudjuk, hogy a 0 környezetében az $(n+1)$-edik derivált korlátos, akkor a maradéktagot x^n-nel osztva is olyan függvényt kapunk, ami 0-hoz tart, ha x tart 0-hoz:

$$(22)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x=0.$$

Ebben az esetben a határérték-feladatokban való alkalmazás során célszerű a maradéktagot

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=o(x^n)$$

alakban írni, ahol $o(x^n)$ egy olyan függvény jele, amire

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0.$$

(Az $o(x^n)$ jelölést „kis ordo x^n"-nek olvassuk.) Az $(n+1)$-edik derivált korlátosságára vonatkozó feltétel minden olyan esetben teljesül, amikor $f(x)$ a 0 környezetében akárhányszor differenciálható. Ebben az esetben ugyanis az $f^{(n+1)}(x)$ függvény is differenciálható a 0 környezetében, ezért folytonos is, így a 0 helyen van véges határértéke, tehát (22) nyilván igaz.

Gyakorló feladatok

22. Írjuk fel a következő függvények 0 helyhez tartozó Taylor-formuláját:

a) e^x;

b) $\sin x$;

c) $\cos x$;

d) $\ln(1+x)$;

e) $(1+x)^\alpha$, α valós.

Megoldás:

a) Az e^x függvény a 17. gyakorló feladat szerint az egész számegyenesen akárhányszor differenciálható, így tetszőleges n természetes számra felírható a Taylor-formula. A 17. gyakorló feladat *a)* részében kapott eredmény szerint:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

ahol ξ egy 0 és x közötti szám. A kapott előállítás tetszőleges x-re érvényes.

b) A 17.*b)* gyakorló feladatból tudjuk, hogy a $\sin x$ függvény tetszőleges helyen akárhányszor differenciálható és ismerjük a deriváltakat is. Célszerű $n=2k-1$ esetre felírni a Taylor formulát, ahol k tetszőleges természetes szám. A deriváltak 0 helyen vett értékét figyelembe véve ezt kapjuk:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^k\frac{\sin\xi}{(2k)!}x^{2k},$$

ahol ξ egy 0 és x közötti szám és az előállítás tetszőleges x-re érvényes.

c) A $\cos x$ függvényre a *b)* megoldáshoz hasonlóan a következő előállítást kapjuk:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} +$$
$$+ (-1)^{k+1} \frac{\sin \xi}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

ξ itt szintén 0 és x közötti alkalmas számot jelöl és az előállítás tetszőleges x-re igaz.

d) Az $\ln x$ függvény csak $x>0$-ra van értelmezve, ezért nincs értelme a 0 helyhez tartozó Taylor-formulájáról beszélni. Helyette az $\ln(1+x)$, $(-1, +\infty)$-ben értelmezett függvényt vizsgáljuk, ez az értelmezési tartományában mindenütt akárhányszor differenciálható, így tetszőleges n-re felírhatjuk a 0 helyhez tartozó Taylor-formuláját. A 17.*c)* gyakorló feladatból ismerjük a deriváltakat:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} +$$
$$+ (-1)^n \frac{\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}}{n+1} x^{n+1}.$$

Itt az előállítás tetszőleges $x>-1$-re érvényes és ξ egy 0 és x közötti számot jelöl.

e) Az $(1+x)^\alpha$ függvény a $(-1, +\infty)$ intervallumban tetszőleges α valós számra akárhányszor differenciálható. A 17. *d)* gyakorló feladatból ismerjük a deriváltak értékét, így a 0 helyhez tartozó Taylor-formula:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1},$$

az előállítás tetszőleges $x>-1$-re érvényes, ξ egy alkalmas 0 és x közötti szám.

23. A 0 helyhez tartozó Taylor-formulák felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x^2}}$.

Megoldás:

a) Mivel a nevezőben x^3 szerepel, a számlálóban levő e^x, $\sin x$, $\cos x$ függvények 0 helyhez tartozó Taylor-formuláját úgy érdemes felírni, hogy a maradéktag $o(x^3)$ legyen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Nyilván fennáll a $o(x^3) \pm o(x^3) = o(x^3)$ összefüggés, hiszen azt fejezi ki, hogy két, x^3-nal osztva 0-hoz tartó függvény összege, ill. különbsége is 0-hoz tart, ha x tart a 0-hoz. Ezért a vizsgált törtet így írhatjuk:

$$\frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3},$$

ebből pedig a keresett határértékre $\frac{1}{3}$-ot kapunk.

b) Itt előbb célszerű a vizsgált kifejezést közös nevezőre hozni, majd az e^x függvény Taylor-formuláját alkalmazni:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x(x + o(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{1 + \frac{o(x)}{x}} = \frac{1}{2}.$$

c) Itt is az $\ln(1+x)$, e^x Taylor-formuláját használhatjuk úgy, hogy x helyett x^2-et teszünk, és a $\cos x$ Taylor-formulájában x helyett $3x$-et:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - o(x^2)}{1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2) - 1 + x^2 - o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{7}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{2}{7}.$$

Eddigi eszközeinkkel már sokszor oldottunk meg olyan határérték-feladatokat, ahol egy „$\frac{0}{0}$" vagy „$\frac{\infty}{\infty}$" alakra vezető határértéket kellett meghatároznunk. Az ilyen típusú feladatok megoldására a szereplő függvények bizonyos tulajdonsága esetén van egy jól kezelhető szabály, az ún. *L'Hospital-szabály*: *legyenek az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az α hely egy környezetében differenciálhatók (α lehet $\pm\infty$, vagy $a-0$, $a+0$ alakú, vagy a véges érték) esetleg az α helyet kivéve. Tegyük fel, hogy $x\to\alpha$, akkor $f(x)$ és $g(x)$ is 0-hoz vagy ∞-hez tart és az α hely egy környezetében $g'(x)\neq 0$. Amennyiben*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$$

létezik, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \beta$$

is fennáll.

Gyakorló feladatok

24. Igazoljuk a L'Hospital-szabályt arra az esetre, amikor α egy véges a hely, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. (Alkalmazzuk a Cauchy-középértéktételt.)

Megoldás:

A feltétel alapján — ha f és g nincs is értelmezve az a helyen — az $f(a) = g(a) = 0$ definíciókkal az a egy környezetében, beleértve magát az a helyet is, folytonossá tettük az f és g függvényeket.

A Cauchy-tétel alkalmazásával ezt kapjuk:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \beta,$$

hiszen ha $x\to a$, akkor az x és a közötti ξ is tart az a-hoz és az $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ függvénynek az a helyen β a határértéke.

25. Számítsuk ki a következő határértékeket a L'Hospital-szabály alkalmazásával:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;

b) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Megoldás:

a) A L'Hospital-szabály alkalmazásának feltételei teljesülnek:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}{1}$$

amennyiben az egyenlőség jobb oldalán álló határérték létezik. Állapítsuk meg tehát a jobboldal értékét. Itt az első tényező határértékét könnyen megadhatjuk:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e,$$

tehát csak a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

határértéket kell meghatároznunk. Itt újra alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x}{(1+x)^2}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Ennek alapján az eredeti határérték:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\frac{e}{2}.$$

(Érdemes a 18. feladat alkalmazásával is megoldani a gyakorlatot.)

b) A kiszámítandó határérték „0^0” alakú, célszerű a függvény logaritmusának határértékét kiszámítani:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)}{x}.$$

Itt a L'Hospital-szabályt célszerű alkalmazni kétszer egymás után (az alkalmazás feltételei teljesülnek):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2x}{1+x^2}=0.$$

Az eredeti határérték tehát:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

c) A keresett határérték „$\infty-\infty$” alakú. Először azonos átalakításokat célszerű végezni:

$$\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x-x^2(1-\sin^2 x)}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=$$

$$=\left(\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\frac{x^2}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}+1.$$

A kapott kifejezés első tagjának második tényezője 1-hez tart, az első tényezőre alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt úgy, hogy közben — ahol lehet — egyszerűsítő fogásokat is végezzünk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{3}\,\frac{\sin 2x}{2x}=-\frac{1}{3},$$

a keresett határérték tehát $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

26. Állapítsuk meg, hogy a következő határértékek kiszámításakor alkalmazható-e a L'Hospital-szabály:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$;

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Megoldás:

a) A határérték kiszámítására nem alkalmazható a L'Hospital-szabály, mert ugyan jó eredményt kapnánk, de logikai hibát követnénk el, hiszen abban felhasználnánk a $\sin x$ függvény deriváltját. Ugyanakkor a $\sin x$ deriváltjának meghatározásához éppen ennek a határértéknek az ismeretére van szükség (a $\sin x$ függvény általunk alkalmazott, szokásos definíciója alapján).

b) Itt a L'Hospital-szabály alkalmazásának az az akadálya, hogy a deriváltakból álló hányadosnak, az

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

kifejezéssel definiált függvénynek nincs határértéke a $+\infty$-ben. Könnyen célhoz érünk azonban más eszközökkel:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1:$$

Feladatok

21. Alkalmas Taylor-formulák felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\sqrt[3]{1-x^2}-\dfrac{x^3}{6}}{x^5}$.

22. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arc\,tg} x^2-\pi}$.

23. Igazoljuk, hogy tetszőleges, rögzített x-re:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x.$$

24. Írjuk fel az

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x\neq 0,\\ 0, & \text{ha } x=0,\end{cases}$$

függvény 0 helyhez tartozó Taylor-formuláját.

$*$**25.** Legyen $f(x)$ egy a hely környezetében $(n+1)$-szer differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy ekkor $f(x)$ az a hely környezetében előállítható:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

alakban, ahol ξ egy, az a és x közötti alkalmas érték.

26. A Taylor-formula felhasználásával adjunk meg olyan polinomot, amelyik a $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ intervallumban 10^{-4}-nél kisebb hibával adja meg $\sin x$ értékét.

27. Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ kétszer differenciálható az a hely egy környezetében és $f''(x)$ folytonos az a helyen, akkor:

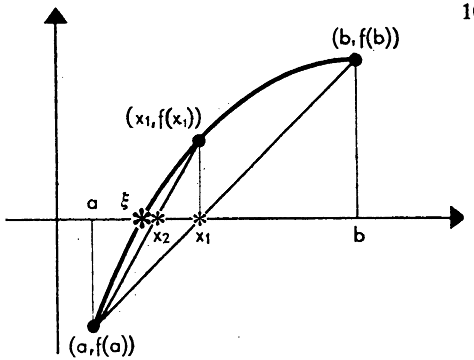
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+2x)-2f(a+x)+f(a)}{x^2}=f''(a).$$

28. Igazoljuk, hogy ha az $f'(x)$ függvény az a hely egy környezetében — esetleg az a kivételével — létezik és $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ is létezik és véges, akkor f az a helyen is differenciálható. (Használjuk a L'Hospital-szabályt!)

4. Egyenletek gyökeinek közelítő meghatározása

A gyakorlatban előforduló feladatok során gyakran szükség van arra, hogy egy adott egyenlet valamelyik gyökét előre megadott pontossággal kiszámítsuk. A következőkben néhány olyan, gyakorlatilag is jól használható eljárást ismertetünk, amelyekben a határérték fogalmán alapuló közelítések szerepelnek.

Egy sok esetben jól használható, egyszerű közelítő eljárás az ún. *húrmódszer*. Tegyük fel, hogy $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény, $f(a)\cdot f(b)<0$ és $f(x)$-nek (a, b)-ben pontosan egy gyöke van (109. ábra). Ekkor, első lépésként számítsuk ki az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő húrnak az x tengellyel való x_1 metszéspontját. Ha $f(x_1)\neq 0$, akkor az $[a, x_1]$ és $[x_1, b]$ intervallumok közül válasszuk ki azt, amelyiknek a végpontjaiban felvett függvényértékek ellenkező előjelűek. Ezután a kiválasztott intervallumra újra végezzük el az előző eljárást, így egy x_2 helyhez jutunk. Ha $f(x_2)\neq 0$, akkor folytassuk tovább az eljárást. Az így kapott $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ sorozat az $f(x)=0$ egyenlet egyetlen $[a, b]$-beli gyökéhez tart.



109. ábra

Gyakorló feladatok

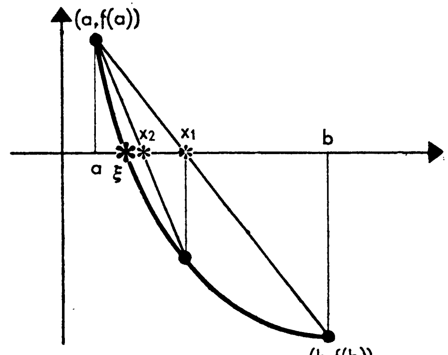
27. Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos $[a, b]$-ben, $f(a)>0$, $f(b)<0$, $f(x)$ differenciálható (a, b)-ben, $|f'(x)|\geq m>0$, ha $x\in(a, b)$ és $f(x)$ konvex $[a, b]$-ben. Igazoljuk, hogy ekkor a húrmódszerrel kapott pontsorozat – amennyiben végtelen – $f(x)$ egyetlen (a, b)-beli gyökéhez konvergál és adjunk becslést a sorozat n-edik tagjának és a gyöknek az eltérésére.

Megoldás:

A Bolzano-tétel alapján $f(x)$-nek van gyöke (a, b)-ben. Ha két olyan hely is volna, x_1 és x_2 az (a, b) intervallumban, ahol $f(x_1)=f(x_2)=0$, akkor a Rolle-tétel szerint volna köztük olyan α hely, ahol $f'(\alpha)=0$, ellentétben a feltevéssel. Így $f(x)$-nek (a, b)-ben pontosan egy gyöke van.

Tegyük fel, hogy a húrmódszerrel valóban végtelen sorozathoz jutunk. Számítsuk ki először az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr és az x tengely metszéspontját (110. ábra):

$$x_1=b-f(b)\,\frac{a-b}{f(a)-f(b)}\,.$$



110. ábra

Mivel $f(x)$ konvex $[a, b]$-ben, az $(x_1, f(x_1))$ pont az x tengely alatt van, így a következő lépésben az $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$ pontokon áthaladó húr x tengellyel való metszéspontját kell kiszámítanunk, ez lesz x_2. Nyilván $x_2<x_1$. Teljes indukcióval látható, hogy $x_{n+1}<x_n$ és

$$(23)\qquad x_{n+1}=x_n-f(x_n)\,\frac{a-x_n}{f(a)-f(x_n)}\,.$$

Az így keletkezett (x_n) sorozat monoton fogyó és alulról korlátos: $x_n>a$, így konvergens. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$; mutassuk meg, hogy $f(\xi)=0$. Vegyük a (23) összefüggés mindkét oldalának határértékét és közben használjuk fel, hogy f folytonos a ξ helyen. Ekkor $f(a)>0$ és $f(x_n)<0$ miatt $f(\xi)\leq 0$, tehát $f(a)\neq f(\xi)$:

$$(24)\qquad \xi=\xi-f(\xi)\,\frac{a-\xi}{f(a)-f(\xi)}\,;$$

A (24) összefüggésből $a \neq \xi$ miatt $f(\xi)=0$ adódik.

A becslést a Lagrange-tétel alapján adhatjuk meg:

$$(25) \qquad \frac{f(x_n)-f(\xi)}{x_n-\xi}=f'(\alpha),$$

ahol α az x_n és ξ közötti szám. Felhasználva, hogy $f(\xi)=0$, $|f'(\alpha)|\geqq m>0$ és átrendezve a (25) egyenlőséget ezt kapjuk:

$$(26) \qquad |x_n-\xi|\leqq\frac{|f(x_n)|}{m}.$$

28. Számítsuk ki az x^3-6x+2 polinom gyökeit 10^{-2} pontossággal.

Megoldás:

Érdemes először megvizsgálni az $f(x)=x^3-6x+2$ függvény növekedési és fogyási viszonyait a derivált függvény felhasználásával:

$$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}).$$

Az $f'(x)$ előjeléből következik, hogy az $f(x)$ függvény a $(-\infty, -\sqrt{2})$ intervallumban nő, a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ intervallumban fogy, a $(\sqrt{2}, +\infty)$ intervallumban nő (111. ábra).

Mivel $f(-2)=6$, $f(-3)=-7$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=-2$, $f(3)=11$, ezért a $(-3, -2)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$ intervallumok mindegyikében pontosan egy gyöke van $f(x)$-nek. A húrmódszer alkalmazásával számítsuk ki először a $(0, 1)$ intervallumba eső gyököt. Itt a függvény konvex, a 27. gyakorló feladatban alkalmazott (23) képlettel számolhatunk. Az $f'(x)$-re az $|f'(x)|\geqq 3$ becslést kapjuk, ha $x\in(0, 1)$. A (23) képletből

$$x_1=1-(-3)\frac{-1}{5}=\frac{2}{5},$$

$$f(x_1)=-0{,}336;$$

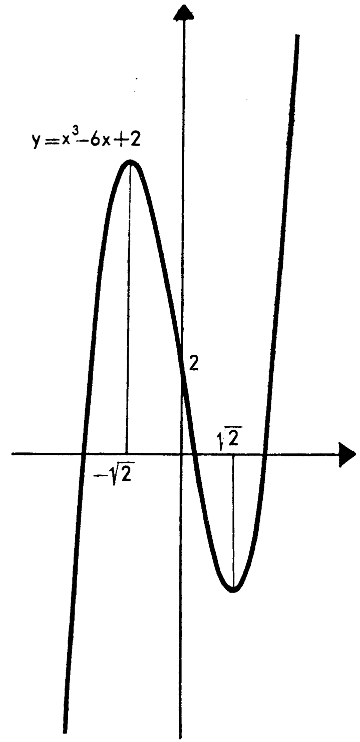
A következő lépésben x_2-t ismét a (23) összefüggésből számolva:

$$x_2=0{,}4-(-0{,}336)\frac{-0{,}4}{2+0{,}336}=0{,}342,$$

$$f(x_2)=0{,}012;$$

Az x_2 eltérését a ξ gyöktől becsüljük meg a (26) összefüggés alapján:

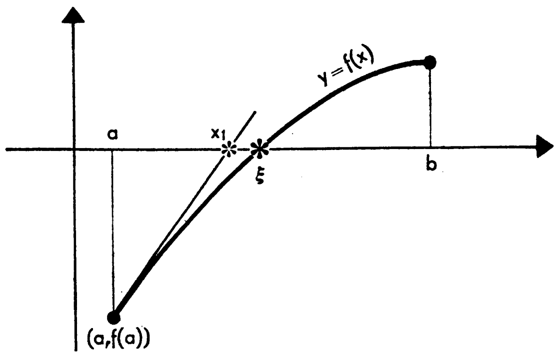
$$|x_2-\xi|\leqq\frac{0{,}012}{3}=0{,}004<10^{-2},$$



111. ábra

így a keresett gyök 10^{-2} pontossággal $\xi=0{,}34$. Hasonló számolással adódik a másik két gyökre a $-2{,}60$, ill. a $2{,}26$ érték.

Egy másik, gyorsabb közelítést szolgáltató eljárás az ún. Newton—Raphson-módszer vagy érintőmódszer. Tegyük fel, hogy $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumban kétszer differenciálható, $f''(x)\neq 0$, $f(a)$, $f(b)$ ellenkező előjelű és például $f''(a)f(a)>0$. Ekkor $f(x)$-nek (a, b)-ben pontosan egy gyöke van és a gyök közelítő értékeként vehetjük az $(a, f(a))$ pontban az $y=f(x)$ görbéhez húzott érintő x tengellyel való metszéspontját (112. ábra):



112. ábra

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Az eljárást ismételve olyan x_n sorozathoz jutunk, amely az $f(x)$ függvény gyökéhez konvergál.

Gyakorló feladatok

29. Tegyük fel, hogy $f(x)$ kétszer differenciálható $[a, b]$-ben, $f(a)<0$, $f(b)>0, f''(x)>0$ ha $x\in[a, b]$. Legyen $x_0=b$ és

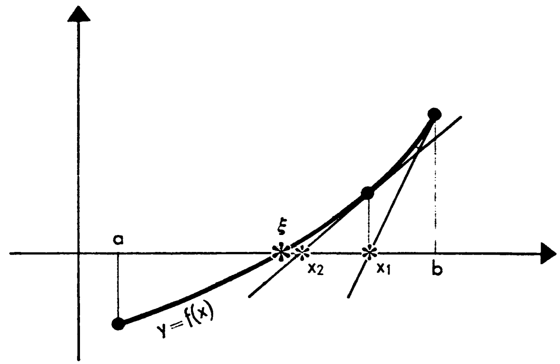
(27) $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

ha $n\geq 1$. Igazoljuk, hogy $f(x)$-nek egyetlen ξ gyöke van az (a, b) intervallumban és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$. Adjunk becslést x_n és ξ eltérésére.

Megoldás:

Először mutassuk meg, hogy $f(x)$-nek pontosan egy gyöke van (a, b)-ben. A Bolzano-tételből következik, hogy legalább egy gyöke van (a, b)-ben $f(x)$-nek. Ha feltesszük, hogy legalább két gyöke van, akkor legalább három is van $f(a)\cdot f(b)<0$ miatt. Ebből következik, hogy $f'(x)$-nek is van legalább két gyöke (a, b)-ben, így a Lagrange-tétel szerint $f''(x)=0$ teljesülne valahol (a, b)-ben, ami ellentmond a feltételnek. Így $f(x)$-nek pontosan egy gyöke van (a, b)-ben.

A feltételekből következik, hogy a (27) összefüggéssel definiált sorozat monoton fogyó (az érintő mindig a görbe alatt van) és korlátos. $x_n\geq a$, így



113. ábra

a sorozat konvergens, legyen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$ (113. ábra). Ekkor a (27) összefüggés mindkét oldalának határértékét véve $f'(\xi)\neq 0$:

$$\xi=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)},$$

ahonnan $f(\xi)=0$. Ha $x\in(a, b)$-re $|f'(x)|\geq m>0$, akkor a 27. gyakorló feladatban alkalmazott módszerrel adódik, hogy

(28) $$|x_n-\xi|\leq\frac{|f(x_n)|}{m}.$$

30. A Newton—Raphson-módszer alkalmazásával számítsuk ki az $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$ egyenlet nagyobbik pozitív gyökét 10^{-4} pontossággal.

Megoldás:

A 28. gyakorló feladat módszerét az

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}-10x$$

függvényre kell alkalmaznunk. Könnyen látható, hogy $f(x)$-nek az $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ és a $(9, 10)$ intervallumokban van gyöke. A $(9, 10)$ intervallumbeli gyököt kell kiszámítanunk. Erre az intervallumra teljesülnek a 29. gyakorló feladatban szereplő feltételek. A $b=10$ választással a (27) képletből $x_1=$ $=9{,}9990$ adódik, ennek eltérése a ξ gyöktől (28) alkalmazásával 10^{-4}-nél is kisebb.

Egy további, gyakran jól alkalmazható közelítő módszer az ún. iterációs módszer. Ez $x=f(x)$ alakban felírt egyenletek megoldására alkalmazható, ha x_n az n-edik lépésben felvett közelítő érték és az egyenlet ξ gyöke körüli $|x_n-\xi|$ sugarú intervallumban $|f'(x)|\leqq q<1$. Ebben az esetben a közelítő értékeket az

(29) $x_{n+1}=f(x_n)$

képlettel határozzuk meg.

Gyakorló feladatok

31. Igazoljuk, hogy ha az $x=f(x)$ egyenlet ξ gyöke körüli $\varepsilon>0$ sugarú intervallumban $|f'(x)|\leqq q<1$ és $|x_1-\xi|<\varepsilon$, akkor minden n-re az

(30) $x_{n+1}=f(x_n)$

képlettel definiált közelítő érték is benne van a ξ körüli $\varepsilon>0$ sugarú intervallumban és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$. Adjunk becslést x_n és ξ eltérésére:

Megoldás:

A Lagrange-tétel alkalmazásával adódik:

$$\left|\frac{x_{n+1}-\xi}{x_n-\xi}\right|=\left|\frac{f(x_n)-f(\xi)}{x_n-\xi}\right|=|f'(x_n^*)|\leqq q,$$

tehát

(31) $|x_{n+1}-\xi|\leqq q|x_n-\xi|$.

A (31) összefüggésből látható, hogy ha x_n és ξ eltérése ε-nál kisebb, akkor az öröklődik x_{n+1}-re is. Mivel x_1-re feltettük hogy ez igaz, így teljes indukcióval adódik az állítás. A (31) összefüggés n-szeres alkalmazásával a következőt kapjuk:

(32) $|x_{n+1}-\xi|\leqq q^n|x_1-\xi|$.

Itt $0<q<1$ miatt $n\to\infty$ esetén a jobboldal 0-hoz tart, így valóban $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

A (31) összefüggésből a következő számolással nyerhetünk jól használható becslést x_{n+1} és ξ eltérésére:

$$|x_{n+1}-x_n|\geqq|x_n-\xi|-|x_{n+1}-\xi|\geqq\left(\frac{1}{q}-1\right)|x_{n+1}-\xi|,$$

ahonnan

(33) $|x_{n+1}-\xi|\leqq\dfrac{q}{1-q}|x_{n+1}-x_n|$.

32. Az iterációs módszer segítségével számítsuk ki 10^{-4} pontossággal az

(34) $x=2+0{,}1\sin x$

egyenlet gyökét.

Megoldás:

Az $f(x)=2+0{,}1\sin x$ függvény deriváltja, $f'(x)=0{,}1\cos x$ abszolút értékben mindenütt 0,1-nél kisebb vagy azzal egyenlő, így a módszer alkalmazható. Az $f(x)$ függvény menetéből látható, hogy a (2, 3) intervallumban van gyöke a (34) egyenletnek. Válasszuk az $x_1=2$ kezdeti értéket, így a (30) képlet alapján:

$$x_2=2{,}09,$$

x_2 eltérése a ξ gyöktől (33) alapján így becsülhető:

$$|x_2-\xi|\leqq\frac{0{,}1}{1-0{,}1}\,0{,}09=10^{-2}.$$

A (30) képlet alapján x_3-ra ezt kapjuk:

$$x_3=2{,}087,$$

(33) szerint pedig:

$$|x_3-\xi|\leqq10^{-3}.$$

Végül $x_4=2{,}0869$ már megfelelő lesz, mert

$$|x_4-\xi|\leqq10^{-4}.$$

Feladatok

29. A húrmódszer segítségével számítsuk ki 10^{-2} pontossággal az

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-5$$

polinom valós gyökét.

30. A Newton—Raphson-módszer alkalmazásával számítsuk ki 10^{-4} pontossággal a

$$2-x-\lg x=0$$

egyenlet gyökét.

31. Az iterációs módszer alkalmazásával 10^{-4} pontossággal adjuk meg az

$$x^3+x=1000$$

egyenlet gyökét.

A III. fejezetben kitűzött feladatok megoldásai

1. Az $f(x)$ függvény a 0-tól különböző helyeken differenciálható és deriváltja

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Az $x=0$ helyen a differenciálhatóság definícióját kell alkalmaznunk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Így azt kaptuk, hogy $f(x)$ a 0 helyen is differenciálható és $f'(0)=0$.

2. Alkalmazzuk a differenciálhányados definícióját. Először a 0 helyhez tartozó különbségi hányados függvényt számítsuk ki:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.}\end{cases}$$

A definíció alapján:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0} g(x)=0.$$

3. Könnyű példát adni olyan függvényekre, amelyek sehol sem differenciálhatók, de összegük és szorzatuk mindenütt differenciálható. Legyen például

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális.}\end{cases}$$

$f(x)$ a 0-tól különböző helyeken nem is folytonos, így nem differenciálható, a 0 helyen ugyan folytonos a függvény, de nem differenciálható. Hasonlóan seholsem differenciálható a $-f(x)$

függvény. A kettő összege: $f(x)+(-f(x))\equiv 0$ konstans függvény mindenütt differenciálható. Az $f(x)\cdot f(x)=f^2(x)=x^2$ függvény szintén mindenütt differenciálható.

4. A $\sqrt{1-\cos^2 \pi x}$ képlettel megadott függvényt egy trigonometrikus azonosság alkalmazásával $|\sin \pi x|$ alakban is írhatjuk, ahonnan világos, hogy azokon a helyeken, ahol $\sin \pi x \neq 0$, azaz, ha x nem egész szám, a függvény differenciálható és deriváltja:

$$f'(x)=\begin{cases} \pi|\cos \pi x|, & \text{ha} \quad k\leqq x<k+\dfrac{1}{2}, \\ -\pi|\cos \pi x|, & \text{ha} \quad k+\dfrac{1}{2}\leqq x<k+1, \end{cases}$$

ahol k egész. Az egész helyeken kell megmutatnunk, hogy létezik a jobb- és baloldali derivált. A $|\sin \pi x|$ függvény 1 szerint periodikus, így elég például a 0 helyet vizsgálni. Ennek környezetében így írható fel a függvény:

$$f(x)=|\sin \pi x|=\begin{cases} \sin \pi x, & \text{ha} \quad 0\leqq x<1, \\ -\sin \pi x, & \text{ha} \quad -1<x<0. \end{cases}$$

A 0 helyhez tartozó jobboldali derivált:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin \pi x}{x}=\pi,$$

a bal oldali derivált pedig:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-0} \frac{-\sin \pi x}{x}=-\pi.$$

Az előzőkből következik, hogy k (tetszőleges egész) helyen $f'_+(k)=\pi$ és $f'_-(k)=-\pi$.

5. *a)* A $(\sin x)^{\cos x}$ függvényt célszerű e alapú hatványként felírni:

$$(\sin x)^{\cos x}=e^{\cos x \ln \sin x}.$$

Ebből az alakból látható, hogy a függvény értelmezési tartománya azoknak a számoknak a halmaza, ahol $\sin x>0$, azaz a $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ alakú nyílt intervallumok egyesítése, ahol k tetszőleges egész szám. A függvény az értelmezési tartományában mindenütt differenciálható és deriváltját a közvetett függvény differenciálási szabályának alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$((\sin x)^{\cos x})'=(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln \sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

b) Mivel $1+x^2>0$ minden x-re és az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény mindenütt értelmezve van, így vizsgált függvényünk is mindenütt értelmezve van és mindenütt differenciálható. A deriváltat a közvetett függvény differenciálási szabályának alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1+x^3}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{1+\dfrac{(1+x^3)^2}{(1+x^2)^2}}\cdot\frac{3x^2(1+x^2)-2x(1+x^3)}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{x^4+3x^2-2x}{(1+x^2)^2+(1+x^3)^2}.$$

c) A függvény értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza, az értelmezési tartományában mindenütt differenciálható is. Deriváltja:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

d) A függvény azokon a helyeken van értelmezve, ahol $\ln(\ln x)>0$, ez pedig ekvivalens az $x>e$ egyenlőtlenséggel. Az értelmezési tartományában mindenütt differenciálható a függvény:

$$(\ln(\ln(\ln x)))'=\frac{1}{\ln(\ln x)\cdot \ln x\cdot x}.$$

e) Mivel $\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|$, ezért $x+\sqrt{1+x^2}>0$ minden x-re, így a függvény mindenütt értelmezve van és differenciálható is:

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6.*a)* A vizsgált határértéket két különbségi hányados határértékének hányadosává alakíthatjuk a következő fogással ($\sin\pi=0$):

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x^{\alpha}}{\sin\pi x^{\beta}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sin\pi x^{\alpha}-\sin\pi}{x-1}}{\dfrac{\sin\pi x^{\beta}-\sin\pi}{x-1}}=\frac{\alpha}{\beta}\quad(\beta\neq 0),$$

ahol a különbségi hányadosok határértékét a differenciálási szabályok alkalmazásával számíthatjuk ki.

b) Itt is egyszerű átalakításokkal különbségi hányadosok határértékének kiszámítására vezethetjük vissza a feladatot:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2^x-4}{x-2}-\frac{x^2-4}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}-\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4\ln 2-4.$$

c) Itt célszerű a szereplő függvény logaritmusának határértékét kiszámítani:

$$\lim_{x\to a}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\ln|\operatorname{tg}x|-\ln|\operatorname{tg}a|}{x-a}\,\frac{x-a}{\operatorname{tg}(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\ln|\operatorname{tg}x|-\ln|\operatorname{tg}a|}{x-a}\lim_{x\to a}\frac{1}{\dfrac{\operatorname{tg}(x-a)}{x-a}}=\frac{1}{\sin a\cos a},$$

ha $a\neq k\dfrac{\pi}{2}$, ahol k egész. Így az eredeti határérték:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}=\frac{1}{e^{\sin a\cos a}}.$$

d) Egyszerű fogással két különbségi hányados hányadosává alakíthatjuk a kifejezést:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sin(1-x)-\sin 0}{x-1}}{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}}=$$

$$=\frac{-1}{\dfrac{1}{2}}=-2.$$

7.*a)* Az $\arcsin x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum. A függvényről tudjuk, hogy a $(-1,1)$ nyílt intervallumban differenciálható. Vizsgáljuk meg az 1 helyhez tartozó különbségi hányados baloldali határértékét az 1 helyen (csak ennek van értelme, hiszen a függvény az 1 helynek csak a bal oldali környezetében van értelmezve):

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\arcsin x-\dfrac{\pi}{2}}{x-1}=\frac{1}{\dfrac{\sin(\arcsin x)-1}{\arcsin x-\dfrac{\pi}{2}}}=$$

$$=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\dfrac{\sin y-\sin\dfrac{\pi}{2}}{y-\dfrac{\pi}{2}}}=+\infty,$$

mert a nevezőben levő tört pozitív értékeken keresztül 0-hoz tart.

Hasonlóan adódik, hogy $(\arcsin x)'_{+x=-1}=+\infty$.

b) Az *a)* megoldásában alkalmazott módszer célhoz vezet itt is. Az $\arccos x$ függvény értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum, $(-1,1)$-ben differenciálható is. Vizsgáljuk az 1 helyhez tartozó különbségi hányados bal oldali határértékét az 1 helyen:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\arccos x-0}{x-1}=\lim_{y\to 0+0}\frac{1}{\dfrac{\cos y-\cos 0}{y-0}}=-\infty,$$

mert a nevező negatív számokon át tart 0-hoz.

Ugyanilyen módon kapjuk meg, hogy

$$(\text{arc}\cos x)'_{+x=-1}=-\infty.$$

c) A $\sqrt[3]{x}$ függvény a 0-tól különböző helyeken differenciálható, vizsgáljuk a 0 helyhez tartozó különbségi hányados határértékét a 0 helyen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty,$$

tehát a $\sqrt[3]{x}$ függvény differenciálhányadosa a 0 helyen $+\infty$.

d) A $\sqrt{1-x^2}$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumban van értelmezve, a közvetett függvény differenciálási szabálya alapján látható. hogy $(-1, 1)$-ben differenciálható is. Az 1 helyen a bal oldali differenciálhatóságot vizsgáljuk:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=-\infty.$$

A függvény páros; ebből adódik, hogy a -1 helyen a jobb oldali derivált $+\infty$.

e) A $\sqrt{|x|}$ függvény értelmezési tartománya a teljes számegyenes. A 0-tól különböző helyeken a függvénynek véges differenciálhányadosa van; nézzük a 0-hoz tartozó jobb oldali különbségi hányadost:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{|x|}}{x}=\lim_{x\to 0+0}\sqrt{\frac{|x|}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty.$$

A jobb oldali derivált mintájára számolható a bal oldali; ez $-\infty$.

8. A feltevés szerint $f(x)$ az $[a, b]$-ben folytonos, (a, b)-ben differenciálható, így alkalmazható a monotonitásra vonatkozó tétel. Mivel $f'(x)\leqq 0$, ezért tetszőleges $x_1, x_2\in[a, b]$-re $x_1<x_2$-ből $f(x_1)\geqq f(x_2)$ következik, ugyanakkor $f'(x)\geqq 0$ miatt $f(x_1)\leqq f(x_2)$ is fennáll; ezért $f(x_1)=f(x_2)$, azaz $f(x)$ konstans.

9. A feltevésekből következik, hogy $f(x)$ monoton növő $[a, b]$-ben, azaz tetszőleges $x_1, x_2\in[a, b]$-re, ha $x_1<x_2$, akkor $f(x_1)\leqq f(x_2)$. Azt kell csak megmutatnunk, hogy $f(x_1)=f(x_2)$ nem állhat fenn. Ha indirekt módon feltesszük, hogy $f(x_1)=f(x_2)$ igaz, akkor — mivel x_1 és x_2 között $f(x)$ monoton növő —, csak konstans lehet az $[x_1, x_2]$ intervallumban. Ekkor viszont $f'(x)\equiv 0$ lenne az $[x_1, x_2]$ intervallumban, ez pedig ellentmond a feltevésnek.

10. A tétel bizonyítását egy kis „ügyeskedéssel" a Rolle-tétel alkalmazására vezethetjük vissza. Vizsgáljuk a következő függvényt:

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Feltételeztük, hogy $g'(x)\neq 0$, ha $x\in(a, b)$, ezért $g(b)\neq g(a)$. Mivel $h(a)=h(b)=0$ és a Rolle-tétel alkalmazásának egyéb feltételei is teljesülnek, ezért van olyan $x_0\in(a, b)$, ahol $h'(x_0)=0$, tehát

$$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0.$$

Mivel $g'(x_0)\neq 0$, átrendezéssel a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

11. A 15. gyakorló feladatban alkalmazott módszert hasznosíthatjuk itt is.

Igazoljuk először, hogy az $\frac{x^\alpha}{a^x}$ függvény $(a>1,\ \alpha>0)$ bizonyos x-től kezdve monoton fogyó:

$$\left(\frac{x^\alpha}{a^x}\right)'=\frac{\alpha x^{\alpha-1}a^x-x^\alpha a^x\ln a}{a^{2x}}=\frac{x^{\alpha-1}}{a^x}(\alpha-x\ln a).$$

A derivált $x>\frac{\alpha}{\ln a}$ esetén negatív, tehát az $\left(\frac{\alpha}{\ln a}, +\infty\right)$ intervallumban a függvény monoton fogy. Ahhoz, hogy a $+\infty$-ben a határértékét megállapítsuk, elég egy speciális, a $+\infty$-hez tartó sorozat mentén nézni a függvényértékek sorozatának határértékét. A természetes számok sorozata mentén nézzük a függvényértékek sorozatát:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}=0,$$

így a keresett határérték:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}=0.$$

12. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el itt is. A függvény a $(0, +\infty)$ intervallumban differenciálható, deriváltja:

$$\left(\frac{\ln x}{x^\alpha}\right)'=\frac{1-\alpha \ln x}{x^{\alpha+1}}.$$

A derivált előjele $\frac{1}{\alpha}<\ln x$ esetén negatív, tehát a függvény az

$$[e^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty)$$

intervallumban monoton fogy, vizsgáljuk az $e^n\to+\infty$ sorozat mentén a függvényértékek sorozatát:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln e^n}{(e^n)}=\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(e^\alpha)^n}=0 \quad (\alpha>0).$$

A keresett határérték tehát

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}=0.$$

13.*a)* Használjuk fel a 15.*a)* gyakorló feladat eredményét:

$$\lim_{x\to0+0} x^x=\lim_{x\to0+0} e^{x\ln x}=1,$$

mert

$$\lim_{x\to0+0} x\ln x=0.$$

b) Itt a 15.*b)* gyakorló feladat eredményét alkalmazzuk:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=1,$$

mert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0.$$

14. Közvetlenül a differenciálhányados definícióját alkalmazzuk:

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to0} x\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{e^{x^2}}}=0,$$

mert a 15.*c)* gyakorló feladat szerint

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{e^{x^2}}}=\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y}=0.$$

Az $f(x)$ függvény tehát a 0 helyen differenciálható és $f'(0)=0$.

15.*a)* A 11. feladat alkalmazásával gyorsan célhoz érünk:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^{-\frac{1}{2}}}}{x^n}=\lim_{x\to0} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{e^{x^2}}}=\lim_{y\to+\infty} \frac{y^{\frac{n}{2}}}{e^y}=0.$$

b) A 13.*a)* feladat alkalmazásával és egy különbségi hányados határértékének meghatározásával oldhatjuk meg a feladatot:

$$\lim_{x\to1-0} \ln x\cdot\ln(1-x)=$$

$$=\lim_{x\to1-0} -\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}(1-x)\ln(1-x)=0.$$

c) Már ismert határértékekre vezethetjük vissza a feladat megoldását:

$$\lim_{x\to 0+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0+0} e^{-x\ln x\,\frac{\ln(-\ln x)}{-\ln x}}=1.$$

16. *a)* Igazoljuk először azt, hogy az

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$$

egyenlőtlenség $x>0$-ra igaz. Azt kell megmutatnunk, hogy az $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ függvény a $(0,+\infty)$ intervallumban pozitív. Mivel $f(0)=0$, ha igazoljuk, hogy f a $[0,+\infty)$ intervallumban szigorúan monoton növő, akkor igazoltuk az állítást. f differenciálható $[0,+\infty)$-ben; vizsgáljuk a derivált függvény előjelét:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0,$$

ha $x>0$, így f szigorúan monoton növő $(0,+\infty)$-ben.

Ugyanezzel a módszerrel igazolhatjuk a másik egyenlőtlenséget is. Legyen:

$$g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x);$$

mivel $g(0)=0$, elég igazolni, hogy $[0,+\infty)$-ben g szigorúan monoton növő. Nézzük meg g' előjelét:

$$g'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}>0,$$

ha $x>0$, így g szigorúan monoton növő $[0,+\infty)$-ben. Tehát, ha $x>0$, akkor $g(x)>g(0)=0$ — és ezt kellett igazolni.

b) Az *a)* rész megoldásában alkalmazott módszert használjuk itt is. Legyen:

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg} x-x+\frac{x^3}{3}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy ha $x\in(0,1]$, akkor $f(x)>0$. Mivel $f(0)=0$, elég megvizsgálnunk $f'(x)$ előjelét:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2=\frac{x^4}{1+x^2}>0,$$

ha $x\neq 0$, tehát $[0,1]$-ben f szigorúan monoton növő, $f(x)>0$, ha $0<x\leqq 1$.

A másik egyenlőtlenség igazolásához legyen:

$$g(x)=x-\frac{x^3}{6}-\operatorname{arc\,tg} x.$$

$g(0)=0$; vizsgáljuk a derivált függvényt:

$$g'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2(1-x^2)}{2(1+x^2)}>0,$$

ha $0<x<1$, ezért $g(x)$ *a* $[0,1]$-ben szigorúan monoton növő, tehát $g(x)>0$, ha $0<x\leqq 1$.

17. *a)* A 16.*a)* feladatban igazolt egyenlőtlenség felhasználásával becsüljük meg az $x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ kifejezést:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3},\quad \text{ha}\quad x>0,$$

$$\frac{1}{2}>x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}.$$

A kapott becslésből nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

b) A 16.*b)* feladat eredményéből adódik a következő becslés:

$$-\frac{x}{3}<\frac{\operatorname{arc\,tg} x-x}{x^2}<-\frac{x}{6},$$

ha $0<x\leqq 1$, így:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x-x}{x^2}=0.$$

Mivel az $\frac{\operatorname{arc\,tg} x - x}{x^2}$ függvény páratlan, ezért a 0 helyen a baloldali határérték is 0, így a függvény határértéke is 0.

18. A bizonyítandó egyenlőtlenség érdekes abból a szempontból, hogy felvilágosítást ad, milyen „gyorsan" tart e-hez a $+\infty$-ben $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Az egyenlőtlenséget ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozhatjuk:

$$\frac{2x}{2x+1} < \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e} < \frac{2x+1}{2x+2}, \quad \text{ha} \quad x>0.$$

Célszerű a szereplő kifejezések logaritmusát venni, azaz a bizonyítandóval ekvivalens

$$\ln 2x - \ln(2x+1) < x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 < \ln(2x+1) -$$
$$-\ln(2x+2), \quad \text{ha} \quad x>0$$

egyenlőtlenséget igazolni. Az itt szereplő függvényeknek a 0 helyen a jobboldali határértéke sorra $-\infty$, -1, $-\ln 2$, ezek között fennáll a megfelelő egyenlőtlenség. A $+\infty$-ben mindegyik függvény határértéke 0, ennek megfelelően elég lesz igazolni, hogy az

$$f(x) = \ln(2x+1) - \ln(2x+2) + 1 - x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

és a

$$g(x) = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 - \ln 2x + \ln(2x+1)$$

függvény szigorúan csökkenő a $(0, +\infty)$-ben, hiszen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ miatt $x>0$-ra ebből következik, hogy $f(x)>0$ és $g(x)>0$. Vizsgáljuk az $f(x)$ deriváltját $(0, +\infty)$-ben:

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1+x} =$$
$$= \frac{2}{2x+1} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $f'(x)<0$, ha $x>0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, így elég igazolni, hogy $f'(x)$ szigorúan növő $(0, +\infty)$-ben. Vizsgáljuk $f'(x)$ deriváltját, $f''(x)$-et:

$$f''(x) = -\frac{4}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x(1+x)} =$$
$$= \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} > 0, \quad \text{ha} \quad x>0,$$

$f'(x)$ tehát szigorúan nő $(0, +\infty)$-ben.

Hasonlóan igazolhatjuk a $g(x)>0$, ha $x>0$ állítást is. $g'(x)$-et kell először kiszámítanunk:

$$g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{2}{2x+1}.$$

Itt is $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, így elég megmutatnunk, hogy $g'(x)$ szigorúan nő $(0, +\infty)$-ben.

$$g''(x) = -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{(2x+1)^2} =$$
$$= \frac{5x^2+5x+1}{x^2(1+x)^2(2x+1)^2} > 0,$$

ha $x>0$, ezzel az állítást igazoltuk.

19. A keresett határértéket az előző feladatban kapott egyenlőtlenség alkalmazásával könnyű kiszámítani. A

$$-\frac{ex}{2x+2} > x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] > -\frac{ex}{2x+1}, \quad \text{ha} \quad x>0$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

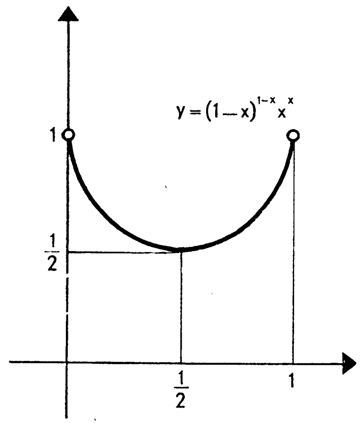
$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right] = -\frac{e}{2}.$$

20. A 13.*a)* gyakorló feladat alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0+0}(1-x)^{1-x}\cdot x^x=\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{1-x}x^x=1.$$

A függvény monotonitási viselkedését a derivált előjeléből tudjuk könnyen megállapítani. Az értelmezési tartományban (0, 1)-ben a függvény differenciálható is:

$$[(1-x)^{1-x}\,x^x]'=[e^{(1-x)\ln(1-x)+x\ln x}]'=$$
$$=(1-x)^{1-x}\,x^x\,(\ln x-\ln(1-x)).$$



114. ábra

Innen látható, hogy a derivált $0<x<\frac{1}{2}$-re negatív, $\frac{1}{2}<x<1$-re pozitív, tehát a függvény $\left(0,\frac{1}{2}\right)$-ben fogy, $\left(\frac{1}{2},1\right)$-ben nő, $\frac{1}{2}$-ben minimuma van. A függvény vázlatos képét a 114. ábrán szemléltettük.

21.*a)* Célszerű a függvény logaritmusának határértékét vizsgálni:

$$\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right).$$

Az $\ln(1+x)$ függvény Taylor-formuláját alkalmazzuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[1-\frac{x}{2}+\frac{o(x^2)}{x}-1\right]=-\frac{1}{2}.$$

Az eredeti határérték tehát:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

A 19. feladatban használt egyenlőtlenség alkalmazásával is célhoz érhetünk.

b) Az e^x és $\sin x$ Taylor-formuláját használjuk úgy, hogy még az x^3-os tagot is kiírjuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-o(x^3)-2x}{x-x+\frac{x^3}{6}-o(x^3)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}-o(x^3)}=2.$$

c) Itt a $\sin x$ Taylor-formuláját írjuk ki az x^5-es tagig, az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor-formuláját pedig x helyett $-x^2$-tel és $\alpha=\frac{1}{3}$-dal alkalmazzuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\sqrt[3]{1-x^2}-\frac{x^3}{6}}{x^5}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-x\left[1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)x^4+o(x^4)\right]-\frac{x^3}{6}}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{120}+\frac{1}{9}+\frac{o(x^5)}{x^5}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{43}{360}.$$

22. *a)* Célszerű a függvény logaritmusának határértékét keresni. Itt alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}\cdot\frac{x^2}{x^2+1}=-\frac{2}{\pi},$$

tehát a keresett határérték:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

b) A L'Hospital-szabály háromszor egymás után alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x\, e^{\sin x}}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x\, e^{\sin x}-\cos^2 x\, e^{\sin x}}{6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x\, e^{\sin x}+3\sin x\cos x\, e^{\sin x}-\cos^3 x\, e^{\sin x}}{6}=\frac{1}{6}.$$

c) Átalakítás után a L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x}{2}=0.$$

d) Itt közvetlenül alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arc\,tg} x^2-\pi}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{4x}{1+x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\left(\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{2}\right)e^{\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}.$$

23. Az e^x Taylor-formuláját felhasználva, tetszőleges, rögzített x-re e^x-et így állíthatjuk elő:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi},$$

ahol ξ a 0 és az x közötti szám. Elég azt igazolni, hogy tetszőleges, rögzített x-re:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}=0.$$

Ha $x<0$, akkor $0>\xi>x$ miatt $0<e^{\xi}<1$, ha $x>0$, akkor $1<e^{\xi}<e^x$, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

miatt az előző határérték is 0.

24. A 18. gyakorló feladatban igazoltuk, hogy az $f(x)$ függvény mindenhol akárhányszor differenciálható és $f^{(n)}(0)=0$ minden n-re, így $f(x)$ Taylor-formulája:

$$f(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}q\left(\frac{1}{\xi}\right)e^{-\frac{1}{\xi^2}},$$

ahol $q(x)$ polinom, ξ pedig egy alkalmas, 0 és x közötti szám

25. A feltételek alapján a $g(x)=f(x+a)$ függvény a 0 hely egy környezetében $(n+1)$-szer differenciálható, így $g(x)$ előállítható a 0 hely körüli Taylor-formulával:

$$g(x)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}+\ldots+$$

$$+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

ahol η alkalmas, 0 és x közötti szám. Helyettesítsünk x helyére mindenütt $(x-a)$-t ($x-a$ még eleme a 0 megfelelő környezetének):

$$g(x-a)=f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ahol ξ egy alkalmas, x és a közötti szám ($\xi=\eta+a$).

26. A 0 körüli Taylor-formulát a $\sin x$ függvényre alkalmazva:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi.$$

Látható, hogy a jobboldal utolsó tagja, a maradék tag abszolút értéke a hiba, ha a $\sin x$-et a jobboldal első n tagjából álló polinommal helyettesítjük. Így azt kell eldönteni, hogy milyen n-re lesz a maradéktag abszolút értéke a $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ intervallumban 10^{-4}-nél kisebb:

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi\right|\leq\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}<$$

$$<\frac{1}{(2n+1)!}<10^{-4},$$

ha $(2n+1)!>10^4$. Az utóbbi egyenlőtlenség $n=4$-re már biztosan igaz, mert a $2\cdot5=10$, $3\cdot4>10$, $6\cdot7>10$, $8\cdot9>10$ egyenlőtlenségekből következik, hogy $9!>10^4$. A $\sin x$ megfelelő közelítésére használható, tehát az

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$$

polinom.

27. A feltevés szerint $f(x)$ a helyhez tartozó Taylor-polinomja felírható úgy, hogy a maradéktagban f'' szerepeljen:

$$f(a+2x)=f(a)+f'(a)2x+\frac{f''(\xi_1)}{2}4x^2$$

$$f(a+x)=f(a)+f'(a)x+\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2,$$

ahol ξ_1 és ξ_2 alkalmas a és $a+2x$, ill. a és $a+x$ közé eső számok. A kapott előállítások felhasználásával a keresett határérték így számítható ki:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(a+2x)-2f(a+x)+f(a)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}[2f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]=f''(a),$$

mert ξ_1 és ξ_2 az a-hoz tart, ha $x\to a$ és $f''(x)$ az a helyen folytonos.

A feladatot a L'Hospital-szabály alkalmazásával is megoldhatjuk.

28. A feladat feltételei biztosítják, hogy az a helyhez tartozó

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

különbségi hányadosra alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{1}=\lim_{x\to a}f'(x).$$

Eredményünk azt mutatja, hogy az a helyhez tartozó különbségi hányadosnak van véges határértéke, vagyis a függvény differenciálható az a helyen és deriváltja éppen $\lim_{x\to a} f'(x)$. A derivált függvény tehát folytonos is az a helyen.

29. Az $f(x)=x^3-2x^2+3x-5$ függvény deriváltja, $f'(x)=$ $=3x^2-4x+3>0$ minden x-re. A függvény tehát végig szigorúan monoton növő, tehát legfeljebb egy valós gyöke van. Mivel $f(1)=-3$ és $f(2)=1$, ezért az $(1, 2)$ intervallumban van gyöke $f(x)$-nek. Alkalmazzuk a húrmódszert:

$$x_1=1+3\,\frac{2-1}{1+3}=1,75.$$

$f(1,75)=-0,5156<0$, így az $(1,75; 2)$ intervallumra alkalmazzuk újra a húrmódszert:

$$x_2=1,75+0,085=1,835.$$

A kapott közelítés hibája még nagyobb, mint 10^{-2}. Egy újabb lépéssel $x_3=1,84$-et kapunk, ez már 10^{-2}-nél kisebb hibával adja meg a gyököt.

30. Az $f(x)=2-x-\lg x$ függvény deriváltja $f'(x)=-1-$ $-\dfrac{1}{x\ln 10}<0$, ha $x>0$, azaz a függvény szigorúan monoton fogyó, legfeljebb egy gyöke van. $f(1)=1>0$ és $f(2)=-\lg 2<0$, tehát a függvénynek az $(1, 2)$ intervallumban van gyöke. $f''(x)=$ $=\dfrac{1}{x^2\ln 10}>0$; az 1 pontból indulva alkalmazzuk az érintőmódszert:

$$x_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=1,7.$$

A második lépésben:

$$x_2=1,7-\frac{f(1,7)}{f'(1,7)}=1,7+\frac{0,0696}{1,255}=1,755.$$

$f(x_2)=2-1,999=10^{-3}$, $m=1,2$ jó, így x_2 már 10^{-3}-nál kisebb hibával adja meg a gyököt. A következő lépésben $x_3=1,75557$ adódik, ennek hibája már 10^{-4}-nél is jóval kisebb.

31. Ha az iterációs módszert akarjuk alkalmazni, akkor először $x=\varphi(x)$ alakban kell az egyenletet úgy felírnunk, hogy egy, a gyököt tartalmazó intervallumban $|\varphi'(x)|\le q<1$ teljesüljön minél kisebb q-val, mert annál gyorsabban konvergál az eljárás. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyenletnek a $(9, 10)$ intervallumban van egyedül gyöke. Az egyenletet

$$x=\sqrt[3]{1000-x}$$

alakban célszerű felírni, mert ekkor a $\varphi(x)=\sqrt[3]{1000-x}$ függvény deriváltja

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{3(1000-x)^{\frac{2}{3}}}$$

és a $(9, 10)$ intervallumban:

$$|\varphi'(x)|<\frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}}<\frac{1}{200}=q.$$

Legyen $x_0=10$ és számoljuk ki x_1-et, x_2-t és x_3-at:

$$x_1=\sqrt[3]{1000-10}=9,9665,$$

$$x_2=\sqrt[3]{1000-9,9665}=9,96666,$$

$$x_3=\sqrt[3]{1000-9,9666}=9,96667,$$

a 31. gyakorló feladatban kapott hibabecslés szerint x_3-nak a gyöktől való eltérése már kisebb 10^{-4}-nél.

V. VÉGTELEN SOROK ÉS SZORZATOK

1. A konvergens sor definíciója; egyszerűbb konvergenciakritériumok

Már az I. fejezetben találkoztunk olyan sorozatokkal, amelyeknek n-edik tagja egy n tagú összeg. Az ilyen konvergens sorozatok határértékét sok esetben célszerű úgy tekinteni, mint egy „végtelen összeg” értékét. Bevezetjük a következő definíciót: egy (a_n) sorozat tagjait $+$ jellel összekapcsolva egy

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

végtelen sort kapunk. Az

$$s_n = a_0 + \ldots + a_{n-1}$$

definícióval megadott sorozatot az (1) végtelen sor *részletösszegei* sorozatának nevezzük. Azt mondjuk, hogy az (1) végtelen sor konvergens, amennyiben a részletösszegek sorozata konvergens és ha $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, akkor s-et a végtelen sor összegének nevezzük és ezt így is jelöljük:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Ha a részletösszegek sorozata divergens, akkor azt mondjuk, hogy az (1) végtelen sor is divergens.

Például az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

végtelen sor konvergens, mert az

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

sorozat konvergens és összege $s = 2 = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Az I. fejezet 5. pontja szerint minden

$$0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots, \quad 0 \leqq a_n \leqq 9$$

végtelen tizedes tört is tekinthető egy végtelen sor összegének:

$$0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots .$$

Gyakorló feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a következő sorok konvergensek és számítsuk ki összegüket:

a) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots;$

b) $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots, \quad |q| < 1;$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right).$

Megoldás:

a) Az s_n részletösszeg zárt alakra hozásához használjuk fel a következő összefüggést:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Az n-edik részletösszeget így írhatjuk fel:

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

A sor konvergens és összege:

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

b) Ez a feladat lényegében az I. fejezet 23. feladatával azonos. Ott igazoltuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+\ldots+q^n)=\frac{1}{1-q},$$

ha $|q|<1$, tehát a sor konvergens és

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q}.$$

c) Az I. fejezet 71. feladatában vizsgáltuk a sor n-edik részletösszegét és igazoltuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-\ln 2.$$

d) Ezt a feladatot az I. fejezet 34. *d)* feladatában oldottuk meg:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}.$$

2. Igazoljuk a sorokra vonatkozó *Cauchy-féle konvergencia kritériumot:* egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $N(\varepsilon)$, hogy ha $n>N$, akkor tetszőleges k természetes számra

$$\left|\sum_{l=1}^{k} a_{n+l}\right|<\varepsilon.$$

Megoldás:

Az I. fejezet 53. feladatában igazoltuk a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot. E szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor $s_n=\sum_{l=1}^{n} a_l$ részletösszegeinek sorozata akkor és csak akkor konvergens, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan N index, hogy ha $n>N$ és $k\in T$, akkor

$$|s_{n+k}-s_n|=\left|\sum_{l=1}^{k} a_{n+l}\right|<\varepsilon.$$

3. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges, de nem elégséges feltétele, hogy $a_n\to 0$.

Megoldás:

Az előző feladatból következik, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan N, hogy ha $n>N$, akkor $\left|\sum_{l=1}^{1} a_{n+1}\right|=|a_{n+1}|<\varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Ugyanakkor $a_n\to 0$-ból még nem következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, mert például a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

sor n-edik részletösszege $+\infty$-hez tart (I. fejezet 19. feladat), tehát a sor divergens, bár $\frac{1}{n}\to 0$, ha $n\to\infty$.

Sok esetben egy nemnegatív tagú sorról kell eldöntenünk, hogy konvergens-e vagy nem. Tegyük fel, hogy minden n természetes számra $a_n\geqq 0$. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ részletösszegeiből álló sorozat monoton növő, így vagy konvergens, vagy $s_n\to=+\infty$. Ez az észrevétel egy jól használható konvergenciakritériumot szolgáltat: tegyük fel, hogy $0\leqq a_n\leqq b_n$ minden $n\in T$-re fennáll. Ekkor, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens, (*majoráns kritérium*), ha pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens (*minoráns kritérium*).

Gyakorló feladatok

4. Igazoljuk a majoráns és a minoráns kritériumot.

Megoldás:

Jelöljük s_n-nel a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edik részletösszegét, t_n-nel pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor n-edik részletösszegét. A feltételekből következik, hogy minden $n \in \mathrm{T}$-re $s_n \leqq t_n$ és s_n is, t_n is monoton növő. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens és összege t, akkor a $t_n \leqq t$ egyenlőtlenség miatt $s_n \leqq t$ is igaz, tehát (s_n) monoton növő korlátos sorozat, így konvergens és $\lim_{n\to\infty} s_n \leqq t$. Az is kiderült, hogy ebben az esetben még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

egyenlőtlenség is fennáll.

Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens. Ekkor — az előzők szerint — a sor n-edik részletösszege, $s_n \to +\infty$, tehát $t_n \to +\infty$ is fennáll, ami azt jelenti, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens.

5. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

ún. hiperharmonikus sor $0 \leqq \alpha \leqq 1$ esetén divergens, $\alpha > 1$ esetén pedig konvergens.

Megoldás:

Ha $0 \leqq \alpha \leqq 1$, akkor $\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n^\alpha}$, mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor is divergens. Az $\alpha > 1$ esetben elég igazolni, hogy a sor (s_n) részletösszegei sorozatának (s_{2^k-1}) alakú részsorozata korlátos, mert (s_n) monoton növő sorozat. Az s_{2^k-1} értéket a következő módon becsüljük felülről:

$$1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2^k)^\alpha-1}\right)<$$
$$<1+2\cdot\frac{1}{2^\alpha}+4\cdot\frac{1}{4^\alpha}+\ldots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}=$$
$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{(2^{\alpha-1})^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{\alpha-1})^{k-1}}<\frac{2^\alpha}{2^\alpha-2}.$$

Eredményünk azt is mutatja, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqq \frac{2^\alpha}{2^\alpha-2},$$

ha $\alpha > 1$. Érdemes megjegyezni, hogy az I. fejezet 75. feladatának eredménye alapján:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. Vizsgáljuk meg, hogy a következő sorok konvergensek-e:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

Megoldás:

a) Ha $n>1$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{n!}<\frac{1}{n(n-1)}.$$

Az I. fejezet 34.*e)* feladata szerint pedig a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

sor konvergens, tehát a majoráns kritérium szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

sor is konvergens.

b) Használjuk fel a $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$-ben érvényes

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha$$

egyenlőtlenséget. Ennek alapján

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}>\frac{\pi}{4n},$$

tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4n}$$

divergens sor minoráns sora a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$ sornak, ezért ez is divergens.

c) Itt például a következő becslést alkalmazhatjuk:

$$\frac{1+n^2}{1+n^3}<\frac{2}{n},$$

tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

konvergens sor majoráns sora a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$$

sornak, tehát ez is konvergens.

d) Használjuk fel az $x>0$-ra érvényes $\ln(1+x)<x$ egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)<\frac{2}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

A kapott majoráns sor:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$$

az előző gyakorlat szerint konvergens, tehát az eredeti sor is konvergens.

7. Igazoljuk, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sor is konvergens. Igaz-e az állítás megfordítása?

Megoldás:

Alkalmazzuk a 2. gyakorló feladatban igazolt Cauchy-kritériumot. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges adott szám és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ sorra keresünk az adott ε-hoz alkalmas N indexet, amellyel minden $n>N$-re és tetszőleges k-ra

$$\left|\sum_{l=1}^{k}|a_{n+l}|\right|<\varepsilon.$$

Az

$$\left|\sum_{l=1}^{k}a_{n+l}\right|\leq\sum_{l=1}^{k}|a_{n+l}|$$

egyenlőtlenség miatt a Cauchy-kritérium a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra is teljesül, tehát a sor konvergens.

Az állítás megfordítása nem igaz, mert például a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

sor konvergens és összege ln 2 (I. fejezet 72. feladat), míg a sor tagjainak abszolút értékeiből álló

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sor divergens.

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjainak abszolút értékeiből álló $\sum_{n=1} |a_n|$ sor konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a sor *abszolút konvergens*. Ha a sor tagjainak abszolút értékeiből álló sor divergens, de az eredeti sor konvergens, akkor a sorról azt mondjuk, hogy *feltételesen konvergens*. Az előző, 7. gyakorló feladat eredménye szerint egy abszolút konvergens sor konvergens is.

A következő két gyakorló feladatban sorok abszolút konvergenciájának vizsgálatában jól hasznosítható kritériumokat fogunk igazolni az ún. *hányados-* és *gyökkritériumot.*

Gyakorló feladatok

8. Igazoljuk, hogy ha

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha < 1,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha pedig valamilyen n_0 indexre igaz, hogy $n \geqq n_0$-ra

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq 1,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

Megoldás:

Jelöljünk q-val egy α és 1 közötti számot, legyen például $q=\frac{1+\alpha}{2}$. Mivel $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \alpha < q$, van olyan n_0 index, hogy ha $n \geqq n_0$, akkor $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, azaz $|a_{n+1}| < |\alpha_n| q$. Alkalmazzuk a kapott egyenlőtlenséget sorra az $n=n_0$, n_0+1, $\ldots$, n_0+k, $\ldots$ esetekre:

$$\begin{aligned} &|a_{n0+1}| < |a_{n0}| q, \\ &|a_{n0+2}| < |a_{n0+1}| q < |a_{n0}| q^2, \\ &\vdots \\ &|a_{n0+k}| < |a_{n0}| q^k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n0}| q^k$$

sor majoránsa sora a

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

sornak. A (2) sor nyilván konvergens, hiszen a második összeg olyan mértani sor, ahol $0<q<1$, így a (3) sor is konvergens, tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

A második állítás igazolásához elég megmutatni, hogy nem teljesül az $|a_n| \to 0$ feltétel, ami szükséges feltétele a konvergenciának. A feltételből következik, hogy

$$|a_{n+1}| \geqq |a_n|,$$

ha $n \geqq n_0$. Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget az $n=n_0, \ldots, n_0+k, \ldots$ esetekre. Azt kapjuk, hogy

$$|a_{n_0+k}| \geqq |a_n| > 0$$

tetszőleges k természetes számra. Ebből következik, hogy az $a_n \to 0$ szükséges feltétel nem teljesül, tehát a sor divergens.

9. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. Ha pedig végtelen sok n-re $\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

Megoldás:

Legyen q egy α és 1 közötti szám. A $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < q$ feltételből következik, hogy van olyan n_0 index, amelyre $n \geqq n_0$ esetén:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q,$$

azaz

$$|a_n| < q^n.$$

A

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} |a_n| + \sum_{n=n_0} q^n$$

konvergens sor majoráns sora a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sornak, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

Ha végtelen sok n-re $\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 1$ igaz, akkor végtelen sok n-re $|a_n| \geqq 1$, tehát $a_n \not\to 0$, azaz a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

10. Döntsük el, hogy következő sorok közül melyek konvergensek, melyek divergensek:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, a rögzített szám;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

tehát a 9. gyakorló feladat szerint a sor konvergens.

b) Itt a hányadoskritériumot célszerű alkalmazni. Ha $a=0$, akkor a sor nyilván konvergens; ha $a \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{|a|^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|a|}{e},$$

tehát $|a| < e$ esetben a sor konvergens, $|a| > e$ esetben a sor divergens. Az $|a| = e$ esetben a sor $n+1$-edik és n-edik tagjának hányadosa abszolút értékben:

$$\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

mert $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton nőve tart e-hez, tehát a sor divergens.

c) A hányadoskritérium alkalmazásával érhetünk célhoz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4},$$

tehát a sor konvergens.

Feladatok

1. Mutassuk meg, hogy a következő sorok konvergensek és számítsuk ki összegüket:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \cos \frac{x}{2^n}$; $0<x<\frac{\pi}{2}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$; $0<x<\frac{\pi}{2}$;

2. Legyen $a_n \geqq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens sor. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ is konvergens. Igaz-e az állítás megfordítása?

3. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, a_n, $b_n \geqq 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor és a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$ sor is konvergens.

4. Legyen a_n egy monoton fogyó, 0-hoz tartó sorozat. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

sor konvergens és a sor összegének az n-edik részletösszegtől való eltérése a_{n+1}-nél nem nagyobb (Leibniz-kritérium).

5. Döntsük el, hogy a következő sorok közül melyik konvergens, melyik divergens:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln^2 n}{1+n^3 \ln^4 n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2-1}{n^2+1}}$.

6. Állapítsuk meg, hogy a következő sorok milyen a, ill. α értékre konvergensek:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\right)^{\alpha}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\alpha}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \sin \frac{\pi}{n}$;

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$.

2. Abszolút és feltételesen konvergens sorok tulajdonságai; műveletek konvergens sorokkal

A konvergens végtelen sorok a véges összegek általánosításának tekinthetők. Érdemes megvizsgálni, hogy a véges összegek szokásos tulajdonságai érvényben maradnak-e végtelen sorokra. Először a kommutativitás érvényességét vizsgáljuk meg.

A váltakozó előjelű harmonikus sorról láttuk, hogy konvergens (I. fejezet 72. feladat) és

$$(4)\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots=\ln 2.$$

Cseréljük fel a sorban a tagok sorrendjét úgy, hogy egy pozitív tag után két negatív tag következzen, azaz vizsgáljuk az

$$(5)\qquad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots$$

sor összegét. A sor s_{3n} alakú részletösszegei így írhatók fel:

$$s_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

A (4) összefüggés felhasználásával adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} s_{3n}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

Mivel az (5) sor s_{3n+1} és s_{3n+2} alakú részletösszegei s_{3n}-től csak 0-hoz tartó tagokban különböznek, ezért ezek határértéke is és így a sor összege is $\frac{1}{2}\ln 2$. Példánk azt mutatja, hogy a *végtelen sorokra általában nem érvényes a kommutativitás*, tehát nem cserélhető fel a sor tagjainak sorrendje. A következő gyakorló feladatokban ezt a kérdést részletesebben is megvizsgáljuk.

Gyakorló feladatok

11. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sort a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjainak felcserélésével kapjuk, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is konvergens és összege megegyezik a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összegével.

Megoldás:

Jelölje s_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor n-edik részletösszegét, s pedig a sor összegét és legyen σ_n a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor n-edik részletösszege. Azt akarjuk igazolni, hogy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n=s$. Ehhez s és σ_n eltérését kell vizsgálni, amit a következő egyenlőtlenséggel tudunk becsülni:

$$(6)\qquad |\sigma_n-s|\leqq|\sigma_n-s_k|+|s_k-s|,$$

ahol k tetszőleges lehet.

Adjunk meg egy $\varepsilon>0$ számot és mutassuk meg, hogy alkalmas n_0-nál nagyobb n-ekre és elég nagy k-ra a (6) egyenlőtlenség jobb oldalának mindkét tagja $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb. Az első tag becslésekor fogjuk felhasználni, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. Az adott $\frac{\varepsilon}{2}$-hez keressünk olyan n_1 indexet, hogy $n>n_1$-re és tetszőleges p-re $\sum_{l=1}^{p} |a_{n_1+l}|<\frac{\varepsilon}{2}$ már teljesüljön és válasszuk n-et úgy, hogy σ_n-ben az összes olyan a_k szerepeljen, amelyre $k \leqq n_1$. Ezt megtehetjük, mert a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor tagjai között az összes a_k előfordul. Ezután válasszuk k-t olyan nagyra, hogy n-nél nagyobb legyen és a (6) egyenlőtlenség jobb oldalának második tagja $\frac{\varepsilon}{2}$-nél kisebb legyen. Ezt is megtehetjük, mert $s_k \to s$. A (6) egyenlőtlenség jobb oldalának első tagját most így becsülhetjük:

$$|\sigma_n - s_k| \leqq \sum_{l=1}^{m} |a_{n_1+l}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ahol $m=k-n_1$, mivel a különbségben csak n_1-nél nagyobb indexű tagok maradhattak (nyilván minden n_1-nél nagyobb n is jó). Ebből már adódik az állítás.

12. Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor feltételesen konvergens. Igazoljuk, hogy az a_n számok között végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív előjelű van, a pozitív előjelű tagokból alkotott sor részletösszegei $+\infty$-hez, a negatív előjelű tagokból alkotott sor részletösszegei pedig $-\infty$-hez tartanak.

Megoldás:

Ha például csak véges sok negatív előjelű tagja volna a sornak, akkor ezeket elhagyva a kapott sor nem csak konvergens, de abszolút konvergens is lenne, ekkor viszont az eredeti sor is abszolút konvergens volna, ellentétben a feltevéssel. Hasonlóan adódik, hogy végtelen sok pozitív előjelű tagja van a sornak.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pozitív előjelű tagjaiból álló sor konvergens. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor s_k részletösszegét írjuk fel $s_k=q_k-r_k$ alakban, ahol q_k az s_k-ban előforduló pozitív tagok összege, r_k pedig a negatív tagok ellentettjeinek összege. A feltevés szerint a q_k sorozat is konvergens, (hiszen ez legfeljebb abban különbözik a pozitív előjelű tagokból álló sor részletösszegeinek sorozatától, hogy ugyanaz a részletösszeg többször is szerepelhet q_k elemei között), de akkor az r_k is konvergens, amiből az következik, hogy a $\sigma_k=q_k+r_k$ sorozat is konvergens, ez pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor részletösszegeinek sorozata. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát a pozitív előjelű tagokból álló sor divergens, ez nyilván azt jelenti, hogy a részletösszegeiből álló sorozat $+\infty$-hez tart. Hasonlóan látható be az állítás másik része.

13. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ egy feltételesen konvergens sor. Igazoljuk, hogy a sor átrendezhető úgy, hogy a sor összege egy tetszőleges előre adott szám legyen, átrendezhető továbbá úgy is, hogy a sor divergens legyen (Riemann tétele).

Megoldás:

Jelöljük (p_k)-val, ill. (n_k)-val az (a_n) sorozat pozitív tagjainak, ill. negatív előjelű tagjai ellentettjeinek részsorozatát. Tudjuk az előző, 12. gyakorló feladatból, hogy mindkettő végtelen sorozat, a $t_n=\sum_{k=1}^{n} p_k$ és $s_n=\sum_{k=1}^{n} n_k$ sorozatok $+\infty$-hez tartanak, $\lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} n_k = 0$, mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.
Legyen s egy tetszőleges, adott szám. Vizsgáljuk ezt az esetet, amikor $s>0$. Vegyünk a p_k sorozat tagjai közül annyit, hogy összegük éppen túlnőjön s-en, azaz legyen l_1 olyan index, hogy $p_1+p_2+\ldots+p_{l_1-1} \leqq s$, $p_1+\ldots+$ $+p_{l_1}>s$ teljesül (ezt megtehetjük, mert $t_n \to +\infty$). Ezután legyen l_2 olyan index, hogy

$$p_1+\ldots+p_{l_1}-n_1-\ldots-n_{l_2-1} \geqq s,$$
$$p_1+\ldots+p_{l_1}-n_1-\ldots-n_{l_2}<s$$

teljesül (ez is elérhető, mert $s_n \to +\infty$). Ezután újra a p_k sorozatból vegyünk annyit, hogy az összeg éppen túlnőjön s-en, majd az n_k sorozattal folytassuk az eljárást. Az eljárást vég nélkül folytatva a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor egy átrendezését kapjuk és a konstrukcióból világos, hogy a sor összege s lesz ($n_k \to 0$, $p_k \to 0$ miatt az egyes lépésekben kapott összegeknek s-től való eltérése 0-hoz tart). Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha $s \leqq 0$.

Mutassuk még meg, hogy a sor divergenssé is átrendezhető. Egy átrendezést például így adhatunk meg: az előző konstrukcióban először a p_k sorozatnak annyi elemét vesszük, hogy az összegük 1-nél nagyobb legyen, majd annyi n_k-belit vonunk le ebből, hogy a kapott érték 0-nál kisebb legyen. Ezután megint 1 fölé megyünk, majd 0 alá stb. A kapott átrendezés nyilván divergens lesz.

A véges sok tagból álló összegekre érvényes asszociativitási törvény érvényességének problémáit a feladatokban fogjuk megvizsgálni.

A disztributív tulajdonság megfelelőjét egyszerű formában így fogalmazhatjuk meg: ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens sor, amelynek összege s, és v tetszőleges valós szám, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} va_n$ is konvergens és összege vs, azaz konvergens sorokra fennáll a következő egyenlőség:

$$v \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} va_n. \tag{7}$$

A (7) egyenlőség igazolásához csak azt kell megjegyezni, hogy ha $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, akkor nyilván igaz a $v \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} vs_n$ egyenlőség.

A végtelen sorok körében a disztributivitásnak egy általánosabb formáját is vizsgálhatjuk: két konvergens végtelen sor szorzatáról milyen esetben igaz, hogy konvergens lesz.

Két végtelen sor $\sum_{n=1} a_n$ és $\sum_{n=1} b_n$ szorzatát úgy értjük itt, hogy minden tagot minden taggal megszorzunk, azaz képezzük az összes $a_k b_l$ alakú tagok szorzatát, amelyeket a következő sémában foglalhatunk össze:

$$\begin{array}{lllll} a_1b_1, & a_1b_2, & \ldots, & a_1b_n, & \ldots \\ a_2b_1, & a_2b_2, & \ldots, & a_2b_n, & \ldots \\ \ldots & & & & \\ a_nb_1, & a_nb_2, & \ldots, & a_nb_n, & \ldots \\ \ldots & & & & \end{array}$$

Az így kapott tagokat valamilyen sorrendben össze kell adni. Riemann tétele miatt nem mindegy, hogy milyen sorrendet választunk.

Itt az egyik leggyakrabban alkalmazott szorzási szabállyal, az ún. Cauchy-féle szorzással foglalkozunk. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ végtelen sorok Cauchy-szorzatának nevezzük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1)$$

végtelen sort, amit úgy kapunk, hogy a fenti sémában álló elemeket átlósan összeadjuk. A következő gyakorló feladatban egy elégséges feltételt adunk meg a Cauchy-szorzat konvergenciájára.

Gyakorló feladat

14. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a két sor Cauchy-szorzata is konvergens és értéke a két sor összegének szorzata *(Mertens tétele)*.

Megoldás:

Vezessük be a következő jelöléseket: $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $s_n = \sum_{n=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ és végül

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\ldots+a_{k-1}b_2+a_kb_1).$$

Azt kell igazolnunk, hogy $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=st$; ehhez σ_n és st eltérését kell megbecsülnünk. Ezt a következő egyenlőtlenség felhasználásával végezhetjük el:

$$(8)\qquad |\sigma_n-st|\leqq|\sigma_n-s_nt_n|+|s_nt_n-st|.$$

A (8) egyenlőtlenség jobb oldalának második tagja tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy, így azt kell csak megmutatnunk, hogy az első tag is tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy. A $\sigma_n-s_nt_n$ különbség tagjait a következő sémán vastag betűkkel írtuk:

$$\begin{array}{l}
a_1b_1,\ a_1b_2,\ \ldots,\ a_1b_{n-1},\ a_1b_n,\ \ldots\\
a_2b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_2b_{n-1},\ \mathbf{a_2b_n},\ \ldots\\
a_3b_1,\ a_3b_2,\ \ldots,\ \mathbf{a_3b_{n-1}},\ \mathbf{a_3b_n},\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1}b_1,\ a_{n-1}b_2,\ \ldots,\ \mathbf{a_{n-1}b_{n-1}},\ \mathbf{a_{n-1}b_n},\ \ldots\\
a_nb_1,\ \mathbf{a_nb_2},\ \ldots,\ \mathbf{a_nb_{n-1}},\ \mathbf{a_nb_n},\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Látható, hogy a $\sigma_n-s_nt_n$ különbségben szereplő a_ib_j alakú tagokra $i+j\geqq\geqq n+2$ áll fenn. Ez azt jelenti, hogy ha n-et elég nagyra választjuk, akkor i és j közül legalább az egyik elég nagy; ezt fogjuk felhasználni a különbség becslésekor. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges, előre adott szám és n_0 olyan index, amire igaz, hogy ha $i>n_0$, akkor $|b_i|<\varepsilon$ $\left(\text{mivel } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergens, } b_n\to 0,\right.$ $\left.\text{ha } n\to\infty\right)$. Fennáll továbbá az is, hogy ha k tetszőleges szám, akkor $\sum_{l=1}^{k}|a_{n_0+l}|<\varepsilon$ $\left(\text{mivel } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abszolút konvergens, ez is elérhető}\right)$. Legyen $K>0$ olyan szám, hogy minden i-re $|b_i|<K$ teljesüljön ($b_i\to 0$ miatt van ilyen K szám). Ha még $n\geqq 2n_0$, ezzel biztosítjuk, hogy a $\sigma_n-s_nt_n$ különbségben csak olyan a_ib_j alakú tagok szerepelnek, ahol i és j közül legalább az egyik n_0-nál nagyobb, hiszen $i+j>2n_0$. Az előzőek alapján a különbség abszolút értékére a következő becslést adhatjuk:

$$|\sigma_n-s_nt_n|\leqq\sum_{\substack{i\leqq n_0\\ <j\leqq n}}|a_i||b_j|+\sum_{\substack{n_0<i\leqq n\\ j\leqq n}}|a_i||b_j|\leqq$$

$$\leqq\varepsilon\sum_{i\leqq n_0}|a_i|+K\sum_{n_0<i\leqq n}|a_i|<\varepsilon a+K\varepsilon=\varepsilon(a+K),$$

és $\varepsilon(a+K)$ tetszőleges előre adott számná is kisebb, ha ε elég kicsi, azaz n elég nagy. Az n indexet nyilván megválaszthatjuk úgy, hogy a (8) egyenlőtlenség jobb oldalának mindkét tagja kicsi legyen, tehát az összegük egy előre adott számnál is kisebb legyen. Ezzel az állítást igazoltuk.

Feladatok

7. Igazoljuk, hogy az

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots=\ln 2$$

sor átrendezésével adódó

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$$

sor is konvergens, számítsuk ki az összegét.

8. Igazoljuk, hogy egy konvergens sorban akárhova zárójeleket iktathatunk be, ezzel nem változik a sor összege, azaz pontosabban, ha $1=n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ tetszőleges természetes számokból álló sorozat, akkor, amennyiben $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, fennáll a

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1}a_n\right)$$

egyenlőség. Igaz-e az állítás megfordítása?

$\ast$ **9.** Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens és az (a_n) sorozat monoton és korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

sor konvergens (Abel-kritérium).

$\ast$ **10.** A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok négyzetes szorzatának nevezzük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_n + \ldots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \ldots + a_n b_2 + a_n b_1)$$

végtelen sort. (Az $a_k b_l$ alakú elemeket tartalmazó séma n-edik sorának és oszlopának első n elemét adtuk össze itt.) Igazoljuk, hogy konvergens sorok négyzetes szorzata is konvergens és összege a tényezők összegének szorzata.

11. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

sorok Cauchy-szorzatát.

12. Igazoljuk, hogy az

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{és} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

sorok divergensek, és Cauchy-szorzatuk ennek ellenére konvergens.

13. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

sor konvergens és önmagával való Cauchy-szorzata, azaz a sor négyzete divergens.

$\ast$ **14.** Mutassuk meg, hogy abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzata is abszolút konvergens (a 14. gyakorló feladatot alkalmazzuk).

$\ast$ **15.** Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok abszolút konvergensek, akkor az $a_i b_j$ alakú tagokból tetszőleges sorrendben képezett végtelen sor, ahol i és j egymástól függetlenül befutják a természetes számokat, abszolút konvergens.

3. Hatványsorok és tulajdonságaik

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alakú végtelen sort, ahol (a_n) tetszőleges számsorozat, *hatványsornak* nevezzük. A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor például hatványsor, amely $|x| < 1$-re konvergens és az összege $\frac{1}{1-x}$, tehát:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{ha} \quad |x| < 1.$$

Azoknak az x valós számoknak a halmazát, amelyekre a

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsor konvergens, a (9) hatványsor *konvergenciatartományának* nevezzük. Az $x=0$ nyilván minden (9) alakú hatványsor konvergenciatartományához hozzátartozik, hiszen $x=0$-ra (9)-ből a_0-at kapunk. A következő gyakorló feladatokban megmutatjuk, hogy minden (9) alakú hatványsor konvergenciatartománya vagy a 0 hely, vagy egy véges, 0-ra szimmetrikus intervallum, amelyhez egyik vagy mindkét végpont hozzátartozhat, vagy a $(-\infty, +\infty)$ intervallum.

Gyakorló feladatok

15. Igazoljuk, hogy ha a (9) hatványsor egy $x_0 \neq 0$ helyen konvergens, akkor minden olyan x-re, amelyre $|x| < |x_0|$ abszolút konvergens.

Megoldás:

Alkalmazzuk a majoráns kritériumot. Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ sor konvergens, van olyan K szám, hogy $|a_n x_0^n| \leq K$ minden n-re. A $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n$ sorhoz konvergens majoráns sort keresünk. Mivel $|x| < |x_0|$, $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, az

$$|a_n|\,|x|^n = |a_n|\,|x_0|^n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

becsléssel kapott

$$\sum_{n=0}^{\infty} K \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

sor konvergens, tehát a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor abszolút konvergens.

16. Igazoljuk, hogy a (9) alakú hatványsor konvergenciatartománya vagy csak a 0 hely, vagy egy véges, a 0-ra szimmetrikus intervallum, amelyhez egyik, vagy mindkét végpont hozzátartozhat, vagy a $(-\infty, +\infty)$ intervallum. (A konvergenciaintervallum hosszának felét *konvergenciasugárnak* is nevezik; a $(-\infty, +\infty)$ esetben azt mondjuk, hogy a konvergenciasugár végtelen.)

Megoldás:

A (9) alakú sorról már láttuk, hogy $x=0$-ra konvergens. Tegyük fel, hogy van olyan $x \neq 0$ is, amire a sor konvergens, és legyen H azoknak az $|x|$ számoknak a halmaza, amelyekre a (9) sor az x helyen konvergens. Ha H felülről nem korlátos, akkor az előző, 15. gyakorló feladat szerint a (9) sor tetszőleges x-re abszolút konvergens, mert a feltevés szerint tetszőleges x-hez van olyan x_0, hogy $|x| < |x_0|$ és $|x_0| \in$ H, azaz az x_0 helyen a (9) sor konvergens. Ez azt jelenti, hogy a hatványsor konvergenciatartománya a $(-\infty, +\infty)$ intervallum, és mindenütt abszolút konvergens is a sor.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a H felülről korlátos. Legyen r a H felső határa; a feltevés szerint $r > 0$. Megmutatjuk, hogy a (9) sor $(-r, r)$-ben abszolút konvergens, ha pedig $|x| > r$, akkor divergens. Ha $|x| < r$, akkor r definíciója szerint van olyan x_0, hogy $|x_0| \in$ H és $|x| < |x_0| < r$, ami azt jelenti, hogy az x_0 helyen (9) konvergens, tehát a 15. gyakorló feladat szerint az x helyen (9) abszolút konvergens. Ha $|x| > r$, akkor $|x| \notin$ H, tehát az x helyen a (9) sor divergens. A (9) hatványsor tehát mindenesetre $(-r, r)$-ben abszolút konvergens, a konvergenciatartománya pedig $(-r, r)$, $[-r, r)$, $(-r, r]$, $[-r, r]$ lehet. Hogy a négy eset közül éppen melyik áll fenn, azt minden konkrét hatványsor esetében külön kell megvizsgálni. (Mint a következő gyakorló feladat mutatja, mindegyik eset elő is fordul.)

17. Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$.

Megoldás:

a) A gyökkritériummal vizsgálhatjuk az abszolút konvergenciát:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} |x|^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |x| = |x|e,$$

tehát $|x| < \frac{1}{e}$ esetén a hatványsor abszolút konvergens, $|x| > \frac{1}{e}$ esetén pedig divergens. A konvergenciatartomány megállapításához még a $\pm\frac{1}{e}$ helyeket kell megnézni. A

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}$$

sor konvergenciájának vizsgálatához használjuk fel a III. fejezet 18. feladatában bizonyított

$$\frac{2n}{2n+1}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}<\frac{2n+1}{2n+2}$$

egyenlőtlenséget. Ebből következik, hogy

$$(10)\qquad \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}<\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n:$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{n}{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)^{2n+2}\right]^{\frac{n}{2n+2}}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

ezért a (10) egyenlőtlenségből a „rendőrszabály" alapján:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{e^n}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

vagyis a sor n-edik tagja nem tart 0-hoz, tehát a sor divergens. Ebből nyilván következik, hogy a hatványsor a $-\frac{1}{e}$ helyen is divergens, h szen a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$$

sor tagjai nem tartanak 0-hoz. A hatványsor konvergenciatartománya tehát a $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ nyílt intervallum.

b) Itt a hányadoskritériummal célszerű vizsgálni az abszolút konvergenciát:

$$\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=(n+1)\,|x|,$$

ami $+\infty$-hez tart, ha $x\neq 0$, így a hatványsor $x\neq 0$-ra divergens, a konvergenciatartomány egyetlen pontból, a 0-ból álló halmaz.

c) A gyökkritérium alkalmazásával a következőt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n(n+2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+2}}=|x|,$$

tehát ha $|x|<1$, a sor abszolút konvergens, $|x|>1$ esetén divergens. Az $x=1$ helyen a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

sort kapjuk, ami konvergens $\left(\text{mert például a } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ konvergens sor majorálja}\right)$, ugyancsak konvergens az $x=-1$ helyen is, tehát a hatványsor konvergenciatartománya a $[-1, 1]$ zárt intervallum.

d) A hányadoskritérium alkalmazásával a következőt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0,$$

tehát a sor, tetszőleges x-re abszolút konvergens, a hatványsor konvergenciatartománya a $(-\infty, +\infty)$ intervallum.

e) A gyökkritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{n}}=|x|,$$

tehát a sor $|x|<1$-re abszolút konvergens, $|x|>$-1re divergens. Az $x=1$ helyen a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

sor konvergens, az $x=-1$ helyen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sort kapjuk, ami divergens. A hatványsor konvergenciatartománya tehát a $(-1, 1]$ félig zárt intervallum.

f) A hányadoskritérium alkalmazásával a következőt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} |x|^{n+1} \cdot \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{1}{|x|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n}{n+1} |x| = |x|,$$

tehát a hatványsor $|x|>1$-re divergens, $|x|<1$-re abszolút konvergens. Az $x=1$ helyen a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

sort kapjuk, ami divergens, mert — $\ln n>1$, ha $n>2$ miatt — a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor egy minoráns sora. Az $x=-1$ helyen konvergens sort kapunk, mert $\frac{\ln n}{n}$ monoton fogyó és $\frac{\ln n}{n} \to 0$, ha $n\to\infty$, így a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

sor Leibniz-típusú konvergens sor. E hatványsor konvergenciatartománya tehát a $[-1, 1)$ félig zárt intervallum.

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor összege a konvergenciatartományban x függvénye. Az $f(x)$ függvényről azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor összegfüggvénye, ha a konvergenciatartomány minden x elemére igaz, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

18. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor tagonkénti differenciálásával kapott $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsor konvergenciasugarával.

Megoldás:

Mivel $|a_n||x|^n \leqq n|a_n||x|^n = |x|\, n|a_n||x|^{n-1}$, a derivált sor konvergenciasugara nem lehet nagyobb a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor konvergenciasugaránál. Ha tehát $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ csak $x=0$-ra konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ is csak $x=0$-ra lehet konvergens. Tegyük fel, hogy a konvergenciasugár $r>0$, ahol r értéke ∞ is lehet. Azt kell igazolnunk, hogy ha $0<|x|<r$, (ha $r=\infty$, akkor tetszőleges x-re), akkor a tagonkénti deriválással kapott sor abszolút konvergens az x helyen. Válasszunk egy olyan x_0 helyet, amelyre $|x|<|x_0|<r$. Alkalmazzuk a következő becslést:

$$(11) \qquad n|a_n||x|^{n-1} = \frac{n}{|x|} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n |a_n||x_0|^n < K|a_n||x_0|^n,$$

ahol K olyan konstans, amire

$$\frac{n}{|x|} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < K$$

fennáll. Az egyenlőtlenség nyilván teljesül alkalmas K-val, hiszen $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ miatt $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|x|} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = 0$.

A

$$\sum_{n=1}^{\infty} K|a_n||x_0|^n$$

sor x_0 választása miatt konvergens, tehát (11) szerint a majoráns kritérium alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ sor abszolút konvergens.

Megjegyzés:

Az eredmény ismételt alkalmazásával következik, hogy egy hatványsort akárhányszor differenciálhatunk tagonként, a kapott hatványsoroknak mindig ugyanaz lesz a konvergenciasugara, mint az eredeti hatványsoré. Ha a konvergenciasugár véges, akkor a konvergenciaintervallum végpontjaiban megváltozhat a deriváltakból álló sor viselkedése, előfordulhat, hogy valamelyik végpontban az eredeti hatványsor konvergens, de a deriváltakból álló hatványsor divergens.

19. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $r>0$ és legyen a olyan szám, hogy $|a|<r$ (ill. a tetszőleges, ha a konvergenciasugár ∞). Igazoljuk, hogy a hatványsor $f(x)$ összegfüggvénye differenciálható az a helyen és

$$(12)\qquad f'(a)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1},$$

azaz a tagonkénti differenciálással kapott sor az összegfüggvény deriváltját állítja elő.

Megoldás:

A 18. gyakorló feladatból tudjuk, hogy a (12) egyenlőség jobb oldalán álló sor konvergens. Csak azt kell igazolnunk, hogy $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ létezik és egyenlő a sor összegével. Vezessük be az $x-a=h$ jelölést, ekkor $x=a+h$ és h-ra $|a|+|h|<r$ is teljesüljön. Azt fogjuk megmutatni, hogy az $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ kü önbségi hányadosnak és a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1}$ sor összegének eltérése tetszőleges, előre adott számnál is kisebb, ha $|h|$ elég kicsi. Írjuk fel először a különbségi hányadost:

$$\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))=\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a+h)^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty} a_n((a+h)^n-a^n)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n((a+h)^{n-1}+a(a+h)^{n-2}+\ldots+a^{n-1}).$$

Az átalakítások jogosak, mert a szereplő sorok konvergensek. Becsüljük ezután a különbségi hányados eltérését a $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1}$ sortól:

$$\left|\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n[(a+h)^{n-1}+a(a+h)^{n-2}+\ldots+a^{n-1}-na^{n-1}]\right|=$$

$$(13)\qquad =\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n[((a+h)^{n-1}-a^{n-1})+(a(a+h)^{n-2}-a^{n-1})+\ldots+(a^{n-1}-a^{n-1})]\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=2}^{\infty} h a_n[(a+h)^{n-2}+2a(a+h)^{n-3}+\ldots+(n-1)a^{n-2}]\right|\leq$$

$$\leq |h|\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,\frac{n(n-1)}{2}\,(|a|+|h|)^{n-2},$$

itt felhasználtuk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$ sor, ami a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor tagjainak második deriváltjaiból álló hatványsor, abszolút konvergens az $|a|+|h|<r$ helyen. Válasszunk most egy olyan x_0 számot, amelyre $|a|+|h|<|x_0|<r$ és a (13) becslés végén kapott sort felülről becsülhetjük a

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,\frac{n(n-1)}{2}\,|x_0|^{n-2}=K$$

számmal, így azt kaptuk, hogy

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n a^{n-1}\right|<|h|K,$$

ami tetszőlegesen kicsi, ha $|h|$ elég kicsi, és ezzel igazoltuk az állítást.

Feladatok

16. Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^{n+1}} x^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{4n}$.

17. Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergencia-artományát és összegfüggvényét:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{2n}}{2^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

∗**18.** Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $r>0$, véges szám. (Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n$ hatványsor konvergenciasugara nyilván 1.) Igazoljuk, hogy minden $|x|<1$ számra igaz a következő egyenlőség:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1 r+\ldots+a_n r^n)x^n.$$

∗**19.** Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $r>0$ véges érték és ha $|x|<r$, akkor jelöljük az összegfüggvényt $f(x)$-szel:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Legyen továbbá a hatványsor az $x=r$ helyen is konvergens és

$$s=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Igazoljuk az előző, 18. feladatban szereplő azonosság felhasználásával, hogy

$$\lim_{x\to r-0} f(x)=s$$

(Abel tétele).

20. A Cauchy-szorzás felhasználásával igazoljuk, hogy az

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

függvény, amelynek értelmezési tartománya az összes valós szám, eleget tesz a következő egyenletnek:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2),$$

ahol x_1 és x_2 tetszőleges valós számok.

21. Az előző feladat eredményét és a hatványsor összegfüggvényének tulajdonságait felhasználva mutassuk meg, hogy

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

4. Taylor-sorok és néhány alkalmazásuk

Az előző, 3. pontban igazoltuk, hogy egy hatványsor a konvergenciaintervallum belsejében tagonként akárhányszor differenciálható és a tagonkénti deriválással kapott sor összegfüggvénye az eredeti hatványsor összegfüggvényének deriváltja. Keressünk ennek alapján összefüggést a hatványsor összegfüggvénye és együtthatói között.

Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara nem nulla és a konvergenciaintervallum belsejében

$$(14)\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

A (14) egyenlőség mindkét oldalának k-adik deriváltját véve azt kapjuk:

$$(15)\quad f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}.$$

A (15) jobb oldalán álló hatványsornak a konvergenciasugara megegyezik a (14) egyenlőség jobb oldalán álló hatványsoréval, és a konvergenciaintervallum belsejében mindenütt érvényes az egyenlőség. A (14), ill. a (15) egyenlőséget az $x=0$ helyen véve kapjuk, hogy

$$f(0)=a_0,$$

$$f^{(k)}(0)=a_k\cdot k!,$$

ahonnan a (14) hatványsor együtthatóira a következő képlet adódik:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

$n=0, 1, \ldots$ és $f^{(0)}(0)=f(0)$. Ennek alapján a (14) hatványsort így is írhatjuk:

$$(16)\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ha most olyan $f(x)$ függvényből indulunk ki, amely a 0 pontban akárhányszor differenciálható, ekkor felírhatjuk a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ hatványsort, amit *az $f(x)$ függvény* 0 *helyhez tartozó Taylor-sorának* vagy Maclaurin-sorának nevezünk. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy egy adott, a 0 helyen akárhányszor differenciálható $f(x)$ függvényhez tartozó

$$(17)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Taylor-sor a konvergenciatartományában milyen feltételek mellett állítja elő az $f(x)$ függvényt. Ha eleve tudjuk, hogy $f(x)$ egy hatványsor összegfüggvénye, akkor (16) szerint az őt előállító hatványsor azonos a hozzá tartozó Taylor-sorral. Mint a következő gyakorló feladat mutatja, előfordulhat hogy (17) az egész számegyenesen konvergens, de a 0 hely kivételével sehol sem állítja elő a függvényt.

Gyakorló feladat

20. Igazoljuk, hogy az

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x\neq 0,\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sora mindenütt konvergens, de csak a 0 helyen állítja elő a függvényt.

Megoldás:

A III. fejezet 18. gyakorló feladatában igazoltuk, hogy tetszőleges $n\geqq 0$ egész számra $f^{(n)}(0)=0$, tehát az $f(x)$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sora tetszőleges x-re konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n \equiv 0,$$

A függvényről tudjuk még, hogy ha $x \neq 0, f(x) > 0$, tehát a Taylor-sor csak az $x=0$ helyen állítja elő a függvényt.

A III. fejezetben megmutattuk, hogy minden olyan $f(x)$ függvény, amelyik a 0 hely egy környezetében $(n+1)$-szer differenciálható, a Taylor-formulával a következő alakban állítható elő:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

ahol ξ egy alkalmas, 0 és x közötti hely. Tegyük fel az $f(x)$ függvényről, hogy a 0 egy környezetében akárhányszor differenciálható és az

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

maradéktag a 0 hely adott környezetébe tartozó x-ekre 0-hoz tart, ha n tart végtelenhez. Ekkor a

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$$

összefüggés miatt a 0 adott környezetében az $f(x)$ függvény Taylor-sora konvergens és előállítja a függvényt, röviden: az $f(x)$ függvény a 0 körül Taylor-sorba fejthető.

A Taylor-sorok egyik fontos alkalmazási területe a közelítő számítások. A gyakorlatokban erre is mutatunk majd néhány példát.

Gyakorló feladatok

21. A megfelelő Taylor-formulák felhasználásával igazoljuk, hogy tetszőleges valós számra érvényesek a következő sorfejtések:

a) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots;$

b) $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots;$

c) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$

Megoldás:

a) A feladatot a III. fejezet 23. feladatában megoldottuk.

b) A $\sin x$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-formulája:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+$$
$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\xi,$$

tehát a maradéktagot tetszőleges x-re így becsülhetjük:

$$\left|(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\xi\right|\leq\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}=0$$

tetszőleges x-re fennáll, a $\sin x$ sorfejtése az összes valós számra érvényes.

c) A *b)* feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el. Írjuk fel a Taylor-formulát:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\xi.$$

A maradéktag 0-hoz tart tetszőleges x-re, mert:

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\xi\right|\leq\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

így

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=0.$$

A $\cos x$ sorfejtése tehát az összes valós számra érvényes.

22. Igazoljuk, hogy ha $|x|<1$, akkor érvényesek a következő sorfejtések:

a) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

(használjuk fel, hogy a hatványsor tagonként differenciálható);

b) $$(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n+\ldots,$$

α tetszőleges valós szám,

$$\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!},$$

$\Big($a sor összegét $f(x)$-szel jelölve vizsgáljuk az $\dfrac{f(x)}{(1+x)^a}$ függvényt, ill. ennek deriváltját$\Big)$;

c) $$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots.$$

Vizsgáljuk meg, mit mondhatunk a konvergenciaintervallum végpontjaiban.

Megoldás:

a) A 17.*e)* gyakorlatból tudjuk, hogy az *a)* egyenlőség jobb oldalán álló sor a $(-1, 1]$-ben konvergens. Jelöljük $f(x)$-szel a sor összegét $|x|<1$-re és mutassuk meg, hogy $f(x)-\ln(1+x)\equiv 0$ a $(-1, 1)$ intervallumban. A hatványsor differenciálhatóságából következik, hogy

$$f'(x)=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1+x},$$

ha $|x|<1$. Mivel

$$(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x},$$

azért

$$(f(x)-\ln(1+x))'\equiv 0,$$

ha $|x|<1$, tehát $f(x)-\ln(1+x)\equiv c$ (konstans) a $(-1, 1)$-ben. Az $x=0$ helyen $f(0)-\ln(1+0)=0$, tehát $f(x)-\ln(1+x)\equiv 0$. Még az 1 helyen kell megvizsgálni a sort; de Abel tétele szerint (l. 19. feladat), mivel a hatványsor $x=1$-re konvergens és $\ln(1+x)$ az 1 helyen folytonos, itt is fennáll az *a)* egyenlőség, tehát

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots.$$

Ezt az eredményt már az I. fejezetben más eszközökkel is megkaptuk.

b) Először azt kell észrevennünk, hogy ha $\alpha\geqq 0$ egész szám, akkor a *b)* egyenlőség jobb oldalán egy véges összeg áll, mert ha $\alpha<n$, akkor $\binom{\alpha}{n}=0$. Könnyű észrevenni, hogy ebben az esetben a binomiális tételt kapjuk, $a=1$, $b=x$ választással, amit az I. pontban igazoltunk. Tegyük fel, hogy $\alpha\neq 0, 1, \ldots, n, \ldots$; ekkor valóban végtelen sort kapunk. Mutassuk meg, hogy ennek konvergenciasugara 1; alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}:\binom{\alpha}{n}x^n\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right||x|=|x|,$$

ami azt jelenti, hogy a sor $|x|<1$-re konvergens. Jelöljük a sor összegét $f(x)$-szel és mutassuk meg, hogy $g(x)=\dfrac{f(x)}{(1+x)^a}\equiv 1$, ha $|x|<1$. Először igazoljuk, hogy $g'(x)\equiv 0$ a $(-1, 1)$-ben:

$$g'(x)=\frac{f'(x)(1+x)^\alpha-\alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2a}}=\frac{f'(x)(1+x)-\alpha f(x)}{(1+x)^{a+1}}.$$

A számlálóban álló kifejezés:

$$f'(x)(1+x)-\alpha f(x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1}+n\binom{\alpha}{n}-\alpha\binom{\alpha}{n}\right]x^n\equiv 0,$$

mert

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1}+n\binom{\alpha}{n}=$$

$$=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)+n\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}=\alpha\binom{\alpha}{n}.$$

Mivel $g(0)=f(0)=1$, ezért $f(x)\equiv(1+x)^{\alpha}$. Ha α-ról mást nem teszünk fel, akkor általában nem tudunk mit mondani a -1, ill. $+1$ helyen a sor konvergenciájáról; ezt speciális α-kra külön kell megvizsgálni. A kapott sorfejtést binomiális sornak is nevezik.

c) Az *a)* megoldásában alkalmazott módszerrel juthatunk itt is célhoz. Először határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsor konvergenciatartományát. A hányadoskritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{|x|^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2,$$

tehát a sor $|x|>1$-re divergens, $|x|<1$-re konvergens. Az $x=1$ helyen a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ sor Leibniz-típusú, tehát konvergens; az $x=-1$ helyen a $\sum_{n=0}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ sort kapjuk, ami szintén konvergens. Így a hatványsor a $[-1, 1]$ zárt intervallumban konvergens. Jelöljük $f(x)$-szel $|x|<1$-re a sor összegfüggvényét és vizsgáljuk a $g(x)=f(x)-\operatorname{arc\,tg} x$ függvényt. A függvény deriváltja:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}-\frac{1}{1+x^2}\equiv 0,$$

ha $|x|<1$. Mivel $g(0)=f(0)-\operatorname{arc\,tg}(0)=0$, ezért $|x|<1$-re $g(x)=0$, tehát a *c)* sorfejtés $(-1, 1)$-ben mindenesetre érvényes. Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsor $x=\pm1$-re is konvergens és az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény az $x=\pm1$ helyeken folytonos, Abel tétele szerint a sorfejtés az egész zárt $[-1, 1]$ intervallumban érvényes. Az $x=1$ helyen a sor összege tehát:

$$\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots,$$

ezzel π kiszámítására újabb, alkalmas sort kaptunk.

23. Adjuk meg a következő függvények 0 körüli Taylor-sorfejtését:

a) $\sin^2 x$;

b) $\ln\frac{1+x}{1-x}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$;

d) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$;

e) $\frac{1}{x^2-5x+6}$.

Megoldás:

a) Eljárhatnánk úgy is, hogy a $\sin x$ függvény 21. gyakorló feladatban megadott sorelőállítását használva, a hatványsor önmagával való Cauchy-szorzatát képezzük. Most egy rövidebb, gyorsabban célravezető utat követünk. Használjuk fel a következő trigonometrikus azonosságot:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos 2x). \tag{18}$$

A $\cos 2x$ sorfejtése minden valós számra érvényes:

$$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

A (18) egyenlőség felhasználásával ezt kapjuk:

$$\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},$$

a sorfejtés $(-\infty, +\infty)$-ben érvényes.

b) Használjuk fel az

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

logaritmus azonosságot, amelyik $|x|<1$-ben érvényes és az $\ln(1+x)$-re az előző feladatban kapott sorfejtést ($\ln(1-x)=\ln(1+(-x))$):

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x}{n}-\ldots.$$

Az első sorfejtés $(-1, 1]$-ben, a második $[-1, 1)$-ben érvényes $(-1, 1)$-ben a két sor különbsége is konvergens, tehát

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right).$$

c) Az adott függvényt $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ alakban írva látható, hogy a 22.*b)* gyakorló feladatban kapott binomiális sort kell $\alpha=-\frac{1}{2}$ esetre felírnunk. Számítsuk ki először az együtthatókat:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}=(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}=$$

$$=(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}.$$

Vezessük be az $1\cdot 3\ldots(2n-1)=(2n-1)!!$ és $2\cdot 4\ldots 2n=(2n)!!$ (olv.: $2n-1$, ill. $2n$ szemifaktoriális) jelöléseket, így a következő sorfejtést kaptuk:

$$(19)\qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n.$$

A sor $|x|<1$-re konvergens. Az I. fejezet 15. feladatából tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0,$$

és mivel $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}>\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$, a (18) jobb oldalán álló sor $x=1$-re Leibniz-típusú sor, így konvergens. Az $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ függvény az $x=1$ helyen folytonos, tehát Abel tétele szerint a (19) sorfejtés $x=1$-re is érvényes, tehát a konvergenciatartománya $(-1, 1]$.

d) A függvényt írjuk

$$\frac{1}{1+x}\ln(1+x)$$

alakban. Innen látható, hogy a tényezők sorfejtéséből célszerű Cauchy-szorzással előállítani a függvényt. A tényezők sorfejtése:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

$|x|<1$-re mindkét sor abszolút konvergens, így a Cauchy-szorzatuk

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n+\ldots,$$

$|x|<1$-re abszolút konvergens, viszont $x=\pm 1$-re divergens, mivel $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\to+\infty$, ha $n\to\infty$.

e) Alakítsuk át először a vizsgált kifejezést:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

Az $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$, $\frac{1}{1-\frac{x}{3}}$ függvények sorfejtését az $\frac{1}{1-x}$ függvény sorfejtéséből kaphatjuk meg:

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}x^2+\ldots+\frac{1}{2^n}x^n+\ldots,\quad \text{ha}\quad |x|<2,$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3^2}x^2+\ldots+\frac{1}{3^n}x^n+\ldots,\quad \text{ha}\quad |x|<3.$$

A keresett sorfejtés $(-2, 2)$-ben érvényes:

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}x+\frac{3^3-2^3}{6^3}x^2+\ldots+\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{6^{n+1}}x^n+\ldots:$$

24. Igazoljuk az

$$(20)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

azonosságot, és felhasználásával számítsuk ki π értékét 10^{-5} pontossággal:

Megoldás:

A felírt azonosságot így igazolhatjuk:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2\cdot 3}}=1,$$

innen pedig következik a (20) összefüggés. A 22.*c)* gyakorló feladatban igazolt sorfejtést használjuk:

$$(21)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{1}{2^{2n+1}}+\ldots,$$

$$(22)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}+\ldots.$$

A (21) és (22) sor is Leibniz-típusú, tehát alkalmazhatjuk a 4. feladatban megadott becslést: az n-edik részletösszeg eltérése a sor összegétől abszolút értékben kisebb, mint az $n+1$-edik tag abszolút értéke. Ha mindkét sorból annyi tagot veszünk, hogy az összegtől való eltérés 10^{-6}-nál kisebb legyen, akkor a két közelítés összegének 4-szerese a (20) összefüggés alapján 10^{-5}-nél kevesebbel fog eltérni π-től. Az

$$\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}<\frac{1}{10^6}$$

egyenlőtlenség $n=8$-ra, az

$$\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}<\frac{1}{10^6}$$

egyenlőtlenség $n=7$-re teljesül, így a (21) sorból 7 tagot, a (22) sorból 6 tagot kell vennünk, ezzel π értékét 10^{-5} pontossággal megkapjuk. A részletes számolás elvégzése után $\pi=3{,}14\,159$ adódik.

25. Igazoljuk a 23.*b)* gyakorló feladat felhasználásával, hogy az

$$(23)\qquad \ln(k+1)=\ln k+2\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}+\ldots\right)$$

azonosság $k\in T$-re fennáll és számítsuk ki ennek felhasználásával $\ln 2$ értékét 10^{-9} pontossággal.

Megoldás:

Alkalmazzuk a 23.*b)* gyakorló feladatban kapott sorfejtést $x=\frac{1}{2k+1}$-re, ahol $k\in T$ $\left(0<\frac{1}{2k+1}<1 \text{ miatt a kapott sor konvergens}\right)$:

$$\ln\frac{1+\frac{1}{2k+1}}{1-\frac{1}{2k+1}}=\ln\frac{k+1}{k}=$$

$$=2\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3(2k+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}+\ldots\right),$$

ezzel az állítás első részét igazoltuk.

Ha a (23) előállítást $k=1$-re alkalmazzuk, ezt kapjuk:

$$(24)\qquad \ln 2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}+\ldots+\frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}+\ldots.$$

A (24) sor összegének a sor n-edik részletösszegétől való eltérését a következő módon becsülhetjük:

$$\ln 2-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^4}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)3^{2n-1}}\right)=$$

$$=\frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}+\ldots<\frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

Olyan n-et kell keresnünk, amelyre a becslést 10^{-9}-nél is kisebbé tehetjük; ez $n=9$-re már teljesül, így $\ln 2=0{,}693\,147\,180$ adódik.

Ha adott egy $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozat, akkor képezhetjük a sorozat tagjaival mint együtthatókkal a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsort. Amennyiben a kapott hatványsornak az r konvergenciasugara pozitív, akkor az $|x|<r$-re definiált

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

függvényt az adott sorozat *generátorfüggvényének* nevezzük. A generátorfüggvény vizsgálatával sok esetben olyan kérdésekre is választ kaphatunk, amelyek az eredeti sorozat lényeges tulajdonságaira vonatkoznak.

Gyakorló feladatok

26. Az $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ függvény sorfejtésének felhasználásával igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egész számra igaz a következő összefüggés:

$$\binom{2n}{n}+\binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1}+\binom{4}{2}\binom{2n-4}{n-2}+\ldots+\binom{2n}{n}=2^{2n}. \tag{25}$$

Megoldás:

A 23. *c)* gyakorló feladatból ismerjük az $|x|<1$-re abszolút konvergens sorfejtést:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots. \tag{26}$$

Az n-edik tag együtthatójának abszolút értékét így is írhatjuk:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)2n}{2^{2n}\cdot(1\cdot 2\ldots n)^2}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}. \tag{27}$$

A (25) összefüggésről sejthető, hogy egy Cauchy-sorozattal kapott hatványsor együtthatóival szoros kapcsolata van. Képezzük a (26) sorfejtés négyzetét, ami $|x|<1$-re konvergens, felhasználva az együtthatók (27) alakját:

$$\frac{1}{1+x}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2=1-\frac{1}{2^2}\left[\binom{2}{1}+\binom{2}{1}\right]x+$$

$$+\frac{1}{2^4}\left[\binom{4}{2}+\binom{2}{1}\binom{2}{1}+\binom{4}{2}\right]x^2+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\binom{2n}{n}+\binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1}+\ldots+\binom{2n}{n}\right]x^n+\ldots.$$

Az $\frac{1}{1+x}$ függvény sorfejtését $|x|<1$-ben már ismerjük:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots.$$

Mivel a hatványsor az összegfüggvényének 0 körüli Taylor-sora, a függvény egyértelműen meghatározza a sorfejtésben szereplő együtthatókat. Az $\frac{1}{1+x}$ függvény kétféle sorfejtésében az azonos kitevőjű x hatványok együtthatói megegyeznek:

$$\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\left[\binom{2n}{n}+\binom{2}{1}\binom{2n-2}{n-1}+\ldots+\binom{2n}{n}\right]=(-1)^n,$$

ez pedig ekvivalens a bizonyítandó (25) összefüggéssel.

27. Az $u_0=0$, $u_1=1$, $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ rekurzív definícióval megadott Fibonacci-sorozat (1. I. fejezet 26. gyakorló feladat) n-edik tagjára adjunk meg explicit képletet, azaz olyan $f(n)$ algebrai kifejezést, hogy minden n-re $u_n=f(n)$ teljesüljön. Használjuk fel a Fibonacci-sorozat generátorfüggvényét.

Megoldás:

Írjuk fel a Fibonacci-sorozat generátorfüggvényét:

$$f(x)=u_0+u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n+\ldots. \tag{28}$$

Az a célunk, hogy $f(x)$-et meghatározzuk. Először megmutatjuk, hogy a (28) jobb oldalán álló sor konvergenciatartománya nem csak a 0 szám.

Mivel $u_0<1$, $u_1<2$, és ha $u_n<2^n$, $u_{n+1}<2^{n+1}$, akkor $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}<2^n+ +2^{n+1}<2^{n+2}$, tehát teljes indukcióval igazoltuk, hogy $u_n<2^n$. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n x^n|$$

sornak majoráns sora a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |2^n x^n|$$

sor, ez pedig $|x|<\frac{1}{2}$-re konvergens. Így $f(x)$ sorfejtése $|x|<\frac{1}{2}$-re biztosan érvényes; itt a sor abszolút konvergens. Szorozzuk a (28) egyenlőséget x-szel:

(29) $\quad xf(x)=u_0x+u_1x^2+u_2x^3+\ldots+u_{n-1}x^n+\ldots.$

Adjuk össze a (28) és (29) egyenlőségeket és vegyük figyelembe az u_n-et definiáló rekurziós egyenletet:

(30) $\quad f(x)+xf(x)=u_2x+u_3x^2+\ldots+u_{n+1}x^n+\ldots.$

A (30) egyenlőség mindkét oldalához $u_1=1$-et adva és x-szel szorozva $f(x)$-et kapjuk a jobb oldalon ($u_0=0$), tehát az

$$x[f(x)+xf(x)+1]=f(x)$$

egyenlőségnek tesz eleget az $f(x)$ függvény, innen

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

Ezután már a 23.*e)* gyakorló feladatban alkalmazott módszerrel megadhatjuk $f(x)$ sorfejtését. Először a nevezőt bontsuk tényezőkre:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+x\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}-x\right)},$$

majd a törtet két tört összegére:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+x}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}-x}\right).$$

A két tagot külön sorbafejtjük:

$$\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+x}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}+x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3 x^2-\ldots+$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} x^n\ldots,$$

a sorfejtés $|x|<\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ értékekre érvényes.

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}+1}-x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 x+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 x^2+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} x^n+\ldots,$$

a sorfejtés $|x|<\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ értékekre érvényes. A kapott sorelőállításokból $f(x)$-re az $|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$-ben érvényes

(31) $\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]x^{n+1}$

sorelőállítást kapjuk. Az $f(x)$ sorfejtése egyértelmű, így a (28) és (31) összehasonlításából u_n-re a következő képletet kapjuk, ha $n\geq 1$:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

22. Írjuk fel a következő függvények 0 körüli Taylor-sorát:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$;

b) $\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$;

c) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

23. Igazoljuk, hogy $|x|<1$-re érvényes a következő sorfejtés:

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Vizsgáljuk meg, érvényes-e a sorfejtés $x=\pm 1$-re.

$*$**24.** Mutassuk meg, hogy ha $(-r, r)$-ben $f(x)$ akárhányszor differenciálható és minden n-re $|f^{(n)}(x)|<K$, ahol K rögzített szám, akkor $f(x)$-nek a 0 körüli Taylor-sora konvergens $|x|<r$-re és előállítja a függvényt.

25. Számítsuk ki a következő sorok összegét:

a) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ (alkalmazzuk az Abel-tételt);

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$ (vizsgáljuk az s_{2n} részletösszeget).

26. Számítsuk ki $\sin 1°$ értékét 10^{-8} pontossággal.

27. A 25. gyakorló feladatban használt módszerrel számítsuk ki $\ln 10$ értékét 10^{-5} pontossággal.

28. Egy kör kerületén adott $2n$ számú pont. Jelöljük a_n-nel azt a számot, ahányféleképpen páronként össze lehet ezeket

kötni n darab olyan húrral, amelyek nem metszik egymást a kör belsejében.

a) Igazoljuk, hogy

$$a_n=a_0a_{n-1}+a_1a_{n-2}+\ldots+a_{n-2}a_1+a_{n-1}a_0,$$

ahol $a_0=1$.

b) Jelöljük $f(x)$-szel az (a_n) sorozat generátorfüggvényét. Igazoljuk, hogy az $xf(x)=g(x)$ függvényre teljesül:

$$g^2(x)=g(x)-x.$$

c) Adjunk meg explicit képletet a_n értékére.

5. Végtelen szorzatok

Ha adott egy $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozat, akkor az elemeiből képezett

$$(32)\qquad a_1a_2\ldots a_n\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}a_n$$

szimbólumot végtelen szorzatnak nevezzük. A végtelen szorzat értékét a végtelen sorhoz hasonlóan a részletszorzatok sorozatának vizsgálatával célszerű definiálni. A

$$p_n=a_1\ldots a_n$$

definícióval megadott sorozat tagjait a (32) végtelen szorzat részletszorzatainak nevezzük. A definícióból nyilvánvaló, hogy ha valamilyen k-ra $a_k=0$, akkor $n\geqq k$-ra $p_n=0$ is fennáll. Célszerű ezért olyan végtelen szorzatokat vizsgálni, amelyeknek egyik tényezője sem 0. A továbbiakban kikötjük, hogy $a_n\neq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$. *Amennyiben a*

$$p=\lim_{n\to\infty}p_n$$

véges határérték létezik és $p\neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a (32) *végtelen szorzat konvergens és értéke p*; ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a (32) végtelen szorzat divergens.

Gyakorló feladatok

28. Vizsgáljuk meg, hogy a következő végtelen szorzatok közül melyik konvergens. A konvergens végtelen szorzatoknak számítsuk ki az értékét is:

a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

b) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

c) $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$;

d) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Megoldás:

a) A sorozat p_n részletszorzata így írható:

$$p_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\dots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

tehát $\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{2}$. A végtelen szorzat konvergens és

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2};$$

b) Itt is az n-edik részletszorzatot vizsgáljuk:

$$0<p_n=1\cdot\frac{1}{2}\dots\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

tehát $\lim_{n\to\infty} p_n=0$. A definíció szerint a végtelen szorzat divergens.

c) Írjuk ki részletesen, az egyes tényezőket is szorzattá bontva az n-edik részletszorzatot:

$$p_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\dots\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{4}\,\frac{n+2}{n-1},$$

tehát $\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1}{4}$,

$$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}.$$

d) Az n-edik részletszorzatot így alakíthatjuk át:

$$p_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\dots\frac{n+1}{n}=n+1,$$

ahonnan az következik, hogy $\lim_{n\to\infty} p_n=+\infty$, tehát a végtelen szorzat divergens.

29. Igazoljuk, hogy a (32) végtelen szorzat konvergenciájának szükséges feltétele, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n=1$. Elégséges-e ez a feltétel a végtelen szorzat konvergenciájához?

Megoldás:

Ha a (32) végtelen szorzat konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} p_{n-1}=p\neq 0$, tehát:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{n-1}}=1.$$

A feltétel nem elegendő, mert például az előző 28. gyakorló feladat *c)* esete divergens, pedig $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$. Itt a részletszorzatokból álló sorozat $+\infty$-hez tart. A

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

szorzat példája mutatja, hogy az is előfordulhat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) =$ $=1$, és a részletszorzatok sorozata 0-hoz tart:

$$p_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

A definíció szerint a végtelen szorzatot ekkor is divergensnek nevezzük.
A feladat eredménye alapján a következőkben olyan végtelen szorzatokra szorítkozunk, ahol $a_n > 0$ minden n-re.

30. Igazoljuk, hogy a

$$(33)\qquad \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

végtelen szorzat akkor és csak akkor konvergens, ha a

$$(34)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$$

végtelen sor konvergens.

Megoldás:

Ha (33) konvergens (azt már eleve feltettük, hogy $a_n > 0$) és értéke p, akkor:

$$\lim_{n\to\infty} \ln p_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln a_k = \ln p,$$

tehát a (34) végtelen sor konvergens és összege $\ln p$. Megfordítva, ha (34) konvergens és összege s, akkor:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln p_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k} = e^s \neq 0,$$

tehát a (33) szorzat konvergens és értéke e^s.

31. Vizsgáljuk meg a következő végtelen szorzatokról, hogy konvergensek-e:

$$a)\quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}};$$

$$b)\quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n};$$

$$c)\quad \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}.$$

Megoldás:

a) Alkalmazzuk az előző, 30. gyakorló feladatban igazolt szükséges és elégséges feltételt. A tényezők logaritmusaiból alkotott sor

$$(35)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

konvergens, mert a III. fejezetben igazolt $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, ha $x > 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}$ konvergens sor majoráns sora (35)-nek. Így az *a)* végtelen szorzat konvergens. Próbáljuk meg kiszámítani a szorzat értékét. A p_n részletszorzatot így írhatjuk:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}\, e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} =$$

$$=\frac{n}{n+1}e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}.$$

Az I. fejezet 32. gyakorló feladatából tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c,$$

ahol c az Euler-féle konstans. Ennek alapján a végtelen szorzat értéke:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=e^{c}.$$

b) Itt is az előző gyakorló feladatban igazolt kritériumot alkalmazzuk, a

$$(36)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

sorról kell megvizsgálnunk, hogy konvergens-e. Használjuk fel az $\ln(1+x)$ függvény Taylor-formuláját

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

alakban (III. fejezet 22. gyakorló feladat). Ebből következik $x=\frac{1}{n}$ helyettesítéssel és átrendezéssel, hogy

$$1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}-o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$(37)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n}}=1.$$

Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

sor divergens, a (37) összefüggésből a minoráns kritérium alapján adódik, hogy a (36) sor is divergens, hiszen a tagjai bizonyos n-től kezdve például nagyobbak $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}$-nél. Így a *b)* végtelen szorzat divergens.

c) Vizsgáljuk a tényezők logaritmusaiból alkotott végtelen sort:

$$(38)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}=0$, $0<\frac{\ln n}{n^2}=\frac{\ln n}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, ha n elég nagy és a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

sor konvergens, a (38) sor is konvergens és így az eredeti végtelen szorzat is konvergens.

32. Tegyük fel, hogy $a_n=1+u_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, az (u_n) sorozat elemei azonos előjelűek. Igazoljuk, hogy

a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ konvergens;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=+\infty$ akkor és csak akkor igaz, ha $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+u_k)=+\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=-\infty$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+u_k)=0$.

Megoldás:

a) A 30. gyakorló feladat alapján vizsgáljuk a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$$

sor viselkedését. Mivel $u_n \to 0$, ha $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$. Tegyük fel, hogy $u_n > 0$ teljesül. Ekkor, elég nagy n-re:

$$\frac{1}{2} < \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} < 1,$$

$$(39) \qquad \frac{1}{2} u_n < \ln(1+u_n) < u_n.$$

Ebből a majoráns, ill. minoráns kritérium alapján következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n)$ sorok egyszerre konvergensek, ill. divergensek. Ha $u_n < 0$, akkor (39)-ben a fordított egyenlőtlenségek érvényesek és ugyanerre az eredményre jutunk.

b) Ha $\sum_{k=1}^{n} u_k \to +\infty$, akkor $u_n > 0$ állhat csak fenn és a (39) egyenlőtlenség miatt $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) \to +\infty$, tehát

$$e^{\sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)} = e^{\ln \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)} = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k) \to +\infty.$$

Hasonlóan látható be a tétel megfordítása is.

c) Ha $\sum_{k=1}^{n} u_k \to -\infty$, akkor $u_n < 0$ igaz, tehát a (39) egyenlőtlenségből következő

$$\frac{1}{2} u_n > \ln(1+u_n) > u_n$$

egyenlőtlenség miatt $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) \to -\infty$, tehát:

$$0 = \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k)} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \prod_{k=1}^{n} (1+u_k)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1+u_k).$$

Az ellenkező irányú becslésből adódik az állítás megfordítása.

33. Jelöljük p_n-nel az n-edik prímszámot, azaz legyen $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ stb.

a) Igazoljuk, hogy ha $\alpha > 1$, akkor:

$$(40) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^\alpha}{p_n^\alpha - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

b) Igazoljuk az *a)* rész és a 32. gyakorló feladat felhasználásával, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

sor divergens.

Megoldás:

a) A végtelen szorzat tényezőit írjuk át a következő alakba:

$$(41) \qquad \frac{p_k^\alpha}{p_k^\alpha - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(p_k^l)^\alpha}$$

és a kapott sor abszolút konvergens, mert $0 < \frac{1}{p_k^\alpha} < 1$. Vizsgáljuk a végtelen szorzat n-edik részletszorzatának és a végtelen sor n-edik részletösszegének eltérését. Használjuk fel közben, hogy a (41) előállításban kapott véges sok végtelen sor szorzatát képezve abszolút konvergens sort kapunk, tehát tagjait tetszőleges sorrendben írhatjuk (15. feladat):

$$(42) \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{(p_k)^\alpha} + \frac{1}{(p_k^2)^\alpha} + \dots\right) =$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{\alpha}}+\sum_{l>n}'\frac{1}{l^{\alpha}},$$

hiszen $p_n>n$ miatt a szorzatsorban szerepelni fognak az összes $\frac{1}{m^{\alpha}}$ alakú számok $m\leq n$-re (az ilyen m számok prímtényezői mind szerepelnek a p_1, $p_2, \ldots, p_n$ számok között), a második tagban, a $\sum'$-ben az összes olyan $\frac{1}{l^{\alpha}}$ szerepel, ahol $l>n$ és l prímtényezői a $p_1, \ldots, p_n$ számok közül kerülnek ki. Ebből a következő becslést kapjuk:

$$(43)\qquad 0<\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^{\alpha}}}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^{\alpha}}<\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha}}.$$

A (43) becslés jobb oldalán álló sor tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy, mivel a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ sor $\alpha>1$-re konvergens. Ezzel az *a)* állítást igazoltuk. Megjegyezzük még, hogy a feladattal a

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}\quad(x>1),$$

definícióval megadott Riemann-féle ζ függvényre kaptunk egy másik előállítást.

b) A (42) egyenlőség az $\alpha=1$ esetre is igaz. Ebből a

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

végtelen szorzat n-edik részletszorzatára a következő alsó becslést kaphatjuk:

$$(44)\qquad \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}>\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}.$$

Mivel a (44) egyenlőtlenség jobb oldalán álló sorozat, a harmonikus sor n-edik részletösszege $+\infty$-hez tart, ha $n\to\infty$-hez, ezért

$$(45)\qquad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}=+\infty.$$

A (45) egyenlőségből a reciprokra térve azt kapjuk, hogy

$$(46)\qquad \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0.$$

Ebből a 32.*c)* gyakorló feladat alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\to+\infty,$$

tehát a prímszámok reciprokából álló sor divergens.

34. Ebben a gyakorló feladatban a

$$(47)\qquad \Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}},$$

$x\neq 0, -1, -2, \ldots$ definícióval megadott függvény néhány egyszerű tulajdonságát vizsgáljuk.

a) Igazoljuk, hogy a (47) definíció értelmes, vagyis a végtelen szorzat $x\neq 0, -1, -2, \ldots$ esetén konvergens.

b) Igazoljuk, hogy

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{x}}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

c) Mutassuk meg, hogy a gammafüggvény értelmezési tartományában minden x-re teljesül, hogy

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),$$

ha pedig $x=n$ pozitív egész, akkor:

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

d) Bizonyítsuk be a gammafüggvény Weierstrass-féle előállításának helyességét:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$$

ahol c az Euler-féle állandó.

Megoldás

a) A (47) egyenlőség jobb oldalán álló végtelen szorzat n-edik tényezőjének logaritmusát (ami elég nagy n-re pozitív) így írhatjuk fel a Taylor-formula felhasználásával:

$$\ln \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = x \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)}{2n^2}$ végtelen sor konvergens, tehát a 30. gyakorló feladat szerint a (47) szorzat is konvergens, ha $x \neq 0, -1, -2, \ldots$.

b) A gammafüggvény definícióját adó végtelen szorzat n-edik részletszorzatát alakítsuk át a következő módon:

$$\frac{1}{x} \frac{(1+1)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} =$$

$$= n! \frac{2^x \cdot \frac{3^x}{2^x} \cdots \frac{(n+1)^x}{n^x}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^x = 1$, az állítást igazoltuk.

c) Alkalmazzuk az előző előállítást $\Gamma(x+1)$-re is. Ebből a következőt kapjuk:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x+1+n} = x.$$

A (47) összefüggésből tudjuk, hogy $\Gamma(1)=1$. Ha $x=n>0$ egész, akkor alkalmazzuk a $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ összefüggést egymás után n-szer:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n!\Gamma(1)=n!.$$

d) A gamma definíciója és a *c)* miatt

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)=\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}. \tag{48}$$

A 31.*a)* gyakorló feladat eredménye alapján:

$$e^{cx}=\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}. \tag{49}$$

A (48) és (49) konvergens végtelen szorzatokat tényezőként szorozva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\Gamma(x+1)e^{cx}=\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)}=e^{cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

Feladatok

29. Igazoljuk, hogy a következő végtelen szorzatok konvergensek és számítsuk ki értéküket:

a) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;

b) $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n}),\quad |x|<1.$

30. Igazoljuk, hogy ha $\alpha \neq 0$, akkor:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

31. Az előző feladat alapján igazoljuk Vieta következő formuláját:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

$\left(\text{alkalmazzuk a 30. feladatban kapott formulát } \alpha = \frac{\pi}{2}\text{-re}\right)$.

32. Döntsük el, hogy a következő végtelen szorzatok közül melyik konvergens, melyik divergens:

a) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

b) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$;

c) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{|x|^n}{2^n}\right)$.

***33.** Igazoljuk, hogy ha a $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ szorzat konvergens és értéke s, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ is konvergens és értéke $\frac{1}{s}$.

***34.** Tudjuk, hogy a $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ szorzatok konvergensek. Mit mondhatunk a következő szorzatokról:

a) $\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n$;

b) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$;

c) $\prod_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$.

***35.** Igazoljuk a Riemann-féle ζ függvény következő tulajdonságait (l. 33. gyakorló feladat):

a) $\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^x}$,

ahol $d(n)$ az n szám osztóinak száma, $x > 1$;

b) $\zeta(x)\zeta(x-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^x}$,

ahol $\sigma_k(n)$ az n szám osztói k-adik hatványainak összege, $k>0$ $x-k>1$;

c) $\frac{1}{\zeta(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^x}$,

ahol $x>1$, $\mu(n)$ az ún. Mőbius-függvény a következőt jelenti: $\mu(1)=1$; $\mu(n)=(-1)^r$, ha $n \in_t T$ r különböző prímszám szorzata, egyébként $\mu(n)=0$.

***36.** A következő feladatsorozatban azt fogjuk igazolni, hogy a $\sin x$ függvény a következő végtelen szorzat alakjában állítható elő:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{50}$$

a) A trigonometriából ismert

$$\sin (2n+1)\alpha = \sin \alpha \cdot p\,(\sin^2 \alpha)$$

[$p(x)$ egy n-edfokú polinom] azonosság felhasználásával igazoljuk, hogy

$$(51)\quad \sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\dots$$

$$\dots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

b) Jelölje $a_k^{(n)}$ az (51) egyenlőség jobb oldalának első $k+2$ tényezőjének szorzatát, $b_k^{(n)}$ pedig a többi tényező szorzatát, ahol $1<k<n$ rögzített szám. Számítsuk ki $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)}=a_k$ értékét és igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_k^{(n)}=b_k$ létezik. Igazoljuk, hogy

$$\sin x=a_k\cdot b_k.$$

c) A $0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}$-re érvényes $\frac{2}{\pi}|\alpha|<|\sin\alpha|<|\alpha|$ egyenlőtlenség felhasználásával becsüljük meg $b_k^{(n)}$ értékét és ezzel a becsléssel igazoljuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} b_k=1.$$

d) Az eddigiek alapján igazoljuk az (50) szorzat-előállítás érvényességét.

$\ast$**37.** Igazoljuk az ún. *Wallis-formulát*:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

$\left(\text{Alkalmazzuk az előző feladat eredményét } x=\frac{\pi}{2}\text{-re}\right).$

$\ast$**38.** Igazoljuk, hogy ha x nem egész szám, akkor

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Ennek alapján számítsuk ki $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ értékét.

$\ast$**39.** Ezzel a feladatsorozattal az a célunk, hogy az $n!$ becslésére szolgáló ún. Stirling-formulát igazoljuk:

$$(52)\quad n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\xi_n}{12n}},$$

ahol $0<\xi_n<1$.

a) A 25. gyakorló feladatban igazolt (23) összefüggés segítségével igazoljuk, hogy

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

b) Igazoljuk, hogy az

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

sorozat konvergens, és ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, akkor

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n.$$

c) A Wallis-formula (37. feladat) alkalmazásával és az $\frac{a_{2n}}{a_n^2}$ sorozat segítségével számítsuk ki a értékét (használjuk fel a

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

azonosságot) és igazoljuk az (52) összefüggést.

40. A Stirling-formula felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

c) Adjunk jó közelítést $\dbinom{2n}{n}$ kiszámítására és ezzel egyben közelítő formulát is kapunk a 28. feladatban szereplő a_n értékre.

A IV. fejezetben kitűzött feladatok megoldásai

1.*a)* A sor n-edik részletösszegét így alakíthatjuk át:

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k+3^k}{5^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}=$$

$$=\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}.$$

Ebből s_n határértéke, tehát a sor összege:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{5}{3}+\frac{5}{2}=\frac{25}{6}.$$

b) A sor n-edik részletösszegét az

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

azonosság felhasználásával alakítsuk át:

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

A sor összege tehát:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

c) A sor n-edik részletösszegét hozzuk először egyszerűbb alakra a logaritmus tulajdonságai és trigonometrikus azonosságok felhasználásával:

$$s_n = \ln\cos\frac{x}{2} + \ln\cos\frac{x}{2^2} + \ldots + \ln\cos\frac{x}{2^n} =$$

$$= \ln\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}2^n\cdot\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right) =$$

$$= \ln\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right) =$$

$$= \ldots = \ln\sin x\cdot\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \ln\sin x - \ln\left(x\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right) =$$

$$= \ln\frac{\sin x}{x} - \ln\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}.$$

Ha $n\to\infty$, akkor $\frac{x}{2^n}\to 0$, így:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = 1.$$

Az $\ln x$ függvény folytonos az 1 helyen, így:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = \ln 1 = 0.$$

A végtelen sor összege tehát:

$$\ln\frac{\sin x}{x}.$$

d) Itt is az s_n részletösszeget vizsgáljuk. Vegyük észre, hogy ha az előző, *c)* feladatban szereplő részletösszeg k-adik tagját mint x függvényét deriváljuk, akkor a most összegezendő részletösszeg k-adik tagjának -1-szeresét kapjuk:

$$\left(\ln\cos\frac{x}{2^k}\right)' = \frac{1}{\cos\frac{x}{2^k}}\left(-\sin\frac{x}{2^k}\right)\cdot\frac{1}{2^k} =$$

$$= -\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}.$$

Mivel véges összeget tagonként differenciálhatunk, a keresett részletösszeg az előző feladatbeli részletösszeg deriváltjának -1-szerese:

$$-\left(\ln\sin x - \ln 2^n\sin\frac{x}{2^n}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin x} +$$

$$+\frac{2^n\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n} = -\operatorname{ctg} x + \cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{x}.$$

Használjuk fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2^n} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = 1.$$

A sor összege tehát:

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x,$$

és érdemes észrevenni azt is, hogy ez éppen az előző sor összege, $\ln\frac{\sin x}{x}$ deriváltjának a -1-szerese.

2. A feltevés szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens; ebből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. Eszerint van olyan n_0 index, hogy ha $n>n_0$, akkor $0\leqq a_n<1$. Az utolsó egyenlőtlenségből $0\leqq a_n^2<a_n$ következik, ha $n>n_0$, de ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n_0} a_k^2+\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

konvergens sor majoráns sora a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ sornak, tehát ez is konvergens. Az állítás megfordítása nem igaz, mert például a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergens, míg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor divergens.

3. Igazoljuk először, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ sor konvergens. A sor n-edik részletösszege így bontható fel:

$$r_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=s_n+t_n,$$

ahol s_n, ill. t_n a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, ill. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ sor n-edik részletösszege. Ebből az egyenlőségből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} r_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ létezik, sőt az is, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

Ha most figyelembe vesszük az eddig még fel nem használt $a_n\geqq 0$, $b_n\geqq 0$ feltevéseket, $a_n+b_n\geqq 0$-t kapjuk, így az előző, 2. feladatból következik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ konvergens.

A $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ sor konvergenciájának igazolásához elég észrevenni, hogy (a_n, $b_n\geqq 0$ felhasználásával)

$$a_nb_n\leqq\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2=\frac{(a_n+b_n)^2}{4}$$

a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint, így a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n+b_n)^2}{4}$ konvergens sor majoránsa a $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ sornak, tehát ez is konvergens. A sort így is előállíthatjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2-\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right).$$

4. Az (a_n) sorozat monoton fogyó. Ebből következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ sor (s_n) részletösszegei sorozatának páros indexű részsorozata monoton növő, páratlan indexű részsorozata monoton fogyó, ugyanis:

$$s_{2n+2}=s_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}\geqq s_{2n},$$

mert

$$a_{2n+1}-a_{2n+2}\geqq 0,$$

$$s_{2n+1}=s_{2n-1}-a_{2n}+a_{2n+1}\leqq s_{2n-1},$$

mert

$$-a_{2n}+a_{2n+1}\leqq 0.$$

Az (s_{2n}) sorozat felülről korlátos, mert például:

$$s_{2n}\leqq s_1,$$

az (s_{2n-1}) sorozat alulról korlátos, mert például:

$$s_{2n-1}\geqq s_2.$$

Az (s_{2n}) és (s_{2n-1}) sorozatok külön-külön konvergensek, különbségük, $s_{2n}-s_{2n-1}=a_{2n}\to 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}=s$. Az (s_n) sorozat tehát konvergens és így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ Leibniz-típusú sor is konvergens és s összegére már meg is kaptuk a következő becslést:

$$s_{2n}\leqq s\leqq s_{2n-1} \tag{53}$$

minden n-re. Az (53) becslésből következik, hogy két szomszédos részletösszeg eltérése soha nem kisebb, mint a sor s összege és az egyik részletösszeg eltérése, azaz:

$$|s-s_n|\leqq|s_{n+1}-s_n|=a_{n+1}.$$

5. *a)* Itt a gyökkritériumot célszerű használni:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{e^n}=0,$$

tehát a sor konvergens.

b) A sor váltakozó előjelű, így jó lenne megvizsgálni, alkalmazható-e rá a 4. feladatban igazolt kritérium. Nyilván elég lesz az is, ha bizonyos n-től kezdve a sor tagjainak abszolút értéke monoton fogyó. Állapítsuk meg, milyen n-től kezdve áll fenn a csökkenés:

$$\frac{n-1}{n+1}\,\frac{1}{\sqrt[100]{n}}>\frac{n}{n+2}\,\frac{1}{\sqrt[100]{n+1}}$$

$$\sqrt[100]{\frac{n+1}{n}}>\frac{n^2+n}{n^2+n-2}$$

$$\frac{n}{n+1}<\left(1-\frac{2}{n^2+n}\right)^{100}.$$

Eddig ekvivalens átalakításokat végeztünk. Ha az utolsó egyenlőtlenség jobboldalát a Bernoulli-egyenlőtlenség (l. I. fejezet) felhasználásával csökkentjük és kiszámítjuk, hogy az így kapott egyenlőtlenség milyen n-től kezdve igaz, akkor ugyanilyen n-től kezdve nyilván igaz lesz az eredeti egyenlőtlenség:

$$\frac{n}{n+1}<1-\frac{200}{n^2+n},$$

$$\frac{200}{n^2+n}<1-\frac{n}{n+1},$$

$$200<n.$$

Azt kaptuk tehát, hogy 200-nál nagyobb n-ekre a sorozat már biztosan monoton fogyó, tehát Leibniz tétele szerint a sor konvergens.

c) A sor n-edik tagját így becsüljük felülről:

$$0<\frac{n\ln^2 n}{1+n^3\ln^4 n}<\frac{1}{n^2\ln^2 n}<\frac{1}{n^2},$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergens, tehát az eredeti sor is konvergens.

d) A sor n-edik tagját az $\sqrt[n]{n}<2$ egyenlőtlenség felhasználásával így becsülhetjük alulról:

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{2n},$$

a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ sor divergens, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ sor is divergens.

e) A sor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{n^2-1}{n^2+1}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}}=e^{-1}\neq 0.$$

6. *a)* Használjuk fel az $a^{\ln n}=n^{\ln a}$ azonosságot (a-ról nyilván eleve kikötjük, hogy pozitív). A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}}$$

sorról már tudjuk, hogy $\ln a > 1$, azaz $a > e$-re konvergens, $0 < a \leqq e$ esetén divergens (l. az 5. gyakorló feladatot).

b) Az I. fejezet 32. gyakorló feladatában igazoltuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c>0,$$

ahol c az Euler-állandó. Ennek felhasználásával a sor n-edik tagját így becsülhetjük:

$$\frac{k}{a^{\ln n}}<\frac{1}{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}}\cdot\frac{1}{a^{\ln n}}<\frac{K}{a^{\ln n}},$$

ahol k és K alkalmas konstansok. Az előző feladat alapján tehát a sor $a > e$ esetén konvergens, $0 < a \leqq e$ esetén divergens.

c) Az I. fejezet 10. feladatának felhasználásával a sor n-edik tagját így becsülhetjük:

$$\frac{1}{2^{\alpha} n^{\frac{\alpha}{2}}}<\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\alpha}<\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}\text{ nyilván igaz}\right)$; így ha $\alpha > 2$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ sor konvergenciája miatt a sor konvergens, ha $\alpha \leqq 2$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\alpha} n^{\frac{\alpha}{2}}}$ sor divergenciája miatt a sor divergens.

d) A III. fejezet 18. feladatában bizonyított egyenlőtlenséget az $x \in T$ esetre alkalmazva a következő becslést írhatjuk fel a sor n-edik tagjára:

$$\frac{e^{\alpha}}{(2n+2)^{\alpha}}<\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\alpha}<\frac{e^{\alpha}}{(2n+1)^{\alpha}}$$

Ennek alapján látható, hogy a sor $\alpha > 1$-re konvergens, $\alpha \leqq 1$ esetre divergens.

e) Használjuk fel a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=1$$

összefüggést. Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy a sor úgy viselkedik, mint a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^{\alpha+1}}$$

sor, tehát $\alpha > 0$-ra konvergens, $\alpha \leqq 0$-ra divergens.

Általánosságban is igaz az, hogy ha $a_n > 0$ és $b_n \to 1$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ egyszerre konvergensek vagy divergensek, hiszen $b_n \to 1$ miatt elég nagy n-re $\frac{1}{2}<b_n<2$, tehát $a_n>0$ miatt $\frac{a_n}{2}<a_n b_n<2a_n$. A majoráns-minoráns kritérium alkalmazásával ebből már adódik az állítás. Ha $a_n > 0$ nem igaz, akkor általában nem teljesül az állítás, amit a következő példa mutat:

A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ sor konvergens és ha $c_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2n}}$, $c_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$, akkor $n\to\infty$ esetén $1+c_n\to 1$. A

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}(1+c_n)$$

sor mégis divergens, mert a $2n$-edik részletösszeget így alakíthatjuk át:

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}(1+c_k)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}c_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^{3/2}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}.$$

Az így kapott első két összeg véges értékhez, a harmadik $+\infty$-hez tart.

f) Ezt a feladatot az 5. gyakorló feladatban követett módszerrel célszerű megoldani. Ha $\alpha>1$, akkor a sor 2^k-1-edik s_{2^k-1} részletösszegét így becsüljük felülről:

$$\frac{1}{2\cdot\ln^\alpha 2}+\frac{1}{3\ln^\alpha 3}+\frac{1}{4\ln^\alpha 4}+\ldots+\frac{1}{(2^k-1)\ln^\alpha(2^k-1)}<$$
$$<\frac{2}{2\ln^\alpha 2}+\frac{4}{4\ln^\alpha 4}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^{k-1}\ln^\alpha 2^{k-1}}=$$
$$=\frac{1}{\ln^\alpha 2}\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(k-1)^\alpha}\right).$$

A felső becslésként kapott érték a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$ konvergens sor részletösszegének konstansszorosa, így korlátos felülről, tehát s_{2^k-1} is korlátos felülről, monoton növő is, tehát konvergens. Mivel (s_n), a sor részletösszegeinek sorozata is monoton növő, ebből már következik, hogy a sor konvergens. Az $\alpha\leqq 1$ esetben a sor divergens. Ehhez elég megmutatni, hogy $\alpha=1$-re divergens; ebből a minoráns kritérium alapján $\alpha<1$-re az állítás már következik

$$\left(\frac{1}{n\ln n}<\frac{1}{n^\alpha\ln^\alpha n},\quad\text{ha}\quad n>3\text{ és }\alpha<1\right).$$

Az $\alpha=1$ esetben a sor s_{2^k} részletösszegét így becsüljük alulról:

$$\frac{1}{2\ln 2}+\left(\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}\right)+\ldots+\frac{1}{2^k\ln 2^k}>$$
$$>\frac{1}{2\ln 2}+\frac{2}{4\ln 4}+\ldots+\frac{2^{k-1}}{2^k\ln 2^k}=$$
$$=\frac{1}{2\ln 2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right).$$

Mivel $k\to\infty$ esetén az alsó becslés $+\infty$-hez tart, $s_{2^k}\to+\infty$, tehát a sor divergens.

7. A feladat lényegében azonos az I. fejezet 73.*b)* feladatával. Ennek alapján a sor összege $\frac{3}{2}\ln 2$.

8. A feltevés szerint a $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sor konvergens. Ez, a definíció szerint azt jelenti, hogy a sor részletösszegeiből álló (s_n) sorozat konvergens; jelöljük a határértékét s-sel. A zárójelezéssel kapott

$$(a_{n_1}+\ldots+a_{n_2-1})+(a_{n_2}+\ldots+a_{n_3-1})+\ldots+$$
$$+(a_{n_k}+\ldots+a_{n_{k+1}-1})+\ldots$$

sor részletösszegeinek sorozata $s_{n_2-1}, s_{n_3-1}, \ldots, s_{n_{k+1}-1}, \ldots$ az (s_n) sorozat egy részsorozata. Ebből következik, hogy a zárójelezéssel kapott sor is konvergens és

$$\lim_{k\to\infty}s_{n_k-1}=\lim_{n\to\infty}s_n=s.$$

Az állítás megfordítása nem igaz. Az

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

sor nyilván konvergens és összege 0, hiszen minden zárójelben 0 van. A zárójelek elhagyásával kapott

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

sor nem is konvergens, hiszen a sor tagjaiból álló sorozat nem tart 0-hoz.

9. A $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ sor konvergenciájának igazolásához a sorokra vonatkozó Cauchy-kritériumot használjuk fel. Azt kell igazolnunk, hogy minden

$$\sum_{l=1}^{k}a_{n+l}b_{n+l}$$

alakú összeg abszolút értékben tetszőlegesen kicsi lesz, ha n elég nagy és k tetszőleges egész. Egy gyakran alkalmazható fogást, az ún. Abel-féle átrendezést használjuk fel arra, hogy könnyen becsülni tudjuk ezt az összeget:

$$\sum_{l=1}^{k} a_{n+l}b_{n+l}=a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\ldots+a_{n+k}b_{n+k}=$$
$$=(a_{n+1}-a_{n+2})b_{n+1}+(a_{n+2}-a_{n+3})(b_{n+1}+b_{n+2})+$$
$$+(a_{n+3}-a_{n+4})(b_{n+1}+b_{n+2}+b_{n+3})+\ldots+(a_{n+k-1}-$$
$$-a_{n+k})(b_{n+1}+\ldots+b_{n+k-1})+$$
$$+a_{n+k}(b_{n+1}+\ldots+b_{n+k}).$$

Beszorzással igazolható, hogy az átrendezés azonosság. Végezzük most el a becslést. A feltevés szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, így tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz van olyan n_0, hogy ha $n>n_0$ és k tetszőleges, akkor

$$\left|\sum_{l=1}^{k} b_{n+l}\right|<\varepsilon.$$

Ennek alapján:

$$\left|\sum_{l=1}^{k} a_{n+l}b_{n+l}\right|\leqq|a_{n+1}-a_{n+2}||b_{n+1}|+$$
$$+|a_{n+2}-a_{n+3}||b_{n+1}+b_{n+2}|+\ldots+$$
$$+|a_{n+k-1}-a_{n+k}||b_{n+1}+\ldots+b_{n+k-1}|+|a_{n+k}||b_{n+1}+$$
$$+\ldots+b_{n+k}|<\varepsilon\left(\sum_{l=1}^{k-1}|a_{n+l}-a_{n+l+1}|+|a_{n+k}|\right).$$

Mivel a_n monoton az $n+1$ indextől az $n+k$ indexig terjedő szomszédos tagok eltérésének összege a két szélső tag eltérésével egyenlő, tehát:

$$\sum_{l=1}^{k-1}|a_{n+l}-a_{n+l+1}|=|a_{n+1}-a_{n+k}|\leqq|a_{n+1}|+|a_{n+k}|.$$

Használjuk még fel, hogy (a_n) korlátos; legyen K olyan szám, amelyre

$$|a_n|<K$$

teljesül minden n-re. Ezzel végeredményben a következő becslést kaptuk:

$$\left|\sum_{l=1}^{k} a_{n+l}b_{n+l}\right|<3K\varepsilon,$$

ami tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy.

10. Vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok négyzetes szorzatának n-edik részletösszegét:

$$r_n=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+\ldots+$$
$$+(a_1b_n+a_2b_n+\ldots+a_nb_n+\ldots+a_nb_1)=$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)=s_n\cdot t_n,$$

ahol s_n és t_n jelöli a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok n-edik részletösszegeit.

Mivel s_n és t_n konvergens, a szorzatuk, r_n is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_1b_n+\ldots+a_nb_n+\ldots+a_nb_1)=$$
$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)=\lim_{n\to\infty} s_n\cdot\lim_{n\to\infty} t_n.$$

11. A Cauchy-szorzat kiszámításához célszerű kiírni részletesen a két tényező néhány tagját:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots;$$
$$1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots;$$

a szorzat:

$$1+\left(\frac{2}{1!}+\frac{1}{1!}\right)+\left(\frac{2^2}{2!}+\frac{2}{1!}+\frac{1}{2!}\right)+$$
$$+\left(\frac{2^3}{3!}+\frac{2^2}{1!2!}+\frac{2}{2!1!}+\frac{1}{3!}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{2^{n-2}}{2!(n-2)!}+\ldots+\frac{2^{n-k}}{k!(n-k)!}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n!}\right)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(2^n+\frac{n!}{1!(n-1)!}\,2^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{n!}{2!(n-2)!}\,2^{n-2}+\ldots+\frac{n!}{k!(n-k)!}\,2^{n-k}+\ldots+1\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

Közben felhasználtuk a binomiális tételt.

12. A sorok divergensek, mert a tagok sorozata nem tart 0-hoz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=+\infty.$$

Írjuk fel külön a sorokat:

$$1-\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^3-\ldots-\left(\frac{3}{2}\right)^n-\ldots,$$
$$1+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(2^3+\frac{1}{2^4}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\ldots;$$

a szorzatsor:

$$1+\left(2+\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}-2-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-2^{n-1}-\frac{1}{2^n}-2^{n-2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\right.$$
$$\left.-\ldots-2-\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2}\right)+\ldots=1+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8}+\ldots+$$
$$+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left[2^n-(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1)+\frac{1}{2^{n+1}}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2}\right)\right]+\ldots=1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+$$
$$+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n-2^n+1+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)+\ldots=$$
$$=1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

A kapott sor konvergens, sőt abszolút konvergens.

13. A

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

sor konvergens, mert Leibniz-típusú sor. Számítsuk ki a sor önmagával való Cauchy-szorzatát! A sor:

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots,$$

a szorzatsor:

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ldots .$$

A kapott sor divergens, mert a tagok sorozata nem tart 0-hoz. Ezt a következő — számtani, mértani közép közötti egyenlőtlenséggel bizonyítható — egyenlőtlenséggel igazolhatjuk:

$$\sqrt{k+1}\sqrt{n-k}\leqq\frac{n+1}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k}}\geqq\frac{2}{n+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqq$$

$$\geqq n\,\frac{2}{n+1}\geqq 1.$$

14. Azt kell igazolnunk, hogy a

$$(54)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|a_1b_1+a_2b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_2+a_nb_1|$$

végtelen sor konvergens. Az (54) végtelen sornak az

$$(55)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_1||b_n|+|a_2||b_{n-1}|+\ldots+|a_n||b_1|)$$

majoráns sora, így elég igazolni, hogy (55) konvergens (az (54) sor tagjai nemnegatívak). Az (55) sor viszont a $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ és $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ sorok Cauchy-szorzata, amiről tudjuk a 14. gyakorló feladat alapján, hogy konvergens és

$$(56)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_1||b_n|+\ldots+|a_n||b_1|)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\right).$$

Az (56) egyenlőségből a majoráns kritérium alapján a sor összegére a következő becslést kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_1b_n+\ldots+a_nb_1|\leqq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\right).$$

15. Mutassuk meg először, hogy az abszolút konvergens $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ sorok tagjaiból képezett a_ib_j alakú tagokat a Cauchy-szorzatbeli sorrendben összeadva a kapott sor, azaz az

$$(57)\qquad \begin{aligned}&a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+\ldots+\\&+a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_2+a_nb_1+\ldots\end{aligned}$$

sor (zárójelek nélkül!) abszolút konvergens. Mivel az abszolút konvergens sor tagjait tetszőlegesen átrendezhetjük, ebből következik az állítás. Az (57) sor azonos az előző feladatban szereplő (55) sorral, így onnan már tudjuk, hogy konvergens.

16. *a)* Alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\cdot\frac{n!}{n^n}\,\frac{1}{|x|^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|x|=e|x|,$$

tehát $|x|<\frac{1}{e}$ esetén a sor konvergens, $|x|>\frac{1}{e}$ esetén divergens.

Vizsgáljuk meg a sort a $\pm\frac{1}{e}$ helyen. Az $\frac{1}{e}$ helyen a sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{e^n n!}.$$

A sor viselkedésének eldöntésére próbáljunk becslést keresni az n-edik tagra. Azt már tudjuk, hogy ha a_n-nel jelöljük a sor n-edik tagját, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}.$$

Használjuk fel a 17.*a)* gyakorló feladatban már alkalmazott

$$\frac{2n}{2n+1}<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}<\frac{2n+1}{2n+2}$$

egyenlőtlenséget, $n=1, 2, \ldots, n-1$ esetre:

$$\frac{2}{3}<\frac{a_2}{a_1}<\frac{3}{4},$$
$$\frac{4}{5}<\frac{a_3}{a_2}<\frac{5}{6},$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\frac{2n-2}{2n-1}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{2n-1}{2n}.$$

A kapott $n-1$ egyenlőtlenséget összeszorozva ezt kapjuk:

$$(58)\quad \frac{2\cdot 4\ldots(2n-2)}{3\cdot 5\ldots(2n-1)}<\frac{a_n}{a_1}<\frac{3\cdot 5\ldots(2n-1)}{4\cdot 6\ldots 2n}.$$

Tudjuk, hogy $a_1=\frac{1}{e}$ és az I. fejezet 10. feladata alapján:

$$(59)\quad \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Az (58) egyenlőtlenségből (59) felhasználásával a következő becslést kapjuk a_n-re:

$$(60)\quad \frac{1}{e}\,\frac{1}{\sqrt{2n+1}}<\frac{1}{e}\,\frac{\sqrt{2n+1}}{2n}<a_n<\frac{1}{e}\,\frac{2}{\sqrt{2n+1}}.$$

A (60) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy $a_n\to 0$ teljesül ugyan, de a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e}\,\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

divergens sor minoráns sora a vizsgált sornak, tehát az is divergens.

A $-\frac{1}{e}$ helyen a hatványsor

$$)61)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{e^n n!}$$

alakú. Az n-edik tag abszolút értékéről (60) miatt tudjuk, hogy 0-hoz tart. Ha még az is igaz, hogy monoton fogyva, akkor a (61) sor Leibniz-típusú, tehát konvergens. Az

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}<\frac{n^n}{e^n\cdot n!}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

egyenlőtlenséggel, ami igaz, tehát a (61) sor tagjainak abszolút értékéből álló sorozat monoton fogyó, a sor konvergens.

A hatványsor konvergenciatartománya tehát a $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ félig zárt intervallum.

b) Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n-1}}{\sqrt[n]{3}}\cdot\frac{|x|}{3}=\frac{|x|}{3},$$

tehát $|x|<3$-ra a sor abszolút konvergens, $|x|>3$-ra divergens az $x=\pm 3$ helyen a sor divergens, mert az n-edik tag abszolút értéke nem tart 0-hoz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3}=+\infty.$$

A hatványsor konvergenciatartománya tehát $(-3, 3)$.

c) A gyökkritériumot célszerű alkalmazni:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x|^{2n}}}{4}=\frac{|x|^2}{4}$$

A sor konvergenciatartománya a $(-2, 2)$ intervallum, mert a ± 2 helyen a sor divergens.

17.*a)* Például a hányadoskritériummal azonnal látható, hogy a sor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum. A sor a $+1$ és -1 helyen divergens. Könnyen észre lehet venni, hogy a

$$(62)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

hatványsort a

$$(63)\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

hatványsor tagonkénti deriválásával kaphatjuk meg. Igazoltuk, hogy a hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és deriváltja a tagonkénti deriválással kapott sor összege. A (63) sor összegfüggvénye $(-1, 1)$-ben $\frac{1}{1-x}$, így ennek deriváltja a (62) sor összege, tehát:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}, \quad |x|<1.$$

b) Írjuk az adott hatványsort a következő alakba:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}.$$

Az átalakítással kapott sor az *a)* feladatban szereplő sorból úgy adódik, hogy x helyett $\frac{x^2}{2}$-t helyettesítünk és a sort $\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$-nel szorozzuk. Így az összege:

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2}=\frac{x^4}{(2-x^2)^2}$$

és a sor konvergens, ha $\frac{x^2}{2}<1$, azaz $|x|<\sqrt{2}$.

c) A

$$(64)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

sort a

$$(65)\quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}$$

sor tagonkénti deriválásával kapjuk. A sor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum. Határozzuk meg először (65) összegét. Ha átalakítjuk így:

$$\sum_{=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

akkor az *a)* eredményének felhasználásával már tudjuk, hogy összege:

$$(66)\quad \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

A (64) sor összege (66) deriváltja:

$$\frac{2x}{(1-x)^3}, \quad \text{ha} \quad |x|<1.$$

18. A bizonyítandó egyenlőséget

$$(67) \quad \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1 r+\ldots+a_n r^n)x^n$$

alakban is írhatjuk. Az $\frac{1}{1-x}$ függvény a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sor összegfüggvénye az $|x|<1$ intervallumban. (67) helyett tehát elég igazolni, hogy $|x|<1$-re:

$$(68) \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1 r+\ldots+a_n r^n)x^n.$$

A (68) egyenlőség jobb oldalán a két tényező $|x|<1$-re abszolút konvergens, így Cauchy-szorzatuk, ami éppen a baloldal, szintén abszolút konvergens, így az egyenlőség igaz.

19. Az állítás igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy az

$$(69) \quad \left|f(xr)-\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right|$$

különbség tetszőlegesen kicsi, ha $x<1$ és x az 1-hez elég közel van (ekkor ugyanis $rx<r$ és rx is közel van r-hez). Az

$$1=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

egyenlőségből következik, hogy

$$s=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s\,x^n,$$

ahol

$$s=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Írjuk ki s_n-et:

$$s_n = a_0 + a_1 r + \ldots + a_n r^n.$$

Az előző feladat eredményét alkalmazva a (69) különbséget a következő formában írhatjuk:

$$(70) \quad \left|f(xr)-\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\right| = |1-x|\left|\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)x^n\right|.$$

Ha n elég nagy, akkor $|s_n-s|$ tetszőlegesen kicsi. Legyen $\varepsilon>0$ adott szám és válasszuk n_0-t olyan nagyra, hogy $|s_n-s|<\frac{\varepsilon}{2}$ teljesüljön. A (70) bal oldalán álló összeget két részre bontjuk.

$$(71) \quad |f(xr)-s| \leqq |1-x|\left|\sum_{n=0}^{n_0}(s_n-s)x^n\right| + |1-x|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|s_n-s||x|^n.$$

A (71) bal oldalán álló második tagban $|s_n-s|<\frac{\varepsilon}{2}$, így ezt a tagot a következőképpen becsülhetjük:

$$|1-x|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|s_n-s||x|^n \leqq \frac{\varepsilon}{2}|1-x||x|^{n_0+1}\sum_{n=0}^{\infty}|x|^n =$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}|1-x||x|^{n_0+1}\frac{1}{1-|x|} = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Közben felhasználtuk, hogy $0<x<1$, tehát $|x|=x$ és $x^{n_0+1}<1$.)

A (71) bal oldalának első tagjában a szorzat első tényezője, $|1-x|$ tetszőlegesen kicsi, ha x elég közel van 1-hez. A második tényező $x<1$ miatt így becsülhető:

$$\left|\sum_{n=0}^{n_0}(s_n-s)x^n\right| \leqq \sum_{n=0}^{n_0}|s_n-s|x^n < \sum_{n=0}^{n_0}|s_n-s|.$$

A kapott felső becslés egy x-től független, rögzített szám, tehát $(1-x)$-szel szorozva tetszőlegesen kicsi lesz, ha $(1-x)$ elég kicsi $\left(\text{pl. } \frac{\varepsilon}{2}\text{-nél is kisebb, ha } 0<1-x<\frac{\varepsilon}{2\sum_{n=0}^{n_0}|s_n-s|}\right)$. Ezzel Abel tételét igazoltuk.

20. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

hatványsor konvergenciatartománya $(-\infty, +\infty)$, így $f(x)$ mindenütt értelmezve van. Az $f(x_1) \cdot f(x_2)$ szorzat kiszámítására alkalmazzuk a Cauchy-szorzást:

$$f(x_1) = 1 + \frac{x_1}{1!} + \frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_1^3}{3!} + \ldots + \frac{x_1^n}{n!} + \ldots,$$

$$f(x_2) = 1 + \frac{x_2}{1!} + \frac{x_2^2}{2!} + \frac{x_2^3}{3!} + \ldots + \frac{x_2^n}{n!} + \ldots,$$

$$f(x_1)f(x_2) = 1 + \frac{x_1 + x_2}{1!} + \frac{1}{2!}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!}(x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(x_1^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} x_1^{n-1}x_2 + \ldots + \frac{n!}{k!(n-k)!} x_1^{n-k}x_2^k + \right.$$

$$\left. + \ldots + x_2^n\right) + \ldots.$$

A binomiális tétel felhasználásával a szorzat így írható:

$$f(x_1)f(x_2) = 1 + \frac{x_1 + x_2}{1!} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2!} + \ldots +$$

$$+ \frac{(x_1 + x_2)^n}{n!} + \ldots = f(x_1 + x_2)$$

és ezt kellett igazolni.

21. Jelöljük $f(x)$-szel a hatványsor összegfüggvényét, azaz legyen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tudjuk, hogy $f(x)$ értelmezve van a $(-\infty, +\infty)$-ben. A definícióból következik, hogy $f(0) = 1$ és az I. fejezet 37. feladatából azt is tudjuk, hogy $f(1) = e$. Az előző feladat alapján, ha $n > 1$ egész szám, akkor

$$f(n) = f(1 + 1 + \ldots + 1) = (f(1))^n = e^n.$$

Ha $n \geqq 1$ egész, akkor ugyancsak az előző feladat alapján:

$$f(-n) = \frac{f(0)}{f(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Legyen most $q \in T$, akkor

$$e = f(1) = f\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q,$$

tehát

$$f\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}}.$$

Ha $r = \frac{p}{q}$, ahol p egész és $q \in T$, akkor hasonlóan adódik, hogy

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}.$$

Így már tetszőleges r racionális számra tudjuk, hogy

$$f(r) = e^r.$$

Használjuk még fel, hogy $f(x)$ mindenütt folytonos, hiszen egy hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartomány belsejében mindenütt differenciálható, tehát méginkább folytonos.

Ha x tetszőleges valós szám, akkor van olyan racionális számokból álló r_n számsorozat, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. A folytonos függvény definíciója, a sorozat és függvény határértékének kapcsolata alapján ekkor a következőt kapjuk:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} e^{r_n} = e^x,$$

hiszen az e^x függvény mindenütt folytonos. Ezzel tetszőleges x-re igazoltuk, hogy $f(x)=e^x$.

22.*a)* A függvényt

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{3}}$$

alakban írva látható, hogy a binomiális sorfejtést célszerű alkalmazni $\alpha=-\frac{1}{3}$ esetre. Számítsuk ki a hatványsor együtthatóit

$$\binom{-\frac{1}{3}}{n}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}=$$

$$=(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}.$$

A sorfejtés tehát:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^n,$$

ami $|x|<1$-re biztosan érvényes. Vizsgáljuk meg a ± 1 helyet. Ehhez célszerű a hatványsor együtthatóinak abszolút értékéből álló

$$a_n=\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\ldots 3n}$$

sorozat viselkedését megnézni. Ehhez felhasználjuk a $k\geqq 2$-re érvényes

$$\frac{3k-3}{3k+1}<\frac{3k-2}{3k}<\frac{3k-3}{3k-2}$$

egyenlőtlenséget. Ha ezt a $k=2, 3, \ldots, n$ esetekre felírjuk és a kapott egyenlőtlenségeket összeszorozzuk, akkor a következő becslést kapjuk:

$$\frac{3}{7}<\frac{4}{6}<\frac{3}{4},$$

$$\frac{6}{10}<\frac{7}{9}<\frac{6}{7},$$

$$\vdots$$

$$\frac{3n-3}{3n+1}<\frac{3n-2}{3n}<\frac{3n-3}{3n-2},$$

$$\frac{3}{9n^2}\,\frac{1}{a_n}<\frac{4}{3n(3n+1)}\,\frac{1}{a_n}<3a_n<\frac{1}{3n}\,a_n,$$

ahonnan a_n-re azt kapjuk, hogy ha $n>1$, akkor

(72) $$\frac{1}{3n}<a_n<\frac{1}{3\sqrt{n}}.$$

Ez a becslés azt mutatja, hogy a -1 helyen a hatványsor divergens, mert az

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3\cdot 6\ldots 3n}$$

sornak a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ sor divergens minoráns sora. Az 1 helyen a sor konvergens, mert az

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}$$

sor váltakozó előjelű, a (72) egyenlőtlenség szerint a tagok abszolút értéke 0-hoz tart, méghozzá monoton fogyva, mert

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{3n+1}{3n+3}<a_n.$$

A sorfejtés tehát a $(-1, 1]$ félig zárt intervallumban érvényes.

b) Alakítsuk át először az adott függvényt a következő fogással:

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=\frac{1-x}{1-x^4}=(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^4}$$

ha $|x|\neq 1$. Az átalakítással kapott függvényt már könnyű sorbafejteni:

$$\frac{1}{1-x^4}=1+x^4+x^8+\ldots+x^{4n}+\ldots$$

ha $|x|<1$, és a kapott sort $1-x$-szel szorozva:

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+\ldots+$$
$$+x^{4n}-x^{4n+1}+\ldots,$$

ha $|x|<1$. A ± 1 helyeken a sor divergens (bár az adott függvénynek az 1 helyen van értelme).

c) A keresett sort az e^x függvény hatványsorából kaphatjuk meg:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}-\ldots.$$

A sorokat tagonként összeadva és 2-vel osztva:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

A sorfejtés $(-\infty, +\infty)$-ben érvényes.

23. A 22.*a)* és *c)* gyakorló feladatban alkalmazott módszert használjuk fel itt is. Tudjuk, hogy $(-1, 1)$-ben arc sin x differenciálható és

$$(\text{arc sin } x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

A feladatban szereplő

$$f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

sor $|x|<1$-re konvergens (hányadoskritériummal lehet ellenőrizni) így $f(x)$ a $(-1, 1)$-ben differenciálható és

$$f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n}.$$

A 23.*c)* gyakorló feladatból $f'(x)$-et is meghatározhatjuk, mert az $f'(x)$-re kapott sorfejtés az $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sorfejtéséből úgy keletkezik, hogy x helyett $-x^2$-et helyettesítünk, tehát

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $|x|<1$-re

$$(\text{arc sin } x-f(x))'\equiv 0.$$

Az arc sin $x-f(x)$ függvény tehát $(-1, 1)$-ben konstans és mivel arc sin $0-f(0)=0$,

$$\text{arc sin } x=f(x)$$

ha $|x|<1$. A hatványsor az 1 helyen

$$(73)\qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{2n+1}$$

konvergens, mert az I. fejezet 10. feladatából tudjuk, hogy

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

tehát az

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

konvergens sor majoráns sora a (73) sornak. A sor -1-re is konvergens, mert éppen a (73) konvergens sor -1-szeresét kapjuk, ha x helyére -1-et helyettesítünk.

24. A feltételekből tudjuk, hogy az $f(x)$ függvényre a 0-körüli Taylor-formulát $(-r, r)$-ben tetszőleges n-re felírhatjuk:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Az $f(x)$ függvény 0 körüli Taylor-sora, azaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

sor n-edik részletösszegének eltérése $f(x)$-től — $|f^{(n)}(\xi)|<K$ miatt — így becsülhető a Taylor-formula felhasználásával:

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}K\leq\frac{r^{n+1}K}{(n+1)!}.$$

A kapott felső becslésről tudjuk, hogy 0-hoz tart, ha n tart a végtelenhez, ezzel az állítást igazoltuk.

25. *a)* A sor összegét a 23. *c)* gyakorló feladatból már tudjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

ott éppen Abel tétele alapján állapítottuk meg, hogy az $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sorfejtése $x=1$-re is érvényes.

b) Írjuk ki részletesen a sor $2n$-edik részletösszegét és alakítsuk át a következő módon:

$$s_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+(-1)^n\frac{1}{2n}=$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right).$$

A 22. *c)* gyakorló feladatból tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{\pi}{4},$$

az I. fejezet 72. feladatából pedig

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2.$$

Ennek alapján:

$$\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Mivel $|s_{2n+1}-s_{2n}|=\frac{1}{2n+1}\to 0$, ha $n\to\infty$, ezért s_n is konvergens és ugyanez a határértéke, tehát:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

26. A $\sin x$ függvény 0 körüli Taylor-sorát használjuk az $1°=\frac{\pi}{180}$ helyen. Mivel a kapott sor Leibniz-típusú, ezért, ha a sor értékét közelítőleg az n-edik részletösszegnek vesszük, az elkövetett hiba kisebb, mint a sor $n+1$-edik tagjának abszolút értéke. Azt kell tehát megvizsgálnunk, milyen n-re igaz, hogy

$$\left(\frac{\pi}{180}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}<\frac{1}{10^8}.$$

Mivel

$$\frac{\pi}{180}<\frac{4}{180}=\frac{1}{45}<\frac{1}{40},$$

az egyenlőtlenség $n=2$-re már igaz, mert

$$\frac{1}{40^5}\cdot\frac{1}{5!}<\frac{1}{10^8}$$

ekvivalens a

$$40^5\cdot 5!>10^8$$

egyenlőtlenséggel. Az utóbbit így láthatjuk be:

$$40^5\cdot 5!=4^5\cdot 10^5\cdot 12\cdot 10=4\cdot 16^2\cdot 12\cdot 10^6>10^8.$$

Eredményünk azt jelenti, hogy a

$$\sin 1^o\approx\frac{\pi}{180}-\left(\frac{\pi}{180}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}$$

közelítéssel elkövetett hiba 10^{-8}-nál kisebb.

27. A 25. gyakorló feladatban ln 2 értékét már kiszámoltuk 10^{-9} pontossággal. Az ott felhasznált (23) előállítást használjuk fel itt is a következő módon $k=4$-re:

$$\ln 10=\ln 2+\ln 5=\ln 2+\ln 4+$$
$$+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)9^{2n+1}}+\ldots\right)=$$
$$=3\ln 2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3\cdot 81}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)81^n}+\ldots\right).$$

Olyan n-et kell keresnünk, amire teljesül, hogy a zárójelben álló végtelen sor helyett annak n-edik részletösszegét vesszük, akkor az elkövetett hiba kisebb, mint 10^{-6} (ekkor a végeredmény hibáját a műveletek elvégzése után 10^{-5} alá tudjuk csökkenteni). Azt kell tehát megnéznünk, milyen n-re teljesül, hogy a sor n-edik részletösszegének és a sor összegének az eltérése 10^{-6}-nál kisebb. Becsüljük felülről az eltérést:

$$\frac{1}{(2n+1)81^n}+\frac{1}{(2n+3)81^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{(2n+2k+1)81^{n+k}}+$$
$$+\ldots<\frac{1}{(2n+1)81^n}\left(1+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{81^k}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{(2n+1)81^n}\,\frac{81}{80}=\frac{1}{(2n+1)80\cdot 81^{n-1}}.$$

A kapott felső becslés $n=4$-re már kisebb, mint 10^{-6}, mert

$$9\cdot 80\cdot 81^3>9\cdot 80^4=9\cdot 8^4\cdot 10^4=$$
$$=9\cdot 64^2\cdot 10^4>10^6,$$

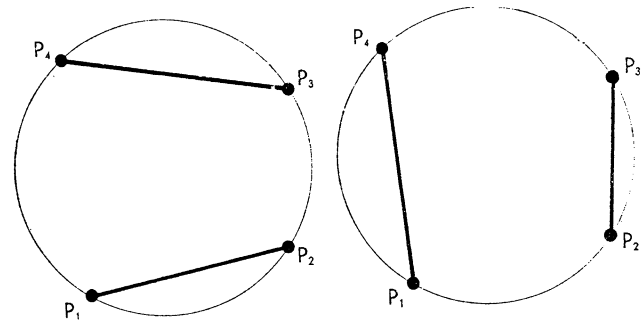
tehát:

$$\frac{1}{9\cdot 80\cdot 81^3}<\frac{1}{10^6}.$$

Ennek alapján:

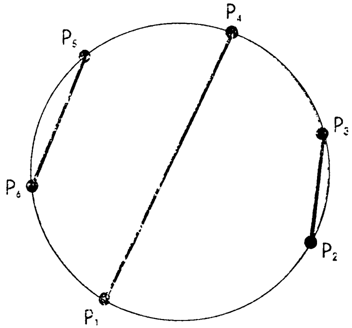
$$\ln 10\approx 3\ln 2+\frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{3\cdot 81}+\frac{1}{5\cdot 81^2}+\frac{1}{7\cdot 81^3}\right)=$$
$$=2{,}30\,258.$$

28. *a)* Az általános eset vizsgálatának megkönnyítésére nézzünk először néhány speciális esetet. $n=1$ esetben 2 pontunk van, ezeket nyilván egyféle módon köthetjük össze. $n=2$-re a 4 pontot kétféleképpen köthetjük össze a feltételeknek megfelelő módon (115. ábra).



115. ábra

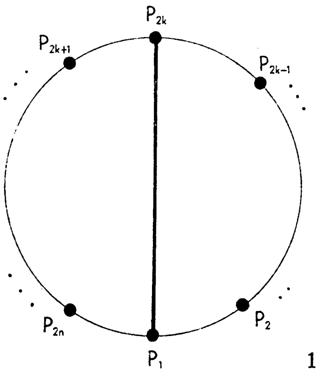
Az $n=3$ esetre már 5 lehetőségünk van, amit így számolhatunk össze: jelölje P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 a kör kerületén felvett pontokat pozitív körüljárási irányban (116. ábra). P_1-et P_2-vel, P_4-



116. ábra

gyel vagy P_6-tal köthetjük össze, hiszen ha pl. P_3-mal kötnénk össze, akkor P_2-t a kimaradt pontok közül akármelyikkel összekötve olyan húrt kapnánk, ami metszi P_1P_3-at. A P_1P_2 összekötésekor a kimaradt 4 pontot még kétféleképpen köthetjük össze a P_1P_4 esetben a meghúzott húr két oldalán levő 2—2 pontot egyféleképpen köthetjük össze, a P_1P_6 esetben ismét 2 lehetőség van a többi pont összekötésére, így összesen 5 lehetőséget kapunk (a 116. ábrán a P_1P_4 esetet szemléltettük).

Az általános esetben is jelöljük a kör kerületén felvett pontokat pozitív körüljárási irányban rendre így: P_1, P_2, $\ldots$, P_{2n}. Az összes lehetőségek számát, a_n-et, itt is úgy számoljuk össze, hogy megnézzük, P_1-et milyen pontokkal köthetjük össze és egy



117. ábra

ilyen összekötéshez a kapott húr két oldalán levő pontokat hányféleképpen tudjuk összekötni. A P_1-et csak páros indexű ponttal köthetjük össze, mert a kapott húr mindkét oldalán páros számú pontnak kell maradni. Ha $1 \leqq k \leqq n$ tetszőleges szám, és P_1-et P_{2k}-val kötjük össze (117. ábra), akkor a húr egyik oldalán $2k-2$ pont, a másik oldalán $2n-2k$ pont marad. Ezeket egymástól függetlenül a_{k-1}, ill. a_{n-k} módon köthetjük össze, tehát a P_1P_{2n} összekötéshez tartozó összes lehetőségek száma $a_{k-1}a_{n-k}$. A k értékét 1-től n-ig változtatva és a kapott összekötések számát összeadva az összes lehetőséget megkapjuk, tehát:

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0$$

(ahol $a_0 = 1$).

b) Legyen $f(x)$ az (a_n) sorozat generátorfüggvénye, azaz legyen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tegyük fel, hogy a sor konvergenciasugara $r > 0$ (teljes indukcióval igazolható, hogy $a_n < \dfrac{16^n}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$, ahonnan ez következik).

Az $xf(x) = g(x)$ függvény négyzetét Cauchy-szorzással számíthatjuk ki:

$$g(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_{n-1}x^n + \ldots,$$

$$g^2(x) = a_0a_0x^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x^3 + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^4 +$$
$$+ \ldots + (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0)x^{n+1} + \ldots.$$

Az *a)* részben kapott eredményt felhasználva $g^2(x)$-et így írhatjuk:

$$g^2(x) = a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^{n+1} + \ldots = g(x) - x,$$

mivel $a_0 = 1$. A $g(x)$ függvény tehát kielégíti az

$$y^2 - y + x = 0$$

egyenletet. Ennek gyökei:

$$y=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}.$$

Tudjuk, hogy $g(0)=0$, ezért $g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}$.

c) A *b)*-ben kapott $g(x)$ függvényt fejtsük először 0 körüli hatványsorba. A $\sqrt{1-4x}=(1-4x)^{1/2}$ sorfejtését az $(1+x)^{1/2}$ sorfejtéséből kaphatjuk meg, ha x helyére $-4x$-et helyettesítünk. A binomiális sorfejtést alkalmazhatjuk. Számítsuk ki először az együtthatókat:

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n n!}.$$

Ennek alapján:

$$g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n n!}4^n x\right)^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{n!}2^{n-1}x^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-3)(2n-2)}{((n-1)!)^2}x^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1},$$

ahonnan az $f(x)$-re az $f(x)=xg(x)$ összefüggés alapján az

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

sorfejtést nyerjük. $|x|<\frac{1}{4}$-ben a sor konvergens, ellenőrizhető, hogy eleget tesz a követelményeknek, így az $f(x)$ sorfejtésének létezésére vonatkozó feltételt jogosan alkalmaztuk. Az a_n-re a következő képletet kaptuk:

$$a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

29. *a)* Vizsgáljuk a végtelen szorzat n-edik részletszorzatát:

$$p_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=$$

$$=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\ldots\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{n+2}{n+1}.$$

A $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{3}$ összefüggés alapján a szorzat konvergens és

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}.$$

b) Az n-edik részletszorzatot hozzuk zárt alakra úgy, hogy $(1-x)$-szel szorozzuk is és osztjuk is:

$$p_n=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})=$$

$$=\frac{(1-x^2)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^n})}{1-x}=\ldots=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

Ha $|x|<1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0$, így $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{1-x}$, tehát:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}.$$

30. Írjuk fel az n-edik részletszorzatot és szorozzuk is meg osszuk is $2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}$-nel:

$$p_n = \cos \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} 2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} 2^{n-1} \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}} \cos \frac{\alpha}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \dots = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}.$$

Számítsuk ki p_n határértékét $n \to \infty$ esetén:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

mert $\frac{\alpha}{2^n} \to 0$, ha $n \to \infty$ és így a második tényező határértéke 1.

31. Használjuk fel a trigonometriából ismert

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}$$

azonosságot. Mivel $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ezért az előző azonosságból és a 30. feladat eredményéből $\alpha = \frac{\pi}{2}$ esetben következik az állítás:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

32. *a)* Vizsgáljuk a tényezők logaritmusaiból alkotott végtelen sort:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{n^2}{n^2+1}.$$

A sor abszolút konvergens, mert

$$0 < \left| \ln \frac{n^2}{n^2+1} \right| = -\ln \frac{n^2}{n^2+1} = \ln \frac{n^2+1}{n^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2},$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$$

sor konvergens majoráns sora az abszolút értékekből álló sornak. Így a végtelen szorzat konvergens.

b) A tényezők logaritmusaiból álló

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

sor konvergens, mert

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens majoráns sor. A végtelen szorzat konvergens.

c) A 32. gyakorló feladatban igazolt kritériumot használjuk fel a szorzat vizsgálatára. E szerint a

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{|x|^n}{2^n}\right)$$

szorzat akkor és csak akkor konvergens, ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x|}{2}\right)^n$$

végtelen sor konvergens. Az utóbbi nyilván $|x|<2$-re konvergens, tehát ugyanitt konvergens az eredeti végtelen szorzat is.

33. A feltétel szerint:

$$\lim_{n\to\infty} p_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} a_k=s\neq 0.$$

Vizsgáljuk a $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ szorzat n-edik részletszorzatát:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1}\,\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}=\frac{1}{s},$$

mivel $s\neq 0$. A kapott eredmény szerint tehát

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{s}.$$

34. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$p_n=\prod_{k=1}^{n} a_k,\quad q_n=\prod_{k=1}^{n} b_k,$$

$$p=\prod_{k=1}^{\infty} a_k,\quad q=\prod_{k=1}^{\infty} b_k.$$

a) Állapítsuk meg a $\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ szorzat n-edik részletszorzataiból álló sorozat határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} a_k b_k=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} a_k\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} b_k=$$

$$=\lim_{n\to\infty} p_n\lim_{n\to\infty} q_n=pq\neq 0,$$

mivel p, $q\neq 0$ (az eredeti szorzatok konvergensek voltak). Azt kaptuk tehát, hogy konvergens végtelen szorzatokra érvényes a

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\prod_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\prod_{n=1}^{\infty} b_n$$

összefüggés.

b) A szorzatot

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\frac{1}{b_n}$$

alakban is írhatjuk és a 33. feladat, valamint az *a)* feladat alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n}.$$

c) A $\prod_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ szorzatról tudjuk, hogy divergens, hiszen ha $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergensek, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$, ez pedig azt jelenti, hogy nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

35. *a)* A ζ függvényt $x>1$-re a következő definícióval adtuk meg:

(74) $\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

A $\xi^2(x)$ kiszámításához használjuk fel, hogy a (74) egyenlőség jobb oldalán álló végtelen sor $x>1$-re abszolút konvergens, tehát a 15. feladat eredménye szerint az önmagával való szorzatát úgy képezhetjük, hogy a sor tagjaiból alkotott összes lehetséges kéttényezős szorzatokat tetszőleges sorrendben összeadjuk. Számoljuk össze, hogy a kapott végtelen sorban egy rögzített n-re hányszor fordul elő $\frac{1}{n^x}$ alakú tag. Ilyen tagot két, olyan $\frac{1}{k^x}$ és $\frac{1}{l^x}$ alakú tag szorzataként kaphatunk, amelyekre $kl=n$ teljesül. Nyilván annyiszor kapunk ilyen tagot, ahányféleképpen n-et felbonthatjuk két pozitív egész szám szorzatára (a kl és lk felbontás itt két különböző felbontásnak számít). Ilyen felbontás pedig $d(n)$ számú, azaz annyi van, ahány osztója van n-nek. Hiszen, ha k osztója n-nek, akkor van olyan l egész, hogy $kl=n$ és fordítva, ha $kl=n$ (k, l egészek), akkor k osztója n-nek. Ezzel igazoltuk az állítást.

b) Itt is abszolút konvergens sorok szorzását kell elvégeznünk. Írjuk fel először a $\zeta(x-k)$-t:

(75) $\xi(x-k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x-k}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n^x}$,

ahol $k>0$ és $x-k>1$. A (75) sort kell szoroznunk a

(76) $\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$

sorral úgy, hogy minden tagot minden taggal szorzunk és a kapott szorzatokat tetszőleges sorrendben összeadjuk. Gyűjtsük össze itt is az $\frac{1}{n^x}$-et tartalmazó tagokat. Az előző, *b)* feladat megoldásához hasonlóan látható, hogy $\frac{m^k}{m^x}$, $\frac{1}{l^x}$ alakú tagok szorzataként annyiszor kapunk a nevezőben n^x-et tartalmazó tagot, ahányféleképpen n előállítható $ml=n$ alakban (a sorrendre való tekintettel); ilyenkor a számláló mindig m^k lesz. A kapott tagokat összeszorozva, a számláló éppen n összes osztói k-adik hatványainak összege, vagyis $\sigma_k(n)$ lesz.

c) Az

$$\frac{1}{\xi(x)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^x}$$

azonosság igazolásához nyilván elég megmutatni, hogy

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^x}\right)=1$$

$x>1$-re. Itt is két abszolút konvergens végtelen sor szorzatát kell képeznünk ($|\mu(n)|\leq 1$). Számoljuk ki $\mu(n)$ definíciójának felhasználásával, hogy a szorzatban az $\frac{1}{n^x}$-et tartalmazó tagok összevonásával mit kapunk. Az *a)* megoldásához hasonlóan, a nevezőben n^x-et tartalmazó tagot annyiszor kapunk, ahány osztója van n-nek; ilyenkor a számláló $\mu(k)$, és teljesül, hogy $k \mid n$. Tehát a szorzatban az $\frac{1}{n^x}$ alakú tag számlálója:

(77) $\sum_{k \mid n}\mu(k)$,

ahol $k \mid n$ a „k osztója n-nek” állítás rövid jelölése. Ha $n=1$, akkor a (77) összeg csak 1 tagból áll;

$$\sum_{k \mid 1}\mu(k)=\mu(1)=1.$$

Legyen $n>1$ és tegyük fel, hogy $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ különböző prímszámok, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ nemnegatív egész számok. Ekkor n egy tetszőleges k osztója $k=p_1^{\beta_1}, p_2^{\beta_2}, \dots, p_r^{\beta_r}$ alakban írható, ahol $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$, $i=1, 2, \dots, r$-re. A μ definíciójából tudjuk, hogy $\mu(k)=\mu(p_1^{\beta_1}\dots p_r^{\beta_r})=0$, ha van olyan β_i, amelyre $\beta_i>1$ teljesül. Így a (77) összeg kiszámításához elég azokat az osztókat figyelembe venni, ahol mindegyik p_i legfeljebb első hatványon szerepel. Ha

(77a) $k=p_{i_1}\cdot p_{i_2}\dots p_{i_s}\quad (0\leqq s\leqq r)$,

mindegyik prím különböző és a $p_1, \dots, p_r$ prímek valamelyike, akkor n-nek erre a k osztójára $\mu(k)=(-1)^s$. Számoljuk össze, hány ilyen osztó van! Azt kell kiszámolnunk, hogy a $p_1, \dots, p$ prímekből hányféleképpen tudunk s-et kiválasztani. Ezt $\binom{r}{s}$-féleképpen tehetjük meg, tehát a (77) összegben a (77a) típusú osztókból

$$\binom{r}{s}(-1)^s$$

alakú tagokat kapunk. Ezeket összegezni kell $s=0, 1, \dots, r$-re, tehát

$$\sum_{k\mid n}\mu(k)=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}(-1)^s=\binom{r}{0}-\binom{r}{1}+\binom{r}{2}-\dots+$$
$$+(-1)^r\binom{r}{r}=(1-1)^r=0,$$

felhasználva a binomiális tételt. Így azt kaptuk, hogy $n>1$-re az n^x nevezőjű tagok összege 0. A szorzat értéke tehát 1 és ezt kellett igazolnunk.

36. *a)* A megadott

$$\sin(2n+1)\alpha=\sin\alpha p(\sin^2\alpha)$$

azonosságot, ahol $p(x)$ egy n-edfokú polinom, az $\alpha\neq k\pi$ esetben

(78) $$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}=p(\sin^2\alpha)$$

alakban is írhatjuk. Ha $\alpha=0$, akkor a jobb oldalon $p(0)$-t kapunk, ami éppen a $p(x)$ polinom 0 helyen vett helyettesítési értéke, tehát p konstans tagja. Mivel a (78) összefüggés $|\alpha|<\pi$, $\alpha\neq 0$-ra érvényes, ezért a baloldal határértéke $\alpha\to 0$ esetén éppen $p(0)$, tehát

$$p(0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2n+1)\alpha}{(2n+1)\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\sin\alpha}(2n+1)=2n+1.$$

A $p(x)$ polinomról még azt is tudjuk, hogy a $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}, \dots, \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ számok mind gyökei, hiszen a (78) egyenlőség bal oldalának számlálója $\alpha=\frac{\pi}{2n+1}, \dots, \frac{n\pi}{2n+1}$ esetén 0 lesz, míg a nevező 0-tól különböző. Mivel $p(x)$ n-edfokú polinom, a felsoroltakon kívül nincs más gyöke. Írjuk fel most a

$$q(x)=(2n+1)\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right)$$

polinomot. A $q(x)$ szorzatelőállításából látható, hogy ugyanazok a gyökei, mint $p(x)$-nek és $q(0)=p(0)=2n+1$. Így a $p(x)-q(x)=r(x)$ legfeljebb n-edfokú polinomnak a 0 gyöke, gyöke továbbá a $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}, \dots, \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ n darab szám, tehát legalább $n+1$ gyöke van. Mivel egy legfeljebb n-edfokú, nem azonos 0 polinomnak legfeljebb n gyöke van, így $r(x)\equiv 0$, tehát $q(x)$ azonos $p(x)$-szel. Ezért, ha az eredeti, (50) azonosságban α helyett $\frac{x}{2n+1}$-et írunk és p-t a vele azonos q-val pótoljuk, akkor a bizonyítandó

$$(79)\quad \sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right)$$

azonosságot kapjuk.

b) A definíció szerint:

$$a_k^{(n)}=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Az első két tényező szorzatának határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}x\cdot\frac{\sin\frac{x}{2n+1}}{\frac{x}{2n+1}}=x.$$

A többi tényező határértékét így határozhatjuk meg:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{l\pi}{2n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}\cdot\frac{\frac{l^2\pi^2}{(2n+1)^2}}{\sin^2\frac{l\pi}{2n+1}}\cdot\frac{x^2}{l^2\pi^2}=\frac{x^2}{l^2\pi^2},$$

$l=1, 2, \ldots, k$-ra, tehát

$$a_k=\lim_{n\to\infty}a_k^{(n)}=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

A (79) összefüggés bal oldala független n-től, így a jobboldal határértéke $n\to\infty$ esetén létezik és $\sin x$-szel azonos, tehát

$$\sin x=\lim_{n\to\infty}(a_k^{(n)}b_k^{(n)})=\lim_{n\to\infty}a_k^{(n)}\lim_{n\to\infty}b_k^{(n)}=a_k\cdot b_k,$$

ha csak $a_k\neq 0$; ez viszont $x\neq k\pi$ esetén érvényes. Ha $x=k\pi$, akkor a bizonyítandó (50) egyenlőséget úgy kell érteni, hogy a végtelen szorzat értékét 0-nak tekintjük (az egyik tényező ilyenkor 0); ebben az értelemben (50) fennáll. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $x\neq k\pi$.

c) A $b_k^{(n)}$ sorozatra egyrészt

$$b_k^{(n)}<1$$

teljesül, mert a szorzat minden tényezője 1-nél kisebb. Másrészt alkalmazzuk alsó becslésre a javasolt egyenlőtlenséget:

$$\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{l\pi}{2n+1}}<\frac{\frac{x^2}{(2n+1)^2}}{\frac{4}{\pi^2}\frac{l^2\pi^2}{(2n+1)^2}}=\frac{x^2}{4l^2},$$

tehát $l=k+1, k+2, \ldots, n$-re:

$$1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{l\pi}{2n+1}}>1-\frac{x^2}{4l^2}.$$

Ennek alapján:

$$(80)\quad 1>b_k^{(n)}>\prod_{l=k+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4l^2}\right).$$

A

$$(81)\quad \prod_{l=l_0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4l^2}\right)$$

végtelen szorzat konvergens, ha $2l_0 > |x|$ (ekkor egyik tényező sem 0), mert a

$$-\sum_{l=l_0}^{\infty} \frac{x^2}{4l^2}$$

sor konvergens. A (80) egyenlőségből $n \to \infty$ esetén azt kapjuk, hogy fennáll az

$$(82) \quad 1 \geqq b_k \geqq \prod_{l=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right)$$

egyenlőtlenség (feltehetjük, hogy rögzített x esetén k-t úgy választottuk, hogy $2(k+1) > |x|$).

A (81) végtelen szorzat konvergenciája miatt a végtelen szorzat k-adik részletszorzata tetszőlegesen közel kerül a szorzat értékéhez, ha k elég nagy, így a végtelen szorzat és a k-adik részletszorzat hányadosa,

$$\prod_{l=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4l^2}\right)$$

1-hez tart, ha $k \to \infty$. A (82) egyenlőtlenségből tehát a „rendőrszabály" alapján következik:

$$\lim_{k \to \infty} b_k = 1.$$

d) A *b)* eredményt összevetve a *c)*-ben kapott eredménnyel:

$$\sin x = \lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} x \prod_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{l^2\pi^2}\right),$$

ami $x \neq k\pi$ esetén teljesül. Ez éppen az (50) egyenlőség fennállását jelenti a $k\pi$-től különböző x-ekre. Ha $x = k\pi$, akkor a *b)* megoldásban mondott megállapodás szerint szintén fennáll a bizonyítandó összefüggés, tehát tetszőleges x-re:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\dots.$$

37. Ha az előző feladatban igazolt (50) egyenlőségben x helyére $\frac{\pi}{2}$-t helyettesítünk, akkor ezt kapjuk:

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2},$$

tehát

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n+1)}{2n}.$$

A 33. feladat eredményét felhasználva mindkét oldal reciprokát képezhetjük és ezzel az igazolandó egyenlőséget kapjuk.

38. A $\Gamma(x)$ definícióját használjuk:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}},$$

ha $x \neq 0, -1, \dots, -n, \dots$. A $\Gamma(1-x)$ értékét a 34.*c)* gyakorló feladatban igazolt azonosság felhasználásával így írhatjuk fel:

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{1 - \frac{x}{n}}.$$

A 34. *a)* feladat szerint a $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ értéket a két végtelen szorzat megfelelő tényezőinek szorzatából alkotott végtelen szorzat adja:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

ahol felhasználtuk a 33. feladat és az előző, 37. feladat eredményét. Ha a kapott egyenlőségben x helyett $\frac{1}{2}$-et helyettesítünk, ezt kapjuk:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Mivel a definícióból látható, hogy $x>0$-ra $\Gamma(x)>0$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Ebből $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ alapján $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ értékét is meghatározhatjuk, ahol n tetszőleges egész szám.

39. *a)* A 25. gyakorló feladatban igazolt (23) egyenlőséget így alakíthatjuk át:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots\right),$$

$$(83)\quad \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots.$$

A (83) egyenlőségből $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ értékére a következő alsó és felső becslést kaphatjuk:

$$1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<$$

$$(84)\quad <1+\frac{1}{3(2n+1)^2}\left(1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right)=$$

$$=1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2-1}=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

A (84) egyenlőtlenségből következik a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$(85)\quad e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

b) Igazoljuk először, hogy az

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{1+\frac{1}{2}}}$$

sorozat monoton fogyó:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}<1$$

a (85) egyenlőtlenség alapján. Az $a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ sorozat monoton növő:

$$\frac{a_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}}{a_ne^{-\frac{1}{12n}}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\,e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}>1$$

szintén a (85) egyenlőtlenség szerint.

A $0<e^{-\frac{1}{12n}}<1$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$a_ne^{-\frac{1}{12n}}<a_n,$$

tehát (a_n) monoton fogyó, alulról korlátos sorozat (pl. $a_1e^{-\frac{1}{12}}$ egy alsó korlátja), $a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ monoton növő, felülről korlátos sorozat (pl. a_1 egy felső korlátja), tehát mindkettő konvergens. Legyen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n\,e^{-\frac{1}{12n}}=a\cdot\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}}=a,$$

tehát a két sorozatnak közös a határértéke. A sorozatok monotonitási tulajdonságából következik az

(86) $a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$

egyenlőtlenség.

c) Mivel az a_n sorozat konvergens és határértéke a, minden részsorozata is konvergens és ugyancsak a a határértéke. Az a kiszámításához vizsgáljuk az a_{2n} részsorozatot és a_{2n} átalakítása közben használjuk fel a *c)* feladatban javasolt azonosságot:

$$a_{2n} = \frac{(2n)!e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2(e^n)^2}{\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot \frac{n}{\sqrt{2n}} =$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a_n^2 \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \cdot a_n^2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}.$$

Emeljük négyzetre a kapott egyenlőséget és rendezzük át:

$$a_{2n}^2 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdots \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)(2n-2)} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n \cdot 2n} \cdot a_n^4 \cdot \frac{n}{4n+2}$$

A kapott egyenlőség jobb oldalán az a_n^4 tényező előtt álló tényezők szorzata éppen a (37. feladatban igazolt) Wallis-formulában szereplő végtelen szorzat n-edik részletszorzatának reciproka, $n \to \infty$ esetén; tehát a határértéke $\frac{2}{\pi}$. Ennek alapján mindkét oldal határértékét véve, a következőt kapjuk:

$$a^2 = \frac{2}{\pi} a^4 \cdot \frac{1}{4},$$

ahonnan $a = \sqrt{2\pi}$-t kapunk.

A (86) egyenlőtlenséget tehát a következő formában írhatjuk fel:

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < \sqrt{2\pi} < a_n,$$

vagy ezzel ekvivalens módon:

$$e^{\frac{0}{12n}} = 1 < \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} < e^{\frac{1}{12n}}.$$

Az $e^{\frac{x}{12n}}$ függvény folytonos (rögzített n-re) a $[0, 1]$ intervallumban, tehát Bolzano-tétele alapján a két végpontban felvett érték közé eső számokat az intervallum belsejében felveszi. Ezért, van olyan $0 < \xi_n < 1$ szám, amire teljesül az

(87) $$\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\xi_n}{12n}}$$

egyenlőség. A (87) egyenlőséget a_n definíciója alapján még a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} = \frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n = e^{\frac{\xi_n}{12n}},$$

ahonnan a bizonyítandó (52) egyenlőséget kapjuk:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\xi_n}{12n}},$$

ahol ξ_n alkalmas, 0 és 1 közötti szám.

40.*a)* A sorozat n-edik tagjának átalakítására használjuk fel az előző feladatban igazolt Stirling-formulát:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\xi_n}{12n}}}} = \frac{e}{\sqrt{\sqrt[n]{2\pi}\sqrt[n]{n}}} \cdot e^{-\frac{\xi_n}{12n^2}}.$$

Mivel $0 < \xi_n < 1$ minden n-re, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\xi_n}{12n^2} = 0$, így a keresett határérték:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

b) Itt is a Stirling-formulát használjuk fel az n-edik tag átalakítására:

$$\frac{\ln n!}{\ln n^n}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n+\frac{\xi_n}{12n}}{n\ln n}=$$

$$=\frac{\ln 2\pi}{2n\ln n}+\frac{1}{2n}+1-\frac{1}{\ln n}+\frac{\xi_n}{12n^2\ln n}.$$

Mivel $n\to\infty$ esetén $\ln n\to\infty$, a most kapott alakról már világos, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}=1.$$

c) A binomiális együttható definíciója alapján a Stirling-formula felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}e^{\frac{\xi_{2n}}{24n}}}{2\pi n\, n^{2n}\, e^{-2n}\, e^{\frac{\xi_n}{6n}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\,4^n e^{\frac{\eta_n}{6n}}$$

ahol $|\eta_n|<1$.

Ennek alapján a 28. feladatban szereplő a_n-re a következő közelítést kapjuk:

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{\pi n}}\,4^n e^{\frac{\eta_n}{6n}}$$

ahol $|\eta_n|<1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\quad \text{ha}\quad \alpha>0,\ a>1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\quad \text{ha}\quad \alpha>0.$$