BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A Bolyai-könyvek legújabb, immáron 10. kötetét tartja kezében az érdeklődő.
Hanka László és Zalay Miklós könyve régi hiányt pótol a szakkönyvpiacon: a komplex függvénytannal ismerkedők számára nyújtanak segítséget. Könyvük témája a komplex analízis és alkalmazásai.
A szerzők a komplex algebra alapos ismerete mellett feltételezik az egy- és a többváltozós függvények analízisének alapszintű ismeretét is.
A bevezető feleleveníti a komplex algebra alapfogalmait. A feladatgyűjtemény a továbbiakban a korábbi kötetek szerkezetét követi: minden fejezetben rövid elméleti összefoglaló után kidolgozott és gyakorló feladatok találhatók.

Ajánljuk a műszaki főiskolák és egyetemek, tudományegyetemek hallgatóinak, valamint mindazoknak, akik érdeklődnek a felsőbb matematika iránt.

2250.--

http://www.muszakikiado.hu

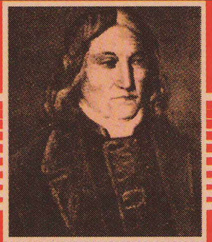
ISBN 963-16-2816-7

9 789631 628166

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

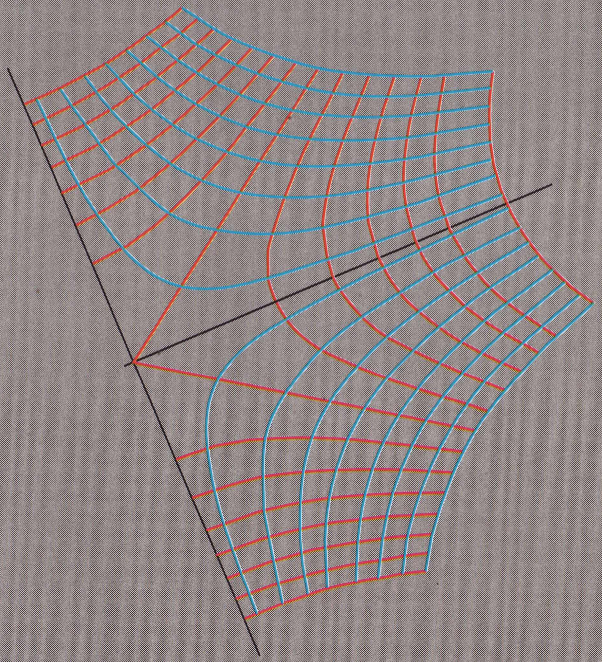
KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

BOLYAI-KÖNYVEK



HANKA LÁSZLÓ–ZALAY MIKLÓS

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN



HANKA LÁSZLÓ–ZALAY MIKLÓS

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

PÉLDATÁR

A BOLYAI-SOROZAT KÖTETEI

Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
Solt György: Valószínűségszámítás
Lukács Ottó: Matematikai statisztika
Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek
Bárczy Barnabás: Integrálszámítás
Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás
Urbán János: Matematikai logika
Fekete Zoltán–Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise
Urbán János: Határérték-számítás

HANKA LÁSZLÓ–ZALAY MIKLÓS

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

PÉLDATÁR

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Lektorálta:
URBÁN JÁNOS
okleveles matematikus

© Hanka László, Zalay Miklós, 2003
© Műszaki Könyvkiadó, 2003

ISBN 963 16 2816 7
ISSN 1216 5344

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Halmos Mária
Borítóterv: Németh Csongor
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Műszaki szerkesztő: Ihász Viktória
Azonosító szám: MK–2816–7
Terjedelem: 21,06 (A/5) ív
E-mail: vevoszolg@muszakikiado.hu
Honlap: www.muszakikiado.hu
Nyomdai munkák: Oláh Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Oláh Miklós

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Könyvünkkel a komplex függvénytannal ismerkedő Olvasók számára kívántunk segítséget nyújtani. Olvasóinkról feltételezzük a komplex algebrának, az egyváltozós függvények analízisének és a többváltozós függvények analízisének bizonyos szintű ismeretét. A könyv felépítése a Bolyai-sorozat könyveinek felépítését követi. A fejezetek elején röviden ismertetjük a szükséges elméleti alapokat, definiáljuk a lényegesebb fogalmakat, kimondjuk a fontosabb tételeket. A feladatok megoldása során igyekszünk a tételek szükséges és elégséges feltételeit megvilágítani, a fontosabb eljárásokat bemutatni, s néhol utalunk a gyakorlati felhasználás lehetőségeire is. Reméljük, hogy könyvünk eléri célját, sikerül az Olvasóval a témakör alapjait megismertetni, az alkalmazáshoz segítséget nyújtani, s a mélyebb megismerés utáni vágyat felébreszteni. Végül köszönjük a lektornak minden részletre kiterjedő rendkívül lelkiismeretes munkáját.

A szerzők

1. BEVEZETÉS

Ezen példatárnak a témája a komplex analízis és annak alkalmazásai. Ennek a megértése feltételezi a Tisztelt Olvasótól a komplex algebra alapos ismeretét. A példatár témájából és terjedelméből adódóan nem tartjuk feladatunknak a komplex algebra részletes kifejtését. Azonban vázlatosan megemlítjük az alapfogalmakat, felelevenítjük a komplex számok halmazában végezhető műveleteket, elsősorban azok geometriai jelentését hangsúlyozva.

Komplex számnak nevezzük a $z = a + i \cdot b$ alakú összeget, ahol a és b tetszőleges valós számok, az i pedig az úgynevezett imaginárius vagy képzetes egység, amely a -1 valós szám négyzetgyökét szimbolizálja: $i = \sqrt{-1}$. Az a valós szám a z komplex szám valós része, jelölése $a = \mathrm{Re}(z)$, a b valós szám pedig a z komplex szám képzetes része, jelölése $b = \mathrm{Im}(z)$.

Egy komplex számot tehát két paraméter határoz meg egyértelműen: a valós és a képzetes rész.

Felfoghatjuk a komplex számokat úgy is, mint rendezett valós számpárokat: $z = (a, b)$.

Vegyünk fel a síkban egy derékszögű koordinátarendszert, melynek első tengelyét valós tengelynek, második tengelyét imaginárius tengelynek nevezzük. Jelölésük rendre: Re és Im. Magától értetődő, hogy kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van a sík pontjai és az origóból induló helyvektorok között. Tehát minden komplex szám szemléltethető egy síkvektorral. A Re és Im tengelyek által kifeszített síkot Gauss-féle komplex számsíknak nevezzük.

De megadhatjuk az (a, b) pont origótól mért távolságát (jele: r), valamint az (a, b)-be mutató helyvektornak a Re tengely pozitív irányával bezárt szögét (jele: (α), mely előjeles mennyiséget, szokás szerint, az óramutató járásával egyező irányban tekintünk pozitívnak. Előbbit a z komplex szám abszolút értékének, utóbbit a komplex szám arkuszának vagy argumentumának nevezzük.

Ha ezeket használjuk a komplex szám megadásához, a következőt kapjuk: $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$. Ezt az előállítást nevezzük a komplex szám trigonometrikus alakjának.

Később kiderül, hogy a számítások szempontjából nagyon praktikus, ha a komplex szám felírásához igénybe vesszük az exponenciális függvényt, speciálisan az Euler-féle formulát:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha$$

Ezzel a z komplex szám exponenciális alakja $z = r \cdot e^{i\alpha}$.

Algebrai alakban az összeadás a síkvektorok körében megismert szokásos vektorösszeadás mintájára történik. Tehát ha

$$z_1 = a + i \cdot b \text{ és } z_2 = c + i \cdot d, \text{ akkor}$$

$$z_1 + z_2 = (a + b) + i \cdot (c + d).$$

Tehát összeadásnál külön-külön összeadódnak a valós részek és a képzetes részek. Ez természetesen igaz kettőnél több komplex szám összegére is.

Trigonometrikus és exponenciális alakban közvetlenül nem végezhető el az összeadás.

Az összeadás szemléletes tartalmának kiderítéséhez felidézzük a vektorok geometriai alkalmazási területét. Ez pedig a geometriai transzformációk között az eltolás. Rögzítsük a $z_0 = a_0 + i \cdot b_0$ komplex számot. Ha egy tetszőleges $z = a + i \cdot b$ komplex számhoz ezt hozzáadjuk, akkor ez a z-nek megfelelő pont z_0-val való eltolását fogja eredményezni. Általánosabban, ha adva van a komplex síkon egy T tartomány, és a tartományhoz tartozó minden komplex számhoz hozzáadjuk z_0-t, akkor az egész T tartomány eltolódik z_0-val.

Algebrai alakban a szorzást úgy végezhetjük el, hogy definíció szerint megköveteljük a disztributív törvény teljesülését a komplex számok halmazában. Ezek szerint, ha $z_1 = a + i \cdot b$ és $z_2 = c + i \cdot d$, akkor

$$z_1 \cdot z_2 = (a + i \cdot b)(c + i \cdot d) = (ac - bd) + i \cdot (ad + bc),$$

amely kifejtés megadja a szorzat valós és képzetes részét.

A szorzás műveletének geometriai tartalma főként akkor világlik ki, ha a szorzást trigonometrikus, illetve exponenciális alakban végezzük el. Ehhez legyen:

$$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i \cdot \sin\alpha_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i \cdot \sin\alpha_2).$$

Ekkor a szorzat trigonometrikus alakja:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Eszerint két (vagy több) komplex szám szorzásánál az abszolút értékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak.

Ez az eredmény egyszerűen adódik, ha a komplex számok exponenciális alakját alkalmazzuk, felhasználva a hatványozás azonosságait:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\alpha_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\alpha_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\alpha_1} \cdot e^{i\alpha_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Ezekből az egyenletekből már nem nehéz kitalálni, hogy mi a geometriai tartalma egy komplex számmal történő szorzásnak.

Legyen $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ egy tetszőleges komplex szám, és $z_0 = r_0 \cdot (\cos\alpha_0 + i \cdot \sin\alpha_0)$ egy rögzített komplex szám.

Ha z-t z_0-val szorozzuk, akkor z abszolút értéke r_0-val szorzódik, tehát az eredmény egy nyújtás vagy zsugorítás aszerint, hogy $r_0 > 1$, illetve $r_0 < 1$, speciális esetben pedig r nem változik, ha $r_0 = 1$. Az argumentum pedig α_0-val változik, növekszik vagy csökken aszerint, hogy $\alpha_0 > 0$, illetve $\alpha_0 < 0$. Speciális esetben, ha $\alpha_0 = 0$, azaz ha z_0 valós szám, az α argumentum nem változik. Más szóval ekkor a transzformáció egy nyújtás. Összefoglalva tehát a z_0-val való szorzás a legáltalánosabb esetben megfelel egy nyújtva forgatásnak.

Legyen adva a komplex síkon egy T tartomány. Ha ennek a T tartománynak minden pontjára alkalmazzuk a z_0-val való szorzást, akkor a nyújtva forgatást a teljes T tartományra mint geometriai idomra kell alkalmazni.

Maradjunk még egy szóra annál a speciális esetnél, amikor $r_0 = 1$, tehát ha egységnyi abszolút értékű komplex számmal szorzunk, azaz legyen $z_0 = \cos\alpha_0 + i \cdot \sin\alpha_0$. Ekkor a z_0-val való szorzás egyenértékű egy origó körüli α_0 szögű elforgatással.

A szorzás speciális eseteként beszélhetünk a hatványozásról. Egyelőre csak pozitív egész kitevőjű hatványokat értelmezünk.

Egy z komplex szám n-edik hatványát ($n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$) úgy értelmezzük, mint a valós esetben: z^n egy olyan n tényezős szorzat, melynek minden tényezője z. Algebrai alakban a hatványozás nagy kitevők esetén meglehetősen nehézkes. Az általános esetben a binomiális tételre tudunk hivatkozni. Trigonometrikus és exponenciális alakban sokkal egyszerűbben érünk célhoz. Alkalmazzuk a szorzásnál idézett összefüggést: ha

$$z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha),$$

akkor $z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \alpha) + i \cdot \sin(n \cdot \alpha))$ és hasonlóan $z^n = r^n \cdot e^{in\alpha}$. Hatványozás során tehát az abszolút érték hatványozódik, az argumentum pedig n-szeresére változik.

A hatványozás ugyanúgy interpretálható geometriailag, mint a szorzás: az általános esetben egy nyújtva forgatás.

Ha $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, akkor z^n úgy transzformálódik z-ből, hogy z abszolút értékét szorozzuk r^{n-1}-nel, argumentumához pedig hozzáadunk $(n-1) \cdot \alpha$-t, vagyis a transzformáció egy r^{n-1} arányú nyújtás és egy $(n-1) \cdot \alpha$ szögű elforgatás egymásutánja.

A z komplex szám konjugáltját a $\overline{z}$ szimbólummal jelöljük, és az alábbi módon értelmezzük: ha $z = a + i \cdot b$, akkor $\overline{z} = a - i \cdot b$, tehát egy z komplex szám konjugáltja az a komplex szám, melynek valós része megegyezik z valós részével, képzetes része pedig $\mathrm{Im}(z)$ ellentettje.

Könnyű látni a geometriai interpretációt is: a konjugálás a valós tengelyre vonatkozó tükrözést jelent. Innen világos, hogy konjugálás során a komplex szám abszolút értéke nem változik meg, arkusza pedig ellentettjére változik. Innen már könnyen felírható egy komplex szám konjugáltja trigonometrikus és exponenciális alakban a szokásos jelölésekkel:

$$\overline{z} = r \cdot (\cos\alpha - i \cdot \sin\alpha), \text{ illetve } \overline{z} = r \cdot e^{-i\alpha}.$$

Az osztást algebrai alakban úgy kell elvégezni, hogy a törtet a nevező konjugáltjával bővítjük.

Legyen $z_1 = a + ib$ és $z_2 = c + id \neq 0$. Az eredmény:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

A trigonometrikus, illetve exponenciális alak használatával az osztás is egyszerűbben végezhető el. Legyen $z_1 = r_1 \cdot (\cos\alpha_1 + i \cdot \sin\alpha_1)$ és $z_2 = r_2 \cdot (\cos\alpha_2 + i \cdot \sin\alpha_2) \neq 0$, illetve $z_1 = r_1 \cdot e^{i\alpha_1}$ és $z_2 = r_2 \cdot e^{i\alpha_2}$, ekkor a hányados

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\big), \text{ illetve}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\alpha_1}}{r_2 \cdot e^{i\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

A hányados abszolút értéke tehát a számláló és nevező abszolút értékének hányadosa, az argumentuma pedig a számláló és nevező argumentumának különbsége. Ezek alapján már az osztás geometriai tartalma is világos. Ha a $z_0 = r_0 \cdot (\cos\alpha_0 + i \cdot \sin\alpha_0)$ $(z_0 \neq 0)$ komplex számmal osztunk, az egyenértékű az $\frac{1}{z_0} = \frac{\overline{z_0}}{|z_0|^2}$ $(z_0 \neq 0)$ komplex számmal való szorzással. Tehát az általános esetben az osztás is egy forgatva nyújtás. Mivel

$$\frac{1}{z_0} = \frac{r_0\big(\cos(-\alpha_0) + i \cdot \sin(-\alpha_0)\big)}{r_0^2} =$$
$$= \frac{1}{r_0} \cdot \big(\cos(-\alpha_0) + i \cdot \sin(-\alpha_0)\big),$$

ezért az osztás egyenértékű egy $\frac{1}{r_0}$ arányú nyújtás, és egy $-\alpha_0$ szögű elforgatás egymásutánjával. Ez is természetesen lehet nyújtás vagy zsugorítás attól függően, hogy $r_0 < 1$ vagy $r_0 > 1$, illetve pozitív vagy negatív irányú forgatás attól függően, hogy α_0 előjele negatív vagy pozitív.

Ezen a helyen szükséges részletesebben kitérni a z komplex szám reciprokának, az $\frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ komplex számnak a képzésére. Ez egy különleges geometriai transzformáció.

Legyen adott egy O középpontú R sugarú K kör egy síkban. Az adott sík A és B pontját a K körre vonatkozólag inverzeknek nevezzük, ha O, A és B egy félegyenesre esik, továbbá $OA \cdot OB = R^2$. Világos, hogy ha az A pont a körön belül van, akkor a B a körön kívül és fordítva. A körvonal egy pontjának inverze önmaga, és az is világos, hogy a kör O középpontjának inverze a sík ideális pontja, a végtelen távoli pont (∞). Ha rögzített K kör esetén definiálunk egy transzformációt, amely a mondottaknak megfelelően rendel egymáshoz síkbeli pontokat, akkor azt körre vonatkozó tükrözésnek vagy inverziónak nevezzük.

Ha a kör sugara minden határon túl növekszik, tehát $R \to \infty$, akkor a kör egyenessé alakul, a körre vonatkozó inverzió pedig átmegy a közönséges egyenesre vonatkozó tükrözésbe.

Legyen most $z = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \neq 0$, ekkor a konjugálásról és osztásról mondottak szerint

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha)\big), \text{ tehát}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\big(\cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha)\big),$$

ahonnan világos, hogy z és $\frac{1}{\overline{z}}$ egyazon, origóból induló α irányszögű félegyenes pontja, továbbá az is, hogy $|z| \cdot \left|\frac{1}{\overline{z}}\right| = r \cdot \frac{1}{r} = 1$, tehát a z és $\frac{1}{\overline{z}}$ komplex számoknak megfelelő pontok az origó közepű egységnyi sugarú körre vonatkozólag inverz pontok. Ez azt is jelenti, hogy a z komplex számról az $\frac{1}{z}$ komplex számra való áttérés két tükrözés egymásutánját jelenti: az origó közepű egységnyi sugarú körre vonatkozó inverzió és a valós tengelyre vonatkozó tükrözés egymás utáni alkalmazása tetszőleges sorrendben.

Ebben a részben kizárólag pozitív egész gyökkitevő esetén foglalkozunk a gyökvonás kérdésével.

Legyen $z = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$, és legyen $n \in \mathbb{Z}, n > 1$. Ebben az esetben az n-edik gyökvonás egyenértékű az alábbi feladattal: Keressük azokat az $u = \varrho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = \varrho \cdot e^{i\varphi}$ komplex számokat, melyekre $u^n = z$ teljesül. Kérdés ezen ϱ abszolút értéke és φ arkusza. Egy $z = r(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ komplex számnak pontosan n db különböző n-edik gyöke van. Ezek a következők:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots n - 1.$$

Ezt a kérdést azért részleteztük egy kissé jobban, mert ez egy olyan eredmény, ahol jelentős eltérés mutatkozik a valós és komplex analízis között. A valós függvénytanban az $f(x) = \sqrt[n]{x}$ függvény értelmezési tartománya páros gyökkitevő esetén csak a nemnegatív valós számok halmaza, páratlan gyökkitevő esetén a valós számok halmaza, de mindkét esetben igaz, hogy a gyökvonás eredménye – ha az létezik – egyértelmű. Komplex z esetén azonban a gyökkitevőtől függetlenül, tetszőleges z esetén a gyökvonás minden esetben elvégezhető, azonban a valós esettel ellentétben ez a hozzárendelés nem függvény, hiszen a gyökvonás nem ad egyértelmű eredményt. Az ilyen hozzárendelést szokás általánosabb tulajdonságának megfelelően relációnak, az adott esetben n értékű relációnak nevezni. A komplex analízisbeli n-edik gyök tehát nem függvény, hanem egy n értékű reláció. (A szakirodalom használja az n értékű függvény elnevezést is. Mi azonban ezt elkerüljük, hiszen a függvény alapvető tulajdonsága, az egyértelműség nem egyeztethető össze a reláció többértékűségével.)

Ha valaki részletesebben érdeklődik a komplex algebra iránt, akkor javasoljuk a Bolyai-sorozatban megjelent komplex számokat tárgyaló kötet (Sárközy András: Komplex számok, Műszaki Könyvkiadó, 1973.) részletes tanulmányozását.

2. VALÓS VÁLTOZÓS KOMPLEX FÜGGVÉNYEK

2.1 Határérték, folytonosság

Az f függvényt valós változós komplex függvénynek nevezzük, ha értelmezési tartománya a valós számok részhalmaza, értékkészletét a komplex számok alkotják:

$$f\colon D_f \to \mathbb{C} \qquad D_f \subset \mathbb{R}$$

A függvény tehát valós számhoz komplex számot rendel. A függvény t helyen felvett helyettesítési értékét $f(t)$-vel jelöljük. A függvény tehát minden $t \in D_f$ értékhez egy $f(t) = x(t) + iy(t)$ komplex számot rendel. Exponenciális alakban:

$$f(t) = r(t) \cdot e^{i\varphi(t)} = r(t)\cos\varphi(t) + ir(t)\sin\varphi(t)$$

A valós változós komplex függvénynek tehát a valós része és a képzetes része egyaránt egy valós egyváltozós függvény. A függvény egyenértékű e rendezett függvénypárral.

Legyen t_0 a D_f halmaz torlódási pontja. A függvénynek a t_0 pontban létezik határértéke, ha van olyan $z_0 \in \mathbb{C}$, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$\left|f(t) - z_0\right| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < \left|t - t_0\right| < \delta.$$

A határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele a valós és a képzetes rész határértékének létezése az adott pontban.

A valósban megismert módon értelmezhető a jobb, illetve a bal oldali határérték is a t_0 pontban.

A függvény folytonos a t_0 pontban, ha ott létezik a határértéke, a helyettesítési értéke, és ezek egyenlők:

$$\lim_{t_0} f(t) = f(t_0)$$

A függvény egy $[t_1, t_2]$ intervallumban folytonos, ha annak belső pontjaiban, valamint a t_1-ben jobbról, t_2-ben balról folytonos.

Az $L = \left\{z \middle| z = z(t),\ t \in D \subset \mathbb{R}\right\}$ halmaz pontjai általában egy görbét alkotnak.

Egyszerű ívnek nevezzük az egyenes szakasz topologikus – azaz kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos – leképezéssel nyert képét.

A leképezést akkor nevezzük kölcsönösen folytonosnak, ha a leképezést adó függvénnyel együtt annak inverze is folytonos. Ha véges sok egyszerű ívet úgy csatlakoztatunk, hogy csak ezek végpontjai legyenek közös pontok, görbét kapunk. Az így származtatott görbéket Jordan-görbének nevezzük. (A kölcsönösen egyértelmű leképezésből következik, hogy $t_1 \neq t_2$ esetén $z(t_1) \neq z(t_2)$, azaz a görbe nem keresztezi önmagát.)

Ha az $L = \left\{z \middle| z = z(t),\ t \in [t_1, t_2]\right\}$ görbe Jordan-görbe, és $z(t_1) = z(t_2)$, akkor zárt Jordan-görbéről beszélünk.

Mivel a $[t_1, t_2]$ intervallum korlátos, így a Jordan-görbe is korlátos ponthalmaz.

A Jordan-görbe tétele szerint egy zárt Jordan-görbét a komplex számsíkból elhagyva két nyílt tartományt kapunk, melyeknek határa az adott görbe (lásd még 3.1). Azt a tartományt, amely a $z = \infty$ pontot nem tartalmazza, a görbe belsejének, a másikat a görbe külsejének nevezzük.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t^2} + i\dfrac{\sin 5t}{t}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ függvény határértékét az origóban! Folytonossá tehető-e a függvény?

Vizsgáljuk külön a valós, illetve a képzetes részt.

$$\lim_{0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{0} \frac{\sin 5t}{t} = 5. \text{ Tehát } \lim_{0} f(t) = \frac{1}{2} + 5i.$$

Ha az f függvényt a 0 helyen így értelmezzük: $f(0) = \dfrac{1}{2} + 5i$, akkor a függvény minden (véges) helyen folytonossá válik.

2. Adja meg a $z_1 = 5+3i$ és a $z_2 = 9+5i$ pontokat összekötő egyenes szakasz egyenletét valós változós komplex függvény alakjában!

Az egyenes szakasz egyik lehetséges megadási módja:

$$f(t) = z_1 + t\left(z_2 - z_1\right), \quad t \in [0, 1],$$

azaz: $f(t) = 4t + 5 + i(2t + 3), \quad t \in [0, 1]$.

($t = 0$ esetében a z_1, $t = 1$-nél a z_2 pontot kapjuk).

Természetesen más paraméterezéssel is megadható az egyenes szakasz egyenlettel jellemezhető. Más alakban:

$$z(t) = 4 + 3\cos t + i(5 + 3\sin t), \quad t \in]-\pi, \pi[.$$

(Ha t-re nem teszünk kikötést, akkor a mozgó pont többször is befutja a körvonalat, így a hozzárendelés nem lesz kölcsönösen egyértelmű.)

5. Milyen görbét jellemez a $z(t) = 4 + 5\cos t + i(3 + 2\sin t)$, $t \in]-\pi, \pi[$ egyenlet?

transzformáció adja. Vagyis P_1 koordinátái:

$$x_1 = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha$$
$$y_1 = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$$

Komplex számok körében a forgatómátrixszal való szorzás helyett egyszerűen az $e^{i\alpha}$-val való szorzás elegendő.

7. Milyen görbét jellemez a $z(t) = (3 + 4\operatorname{ch}t) + (5 + 2\operatorname{sh}t)i$, $t \in \mathbb{R}$ egyenlet?

A valós, illetve képzetes rész:

$$x(t) = 3 + 4\operatorname{ch}t$$
$$y(t) = 5 + 2\operatorname{sh}t$$

t-t kiküszöbölve: $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y-5)^2}{4} = 1$ adódik, ami egy hiperbola egyenlete, melynek középpontja a $z_0 = 3 + 5i$ pont, tengelyei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak.

Figyelembe véve, hogy $x(t) \geq 7$, így látható, hogy a hiperbolának csak az egyik ágát adja meg az egyenlet.

8. Milyen görbét jellemez a $z(t) = \dfrac{i+t}{i-t}$, $t \in \mathbb{R}$ függvény?

Mivel t csak valós szám lehet, így a függvény minden (véges) t esetén folytonos.

Határozzuk meg a függvény valós, illetve képzetes részét!

$$\frac{i+t}{i-t} = \frac{(i+t)(-i-t)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} - i\frac{2t}{1+t^2}$$

Azaz:

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = -\frac{2t}{1+t^2}$$

Vegyük észre, hogy $x^2 + y^2 = \dfrac{\left(1-t^2\right)^2 + 4t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = 1$, tehát az egyenlet egy origó központú egységsugarú kört jellemez. (A $z = -1$ pontot a $t = \infty$ érték adja. Ha csak t véges értékeit tekintjük, a körvonal nem zárt.)

9. Milyen görbét jellemez a $z(t) = \dfrac{1}{1+ti}$, $t \in \mathbb{R}$ függvény?

Az előző feladathoz hasonlóan meghatározzuk a függvény valós, illetve képzetes részét.

Mivel $z(t) = \dfrac{1-ti}{1+t^2}$, így $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $y(t) = -\dfrac{t}{1+t^2}$.

Most $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{1+t^2} = x$, azaz a függvény az

$$(x - 0{,}5)^2 + y^2 = 0{,}5^2$$

kör egyenlete. (A $t = \infty$ képe az origó.)

10. Milyen görbét határoznak meg az

$$f(t) = 7e^{it} + e^{7it}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

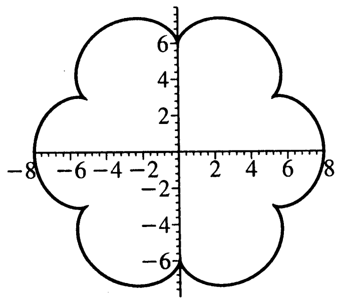
és az

$$f_1(t) = 5e^{it} + e^{-i5t}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

függvények?

Az $f(t)$ függvény valós, illetve képzetes része:

$$x(t) = 7\cos t + \cos 7t$$
$$y(t) = 7\sin t + \sin 7t$$



2.1 ábra

Az alakzat képe a 2.1 ábrán látható. Az alakzatot epicikloisnak nevezik, egy nagy körön kívülről gördülő kis kör egy kiszemelt kerületi pontja mozgásának képeként származtatható.

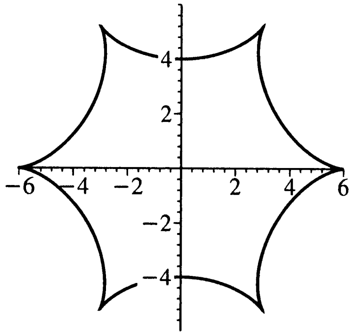
Az $f_1(t) = 5e^{it} + e^{-i5t}, \quad t \in [-\pi, \pi]$

függvény valós, illetve képzetes része az előzőhöz hasonlóan

$$x_1(t) = 5\cos t + \cos 5t$$

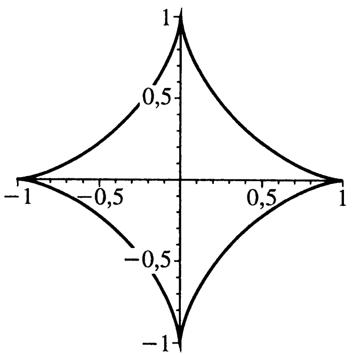
$$y_1(t) = 5\sin t - \sin 5t$$

Az alakzat képe az ábrán látható. Hipocikloisnak nevezik, egy nagy körön belülről gördülő kis kör egy kiszemelt kerületi pontja mozgásának pályájaként származtatható (2.2 ábra).



2.2 ábra

11. Milyen görbét határoz meg a $z(t) = e^{it} + \frac{1}{3}e^{-3it}, \quad t \in [-\pi, \pi]$ függvény?



2.3 ábra

Az előző feladathoz hasonlóan:

$$x(t) = \cos t + \frac{1}{3}\cos 3t = \cos^3 t$$

$$y(t) = \sin t - \frac{1}{3}\sin 3t = \sin^3 t$$

A görbe egy speciális hipociklois, asztroid (2.3 ábra).

2.2 Valós változós komplex függvények differenciálása

A $z(t)$ függvény t_0 pontbeli differenciálhányadosát a valós egyváltozós függvényeknél megszokott módon értelmezzük.

Legyen a $z(t)$ függvény értelmezett a t_0 pontban.

Ekkor, ha létezik és véges a $\lim\limits_{t_0} \dfrac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}$ határérték, akkor ezt a függvényt a $z(t)$ függvény t_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük. Jelölése: $\dot{z}(t_0)$.

$\dot{z}(t_0)$ létezésének szükséges és elégséges feltétele a függvény valós és képzetes részének t_0 pontbeli differenciálhatósága. Belátható, hogy $\dot{z}(t_0) = \dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0)$.

A jobb és bal oldali határérték értelmezésének mintájára értelmezhető a jobb és bal oldali differenciálhatóság is. Azt a függvényt, amely értelmezési tartománya minden pontjában az adott pontbeli differenciálhányados értékét veszi fel, deriváltnak nevezzük.

Jelölése: $\dot{z}(t) = \dfrac{dz}{dt}$.

Mivel a derivált definiálása a valósban megszokott módon történt, így a deriválási szabályok is a valósban megszokottak maradnak. (Formálisan i-t tetszőleges valós állandónak tekintve deriváljuk a függvényt.)

Az előzőekben láttuk, hogy az $L = \left\{ z \middle| z = z(t),\ t \in D \subset \mathbb{R} \right\}$ pontok általában valamilyen görbét alkotnak.

A $\dot{z}(t_0)$ vektor a görbe t_0 pontbeli érintőjének irányvektorát adja, amennyiben $\dot{z}(t_0) \neq 0$. Abból, hogy $\dot{z}(t_0) = 0$, nem feltétlenül következik az, hogy a görbének a t_0 pontban nincs érintője. Az adott pontbeli normálvektort az $i\dot{z}(t_0)$ (illetve ennek (-1)-szerese) vektor szolgáltatja.

Ha a $t \in [t_1, t_2]$ intervallumon a $z(t)$ függvény deriváltja – véges sok hely kivételével – folytonos és zérustól különböző, és a kivételes pontokban is létezik a függvény jobb és bal oldali deriváltja, valamint a t_1 pontban a jobb, t_2 pontban a bal oldali derivált, akkor a $z(t)$-vel jellemzett görbét szakaszonként sima görbének nevezzük.

Bizonyitható, hogy szakaszonként sima görbének létezik az ívhossza, és ez az

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 dt}$$

képlettel számolható.

Ha a $z(t)$ függvényt egy pontmozgás leírásának tekintjük, akkor $\dot{z}(t_0)$ e mozgás sebességvektorát adja a t_0 időpillanatban.

Ha $\dot{z}(t)$ differenciálható függvény, deriváltját a $z(t)$ függvény második deriváltjának nevezzük, és $\ddot{z}(t)$-vel jelöljük. Pontmozgás esetén a második derivált a mozgás gyorsulásvektorát adja.

Jelölje a t_0, illetve a t pontbeli érintők hajlásszögét $\Delta\alpha$, a $z(t_0)$ és $z(t)$ pontok közötti ív hosszát Δs. Ekkor, ha létezik és véges a $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\Delta s}{\Delta \alpha}$ határérték, akkor azt a görbe t_0 pontbeli görbületének nevezzük. Jelölése $\kappa(t_0)$ (Igazolható, hogy a görbület csak egyenes esetében azonosan zérus.)

Amennyiben a függvény kétszer deriválható, akkor görbülete:

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\sqrt{\left((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2\right)^3}}$$

(feltéve, hogy a nevező nem zérus).

Gyakorló feladatok

1. Deriválható-e értelmezési tartománya minden pontjában a

$$z(t) = 3t^3 + 5t^3 i, \quad t \in [-1, 1]$$

függvény?

Létezik-e az e függvénnyel jellemzett görbének a $t = 0$ helynek megfelelő $z = 0$ pontban érintője?

Mivel a függvénynek a valós és a képzetes része egyaránt differenciálható, így a derivált minden pontban létezik:

$$\dot{z}(t) = 9t^2 + 15t^2 i$$

Mivel $\dot{z}(0) = 0$, így a deriváltból nem következik az érintő létezése az origóban. Vegyük észre azonban, hogy $t^3 = q$ helyettesítéssel:

$$z(q) = 3q + 5qi, \quad q \in [-1, 1],$$

ami láthatóan egy egyenes szakasz egyenlete, melynek origóbeli érintője önmaga. Tehát az, hogy a differenciálhányados értéke egy adott pontban nulla, nem feltétlenül jelenti azt, hogy ott a görbének nincs érintője.

2. Differenciálható-e az értelmezési tartománya minden pontjában a $z(t) = \cos^3 t + i \sin^3 t, \quad t \in [-\pi, \pi]$ függvény?

Mely pontokban lesz $\dot{z}(t) = 0$? Határozza meg a görbe ívhosszát!

A függvény deriváltja minden t értékre létezik.

$$\dot{z}(t) = -3\cos^2 t \sin t + i3 \sin^2 t \cos t$$

$\dot{z}(t)$ akkor egyenlő nullával, ha $t = k\frac{\pi}{2}$, ahol k tetszőleges egész szám. (Természetesen a függvény grafikonjában csak a $k = 0, 1, 2, 3$ értékek adnak különböző pontokat.)

A t kiküszöbölésével a görbe egyenlete

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

alakban írható. Képe egy asztroid (2.3 ábra), melynek a $\dot{z}(t) = 0$ pontokban szinguláris pontjai vannak, nincs érintője.

Mivel a függvény deriváltja csak néhány pontban zérus, így a görbe szakaszonként sima zárt Jordan-görbe, létezik ívhossza. Az ívhossz kiszámításakor elegendő a görbe negyedrészének ívhosszát kiszámítani.

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\dot{x}(t)\right)^2 + \left(\dot{y}(t)\right)^2}\,dt$$

A gyök alatti mennyiség:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t =$$
$$= 9\cos^2 t \cdot \sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 9\cos^2 t \cdot \sin^2 t$$

Így $S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \sin t = \left[\frac{3}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1{,}5.$

Tehát a teljes ívhossz: $s = 4s_1 = 6$.

3. Határozza meg az előző részben szerepelt

$z_1(t) = 7e^{it} + e^{i7t}, \quad t \in [-\pi, \pi]$ és a

$z_2(t) = 5e^{it} + e^{-i5t}, \quad t \in [-\pi, \pi]$

függvények deriváltjait!

Mely pontokban lesz a derivált zérus?

$$\dot{z}_1(t) = 7ie^{it} + 7ie^{i7t}$$

A derivált akkor zérus, ha

$$e^{i7t} = -e^{it} = e^{i(\pi+t)}.$$

Mivel két exponenciális alakban adott komplex szám egyenlőségének esetén a kitevők $2\pi i$-ben különbözhetnek, így:

$$7t = \pi + t + k2\pi$$
$$t = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

Mivel a $t \in [-\pi, \pi]$ kikötést tettük, így k lehetséges értékei -3, -2, -1, 0, 1, 2.

E pontokban a görbének „csúcsai" vannak, nincs érintője. A pontok a függvény szinguláris pontjai: A görbe szakaszonként sima zárt Jordan-görbe.

$$\dot{z}_2(t) = 5ie^{it} - 5ie^{-i5t}$$

A derivált akkor zérus, ha

$e^{it} = e^{-i5t}$, azaz

$$t = -5t + k2\pi.$$

$t = k\frac{\pi}{3}$, ahol $k = -3, \ldots 3$.

E hat pontban ($k = -3$ és $k = 3$ ugyanaz a pont) a görbének nincs érintője.

Ez a görbe is szakaszonként sima, zárt Jordan-görbe.

4. Határozza meg a $z(t) = Re^{i\omega t}$ (R, ω valós állandók) függvény első és második deriváltját!

A függvény egy origó középpontú R sugarú körön történő ω szögsebességű pontmozgást – egyenletes körmozgást – ír le.

$$\dot{z}(t) = iR\omega e^{i\omega t}$$

Minden egyes t időpillanatban z merőleges $\dot{z}(t)$-re, és $\left|\dot{z}(t)\right| = R\omega$. (Az egyenletes körmozgás esetén a sebesség érintőirányú, és nagysága $R\omega$-val egyenlő.)

A második derivált:

$$\ddot{z}(t) = -R\omega^2 e^{i\omega t}$$

$\ddot{z}(t)$ minden egyes időpillanatban merőleges $\dot{z}(t)$-re, és $|\ddot{z}(t)| = R\omega^2$. (Az egyenletes körmozgás gyorsulása az érintőre merőlegesen a kör középpontja felé mutat.)

Megjegyzés:

Szokásos a harmonikus rezgőmozgás (szinuszosan váltakozó áram) leírásakor az

$$y(t) = A\sin\omega t$$

vizsgálata helyett a

$$z(t) = Ae^{i\omega t}$$

függvényt vizsgálni, melynek képzetes része adja az $y(t)$ függvényt, mivel ez utóbbival egyszerűbben tárgyalhatók a folyamatok.

5. Határozza meg a $z(t) = R \cdot \exp\left(i\left(\omega_0 t + \frac{\beta}{2}t^2\right)\right)$ (R, ω_0, β valós állandók) függvény első és második deriváltját! (Az $e^a = \exp(a)$ jelölést alkalmaztuk.)

A függvénnyel egy R sugarú körön ω_0 kezdősebességű β szöggyorsulású pontmozgás írható le.

$$\dot z(t) = iR(\omega_0 + \beta t)\exp\left(i\left(\omega_0 t + \frac{\beta}{2}t^2\right)\right) = i(\omega_0 + \beta t)z(t)$$

A sebességvektor tehát ez esetben is $z(t)$-re merőleges, érintőirányú, de nagysága nem állandó.

$$|\dot z(t)| = R(\omega_0 + \beta t)$$

A függvény második deriváltja:

$$\ddot z(t) = iR\beta\exp\left(i\left(\omega_0 t + \frac{\beta}{2}t^2\right)\right) -$$

$$-R(\omega_0 + \beta t)^2\exp\left(i\left(\omega_0 t + \frac{\beta}{2}t^2\right)\right)$$

A kapott gyorsulásvektor első tagja a sebesség irányába mutató úgynevezett tangenciális gyorsulás, melynek értéke t-től független állandó: $R\beta$. A második tag az érintőre merőlegesen a kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás, melynek értéke $R\omega^2$, ahol $\omega = \omega_0 + \beta t$.

6. Határozza meg a $z(t) = 4e^{it} + 2e^{-it}$, $t \in [-\pi, \pi]$ függvény első és második deriváltját!

Milyen görbe egyenletét adja meg a függvény?

Határozza meg e görbe görbületét a $t = 0$ és a $t = \frac{\pi}{2}$ pontban!

A deriváltak:

$$\dot z(t) = i(4e^{it} - 2e^{-it})$$

$$\ddot z(t) = -(4e^{it} + 2e^{-it}) = -z(t)$$

Határozzuk meg $z(t)$ valós és képzetes részét!

$$z(t) = 4(\cos t + i\sin t) + 2(\cos t - i\sin t) = 6\cos t + i2\sin t$$

Azaz $x(t) = 6\cos t$ és $y(t) = 2\sin t$, t kiküszöbölésével:

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$, tehát a görbe egy origó középpontú ellipszis.

A görbületet az előzőekben felírt képlet alapján számoljuk:

$$\kappa = \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{\sqrt{\left((\dot x(t))^2 + (\dot y(t))^2\right)^3}}$$ (feltéve, hogy a nevező nem zérus).

Mivel:

$$\dot x(t) = -6\sin t, \qquad \dot y(t) = 2\cos t,$$

$$\ddot x(t) = -6\cos t, \qquad \ddot y(t) = -2\sin t,$$

így:

$$\kappa(0) = \frac{6}{2^2} \left(= \frac{a}{b^2}\right)$$

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{6^2} \left(= \frac{b}{a^2}\right)$$

Megjegyzés:

Ha az ellipszis nagytengelye a, kistengelye b, akkor a nagytengely végpontjában a görbületi sugár $\frac{b^2}{a}$, a kistengely végpontjában pedig $\frac{a^2}{b}$.

7. Határozza meg a $z(t) = \text{sh}t + i\text{ch}t$, $t \in \mathbb{R}$ függvénnyel jellemzett görbe görbületét!

Hogyan változik a görbület, ha $t \to \infty$?

Az előző feladathoz hasonlóan a függvény grafikonja az

$$y^2 - x^2 = 1, \quad y > 0$$

hiperbolaág.

$$\dot x(t) = \text{ch}t, \qquad \dot y(t) = \text{sh}t,$$

$$\ddot x(t) = \text{sh}t, \qquad \ddot y(t) = \text{ch}t,$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{(\text{ch}^2 t + \text{sh}^2 t)^3}}.$$

Látható, hogy $t \to \infty$ esetén $\kappa(t) \to 0$, amint az várható is volt, hiszen a hiperbola „rásimul" az aszimptotára.

8. Határozza meg a $z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ függvény első és második deriváltját (r és φ valós egyváltozós függvények)!

Az első derivált:

$$\dot z(t) = \dot r(t)e^{i\varphi(t)} + i\dot\varphi(t)r(t)e^{i\varphi(t)}.$$

Az összeg első tagja z-vel azonos irányú, a másik erre merőleges.

A második derivált – a részletszámításokat nem részletezve:

$$\ddot{z}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\left(\dot{\varphi}(t)\right)^2\right) e^{i\varphi(t)} + i\left(r(t)\ddot{\varphi}(t) + 2\dot{r}(t)\dot{\varphi}(t)\right) e^{i\varphi(t)}.$$

Az összeg első tagja z irányú, a második erre merőleges.

2.3 Valós változós komplex függvény integrálása

A derivált definíciójához hasonlóan e függvény határozatlan integrálját is a valósban megszokott módon értelmezzük.

A $z(t)$ függvény primitív függvénye a $Z(t)$, ha $\dot{Z}(t) = z(t)$.

A $z(t)$ határozatlan integrálját ezen primitív függvények összessége adja:

$\int z(t)dt = Z(t) + c$, ahol c tetszőleges komplex állandó.

E függvény esetén is érvényes az egyértelműségi tétel, azaz a határozatlan integrál egy állandótól eltekintve egyértelmű. (A deriváláshoz hasonlóan az integráláskor is i formálisan egy valós állandónak tekinthető.)

A határozott integrált is a valósban megszokott módon értelmezzük.

Vegyük a $t \in [a, b]$ intervallum egy felosztását:

$a = t_0 < t_1 < \ldots t_n = b$

Jelölje a részintervallumok hosszát Δt_k, azaz $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, s e részintervallum valamely pontját τ_k.

Ha a $\lim \sum_k z(\tau_k)\Delta\tau_k$ határérték a felosztást finomítva létezik, véges, és a felosztástól, valamint a közbülső pont választásától független, akkor ezt az értéket a $z(t)$ függvény $[a, b]$ intervallumra vett határozott integráljának nevezzük.

Igazolható, hogy:

$$\int_a^b z(t)dt = \left[Z(t)\right]_a^b = Z(b) - Z(a)$$

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a $z(t) = e^{ikt}$ (ahol k 0-tól különböző egész) függvény $[0, \pi]$, illetve $[0, 2\pi]$ intervallumra vett határozott integrálját!

$$\int_0^\pi e^{ikt}dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^\pi = \frac{e^{ik\pi} - 1}{ik} = \frac{(-1)^k - 1}{ik}$$

Felhasználtuk, hogy $e^{ik\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^k = (-1)^k$.

Az integrál értéke k páros értékeire zérus, páratlan k esetén $\frac{2i}{k}$.

Hasonlóan:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0$$

2. Legyen $z_1(t) = e^{ikt}$, $z_2(t) = e^{-ilt}$ $k, l \in \mathbb{Z}$.

Határozza meg a két függvény szorzatának a $[0, 2\pi]$ intervallumra vett integrálját!

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} \cdot e^{-ilt}dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}dt$$

Az előző feladatból következően, ha $k \neq l$, az integrál értéke zérus; ha $k = l$, akkor az integrálandó függvény 1, így az integrál értéke 2π.

Megjegyzés:

Ha a $z_1(t)$ és $z_2(t)$ függvények skalár szorzatát az

$$\int_0^{2\pi} z_1(t) \cdot \bar{z}_2(t)dt$$

integrállal értelmezzük, akkor azt mondhatjuk, hogy

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikt}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvények ortonormált függvényrendszert alkotnak.

Ugyanis: $k \neq l$ esetén az így értelmezett skalár szorzat zérus (a két függvény ortogonális), $k = l$ esetén a szorzat 1 (normált).

Megjegyzés:

Hasonlóan ortonormált függvényrendszert alkotnak az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos lx, \quad k, l \in \mathbb{N}^+$$

függvények is az $x \in [0, 2\pi]$ intervallumon.

E függvényrendszereket a Fourier-sorok tárgyalásánál fogjuk alkalmazni.

3. Határozza meg a $z(t) = te^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$ függvény $[0, 2\pi]$ intervallumra vett határozott integrálját!

Ha $k = 0$, akkor az integrál értéke $2\pi^2$.

$k \neq 0$ esetén parciálisan integrálva:

$$\int_0^{2\pi} te^{ikt}\,dt = -\frac{i2\pi}{k}, \text{ ha } k \neq 0.$$

4. Határozza meg a $z(t) = \frac{1}{(1+it)^3}$ függvény $[0, \infty[$ intervallumon vett improprius integrálját!

A függvény határozatlan integrálja:

$$\int \frac{1}{(1+it)^3}\,dt = \frac{(1+it)^2}{-2i}$$

Mivel

$$\lim_{\infty} \frac{1}{-2i(1+it)^2} = 0, \text{ így}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+it)^3}\,dt = 0 - \frac{1}{-2i} = -\frac{i}{2}$$

3. KOMPLEX VÁLTOZÓS KOMPLEX FÜGGVÉNYEK

3.1 Határérték, folytonosság

E fejezetben sem törekedhetünk az elméleti alapok részletes tárgyalására csak a leglényegesebb fogalmakat emeljük ki; s igyekszünk a komplex számsíkbeli alapfogalmak és az R^2 közötti analógiákat bemutatni.

A z_0 pont (komplex szám) r sugarú ($r > 0$) környezetét azok a z komplex számok alkotják, amelyekre $|z - z_0| < r$.

Jelölése: $K_r(z_0)$, tehát:

$$K_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z - z_0| < r \right\}$$

A végtelen távoli pont r sugarú környezete alatt a $|z| > r$ halmazt értjük.

A z_0 pont a $D \subset \mathbb{C}$ halmaz *torlódási pontja*, ha z_0 tetszőleges környezetében végtelen sok D-hez tartozó pont van.

A z_0 pont a D halmaz *határpontja*, ha z_0 tetszőleges környezetében van D-hez és $\mathbb{C} \setminus D$-hez tartozó pont is.

Ha D minden határpontját tartalmazza, *zárt halmazról*, ha egyet sem, *nyílt halmazról* beszélünk. (Mindkét tulajdonság igen speciális, a halmazok nagy része se nem nyílt, se nem zárt.)

A D halmaz *korlátos*, ha létezik az origónak olyan r sugarú környezete, amely D-t tartalmazza: $D \subset K_r(0)$.

A D halmazt *összefüggőnek* nevezzük, ha bármely két pontja összeköthető D-hez tartozó folytonos vonallal. Az összefüggő nyílt halmazt $\mathbb{C}$-beli *tartománynak* nevezzük. *Zárt tartományról* beszélünk, ha a tartományt egyesítjük annak határával.

Ha a tartomány határát n darab izolált (közös ponttal nem rendelkező) rész alkotja, akkor azt n-szeresen összefüggőnek nevezzük.

Például a

$0 < |z| < r$

tartomány – egy origó középpontú körlap, mely az origót és a körvonalat nem tartalmazza – e definíció alapján kétszeresen összefüggő, hiszen határa a körvonal és az origó.

Az f függvény *komplex változós függvény* – röviden komplex függvény –, ha értelmezési tartománya és értékkészlete is a komplex számsík egy-egy részhalmaza:

$f\colon D_f \to \mathbb{C} \qquad D_f \subset \mathbb{C}$

A függvény tehát komplex számhoz komplex számot rendel. A függvény $z \in D_f$ helyen felvett helyettesítési értékét $f(z)$-vel jelöljük.

A függvény tehát minden $z = x + iy$, $z \in D_f$ komplex számhoz egy $w = f(z) = u + iv$ komplex számot rendel.

Természetesen u és v is függ z-től – azaz x-től és y-tól –, így u és v is kétváltozós függvény. $u(x, y)$ a függvény valós része, $v(x, y)$ a függvény képzetes része. (A feladatok megoldása során – ha szükséges – természetesen a z és a w esetében is használni fogjuk a polárkoordinátákat is, azaz a komplex számok algebrai alakja mellett a trigonometrikus és exponenciális alakot is.)

Az f függvény megadásánál az

$f(z),\ w = f(z),\ w = u + iv$

jelöléseket egyaránt használni fogjuk.

A komplex függvények szemléltetésére két lehetőség is adódik. A függvényt szemléltethetjük a két kétváltozós függvény $u(x, y)$ és $v(x, y)$ segítségével, de gyakoribb, hogy a függvényt az (x, y) síknak az (u, v) síkra való leképezésével szemléltetjük.

Ez utóbbi esetben megmutatjuk, hogy az f függvény egy z síkbeli görbét vagy tartományt a w sík mely részébe visz át.

Legyen z_0 az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Az f függvény *határértéke* a z_0 pontban w_0, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz tartozik z_0-nak egy $\delta > 0$ sugarú $K_\delta(z_0)$ környezete, hogy

$f(z) \in K_\varepsilon(w_0)$,

midőn $z \in D_f \cap K_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$.

(Mivel a végtelen távoli pont környezetét is értelmeztük, így a w_0, illetve z_0 lehet ∞ is.)

Az f függvény *folytonos* a z_0 helyen, ha

$z_0 \in D_f$, z_0-ban van f-nek határértéke, és $\lim\limits_{z_0} f(z) = f(z_0)$.

Az f függvény akkor és csak akkor folytonos a z_0 pontban, ha az u és a v függvények is folytonosak z_0-ban.

Az egyváltozós függvények körében megismert, az összeg-, különbség-, szorzat- hányados, illetve közvetett függvény folytonosságára vonatkozó tételek a komplex függvények körében is érvényesek.

3.2 Lineáris függvények

A $w = az + b$, ahol $a, b \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ függvényt lineáris függvénynek nevezzük ($a = 0$ esetén a konstans függvény adódik, ezzel nem foglalkozunk).

A lineáris függvény leképezése egy hasonlósági transzformáció. Ugyanis a z síkban fekvő tetszőleges görbét (tartományt) az a-val való szorzás (mint azt az első fejezetben megmutattuk) $\mathrm{arc}(a)$-val elforgat, majd az origóból – mint hasonlósági középpontból – $|a|$-kel nagyít. A b hozzáadása a képalakzat b-vel való eltolását jelenti. A lineáris függvény – mint hasonlósági transzformáció – a z síkot kölcsönösen egyértelműen képezi le a w síkra $a \neq 0$ esetén.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg, hogy a

$w = (4 + 3i)z + 2 - 4i$

lineáris függvény milyen alakzatba viszi át a $|z - 1 - 2i| = 2$ egyenletű körvonalat!

A bevezetésből következik, hogy a körvonal képe a w síkon körvonal lesz, tehát csak a képkör középpontját és sugarát kell meghatároznunk.

Az eredeti kör középpontja a $z_0 = 1 + 2i$ pont.

Ennek képe:

$$w_0 = (4 + 3i)(1 + 2i) + 2 - 4i = -2 + 11i + 2 - 4i = 7i$$

Mivel a $(4 + 3i)$-vel való szorzás $|4 + 3i| = 5$-tel való nagyítást is jelent, a kör sugara ötszörösére nő. Így a kör képe a

$$|w - 7i| = 10$$

egyenletű körvonal lesz.

Természetesen ugyanerre a megoldásra jutunk akkor is, ha nem vizsgáljuk a lineáris függvény geometriai jelentését, hanem az előző fejezet szerint felírjuk a z síkbeli körvonal egyenletét, és formálisan behelyettesítünk.

A körvonal a

$$z = 2e^{i\varphi} + 1 + 2i, \quad \varphi \in]-\pi, \pi]$$

egyenlettel adható meg. Ezt helyettesitve a leképező függvénybe:

$$z = \left(2e^{i\varphi} + 1 + 2i\right)\left(4 + 3i\right) + 2 - 4i$$

Mivel $4 + 3i = 5e^{i\varphi_0}$, ahol $\varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, így

$$w = 10e^{i\left(\varphi+\varphi_0\right)} + 7i, \quad \varphi \in]-\pi, \pi].$$

Ami valóban az előzőkben kapott kört adja meg.

Egy tetszőleges kör belsejét egy másik kör belsejére való leképezés mindig megadható egy lineáris függvény segítségével. Ha nem kötjük ki, hogy a kerület mely pontjának mi legyen a képe a w síkon, akkor a leképező függvény igen sokféleképpen megadható.

Ugyanis egy origó középpontú kört a

$$w = z \cdot \exp(i\varphi_0) \text{ (ahol } \varphi_0 \text{ valós állandó)}$$

leképezés önmagába viszi át, azaz erre a körre a leképezés egybevágósági transzformáció. (Az előző feladatbeli képkör is független φ_0-tól.)

2. Adjon meg egy olyan lineáris függvényt, amely a $|z - 4| < 2$ tartományt a $|w - 3 - 3i| < 10$ tartományba viszi át.

A függvény meghatározását többféle módon is végezhetjük. Toljuk be először a körlapot az origóba, majd növeljük sugarát ötszörösre, végül toljuk el a középpontot a $(3 + 3i)$ pontba.

E transzformációkat a

$$w = 5(z - 4) + 3 + 3i = 5z - 17 + 3i$$

függvény végzi el.

Ellenőrzésként a $z_0 = 4$ pont képe valóban a $w_0 = 3 + 3i$ pont.

A másik lehetőség:

A $w = az+b$ függvényben keressük az $a, b \in \mathbb{C}$ állandókat úgy, hogy a $z_0 = 4$ pont képe a $w_0 = 3 + 3i$ legyen, a z síkon lévő kör kerületének egy pontja pedig a w síkon lévő kerületi pontjába menjen át.

Legyen például a $z_1 = 2$ pont képe a $w_1 = -7 + 3i$ pont.

($|w_1 - w_0| = 10$, azaz w_1 valóban kerületi pont.)

A két összetartozó pontpárt helyettesítve:

$$3 + 3i = 4a + b$$

$$-7 + 3i = 2a + b$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = 5, b = -17 + 3i$$

w_1 ilyen választása mellett tehát éppen az előző lineáris függvényt kapjuk.

Ha a $z_1 = 2$ pont képének az $w_1 = 3 - 7i$ pontot választjuk, akkor

$$3 + 3i = 4a + b,$$

$$3 - 7i = 2a + b, \text{ ahonnan}$$

$a = 5i$, $b = 3 - 17i$ adódik, ami az előzőtől különböző megoldást ad. Látható, hogy w_1 választásától függően más és más lineáris függvénnyel végezhető el a leképezés.

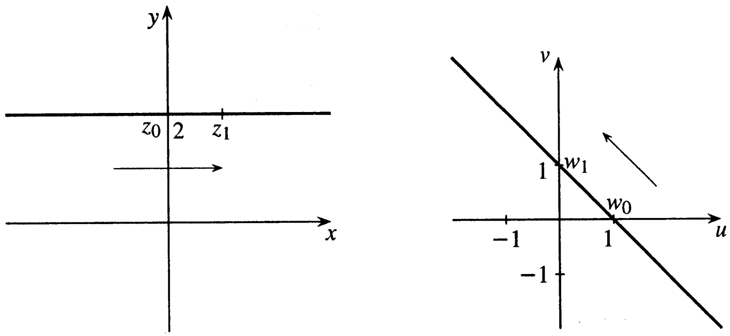
3. Adjon meg egy olyan lineáris függvényt, amely az $\operatorname{Im}(2) \geq 2$ félsíkot az $\operatorname{Im}(w) + \operatorname{Re}(w) \leq 1$ félsíkba viszi át!

Az előző feladathoz hasonlóan most is több lehetőség van a függvény előállítására.

Toljuk el először az egyenest úgy, hogy az az origón menjen át; majd forgassuk el $\frac{3\pi}{4}$-gyel, végül az elforgatott egyenest toljuk el a w síkban.

$$w = (z - 2i)(-1 + i) + 1 = (i - 1)z + 3 + 2i$$

A $\frac{3\pi}{4}$-gyel való forgatást az $e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ komplex számmal való szorzás adja. Mivel az origón átmenő egyenes képét az origóból való nagyítás nem változtatja meg, így ezt még $\sqrt{2}$-vel szoroztuk, ez adta a $(-1 + i)$ szorzót.



3.1 ábra

A másik lehetőség most is az, hogy az eredeti egyenesen választunk két pontot, s megadjuk ezeknek a képét a w síkon. A pontokat úgy vesszük fel, hogy ha z_0-tól z_1 felé haladva a leképezendő ponthalmaz „balra" esik, akkor w_0-tól w_1 felé haladva is „balra" legyen a képtartomány. Ezzel biztosítjuk, hogy ne csak a határoló egyenest képezze le a megfelelő egyenesre, hanem a félsíkot is a megfelelő félsíkra (3.1. ábra).

Legyen $z_0 = 2i$ képe a $w_0 = 1$, és $z_1 = 2i + 1$ képe a $w_1 = i$.

$w = az + b$-be helyettesítve:

$$1 = a \cdot 2i + b$$

$$i = a(2i + 1) + b$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$a = i - 1,\ b = 3 + 2i,$$

azaz éppen az előző leképezést kapjuk.

Ellenőrzésképpen a $z = 0$ képe a $w = 3 + 2i$, ami nem pontja a képhalmaznak, tehát a leképezés a megfelelő félsíkra történt.

Természetesen, ha w_1-nek más pontot választunk, a leképezést most is más lineáris függvény állítja elő.

3.3 Speciális hatványfüggvények

Az $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvényeket vizsgáljuk.

Mivel az $n = 1$ esetet tárgyaltuk, így legegyszerűbb esetben $n = 2$, azaz vizsgáljuk meg először a másodfokú függvényt.

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i2xy$$

E függvény esetében tehát a függvény

valós része: $u(x, y) = x^2 - y^2$,

képzetes része: $v(x, y) = 2xy$;

u és v egyaránt egy nyeregfelülettel szemléltethető. (A két nyeregfelület egymáshoz képest 45°-kal van elforgatva.)

Az $f(z) = z^2$ függvény a $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ félsíkot képezi le a teljes w síkra. Ezen a halmazon a leképezés kölcsönösen egyértelmű, ha a $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ félsíkból a képzetes tengely negatív felét kivesszük.

Az $f(z) = z^2$ függvény ugyanis minden

$$z = re^{i\varphi},\quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

valós számhoz a $w = r^2e^{i2\varphi}$ számot rendeli, ahol $2\varphi \in\ ]-\pi, \pi]$, azaz valóban a teljes síkot kapjuk meg. Azt, hogy a leképezés a teljes $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ félsíkra egyértelműen történjen, úgy szokták megoldani, hogy a w síkot a negatív valós tengely mentén elvágják – bemetszik –, s a metszésvonal negatív oldalához rendelik a z sík képzetes tengelye negatív részének pontjait, pozitív oldalához a képzetes tengely pozitiv részének pontjait. Helyezzünk két ilyen bemetszett síkot egymás fölé – úgy, hogy a tengelyek, az origó, a bemetszés fedésben legyenek –, és a bemetszés széleit „keresztben" összeragasztjuk (a bemetszés alsó bal oldalát a felső jobb oldalhoz és viszont), valamint, mivel a 0 és a ∞ képe önmaga, itt a két síkot összefűzzük, ezekben a pontokban a két sík elágazik. (Elágazási pontoknak nevezik őket). Az így készített összeragasztott síkokból álló felületet Riemann-felületnek nevezik. (A Riemann-felület nem valóságos, hanem képzelt felület.) Erre a felületre a z^2 függvény kölcsönösen egyértelműen képezi le a z síkot. A leképzések vizsgálata során csak az egyrétű w síkot vizsgáljuk.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg, milyen alakzatba viszi át az $f(z) = z^2$ függvény a

$$z = 4e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

félkört és a

$$z = re^{i\frac{\pi}{6}}, \quad r \in \mathbb{R}^+$$

félegyenest!

A félkör képe:

$w = z^2 = 16e^{i2\varphi}$, ahol $2\varphi \in]-\pi, \pi]$, tehát a kép 16 egység sugarú teljes kör.

A félegyenes képe:

$$w = z^2 = r^2 e^{i\frac{\pi}{3}},$$

amely egy elforgatott félegyenes. Az eredeti két alakzat merőlegesen metszette egymást, a képalakzatokra ugyanez vonatkozik. Mint a későbbiekben látni fogjuk, a z^2 függvény leképezése az origó kivételével minden pontban szögtartó.

2. Határozza meg azt a függvényt, amely a

$$\mathrm{Re}(z) \geq 2$$

félsíkot a $w = t + 2i$, $t \leq -2$ vonalon bemetszett síkra képezi le!

A z sík egyenesét toljuk be előbb a képzetes tengelyre. Tudjuk, hogy a z^2 függvény a képzetes tengelyt a bemetszett negatív valós tengely két oldalára képezi le. Ezt a bemetszést kell eltolni a megfelelő helyre.

A függvény:

$$f(z) = (z-2)^2 - 2 + 2i$$

3. Határozza meg, milyen alakzatba viszi az

$f(z) = z^2$ függvény a z sík $x = 1$ egyenesét, illetve az $y = 1$, $y > 0$ félegyenest!

Az $x = 1$ egyenes a $z = 1 + ti$, $t \in \mathbb{R}$ egyenlettel jellemezhető. Ezt a z helyére helyettesítve:

$$(1 + ti)^2 = 1 - t^2 + i2t, \text{ azaz } u = 1 - t^2, \text{ és } v = 2t.$$

t kiküszöbölésével: $u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2$ adódik, ami egy w síkbeli parabola egyenlete.

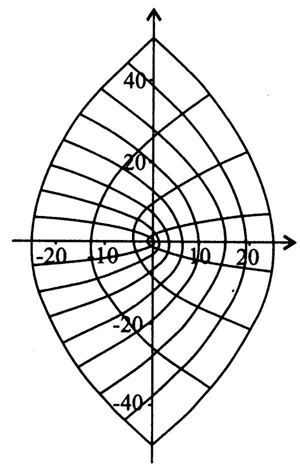
Az $y = 1$, $y > 0$ félegyenes a $z = t + i$, $t \in \mathbb{R}^+$ egyenlettel jellemezhető.

Ekkor $u = t^2 - 1$, $v = 2t$ adódik, amiből t kiküszöbölésével:

$$u = \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 1$$

Mivel $t \in \mathbb{R}^+$, így v értéke is csak pozitív lehet, azaz a kép egy félparabola.

Belátható, hogy a két görbe merőlegesen metszi egymást, tehát a leképezés ebben az esetben is szögtartó.



3.2 ábra. A z sík tengelyekkel párhuzamos egyeneseinek leképezése a $w = z^2$ másodfokú függvénnyel

Hasonlóan igazolható, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket is parabolákra képezi le a másodfokú függvény. A parabolák merőlegesen metszik egymást, közös fókuszpontjuk az origó. Az ilyen konfokális parabolák síkjukban egy parabolikus koordinátarendszert határoznak meg, és kétféle háromdimenziós koordinátarendszer állítható elő belőlük (3.2. ábra):

A) parabolikus koordinátarendszer, ha a 3.2 ábrát a valós tengely körül forgatjuk;

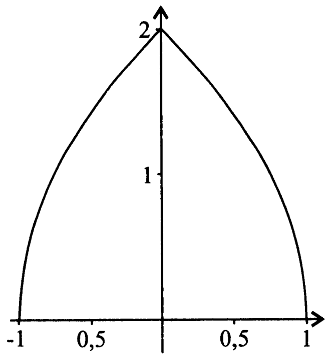
B) parabolikus hengerkoordinátarendszer, ha az ábrát a papír síkjára merőlegesen mozgatjuk.

4. Milyen alakzatba viszi át a z^2 függvény a z síkbeli egységnégyzetet?

A valós tengely [0, 1] intervallumának képe önmaga.

A képzetes tengely [0, 1] intervallumának képe a valós tengely $[-1, 0]$ intervalluma.

Az előző feladatban láttuk, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesek képe parabola, így a másik két oldal képe egy-egy parabolaív. Ezek az ívek a valós tengelyt merőlegesen metszik. A leképezés tehát ebben az esetben is csak az origóban nem szögtartó (3.3 ábra).



3.3 ábra. Az egységnégyzet leképezése másodfokú függvénnyel

Az $f(z) = z^2$ függvény inverzeként értelmezhetjük a $w = \sqrt{z}$ függvényt. Az eddigiekhez hasonlóan a z arkuszára továbbra is az

$$\arc(z) \in]-\pi, \pi]$$

megszorítást tesszük, így a négyzetgyökfüggvény egyértékű lesz, és a függvény a teljes z síkot a $\mathrm{Re}(w) \geq 0$ félsíkra képezi le.

Megjegyezzük, hogy szokásos a kétrétegű Riemann felületből származtatni az inverzet, ilyenkor $\sqrt{z}$-nek két értéket tulajdonítanak ($z = 0$ és ∞ kivételével), hiszen mindkét sík egy-egy értéket szolgáltat.

Vizsgáljuk meg a $w = \sqrt{z}$ függvény esetében az $u(x, y)$ és a $v(x, y)$ függvényeket.

Mivel $\sqrt{x + iy} = u + iv$, tehát $x + iy = u^2 - v^2 + i2uv$, azaz a valós és a képzetes részeket összehasonlítva:

$$x = u^2 - v^2$$

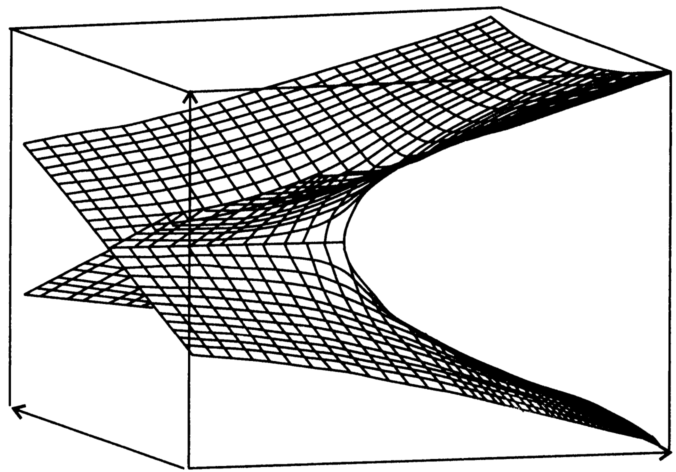
$$y = 2uv$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$u(x, y) = \pm\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

$$v(x, y) = \pm\sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}},$$

ahol a két összetartozó megoldást $y \geq 0$ esetén a két pozitív, illetve a két negatív érték adja.



3.4 ábra. A négyzetgyökfüggvény valós része

A két lehetséges megoldás a Riemann-felületből adódó két értéket jelenti.

A 3.4 ábra az $u(x, y)$ felületet mutatja.

5. Határozza meg, hogy az $f(z) = \sqrt{z}$ függvény milyen síkrészre képezi le a $\text{Re}(z) \geq 0$, illetve $\text{Re}(z) \leq 0$ félsíkokat?

$\text{Re}(z) \geq 0$ esetén $z = re^{i\varphi}, \ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ekkor tehát

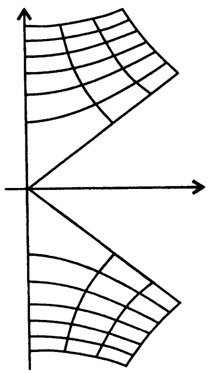
$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}, \ \frac{\varphi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Figyeljük meg azonban, hogy

$$\text{Re}(z) \leq 0 \text{ esetén } \varphi \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Így a félsík képe:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}, \text{ ahol } \frac{\varphi}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ (3.5 ábra).}$$



3.5 ábra. A z sík $\text{Re}(z) < 0$ része tengelyekkel párhuzamos egyeneseinek leképezése a négyzetgyökfüggvénnyel

Tehát a $\sqrt{z}$ függvény leképezése *nem folytonos* a negatív valós tengely mentén, hiszen a negatív tengelyhez közeli pontokat a képzetes tengely pozitív, illetve negatív feléhez közeli pontokra képezi le, attól függően, hogy $\text{Im}(z)$ pozitív vagy negatív értékű-e.

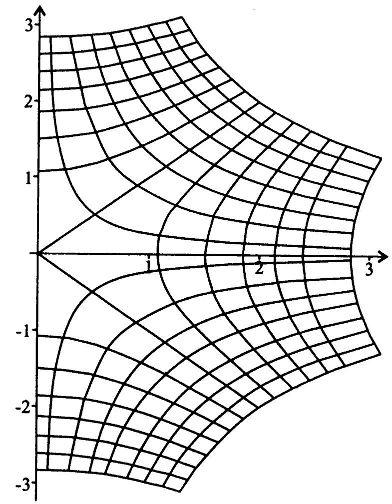
Megjegyzés: Látható, hogy a $\sqrt{z}$ leképezése origón átmenő egyenesek esetén nem szögtartó.

6. Határozza meg, hogy az $f(z)$ függvény milyen alakzatba viszi át a

$z = t + 2i, \ t \in \mathbb{R}$ valós tengellyel párhuzamos, illetve

$z = 1 + ti, \ t \in \mathbb{R}$ képzetes tengellyel párhuzamos

egyeneseket!



3.6 ábra. A z sík tengelyekkel párhuzamos egyeneseinek leképezése a négyzetgyökfüggvénnyel

Mivel $\sqrt{z} = u + iv$, így $z = u^2 - v^2 + i2uv$.

Figyelembe véve, hogy $z = t + 2i$,

$t = u^2 - v^2$ és $2 = 2uv$,

azaz a kép az $uv = 1$ egyenletű hiperbola $u > 0$ ága. (Az előzőekben megállapítottuk, hogy a $\sqrt{z}$ a $\text{Re}(w) \geq 0$ síkra képez le.)

A másik egyenes esetében:

$1 + ti = u^2 - v^2 + i2uv$, azaz

$u^2 - v^2 = 1$ és $t = 2uv$.

Ez esetben a kép ismét egy hiperbola $u > 0$ ága lesz.

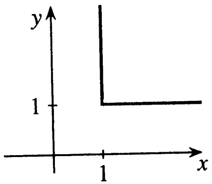
Belátható, hogy a két hiperbola merőlegesen metszi egymást, tehát ebben az esetben a leképezés szögtartó.

Megjegyzés:

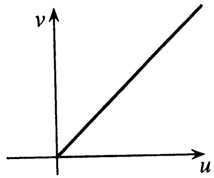
Ha az előző egyenesekkel párhuzamos egyeneseket veszünk fel, akkor a kép egy-egy hiperbolasereg lesz.

Érdekes megfigyelni, hogy például a $z = -1 + ti$ egyenes esetén a kép a $v^2 - u^2 = 1$ egyenletű hiperbolának a $\mathrm{Re}(w) \geq 0$ tartományba eső része, azaz egy-egy hiperbolaág fele lesz (3.6 ábra).

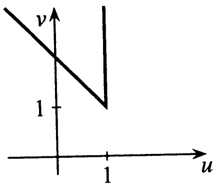
7. Adjon meg egy olyan függvényt, amely a $\mathrm{Re}(z) \geq 1$ és $\mathrm{Im}(z) \geq 1$ síkrészt az $\mathrm{arc}(w) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ síkrészre képezi le! (3.7 ábra.)



3.7a ábra



3.7b ábra



3.7c ábra

A z síkbeli tartományt toljuk el az origóba. Így a feladat az első síknegyed leképezése egy síknyolcadra.

A feladatnak megfelel például az $f(z) = \sqrt{z - 1 - i}$ függvény.

Megjegyzés:

A $g(z) = if(z) + 1 + i$ az eredeti síkrészt a 3.7c ábrán látható síkrészbe viszi át.

Az $f(z) = z^3$ függvény esetében a kölcsönösen egyértelmű leképezéshez már egy három rétegből álló Riemann-felület szükséges, melyeket a negatív valós tengely mentén bemetszünk, s megfelelő módon összeragasztunk. A síkok 0-nál és ∞-nél összefűzöttek (elágazási pontok). Az $f(z) = \sqrt[3]{z}$ értelmezésénél ismételten feltesszük, hogy $\mathrm{arc}(z) \in]-\pi, \pi]$, így minden z értékhez egyetlen függvényérték tartozik.

Szokásos az inverz képzését a 3 levelű Riemann-felületről képezni. Ilyenkor a $z = w^3$ egyenlet mindhárom gyökét az $f(z) = \sqrt[3]{z}$ függvény értékének nevezve többértékű függvényről van szó. Az általunk értelmezett értéket főértéknek nevezik. Tárgyalásunk során továbbra is ragaszkodni fogunk az egyértékű függvényekhez.

3.4 Lineáris törtfüggvények

A lineáris törtfüggvény – más néven bilineáris függvény – általános alakja

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

ahol $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ állandók.

(Szokásos az állandókra az $ad - bc \neq 0$ megszorítást tenni, hiszen az egyenlőség teljesülése, azaz, ha $ad = bc$, és $c \neq 0$, akkor $f = \frac{a}{c}$. Ha $c = 0$, akkor az előzőekben már tárgyalt lineáris függvényt kapjuk.)

A lineáris törtfüggvény lényeges tulajdonsága, hogy a lineáris függvényhez hasonlóan kölcsönösen egyértelműen képezi le a z síkot a w síkra. A függvény inverze is lineáris törtfüggvény.

Vizsgáljuk meg először a $g(z) = \frac{1}{z}$ reciprokfüggvény által létesített leképezéseket, hiszen az általános eset ebből már hasonlósági transzformációval származtatható.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg, milyen alakzatba viszi át a $g(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény az

a) $|z| = 1$ kört;

b) $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Re}(z) > 0$ félegyenest;

c) $\mathrm{Re}(z) = 1$ egyenest!

a) A kört a $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in]-\pi, \pi]$ egyenlettel adhatjuk meg.

Képe: $\dfrac{1}{z} = e^{-i\varphi}$,

tehát az egységkört önmagára képezi le a függvény, de csak a $z = 1$ és a $z = -1$ pont képe marad helyben.

b) A félegyenest a $z = re^{\frac{\pi i}{4}}$ egyenlettel adhatjuk meg (ahol $r \in \mathbb{R}^+$).

Képe: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{\frac{-\pi i}{4}}$,

azaz a kép egy origóból induló félegyenes, mely az előző félegyenes valós tengelyre vett tükörképe. (Az origó képe a végtelen távoli pont.)

c) Az egyenest $z = 1 + it$ egyenlet jellemzi. Mivel

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

ezért az egyenesen

$$u = \frac{1}{1+t^2} \text{ és } v = -\frac{t}{1+t^2}.$$

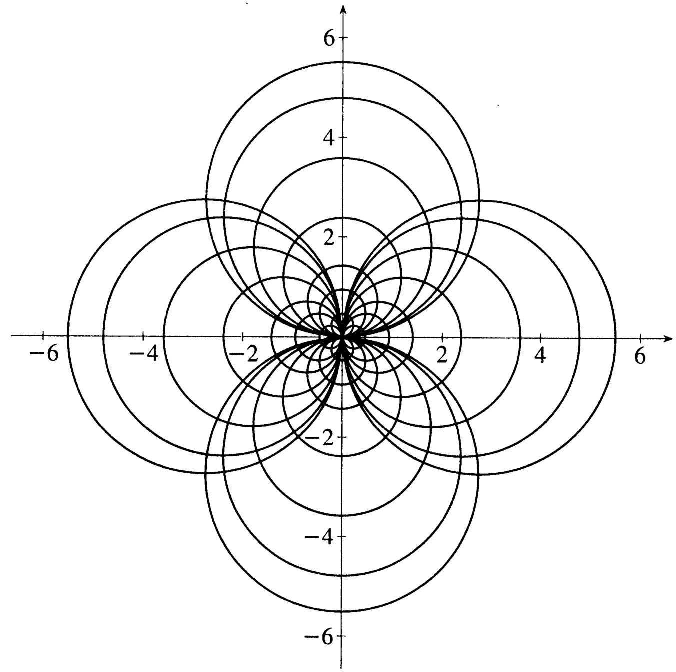
Vegyük észre, hogy

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{1+t^2} = u, \text{ azaz } \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4}.$$

A kép tehát az $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú, origón áthaladó kör.

Megjegyzés: A leképezés a $\mathrm{Re}(z) > 1$ félsíkot a kör belsejére képezi le. A $z = 1$ pont a leképezés során helyben marad, a $z = \infty$ képe az origó. Hasonlóan látható be, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesek képei – a tengelyek kivételével – más esetben is origón átmenő körök lesznek (3.8 ábra). A feladatból láthatóan a leképezés az egységsugarú kört

és a koordinátatengelyeket önmagukba viszi át. (Látni fogjuk, hogy más alakzatok képei is lehetnek önmaguk.)



3.8 ábra. A z sík tengelyekkel párhuzamos egyeneseinek leképezése a reciprokfüggvénnyel

2. Igazolja, hogy a reciprokfüggvény kört vagy egyenest körbe vagy egyenesbe visz át!

Az állítás nem jelenti azt, hogy kör képe kör, egyenes képe egyenes, mint azt az előző feladatnál is láttuk. Az egyenest $R = \infty$ sugarú körként értelmezve mondhatjuk, hogy a leképezés kört körbe visz át.

Az előző feladat megoldása során láttuk, hogy a

$$g(z) = \frac{1}{z}$$

függvény a $z = x + iy$ ponthoz a $w = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$ pontot rendeli.

A z síkon lévő kör az $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ egyenlettel jellemezhető. ($A = 0$ esetén az alakzat egyenes.)

Mivel a $P(x,\ y)$ pont képe a $P_1\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ pont, így a képalakzatra:

$$A\left(\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) + B\frac{x}{x^2+y^2} - C\frac{y}{x^2+y^2} + D = 0$$

Átalakítva:

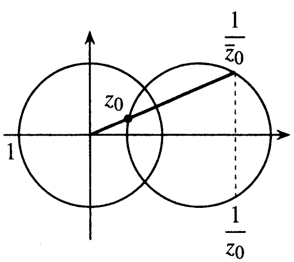
$$A + Bx - Cy + D\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

adódik, ami valóban kör ($D = 0$ esetén egyenes) egyenlete.

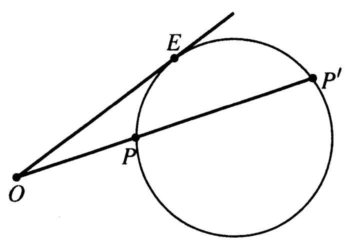
Ha a kép a végtelen távoli pontot tartalmazza, akkor egyenes, ellenkező esetben kör. Mivel a $z = 0$ pont képe a $w = \infty$, így az origón áthaladó kör képe egyenes, amely nem halad át az origón. Természetesen mivel a kép képe önmaga, így az origón át nem haladó egyenes képe origón átmenő kör. Az origón áthaladó egyenes képe origón áthaladó egyenes, amely az előző egyenes valós tengelyre vett tükörképe.

Vizsgáljuk meg a reciprokfüggvény leképezésének geometriai tartalmát!

Vegyünk fel egy tetszőleges $z_0 \neq 0$ pontot, annak képét – az $\dfrac{1}{z_0}$ pontot – és a kép konjugáltját, az $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ pontot; valamint e három ponton átmenő kört (3.9a ábra).



3.9a ábra



3.9b ábra

Az Olvasó geometriai tanulmányaiból ismeri, hogy az érintő hossza mértani közepe a szelő két szeletének (a 3.9b ábra szerint $OE^2 = OP{\cdot}OP'$).

Ezt az előző ábrára alkalmazva – mivel $\left|\dfrac{1}{\bar{z}}\right| \cdot |z| = 1$ – az origóból a körhöz húzott érintő hossza egységnyi, tehát az érintési pont rajta van az origó középpontú egységkörön. Ez viszont azt jelenti, hogy a két kör merőlegesen metszi egymást.

Ezt az egységkört merőlegesen metsző kört, melynek középpontja a valós tengelyen van, a reciprokfüggvény önmagára képezi le.

Megjegyzések:

A) A z_0 pont egységsugarú origó középpontú „körre vonatkozó tükörképének" szokás nevezni az $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ pontot (geometriában az inverzió felel meg ennek a transzformációnak).

B) Az $OP \cdot OP'$ szorzatot az O pont körre vonatkozó hatványának nevezik. Két kör esetén azon pontok halmaza, melyeknek a két körre vonatkozó hatványa megegyezik, egy egyenes, amelyet a körök hatványvonalának nevezünk. Körsornak nevezik a sík azon köreinek halmazát, melyeknek azonos a hatványvonaluk. Ha a körsor tagjainak nincs közös pontja, a körsor elliptikus; ha egy közös pontban érintkezik az összes kör, parabolikus; ha két közös pontjuk van, hiperbolikus körsorról beszélünk.

C) Két egymásra merőleges körsor a síkban egy bipoláris koordinátarendszert határoz meg. Kétféle háromdimenziós koordinátarendszer állítható elő belőle. Bipoláris koordinátarendszer, ha az ábrát a papír síkjára merőlegesen eltoljuk, toroidális koordinátarendszer, ha a képzetes tengely körül forgatjuk.

3. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$$|z - 1 - 2i| < 2$$

tartományt $|w - 4 - 5i| > 3$ tartományra képezi le!

A feladat tehát egy kör belsejének egy másik kör külsejére való leképezése. A körvonalak egymásra való leképezése – mint azt láttuk – megoldható lineáris függvénnyel, de ez a leképezés a körbelsőt a körbelsőre képezi le.

A feladat megoldásához toljuk el előbb a z síkon levő kört az origóba. Az eltolt érték reciprokát véve biztosítjuk, hogy a kör belsejének képe a kör külseje legyen. Ezután 6-tal szorozva elérjük, hogy a képkör sugara 3 egységre változzon, végül az így kapott kör középpontját a $w = 4 + 5i$ pontba toljuk.

A leképzés tehát:

$$w = 6 \cdot \frac{1}{z - 1 - 2i} + 4 + 5i = \frac{(4 + 5i)z + 12 - 13i}{z - 1 - 2i}$$

Ellenőrzésképpen:

A $z = 1 + 2i$ középpont képe a $w = \infty$, a $z = 1$ pont (az eredeti kör kerületének pontja) képe a $w = 4 + 8i$, amely a w síkbeli kör kerületének pontja.

4. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$\mathrm{Re}(z) \geq 0$

félsíkot a $|w - 4i| \leq 3$ körre képezi le!

A feladat megoldásánál felhasználjuk az 1. feladat c) részének eredményét.

Toljuk el az egyenest a valós tengely $z = 1$ pontjába. Tudjuk, hogy ezt az egyenest a reciprokfüggvény a $\left|w - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ körre képezi le (láttuk azt is, hogy a $\mathrm{Re}(z) > 1$ félsíkot a kör belsejére képezi le). A képkört eltoljuk az origóba, sugarát 6-szorosra növeljük, majd eltoljuk a pozitív képzetes tengely irányába négy egységgel.

A függvény tehát:

$$w = 6\left(\frac{1}{z - 3} - \frac{1}{2}\right) + 4i = \frac{z(-3 + 4i) + 15 - 12i}{z - 3}$$

A $z_0 = 4$ pont képe a $w_0 = 3 + 4i$ pont, a kör kerületi pontja, a $z_1 = 3$ pont képe – amely pont nem volt a leképezendő síkrészben – a $w_1 = \infty$ pont, amely a kör külseje.

5. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$|z - 1| \leq 4$

kört a $\mathrm{Re}(w) \geq \mathrm{Im}(w)$ félsíkra képezi le!

A megoldást az előző feladat mintájára keressük. Toljuk el a kört az origóba, s sugarát változtassuk $\frac{1}{2}$-re. Majd a középpontját a $z = \frac{1}{2}$ pontba

tolva alkalmazzuk rá a reciprokfüggvényt. Ez a kör belsejét a $\mathrm{Re}(w) \geq 1$ félsíkra képezi le. Az egyenest a w sík origójába toljuk, és $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$-gyel elforgatjuk. (A forgatást az $(1 - i)$-vel való szorzással végezzük, amely ugyan az origóból való nagyítást is végez, de ez – mint a lineáris függvényeknél láttuk – az egyenest helyben hagyja.)

A függvény, mely ezeket a transzformációkat elvégzi:

$$w = \left(\frac{1}{\frac{z - 1}{8} + \frac{1}{2}} - 1\right)(1 - i) = \frac{5 - z}{z + 3}(1 - i)$$

A $z_0 = -3$ kerületi pont képe a $w_0 = \infty$, a kör másik kerületi pontjának, a $z_1 = 5$ pontnak a képe a $w_1 = 0$ pont, amely a határoló egyenesen helyezkedik el. A kör egy belső pontjának, a $z_2 = 0$ pontnak a képe a $w_2 = 3 - 3\mathrm{i}$ pont, amely a képként kapott félsík pontja.

6. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely az

$\mathrm{Im}(z) \geq 2$

félsíkot a $|w - 3i| \leq 3$ körre képezi le!

A feladatot megoldhatnánk az előző két feladat mintájára is. Egy másik lehetséges megoldás, hogy a határoló egyenesen választunk három pontot, s megadjuk ezeknek a képét a körvonalon. A pontok kiválasztásánál figyelnünk kell arra, hogy az eredeti tartomány – a pontok sorrendjében haladva – ugyanarra az oldalra (például balra) essen, mint a képtartomány.

A pontpárok:

1. $z_1 = 2i$	$w_1 = 0$
2. $z_2 = 2 + 2i$	$w_2 = 3 + 3i$
3. $z_3 = \infty$	$w_3 = 6i$

A leképezést a

$$w = \frac{az + b}{z + c}$$

alakban keresve az ismeretlen állandókra három egyenletet kapunk.

A 3. szerint a ∞ képe $6i$, azaz: $a = 6i$, mivel végtelenben $w = a$.

Mivel a $z_1 = 2i$ képe a $w_1 = 0$,

$$0 = \frac{6i \cdot 2i + b}{2i + c},$$

innen $b = 12$, c meghatározása a 2. feltételből történik:

$$3 + 3i = \frac{6i \cdot (2 + 2i) + 12}{2 + 2i + c}, \text{ ahonnan } c = 0.$$

A leképezés tehát: $w = \dfrac{6iz + 12}{z}$

Ez a módszer bármely lineáris törtfüggvény meghatározásánál használható, de nem mindig a legegyszerűbb. A következő feladat egy egyszerűbb módszert mutat be.

7. Melyek azok a lineáris törtfüggvények, amelyek a $z_1 \neq z_2$ pontokhoz a $w_1 \neq w_2$ pontokat rendelik?

A törtfüggvényt a $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ alakban keressük.

Tudjuk, hogy $w_1 = \dfrac{az_1 + b}{cz_1 + d}$ és $w_2 = \dfrac{az_2 + b}{cz_2 + d}$.

Képezzük a $w - w_1$, illetve $w - w_2$ különbségeket:

$$w - w_1 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}$$

Hasonlóan:

$$w - w_2 = \frac{(ad - bc)(z - z_2)}{(cz + d)(cz_2 + d)}$$

A kettő hányadosa: $\dfrac{w - w_1}{w - w_2} = k \cdot \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$, ahol $k = \dfrac{cz_2 + d}{cz_1 + d}$, azaz egy komplex állandó.

Ennek meghatározása a $w_3 = f(z_3)$ feltételből lehetséges az adott feladatnál. Ezt a feltételt helyettesítve:

$$\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = k \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

k értékét kiküszöbölve:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Megjegyzés:

Legyenek $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ tetszőleges, de egymástól különböző komplex számok.

Ezek kettősviszonyát a

$$\left(z_1 z_2 z_3 z_4\right) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

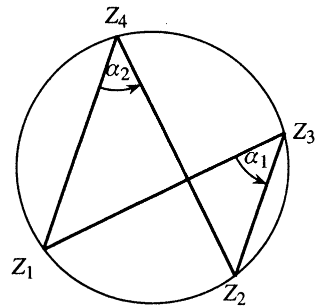
hányadossal definiáljuk. A kettősviszony tehát általában komplex szám.

Az előző feladat alapján mondhatjuk, hogy a lineáris törtfüggvény (és természetesen a lineáris függvény is) a kettősviszony értékét változatlanul hagyja.

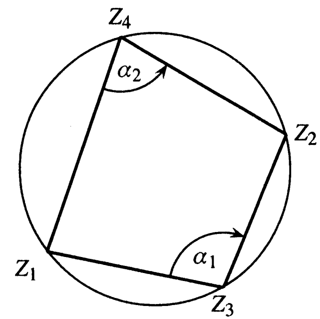
Érvényes a következő állítás is: A kettősviszony értéke akkor és csak akkor valós, ha a négy pont egy körön helyezkedik el. (Természetesen itt is az egyenest $R = \infty$ sugarú körnek tekinthetjük.)

Alábbiakban csak vázoljuk a bizonyítás menetét.

Helyezkedjen el a 4 pont egy körön!



3.10a ábra



3.10b ábra

A 3.10a ábrából láthatóan $\alpha_1 = \alpha_2$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek), illetve $-\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, azaz $\alpha_2 = \alpha_1 - \pi$, ha a pontok sorrendje a 3.10b ábra szerinti.

A $\left(z_1 z_3 z_2\right)$ szög a $\left(z_1 - z_3\right)$ és a $\left(z_2 - z_3\right)$ vektorok szöge, azaz

$$\alpha_1 = \operatorname{arc}\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{arc}\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Hasonlóan a $\left(z_1 z_4 z_2\right)$ szögre:

$$\alpha_2 = \operatorname{arc}\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

Ebből következően a két szög azonos (illetve eltérése csak $k\pi$ lehet), tehát a kettősviszony arkusza π többszöröse, azaz a kettősviszony valós szám. (Belátható, hogy az állítás fordítva is igaz.)

8. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a $|z - 3i| \leq 3$ síkrészt a $\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)$ félsíkra képezi le!

A 6. feladathoz hasonlóan 3 pontot veszünk fel a körvonalon, s ezek képeit – megfelelő sorrendben – az egyenesen.

Az összetartozó pontpárok:

$f(-3 + 3i) = 0$, $f(0) = \infty$, $f(3 + 3i) = -1 - i$.

Az értékeket az előző feladatban kapott összefüggésbe helyettesítve:

$$\frac{w - 0}{w - \infty} \cdot \frac{-1 - i - \infty}{-1 - i - 0} = \frac{z + 3 - 3i}{z - 0} \cdot \frac{3 + 3i - 0}{(3 + 3i) - (-3 + 3i)}$$

Egyszerűsítve:

$$\frac{w}{-1 - i} = \frac{z + 3 - 3i}{z} \cdot \frac{3 + 3i}{6}$$

Azaz:

$$w = \frac{z + 3 - 3i}{iz}$$

Ellenőrzésképpen a kör egy belső pontjának, a $z = i$ pontnak a képe a $w = -3 + 2i$ pont, amely valóban a $\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z)$ félsíkba esik.

Megjegyzés: Az előző feladatbeli összefüggés alkalmazásánál célszerű volt a $w_2 = \infty$ választás, ekkor ugyanis az egyenletből egyszerűbb w kifejezése.

9. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a

$z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$

félkört a valós tengely $[-1, 1]$ intervallumára képezi le!

A feladat megoldásához felhasználjuk azt a tényt, hogy ha $f(z)$ lineáris törtfüggvény, akkor amennyiben a z pont a z_1, z_2 végpontú köríven mozog, képe a w_1, w_2 végpontú íven halad. (Az ív természetesen egyenes szakasz is lehet.)

Az előző feladathoz hasonlóan 3 pontot választunk:

$f(-1) = -1$, $f(i) = 0$, $f(1) = 1$.

A 7. feladat alapján:

$$\frac{w - (-1)}{w - 0} \cdot \frac{1 - 0}{1 - (-1)} = \frac{z - (-1)}{z - i} \cdot \frac{1 - i}{1 - (-1)}$$

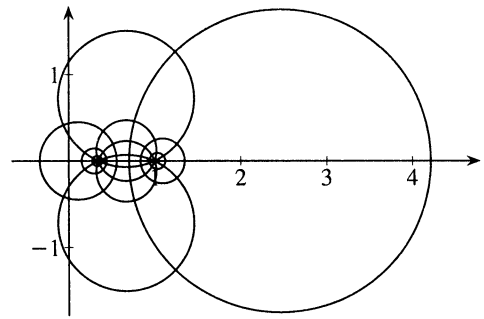
Rendezve:

$$w = \frac{z - i}{1 - iz} = i\frac{z - i}{z + i}$$

Ellenőrizhetjük, hogy a kiszemelt pontok képei az előírt képpontok.

10. Határozza meg, hogy a $w = \dfrac{z - 1}{z - 3}$ lineáris törtfüggvény milyen alakzatba viszi át a z sík origón áthaladó egyeneseit, illetve origó középpontú köreit!

Az inverz leképezés: $z = \dfrac{3w - 1}{w - 1}$. Ebből láthatóan a $w_1 = 1$ pont képe a $z_1 = \infty$, és a $w_2 = \dfrac{1}{3}$ pont képe a $z_2 = 0$, tehát a w_1 és w_2 pontokon átmenő körök képei a z síkon az origón áthaladó egyenesek. Tehát az eredeti függvény az origón áthaladó egyeneseket a w_1 és w_2 pontokat tartalmazó körökre képezi le.



3.11 ábra. A z sík origón áthaladó egyeneseinek, illetve origó középpontú köreinek leképezése a $w = \dfrac{z - 1}{z - 3}$ függvénnyel

A $|z| = r$ egyenletű, z síkon lévő, origó középpontú körre:

$$|z| = \left|\frac{3w - 1}{w - 1}\right| = \frac{|3w - 1|}{|w - 1|} = r$$

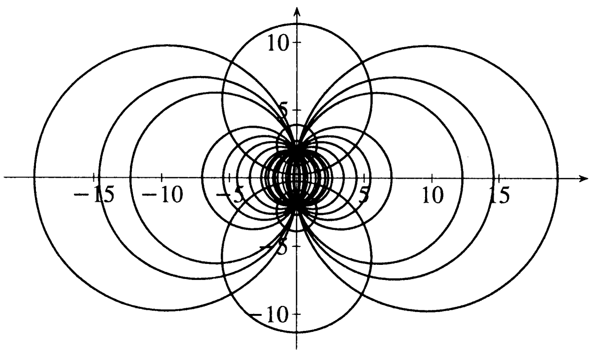
egyenlettel jellemezhető alakzatot kapunk, amely olyan w pontokat tartalmaz, melyeknek az $\dfrac{1}{3}$ ponttól való távolsága r-szerese az 1 ponttól való távolságuknak.

Ezek a pontok egy úgynevezett Apollóniosz-körön helyezkednek el, amely kör a két ponton áthaladó köröket merőlegesen metszi (3.11 ábra). (Speciálisan $r = 1$ esetben a két pont felező merőlegesét kapjuk.)

Megjegyzés: A két körsereg a w_1, w_2 pontokban elhelyezkedő azonos nagyságú, de ellentétes előjelű ponttöltések erővonalrendszerét, illetve ekvipotenciális vonalait adja. Látható, hogy a w síkon kapott ábra szimmetrikus a $w = \frac{1}{3}$ és $w = 1$ pontok felező merőlegesére. Ezt az egyenest a körök merőlegesen metszik.

11. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a $z = 0$ pontot a $w = 2i$ pontra képezi le, s a z sík origón átmenő egyeneseinek képe a w sík valós tengelyét merőlegesen metsző körök lesznek!

Az előző feladat megjegyzését használjuk fel a feladat megoldásához.



3.12 ábra. A z sík origóból induló félegyeneseinek, illetve origó középpontú köreinek leképezése a $w = \dfrac{-2i(z+1)}{z-1}$ függvénnyel

A $w = 2i$ és $w = -2i$ pontokon áthaladó körök a valós tengelyt merőlegesen metszik. A $z = \dfrac{w-2i}{w+2i}$ leképezés a z sík origón átmenő egyeneseit a két pontot tartalmazó körökre képezi le. (Látható, hogy $z = 0$, ha $w = 2i$.)

Rendezve: $w = \dfrac{-2i(z+1)}{z-1}$.

Az előző feladathoz hasonlóan a $|z| = r$ origó középpontú körök képei erre a körseregre merőleges körök (Apollóniosz-körök) (3.12 ábra).

Megjegyzés:

A) Ha csak az $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ félsíkot nézzük, a leképezés a $2i$ pontban elhelyezett ponttöltés és a valós tengelyen lévő fémlapon kialakuló elektromos erőtér erővonalainak, illetve ekvipotenciális vonalainak képét adja.

B) Ha nem merőlegesen, hanem adott szögben kell a köröknek a valós tengelyt metszeni, akkor elég egyetlen ilyen kört vizsgálni (például amelynek a középpontja a képzetes tengelyen van), hogy hol metszi a képzetes tengelyt. A $2i$ pont és a metszéspont segítségével e feladat módszerével a leképezés előállítható.

12. Határozza meg, hogy melyek azok a pontok, amelyek a 10. feladatbeli leképezés során helyben maradnak!

A leképezést a $w = \dfrac{z-1}{z-3}$ képlet definiálta.

Ha a pont képe önmaga, akkor $w = z$, azaz $z = \dfrac{z-1}{z-3}$.

Ebből $z_1 = 2 + \sqrt{3}$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Tehát a valós tengely két pontja marad helyben a leképezés során.

Megjegyzés:

A 7. feladat alapján a függvény

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = k \cdot \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

alakban is felírható, ahol k értéke – egy z_1, z_2-től különböző – összetartozó pontpár alapján határozható meg. A fenti alakot szokás a leképezés normálalakjának nevezni.

13. Határozza meg azt a lineáris törtfüggvényt, amely a $|z| < 1$, $|z+1| \geq \sqrt{2}$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ feltételekkel jellemzett síkrészt a

$$0 \leq \mathrm{arc}(w) \leq \frac{\pi}{4}$$

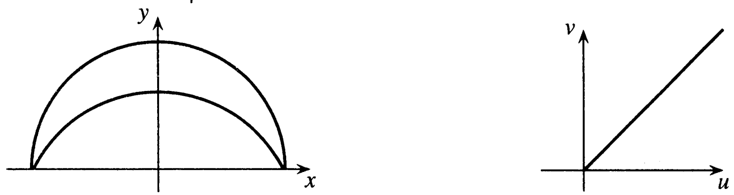
síkrészre képezi le (3.13 ábra)!

A két kör a $z = 1$ és a $z = -1$ pontokban metszi egymást.

Az a leképezés, amely az e pontokon átmenő köröket origón átmenő egyenesekbe képezi le – az előző feladatokban látottak alapján:

$$w = \frac{z+1}{z-1} \text{ alakú.}$$

Ez a függvény az egységkört a képzetes tengelyre képezi le, a másik kör képe az $\operatorname{arc}(w) = \frac{\pi}{4}$ egyenes.



3.13 ábra

Ha a kapott tartományt $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$-gyel elforgatjuk, megkapjuk a megfelelő leképezést, amely tehát az

$$f(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

függvénnyel jellemezhető.

14. Igazolja, hogy a

$$w = k \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

függvény, ahol k és a komplex állandók, melyekre $|k| = 1$, és $|a| < 1$, az egységkört önmagára képezi le!

(Tehát az egységkörvonal képe önmaga, az egységkör belsejét annak belsejére képezi le a függvény.)

Vizsgáljuk meg a $k \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ törtet!

$a = 0$ esetén a függvény egy lineáris függvény, mely a $|k| = 1$ miatt csak $\operatorname{arc}(k)$-val elforgatja az egységkört.

Ha $a \neq 0$, akkor a leképezés lineáris törtfüggvény. E leképezésnél az origó képe a $w = -ka$ pont, amely $|a| < 1$ miatt az egységkör belsejében van.

A $z = \infty$ képe a $w = -\frac{k}{a}$ pont, amely az egységkörön kívül helyezkedik el. Be kell látnunk, hogy a körvonal képe önmaga.

Mivel $|k| = 1$, így $|w| = \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|}$.

Vizsgáljuk meg, hogy a tört számlálójának és nevezőjének abszolút értéke mikor lesz egyenlő, azaz különbségük mikor lesz nulla.

$$|z-a|^2 - |1-\bar{a}z|^2 = (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) - (1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) =$$
$$= z\bar{z} + a\bar{a} - 1 - a\bar{a}\cdot z\bar{z} = |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2 =$$
$$= \left(|z|^2 - 1\right)\left(1 - |a|^2\right)$$

Mivel $|z| < 1$ esetén a szorzat negatív, azaz $|w| < 1$, így a kör belsejét annak belsejére képezi le a függvény.

Megjegyzés:

Igazolható, hogy csak a fenti függvények, illetve azok konjugáltjai a

$$w_1 = \bar{k} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}}$$

függvények képezik le az egységkört önmagára.

Az $f(z) = \frac{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0}$ alakú függvényt *racionális törtfüggvénynek* nevezzük. (Ha $m = 0$, *racionális egészfüggvényről* beszélünk.) E törtfüggvények közül az előzőeken kívül a

$$g(z) = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

függvény leképezésével foglalkozunk.

15. Vizsgálja meg, hogy a

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

függvény milyen alakzatra képezi le a $|z| = r > 1$ origó középpontú köröket!

A kör a $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in]-\pi, \pi]$ egyenlettel jellemezhető. Ez esetben

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

A leképezés során tehát:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

Azaz a kép ellipszis, melynek fókusztávolsága egységnyi, mivel

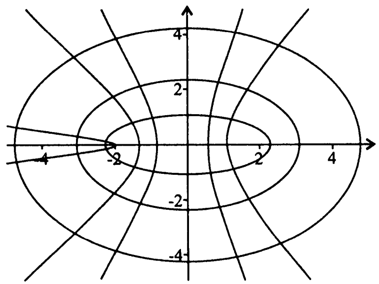
$$a^2 - b^2 = 1.$$

Ha $r \approx 1$, akkor az ellipszis rásimul a valós tengely $[-1, 1]$ intervallumára. Az egységkör képe ezt az intervallumot kétszer futja be. Ahhoz, hogy a $|z| \geq 1$ síkrészt a függvény kölcsönösen egyértelműen képezze le a teljes síkra, a síkot ennél az intervallumnál bemetszik, s a felső félkör képe a metszésvonal felső fele, az alsó félköré a metszésvonal alsó fele. (A leképezés inverze ezt a bemetszett síkot képezi le a teljes síkra.)

16. Határozza meg, hogy milyen alakzatba viszi át a

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

függvény az $\mathrm{arc}(z) = \varphi =$ állandó, $|z| > 1$ félegyeneseket! Az egyenesek a $z = re^{i\varphi}$, $r > 1$, φ állandó egyenlettel jellemezhetőek.



3.14 ábra. A z sík origóból induló félegyeneseinek, illetve origó középpontú köreinek leképezése a $w = 0{,}5\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvénnyel

Az előző feladat alapján a leképezés során:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

Az egyenletrendszerből most r értékét kell kiküszöbölni.

A tengelyeken $\cos\varphi$, illetve $\sin\varphi$ értéke 0, ezek képe önmaga. Ha $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$ egyike sem zérus, akkor:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

A kép tehát hiperbola, melynek fókusza az előző ellipszisek fókuszával azonos, tehát az így keletkező ellipszisek és hiperbolák merőlegesek egymásra (3.14 ábra).

Megjegyzés:

A $g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvényt szokás Zsukovszkij-féle függvénynek is nevezni. Jelentősége a repülőgép szárnyprofilját előállító leképezésben van.

3.5 A Bolyai-geometria Poincaré-féle modellje

Mint az Olvasó előtt bizonyára ismert, Bolyai az euklideszi geometriában szereplő egyik alapigazságot (axiómát, posztulátumot) figyelmen kívül hagyva épített fel egy új geometriát. Az öt euklideszi posztulátum:

- Minden pontból minden ponthoz húzható egyenes.
- Minden egyenesdarab folyamatosan meghosszabbítható.
- Minden pont körül tetszőleges sugárral kör rajzolható.
- A derékszögek mind egyenlők egymással.
- Ha két egyenest egy harmadik metsz, akkor e két egyenes a metsző egyenesnek azon az oldalán metszi egymást, amelyiken a belső szögek összege kisebb két derékszögnél.

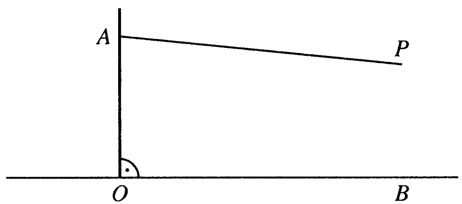
Az utolsó azt jelenti, hogy a síkban egy adott ponton át csak egyetlen egy olyan egyenes húzható, mely egy az adott pontra nem illeszkedő egyenest nem metsz, azaz csak egyetlen, az adott pontra illeszkedő, azzal párhuzamos egyenes létezik.

Ez a posztulátum „kilóg" a többi közül, nem tűnik alapigazságnak, nem teljesen magától értetődő.

A matematikusok hosszú időn át sikertelenül próbálták a többire visszavezetni, azok segítségével igazolni vagy cáfolni. Bolyai eltekintett ettől a posztulátumtól, s a többi felhasználásával felépített egy új geometriát, „semmiből egy új világot" teremtett.

Az általa alkotott (hiperbolikus) geometriában a síkban egy adott ponton át legalább két olyan egyenes halad, amely egy adott pontra nem illeszkedő egyenest nem metsz.

Bolyai a párhuzamosságot a következőképpen definiálja: Ha az *AP* félegyenes nem metszi az *OB* félegyenest, de az *OAP* szög belsejében lévő bármely más egyenes metszi azt, akkor az *AP* félegyenes párhuzamos az *OB* félegyenessel (3.15 ábra).



3.15 ábra

Bolyai János 1827-ben dolgozta ki, és 1833-ban publikálta elméletét. Édesapja Tentamen című matematika könyvének függelékeként jelent meg ez az új geometriát nagyon tömören ismertető Appendix.

Ennek a geometriának – mely az euklideszi geometrián nevelkedett ember számára meglehetősen szokatlan – egy modelljét alkotta meg Poincaré.

Nem célunk a Bolyai-geometria tárgyalása, csak a modell és a lineáris törtfüggvények leképezése közötti kapcsolatot mutatjuk be.

Ebben a modellben a teljes nemeuklideszi síknak a komplex számsík egységkörének belseje felel meg. (Az egységkör határa a végtelen távoli pontokat tartalmazza, szokás horizontnak is nevezni.) A modellben az „egyenesek" alatt az egységkört merőlegesen metsző köröknek a $|z| < 1$ tartományba eső részeit értjük. A reciprokfüggvény tárgyalásakor láttuk, hogy egy kör akkor és csak akkor metszi merőlegesen az egységkört, ha azt a $w = \frac{1}{z}$ függvény önmagára képezi le. Ha tehát a kör tartalmazza a z, a $\bar{z}$ és az $\frac{1}{z}$ pontokat, akkor a képe önmaga, így az egységkört merőlegesen metszi. Az euklideszi axiómák egyike, hogy bármely két ponton áthalad egy egyenes. Ez a modellben is igaz.

Legyen a körbelső két tetszőleges pontja: z_1, z_2 ($z_1 \neq z_2$).

A z_1, z_2, $\frac{1}{\bar{z}_1}$ pontok meghatároznak egy kört (amely az $\frac{1}{\bar{z}_2}$ pontot is tartalmazza.)

Ez a kör az egységkört merőlegesen metszi, azaz ennek a körbelsőbe eső íve a z_1, z_2 pontokon átmenő „egyenes".

Ha a z_1, z_2 pontok valamelyike a horizont egy pontja (jelöljük Z-vel, legyen például $z_2 = Z$), akkor a z_1, Z, $\frac{1}{\bar{z}_1}$ pontok adják a kör három pontját.

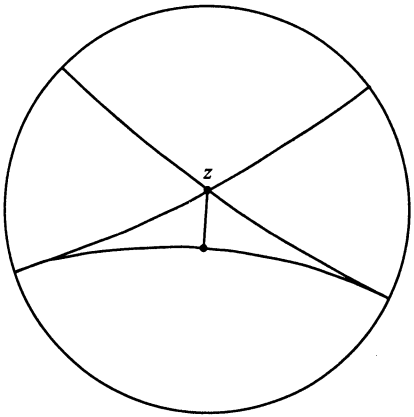
Ha z_1, z_2 mindketten horizontpontok, akkor is van rajtuk átmenő, az egységkört merőlegesen metsző kör, azaz rajtuk átmenő „egyenes".

Tekintsünk egy e „egyenest", s egy rajta kívül lévő z pontot ($|z| < 1$). Az e „egyenes" két horizontpontját jelölje Z és Z^*.

A z, Z pontokon, illetve a z, Z^* pontokon áthaladó „egyeneseket" az e-vel párhuzamos egyeneseknek nevezzük. Ebben a geometriában tehát a sikban egy adott ponton át egy adott pontra nem illeszkedő egyenessel két párhuzamos egyenes fektethető. E két egyenes metszéspontja a z pont (3.16 ábra).

A két egyenes z-nél két pár csúcsszöget alkot. Az egyik szögtartományban a z-n áthaladó összes egyenes metszi e-t, a másikban lévők közül egyik sem metszi, s nem is párhuzamosak e-vel. Vagyis ebben a geometriában végtelen sok olyan z-n áthaladó „egyenes" van, amely nem metszi az e egyenest. (Ezeket eltérő, ultrapárhuzamos egyeneseknek nevezzük. Ilyenek az euklideszi geometriában nincsenek.)

Az euklideszi geometriában egybevágónak nevezünk két alakzatot, ha azok egybevágósági transzformációval kölcsönösen fedésbe hozhatók.



3.16 ábra

Ahhoz, hogy az egybevágóság fogalmát értelmezhessük, meg kell mondanunk, hogy e modellben mit nevezünk a sík egybevágósági transzformációjának. Nyilvánvalóan olyan transzformációt kell keresnünk, amely a „síkot" (a körlapot) önmagára képezi le.

Ezek a transzformációk az előző rész utolsó feladata szerint a $w = k \cdot \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, illetve a $w_1 = \bar{k} \cdot \dfrac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}}$, $|k| < 1$, $|a| < 1$ függvényekkel jellemzett leképezések.

Mivel a lineáris törtfüggvények általi leképezés szögtartó, így az egységkörre merőleges köröket is ugyanilyen körökbe viszi át, vagyis az „egyenesek" képei „egyenesek".

Igazolható, hogy e transzformációkkal bármely „egyenes" átvihető egy tetszőleges másik „egyenes"-be. Két alakzatot egybevágónak nevezünk, ha ezekkel a transzformációkkal leképezhetők egymásra. (A leképezéskor a w függvény a körüljárási irányt megtartja, w_1 megfordítja.) Csak érdekességként jegyezzük meg, hogy a Bolyai-geometriában bármely két háromszög egybevágó, ha szögei egyenlők.

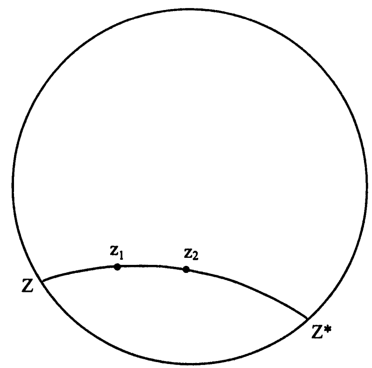
A szögek mérését és egybevágóságát az teszi lehetővé, hogy a lineáris törtfüggvények általi leképezés (euklideszi értelemben is) szögtartó. Ily módon a szögek egybevágóságát és mértékét az euklideszi geometriában megszokott módon értelmezhetjük.

Itt is megfigyelhetünk igen sok szokatlan dolgot. Vegyünk fel három horizontpontot, s vizsgáljuk az e pontokkal meghatározott háromszöget.

Mivel az oldalaknak a horizontpontjai azonosak, az oldalak párhuzamosak, így e háromszög belső szögeinek összege 0°.

(Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus geometriában felvett tetszőleges háromszög esetén a belső szögek összege mindig 180°-nál kevesebb lesz.)

A távolság értelmezéséhez az előzőekben látott kettősviszonyt vizsgáljuk.



3.17 ábra

Legyen az e „egyenes” két pontja z_1 és z_2, két horizontpontja Z és Z^*.

Ekkor a $(ZZ^*z_1z_2)$ kettősviszony (3.17 ábra):

$$(ZZ^*z_1z_2) = \frac{z_1 - Z}{z_1 - Z^*} : \frac{z_2 - Z}{z_2 - Z^*}$$

Mivel a négy pont egy „egyenesen” van, így a kettősviszony értéke valós szám lesz, s sorrendjük megválasztása miatt értéke legalább 1. (Csak $z_1 = z_2$ esetén egyenlő 1-gyel.)

Ezen kettősviszony értékét a lineáris törtfüggvény általi leképezés nem változtatja meg, így ez a z_1, z_2 pontpárra jellemző állandó.

A z_1, z_2 pontok távolságát e kettősviszony logaritmusával jellemezhetjük. (A logaritmus alapszáma tetszőleges 1-nél nagyobb rögzített szám lehet.) Az így definiált $\vartheta(z_1, z_2)$ távolság a távolságaxiómáknak eleget tesz.

Tetszőleges z_1, z_2 esetén:

- $\vartheta(z_1, z_2) \geq 0$ (és $\vartheta(z_1, z_2) = 0$ csak $z_1 = z_2$ esetben);
- $\vartheta(z_1, z_2) = \vartheta(z_2, z_1)$; továbbá,
- ha z_1, z_2, z_3 egy „egyenes” három pontja (z_2 a körbelső pontja), akkor $\vartheta(z_1, z_3) = \vartheta(z_1, z_2) + \vartheta(z_2, z_3)$, tehát az additív tulajdonság is érvényes.

Vizsgáljuk meg a

$$w = \frac{z + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}z}$$

függvény által létesített leképezést. Ez a leképezés az egységkört önmagába viszi át.

A $z_1 = 0$ képe a $w_1 = \frac{1}{2}$, a $z = 1$ pont képe önmaga, tehát a leképezés a valós tengelyt helyben hagyja.

A $z_2 = \frac{1}{2}$ pont képe a $w_2 = \frac{4}{5}$ pont.

Az előzőek értelmében tehát a z_1, z_2 pontot összekötő szakasz képe a w_1, w_2 pontokat összekötő szakasz, így ezek hossza (nemeuklideszi értelemben) egyenlő.

Ezt az eljárást folytatva a valós tengelyen egy „skálát” készíthetünk, a tengelyt egyenlő hosszúságú részekre bonthatjuk.

(A $z_3 = \frac{4}{5}$ pont képe a $w_3 = \frac{13}{14}, \ldots$)

A z_1, z_2 pontok és azok horizontpontjai (mivel z_1, z_2 a valós tengelyen van, így $Z = -1$, $Z^* = 1$) esetén a kettősviszony:

$$k = (Zz_1z_2Z^*) = \frac{3}{2}$$

Ha a távolságot e feladat esetében az

$$\vartheta(z_1, z_2) = \frac{\ln k}{\ln 1{,}5}$$

képlettel értelmezzük, akkor a z_1, z_2 pontok távolsága egységnyi, így a valós tengely egységekre való beosztását készítettük el.

A leképezés során a képzetes tengely képe egy „egyenes” lesz, amely „egyenesre” tükrözve az origót a w_2 pontot kapjuk. (Ez az „egyenes” a z_1 és w_2 pontok felező merőlegese.)

Vizsgáljuk meg kicsit részletesebben, hogy mit jelent e modellben a tengelyes tükrözés!

A $w = \frac{1}{z}$ függvény általi leképezés tulajdonságainak vizsgálatakor említettük, hogy a z és az $\frac{1}{\bar{z}}$ pontok egymásnak a körre vonatkozó „tükörképei” (r sugarú kör esetén a z és az $\frac{r^2}{\bar{z}}$ pontok ilyen tulajdonságúak.)

Mivel itt az „egyenes” egy körív, a tengelyes tükrözés erre a körre való tükrözést jelent. (Ezzel a transzformációval a reciprokfüggvény leképezésének tárgyalása során foglalkoztunk.) A többi transzformáció lényegében visszavezethető a tengelyes tükrözésre.

- A pontra való tükrözés két – az adott ponton áthaladó – egymásra merőleges egyenesre való tükrözéssel helyettesíthető.

- Ha az előző egyenesek nem merőlegesek, pont körüli forgatást kapunk.
- Két párhuzamos egyenesre való tükrözés egymásutánja pedig egy eltolást eredményez.

3.6 Az exponenciális és a logaritmusfüggvény

Az exponenciális függvényt a

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

egyenlőséggel értelmezzük. (Lásd későbbiekben még a Taylor-sorokat.)

Ez az értelmezés egyrészt z valós értékeire az e^x függvényt adja, másrészt az 1. fejezetben tárgyalt exponenciális alakot is tartalmazza.

Az exponenciális alaknál látottak alapján a definícióból következik, hogy a hatványozás azonosságai komplex kitevő esetén is változatlanul érvényesek. Ugyanis például:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1+iy_1} \cdot e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_2} =$$

$$= e^{x_1+x_2} \cdot e^{i\left(y_1+y_2\right)} = e^{z_1+z_2}$$

A definíciókból következik, hogy az így értelmezett exponenciális függvény periodikus, hiszen

$$f(z) = f(z + 2\pi i)$$

A függvény valós része: $u(x, y) = e^x \cos y$

képzetes része: $v(x, y) = e^x \sin y$

Mivel nincs olyan y érték, melyre $\cos y$ és $\sin y$ egyszerre lenne 0-val egyenlő, így az exponenciális függvénynek a komplex számok körében sincs zérushelye. Érdekesség, hogy – a valóstól eltérően – a függvénynek ∞-ben nincs határértéke. Ugyanis a $z = \infty$ – mint abban megállapodtunk – a $\lim |z| = \infty$ relációt jelenti, ez viszont igen sokféleképpen realizálódhat. Például $y = 0$ esetén ha x pozitív végtelenhez tart, a függvényértékek is végtelenhez tartanak, ha x negatív végtelenhez tart, a függvényértékek nullához közelednek.

Mivel ezek az értékek különbözőek, így az exponenciális függvénynek valóban nincs végtelenben határértéke. (Látható ez abból is, hogy rögzített x mellett y értékét növelve nincs a függvénynek határértéke.)

Az exponenciális függvény a z sík $-\pi < y \leq \pi$ sávját képezi le a teljes w síkra. Az előzőek alapján a képpontok között a 0 és a ∞ nem szerepel.

(A kölcsönösen egyértelmű leképezés biztosításához most egy végtelen sok levélből összetett, 0-nál és ∞-nél kilyukasztott Riemann-felület szükséges.)

Gyakorló feladatok

1. Az exponenciális függvény definíciója alapján határozza meg, mely komplex számokra teljesülnek az

a) $e^z = -20$

b) $e^z = 20i$ egyenlőségek!

a) A definició alapján

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = -20 + i \cdot 0$$

A valós és a képzetes részeket összehasonlítva az

$$e^x \cos y = -20$$

$$e^x \sin y = 0$$

egyenleteknek kell teljesülniük.

A második egyenletből, mivel $e^x \neq 0$, $\sin y = 0$, azaz $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$e^x \cdot \cos k\pi = -20$$

Az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, ekkor ugyanis $\cos k\pi = -1$; azaz:

$$z = \ln 20 + (2n + 1)\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

esetén lesz $e^z = -20$.

b) Az előzőhöz hasonlóan:

$$e^x \cos y + ie^x \sin y = 0 + 20i, \text{ azaz}$$

$e^x \cos y = 0,\ e^x \sin y = 20.$

Az első egyenletből $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ következik, amit a másodikba helyettesítve látszik, hogy $k = 2n\ n \in \mathbb{Z}$ esetén lehet megoldás, azaz:

$$z = \ln 20 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),\quad n \in \mathbb{Z}.$$

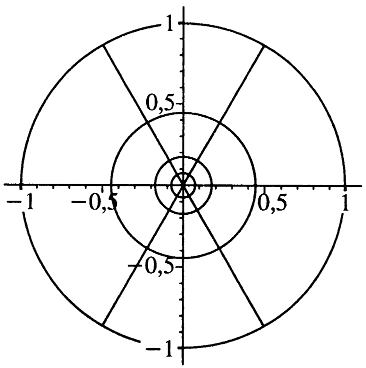
2. Határozza meg, milyen alakzatra képezi le az exponenciális függvény a z sík tengelyekkel párhuzamos egyeneseit!

Mivel az exponenciális függvény a z sík $-\pi < y \le \pi$ sávját képezi le a teljes w síkra, így a képzetes tengellyel párhuzamos egyenesekből elég ezeket a szakaszokat vizsgálnunk. Ezek a $z = x_0 + ti,\quad t \in]-\pi, \pi]$ egyenlettel jellemezhetőek.

Ebben az esetben $u = e^{x_0}\cos t,\ v = e^{x_0}\sin t$. Ha a két egyenletet négyzetre emeljük és összeadjuk, akkor az

$$u^2 + v^2 = e^{2x_0}$$

egyenletet kapjuk, mely a w sík origó középpontú körének az egyenlete. Ezek a körök adják tehát a képzetes tengellyel párhuzamos egyenes szakaszok képét. (Ha t-re nem teszünk kikötést, akkor a pont többször is befutja ezt a kört.)



3.18 ábra. A z sík tengelyekkel párhuzamos egyeneseinek leképezése az exponenciális függvénnyel

A valós tengellyel párhuzamos egyenesek közül elegendő a $]-\pi, \pi]$ sávba eső egyenesek képeit vizsgálni, hiszen a függvény periodikus.

Ezek az egyenesek a

$$z = t + iy_0,\ t \in \mathbb{R},\ y_0 \in]-\pi, \pi]$$

egyenlettel jellemezhetőek.

Ebben az esetben $u = e^t \cos y_0,\ v = e^t \sin y_0$.

Ha $y_0 = \dfrac{\pi}{2}$, a képzetes tengely pozitív felét; ha $y_0 = -\dfrac{\pi}{2}$, a képzetes tengely negatív felét kapjuk.

Ha $\cos y_0 \ne 0$, a két egyenletet elosztva kiküszöbölhető t értéke:

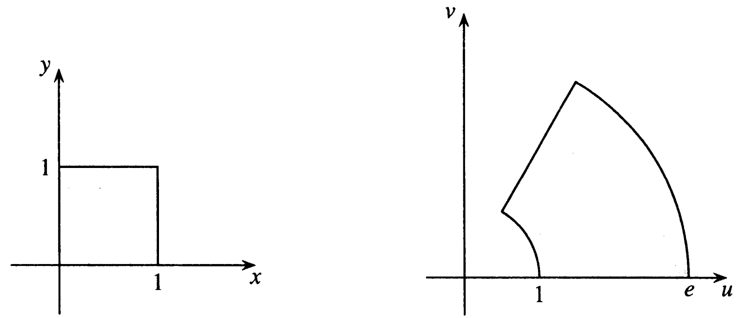
$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} y_0,$$

amely egy – az origót nem tartalmazó – félegyenes egyenlete (3.18 ábra).

3. Határozza meg, milyen alakzatra képezi le az exponenciális függvény a z sík egységnégyzetét!

Az előző feladatban láttuk, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesek képei origó középpontú körök, illetve origó felé tartó félegyenesek.

A pozitív valós tengely $[0, 1]$ szakaszának képe a w síkon a pozitív valós tengely $[1, e]$ szakasza. A $z = t + i,\ t \in [0, 1]$ képe az előző feladat szerint a $v = u \cdot \operatorname{tg} 1$ egyenes egy szakasza. A képzetes tengely $[0, 1]$ szakaszának képe az egységkör íve, hasonlóan a $z = 1 + ti,\ t \in [0, 1]$ szakasz képe egy e sugarú kör íve (3.19 ábra).



3.19 ábra

Az egységnégyzet képe tehát egy körgyűrűdarab. Ha a feladatban egységnégyzet helyett a $\mathrm{Re}(z) \in [-1, 1]$, $\mathrm{Im}(z) \in]-\pi, \pi]$ tartományt képezzük le, a kép egy teljes körgyűrű.

4. Határozza meg, milyen alakzatra képezi le az exponenciális függvény az $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ egyenest!

Az egyenes a $z = t + ti$, $t \in \mathbb{R}$ egyenlettel jellemezhető; képe:

$e^z = e^t(\cos t + i \sin t)$, azaz

$u = e^t \cos t$ és $v = e^t \sin t$, vagy

polárkoordinátás alakban $r = e^t$, a képe tehát egy logaritmikus spirál.

A *logaritmusfüggvényt* az exponenciális függvény inverzeként értelmezzük. Az eddigiekhez hasonlóan az értelmezésnél itt is egyértékű függvényt kívánunk elérni, ezért most is ragaszkodunk a $\varphi \in]-\pi, \pi]$ megszorításhoz. Láttuk ugyanis az exponenciális függvény értelmezésénél, hogy a függvény a $-\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi$ sávot képezi le az origót és a végtelent nem tartalmazó w síkra, tehát ha a fenti megszorítást tesszük, a logaritmusfüggvény egyértékű lesz.

A logaritmus definíciója:

A $z = re^{i\varphi}$ komplex szám logaritmusa az $\ln z = \ln r + i\varphi$ komplex szám, ahol $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

Ha z pozitív valós szám, akkor $\varphi = 0$, ez esetben tehát a valós függvények körében megismert logaritmusfüggvényt kapjuk.

Az így értelmezett logaritmus valóban az exponenciális függvény inverze, ugyanis: $e^{\ln z} = e^{\ln r + i\varphi} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} = re^{i\varphi} = z$

(Megjegyezzük, hogy a gyökvonásnál említetthez hasonlóan itt is szokás többértékű – végtelen sok értékű – függvényről beszélni.

Ilyenkor az $e^w = z$ egyenlet összes lehetséges megoldása adja $\ln z$ értékét, az általunk értelmezett értéket ilyenkor főértéknek nevezik. Ezzel az értelmezési móddal könyvünkben nem foglalkozunk.)

Mivel az exponenciális függvény a 0 és a ∞ értéket nem veszi fel, így a logaritmusfüggvény e két helyen nincs értelmezve.

Belátható, hogy a logaritmus megszokott azonosságai az így értelmezett logaritmusfüggvénynél érvényesek maradnak.

5. A logaritmusfüggvény segítségével keresse meg az e részben szereplő 1. feladat megoldását!

a) Az $e^z = -20 = 20e^{i\pi}$ egyenlet egyik gyöke:

$z = \ln(-20) = \ln 20 + i\pi$

Mivel az exponenciális függvény periodikus, ezért az egyenlet megoldásai a

$z = \ln 20 + i(\pi + 2k\pi)$ (ahol k tetszőleges egész) komplex számok.

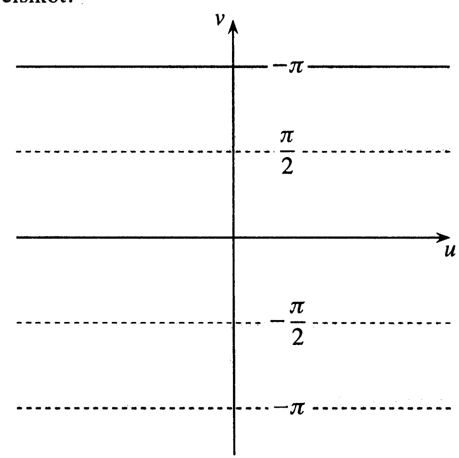
b) Az $e^z = 20i = 20e^{i\frac{\pi}{2}}$ egyenlet egyik gyöke:

$$z = \ln 20 + i\frac{\pi}{2}$$

Az előzőhöz hasonlóan az összes megoldás:

$$z = \ln 20 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Határozza meg, hogy a $w = \ln z$ függvény mely síkrészre képezi le a $\mathrm{Re}(z) < 0$ félsíkot!



3.20 ábra

A félsíkban

$$z = re^{i\varphi},\ r \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in \left]-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Mivel $w = \ln z = \ln r + i\varphi$, tehát $u = \ln r$, $v = \varphi$, ahol φ-re az előbbi megszorítások érvényesek (3.20 ábra).

A leképezésből látszik, hogy a negatív valós tengely mentén az $\ln z$ függvény nem folytonos. Ugyanis a negatív valós tengelyhez közeli pontokban, ha $\mathrm{Im}(z) > 0$, akkor φ π-hez, ha $\mathrm{Im}(z) < 0$ akkor φ $-\pi$-hez közeli érték.

(Ha φ-re a $[0, 2\pi[$ kikötést tennénk, akkor a függvény a pozitív valós számokon nem volna folytonos.)

7. Határozza meg, milyen alakzatba viszi át a $w = \ln z$ függvény az origó középpontú köröket, illetve az origóból induló, de azt nem tartalmazó, félegyeneseket!

A körökre $|z| = r > 0$ állandó, azaz $\ln z = \ln r + i\varphi$, ahol $\varphi \in]-\pi, \pi]$. Ezen körök képei tehát a képzetes tengellyel párhuzamos egyenes szakaszok.

A félegyeneseken $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, φ állandó,

itt $\ln z = \ln r + i\varphi$, képük a valós tengellyel párhuzamos egyenesek, melyek az $\mathrm{Im}(z) \in]-\pi, \pi]$ sávban helyezkednek el.

8. Határozza meg, milyen alakzatba viszi át az

$$f(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}$$

függvény a $|z| < 1$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ félkört!

Vizsgáljuk meg először a $w = \dfrac{1-z}{1+z}$ lineáris törtfüggvény által létesített leképezést. A $z = -1$ pont képe a $w = \infty$, a $z = 1$ képe az origó, így a határ mindkét részének képe az origóból induló félegyenes lesz. (Mivel a tartomány nyílt, így a kép az origót nem tartalmazza.) Az origó képe a $w = 1$ pont, így a $z \in]-1, 1[$ intervallum képe a w sík pozitív valós tengelye, a $z = i$ képe önmaga, így a félkör képe a pozitív képzetes tengely.

Az $f(z) = \ln w$ a két félegyenest az $\mathrm{Im} f(z) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sávra képezi le. A határokat a képhalmaz sem tartalmazza.

9. Adjon meg egy olyan függvényt, amely az

$\mathrm{Im}(z) \in]0, 1[$

sávot a

$|w| < 4$, $\mathrm{Re}(w) < 0$

félkörre képezi le!

A feladatot a 7. feladat alapján oldjuk meg.

A $\dfrac{\pi}{2} \cdot z$ transzformáció a $]0, 1[$ sávot a $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sávba viszi át. Ezt a sávot – a 7. feladat szerint – az $\exp\left(\dfrac{\pi}{2} \cdot z\right)$ függvény az első síknegyedbe viszi át.

A $w = \dfrac{1-z}{1+z}$ függvény vitte át a félkört az első síknegyedbe. Ennek a függvénynek az inverze önmaga, s ez az inverz képezi le a síknegyedet a félkörre. Tehát a

$$w = \frac{1 - e^{\frac{\pi}{2}z}}{1 + e^{\frac{\pi}{2}z}}$$

az adott tartományt a $w < 1$, $\mathrm{Im}(w) > 0$ félkörbe viszi át.

Ezt a félkört pozitív irányba $\dfrac{\pi}{2}$-lel elforgatva és négyszeresre nagyítva kapjuk az előírt képet.

A függvény tehát:

$$f(z) = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{\pi}{2}z}}{1 + e^{\frac{\pi}{2}z}}$$

Megjegyzés: Ha a félkört negatív irányba forgatjuk el, és vesszük a kifejezés négyzetét, az eredeti sáv egy teljes körbe megy át.

3.7 Az általános hatványfüggvény

3.3-ban csak igen speciális hatványfüggvényekkel foglalkoztunk. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény definiálása módot ad a

$w = z^a$ ($a \in \mathbb{C}$ komplex állandó) általános hatványfüggvény definiálására.

Mivel $z = e^{\ln z}$, így kézenfekvő a

$$w = z^a = \left(e^{\ln z}\right)^a = e^{a \ln z}$$

definició.

E függvény esetén is ragaszkodunk az egyértékűséghez, amit $\ln z$ definiálásakor tett megszorításokkal érünk el.

(Mivel $\ln z$ $z = 0$ esetén nem értelmezett, a definíció erre az esetre nem vonatkozik; 0^a értékét 0-nak vesszük, ha $\mathrm{Re}(a) > 0$, $\mathrm{Re}(a) \leq 0$ esetén nem értelmezzük .)

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg 5^{3+4i} értékét!

A definíció alapján:

$$5^{3+4i} = e^{(3+4i)\ln 5} = e^{3 \ln 5} \cdot e^{i4 \ln 5} = 125 \cdot e^{i4 \ln 5} \approx 125 \cdot e^{i6{,}44}$$

Algebrai alakban:

$$5^{3+4i} \approx 123{,}5 + 19{,}2i$$

Megjegyzés:

A feladat egyszerűbbé válik, ha első lépésként az

$$5^{3+4i} = 5^3 \cdot 5^{4i}$$

átalakítást végezzük el.

2. Határozza meg i^i értékét!

A definíció alapján: $i^i = e^{i \ln i}$

Mivel

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, így $\ln i = i\dfrac{\pi}{2}$, azaz $i^i = e^{i \cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Meglepő, hogy bár az alap és a kitevő is tisztán képzetes szám, a hatvány értéke valós szám lesz.

3. Milyen z érték esetén teljesül, hogy $i^z = 40i$?

Az előző feladatban láttuk, hogy $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Alakítsuk át ennek alapján az egyenlet mindkét oldalát:

$$e^{\left(i\frac{\pi}{2} + i2k\pi\right)z} = e^{\ln 40 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right)}, \quad k, l \in \mathbb{Z},$$

A két oldalt összehasonlítva:

$$z = \frac{\ln 40 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2l\pi\right)}{i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

Tehát az egyenlőség végtelen sok z érték esetén teljesül; $k = l = 0$ esetén:

$$z = \frac{\ln 40}{i\dfrac{\pi}{2}} + 1 \approx 1 - 2{,}35i$$

4. Milyen z értékre teljesül, hogy $(1 + i)^z = 20 - 20i$?

Mivel $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} = e^{\ln \sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$, és hasonlóan:

$20 - 20i = 20\sqrt{2} \cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + 2l\pi\right)}$, $k, l \in \mathbb{Z}$,

így az egyenlet megoldásai:

$$z = \frac{\ln 20\sqrt{2} - i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}{\ln \sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2l\pi\right)}$$

5. Adjon meg egy olyan leképezést, amely az $\mathrm{arc}(z) \in \left]0, \dfrac{\pi}{5}\right[$ tartományt az $\mathrm{arc}(w) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tartományra képezi le!

A $w = z^{2,5}$ függvény az eredeti tartományt az $\mathrm{arc}(w) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tartományra képezi le. Ha ezt $\dfrac{\pi}{4}$-gyel elforgatjuk, akkor az előírt képet kapjuk.

Vagyis az

$$f(z) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \cdot z^{2,5}$$

függvény megfelel a feladat előírásainak.

Megjegyzés:

Ha a z síkbeli szögtartomány csúcsa a $z_0 = 1 + i$ pontban van, a képtartományé pedig a $3 + 2i$ pontban, akkor a leképezést a

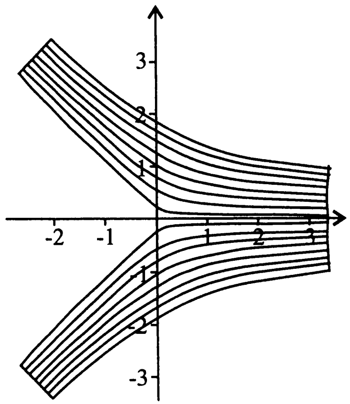
$$g(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 1 - i)^{2,5} + 3 + 2i$$

függvényt állítja elő.

Az általános hatványfüggvény egy speciális esetének, a

$w = z^{0,75}$ függvénynek

a leképezését mutatja a 3.21 ábra. A valós tengellyel párhuzamos egyenesek képeit egy a w sík negatív tartományában lévő akadályt kikerülő áramlás áramvonalai képének tekinthetjük.



3.21 ábra. A z sík valós tengelyével párhuzamos egyeneseinek leképezése a $w = z^{0,75}$ hatványfüggvénnyel

Az exponenciális függvény definiálása után a szokásos módon értelmezhetjük a hiperbolás függvényeket. E függvények, a trigonometrikus függvények és inverzeik értelmezésére a Taylor-sorok tárgyalásakor kerül sor.

4. KOMPLEX FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA

4.1 Differenciálhatóság

Legyen a z_0 pont az $f(z)$ függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Az $f(z)$ függvényt a z_0 pontban *differenciálhatónak* nevezzük, ha a

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

határérték létezik és véges.

Ezt az értéket az $f(z)$ függvény z_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük, és $f'(z_0)$-val jelöljük.

Azt a függvényt, amely értelmezési tartománya minden pontjában az adott pontbeli differenciálhányados értékeit veszi fel, *deriváltnak* nevezzük. Mivel a derivált definíciója az egyváltozós valós függvények körében megismert módon történt, így a valós függvények körében megismert – az összeg-, különbség-, szorzat-, hányados- és a közvetett függvény deriválására vonatkozó – szabályok a komplex függvények körében is érvényesek maradnak.

A függvény differenciálhatóságát a határérték létezése biztosítja. Mivel a $\Delta z \to 0$ feltétel többféle módon is bekövetkezhet, ebből bizonyos megkötések adódnak az u és a v függvények parciális deriváltjaira.

Legyen az $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ és $z_0 = x_0 + iy_0$.

Ha $\Delta z = \Delta x$, azaz a valós tengellyel párhuzamos irányban mozdulunk el, akkor a differenciálhányados:

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0)$$

Ha a képzetes tengely irányában történik az elmozdulás, azaz ha $\Delta z = i\Delta y$, akkor

$$f'(z_0) = -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0)$$

Mivel a határérték nem függhet a határátmenet módjától, így a differenciálhatósághoz az u és v függvényekre teljesülni kell az

$$u'_x = v'_y \text{ és } u'_y = -v'_x$$

egyenleteknek, melyeket *Cauchy–Riemann-egyenleteknek* nevezünk. Ezek teljesülése és az u és v függvények totális differenciálhatósága szükséges és elégséges feltétele a differenciálhatóságnak.

Ezen egyenletek felhasználásával a komplex függvény deriváltja akkor is előállítható, ha annak csak a valós, illetve csak a képzetes részét ismerjük. A függvény deriváltja:

$$f'(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y)$$

Ez pedig a Cauchy–Riemann-egyenletek segítségével:

$$f'(z) = u'_x(x, y) - iu'_y(x, y) = v'_y(x, y) + iv'_x(x, y)$$

alakban is felírható.

Ha z polárkoordinátákban adott, és $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$, ekkor a Cauchy–Riemann-egyenletek alakja módosul:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \text{ és } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

Ez esetben $f'(z) = \dfrac{e^{-i\varphi}}{r} \cdot \left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} - i\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$.

Ha z derékszögű koordinátákban adott, s $f(z)$ polárkoordinátákban, azaz:

$$f(z) = \varrho(x, y)\exp(i\vartheta(x, y)),$$

akkor az egyenletek:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \varrho\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \text{ és } \frac{\partial \varrho}{\partial y} = -\varrho\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

Ekkor:

$$f'(z) = \left(\varrho \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - i\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) e^{i\vartheta}$$

A z_0 pontbeli differenciálhatóságnál erősebb megkötés a függvény z_0 pontbeli *regularitása*. A függvényt a z_0 pontban regulárisnak nevezzük, ha van z_0-nak olyan környezete, amelyben $f(z)$ differenciálható.

Ha a függvény a z_0 pontban nem reguláris, akkor z_0 *szinguláris pont*. Ha a z_0 egy környezetében a z_0 kivételével a függvény reguláris, z_0-t *izolált szinguláris pontnak* nevezik. (Ezek osztályozásával a későbbiekben foglalkozunk.)

Az előző fejezetben tárgyalt leképezésekre vonatkozik az a tétel, mely szerint, ha f reguláris egy tartományban, és ott $f'(z) \neq 0$, akkor az f függvény által létesített leképezés szögtartó (konformis).

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy a regularitás igen erős megkötés. Igaz ugyanis a következő állítás: Ha f egy egyszeresen összefüggő tartományban reguláris, akkor ott tetszőlegesen sokszor differenciálható.

Mivel a függvény tetszőlegesen sokszor differenciálható, így f'' létezése miatt léteznek és folytonosak u és v második parciálisai is. Az $u'_x = v'_y$, illetve $u'_y = -v'_x$.

Ezen egyenletekből v-t úgy küszöbölhetjük ki, hogy az első egyenletet x szerint, a másodikat y szerint deriváljuk. Mivel a vegyes másodrendű parciális deriváltak folytonossága esetén a deriválás sorrendje felcserélhető, így:

$$u''_{xx} = v''_{yx} = -u''_{yy}, \text{ azaz } u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Hasonlóan $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$.

Tehát a reguláris függvény valós és képzetes része egyaránt kielégíti a síkbeli Laplace-egyenletet. Az ilyen függvényeket szokás *harmonikus függvényeknek* nevezni (u „harmonikus társa” v).

Egy kétváltozós valós függvény csak akkor lehet egy reguláris komplex függvény valós, illetve képzetes része, ha harmonikus.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a definíció alapján az

a) $f(z) = z^3$ és **b)** $g(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$

függvények deriváltját!

a) $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{(z + \Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3z^2 \Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = 3z^2$$

A függvény mindenütt reguláris, s az általa létesített leképezés – az origó kivételével – szögtartó. (Az origóban $f'(z) = 0$.)

b) $g'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z} \right) \frac{1}{\Delta z} =$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\Delta z}{\Delta z (z + \Delta z) z} = -\frac{1}{z^2}$$

A függvény az origó kivételével reguláris, az origó izolált szinguláris hely.

Megjegyzés: A feladatból látható, hogy az egyváltozós valós függvényekre kapott deriváltak az eddig megismert komplex függvények esetében változatlanok maradnak.

2. Vizsgálja meg, hogy mely pontokban differenciálható az $f(z) = z\bar{z}$ függvény!

$f(z) = z\bar{z} = x^2 + y^2$, tehát $u = x^2 + y^2$ és $v = 0$.

A Cauchy–Riemann-egyenletek alapján az

$$u'_x = 2x = v'_y = 0$$

$$u'_y = 2y = -v'_x = 0$$

egyenlőségeknek kell teljesülniük. Így a függvény csak az origóban differenciálható, de sehol nem reguláris.

3. Mely pontokban differenciálható az

$f(z) = z \cdot |z|^2$ függvény?

$$f(z) = (x + iy)\left(x^2 + y^2\right) = x^3 + xy^2 + i\left(x^2 y + y^3\right)$$

E függvénynél tehát:

$u = x^3 + xy^2$ és $v = x^2 y + y^3$

A parciális deriváltak:

$$u'_x = 3x^2 + y^2 \qquad v'_y = x^2 + 3y^2$$

$$u'_y = 2xy \qquad -v'_x = -2xy$$

Látható, hogy a Cauchy–Riemann-egyenletek csak az origóban teljesülnek, azaz a függvény csak az origóban differenciálható, sehol nem reguláris.

4. Határozza meg az exponenciális függvény deriváltját!

$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$, azaz

$u = e^x \cos y$ és $v = e^x \sin y$

Mivel

$$u'_x = e^x \cos y = v'_y = e^x \cos y \text{ és}$$

$$u'_y = -e^x \sin y = -v'_x = -e^x \sin y,$$

tehát a Cauchy–Riemann-egyenlőségek mindenhol teljesülnek, így a függvény minden véges z helyen reguláris.

A deriváltja:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z,$$

mint az várható volt.

5. Hol differenciálható az $f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi$ függvény?

Mivel z polárkoordinátákban adott, a Cauchy–Riemann-egyenletek módosított alakját használjuk.

Most $u = \ln r$, $v = \varphi$,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \text{ és } \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 = -r\frac{\partial v}{\partial r},$$

azaz a függvény az origó kivételével minden pontban differenciálható és reguláris.

Deriváltja:

$$f'(z) = \frac{e^{-i\varphi}}{r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{e^{-i\varphi}}{r} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}$$

6. Határozza meg az $f(z) = z^4$ függvény deriváltját polárkoordinátás alakból!

$$f(z) = r^4 \cos 4\varphi + ir^4 \sin 4\varphi$$

$$f'(z) = \frac{e^{-i\varphi}}{r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \frac{e^{-i\varphi}}{r}\left(4r^4 \cos 4\varphi - i4r^4(-\sin 4\varphi)\right) =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi}}{r} 4r^4 e^{i4\varphi} = 4r^3 e^{i3\varphi} = 4z^3$$

7. Lehet-e az $u = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$ kétváltozós függvény egy reguláris függvény valós része?

Mint láttuk, ehhez a Laplace-egyenletnek kell teljesülnie, azaz csak az $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ teljesülése esetén lehet u egy reguláris függvény valós része.

A parciális deriváltak:

$$u'_x = 4x^3 - 12xy^2 \qquad u''_{xx} = 12x^2 - 12y^2$$
$$u'_y = 4y^3 - 12x^2y \qquad u''yy = 12y^2 - 12x^2$$

Mivel a másodrendű parciális deriváltak összege nulla, így u lehet egy reguláris f függvény valós része. Az f deriváltját a harmonikus társ megkeresése nélkül is előállíthatjuk:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = 4x^3 - 12xy^2 - i\left(4y^3 - 12x^2y\right)$$

A harmonikus társ megkereséséhez a Cauchy–Riemann-egyenleteket kell alkalmaznunk.

$$u'_x = v'_y = 4x^3 - 12xy^2$$

Ebből y szerinti integrálással:

$$v = 4x^3y - 4xy^3 + c(x)$$

(Mivel y szerint integráltunk, az állandó x függvénye lehet.)

$$v'_x = 12x^2y - 4y^3 + c'(x) = -u'_y = -\left(4y^3 - 12x^2y\right)$$

Ebből láthatóan $c(x)$ deriváltja nulla, így $c(x)$ csak állandó lehet.

Tehát a harmonikus társ: $v = 4x^3y - 4xy^3 + c_1$, ahol c_1 egy tetszőleges állandó.

v meghatározását más módon is elvégezhetjük. Ehhez egy kicsit átfogalmazzuk a feladatot. Adott a v függvény teljes differenciálja, s meg kell határozni a függvényt:

$$dv = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy, \text{ azaz:}$$
$$dv = -\left(4y^3 - 12x^2y\right)dx + \left(4x^3 - 12xy^2\right)dy$$

v meghatározása a $P_0(x_0, y_0)$ ponttól – például az origótól – a $P(x, y)$ pontig vett vonalintegrállal végezhető el. (Ha v csak egy bizonyos tartományban értelmezett, akkor figyelnünk kell arra, hogy az integrálási út az adott tartományban haladjon.) Esetünkben v-re nincs semmi megkötés, így

az integrálási út tetszőleges. Haladhatunk először az origóból az $(x, 0)$ pontig az x tengelyen, utána ebből a pontból az (x, y) pontig az y tengellyel párhuzamosan. Az első szakaszon $y = 0$, és $dy = 0$, így az integrál értéke is nulla.

A másik szakaszon $dx = 0$, az integrálási változót t-vel jelölve:

$$v = \int_0^y \left(4x^3 - 12xt^2\right)dt = 4x^3y - 4xy^3,$$

ami az előző módon kapott eredménnyel megegyező.

Megjegyzés: A feladatban szereplő függvény az

$$f(z) = z^4 = (x + iy)^4$$

függvény volt, deriváltja:

$$f'(z) = 4z^3$$

8. Lehet-e az $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ kétváltozós függvény egy reguláris függvény valós része?

Az előző feladathoz hasonlóan most is a Laplace-egyenlet teljesülését kell megvizsgálnunk:

$$u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \qquad u''_{xx} = \frac{2\left(x^2 + y^2\right) - 4x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Hasonlóan:

$$u''_{yy} = \frac{2x^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Mivel a másodrendű parciális deriváltak összege nullával egyenlő, így a függvény harmonikus, tehát lehet egy $f(z)$ reguláris függvény valós része. Az $f(z)$ függvény deriváltja:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = \frac{2x}{x^2 + y^2} - i\frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Keressük meg u harmonikus társát.

$$u'_x = v'_y = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

Ha $x \neq 0$, akkor v'_y átalakítható:

$$v = \int \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} dy = 2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c(x)$$

A $v'_x = u'_y$ egyenlőségből látszik, hogy $c(x)$ csak állandó lehet, így

$$v = 2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c_1, \text{ ha } x \neq 0;$$

$x = 0$ esetén $v'_y = 0$, így ekkor $v =$ állandó.

Megjegyzés: a feladatban szereplő függvény az $f(z) = \ln z^2$ függvény volt.

9. Lehet-e az $u = r^4 \cos 4\varphi$ kétváltozós függvény egy reguláris függvény valós része?

Az előző feladatoktól eltérően u most polárkoordinátás alakban adott.

Most is a Laplace-egyenlet teljesülését kell megvizsgálnunk, de ennek alakja polárkoordináták esetén más:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

A parciálisok:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 12r^2 \cdot \cos 4\varphi$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = 4r^2 \cdot \cos 4\varphi$$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -16r^2 \cdot \cos 4\varphi$$

Mivel ezek összege zérus, így u lehet egy reguláris f függvény valós része.

A függvény deriváltja:

$$f'(z) = \frac{e^{-i\varphi}}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = \frac{e^{-i\varphi}}{r}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi}}{r} \cdot \left(4r^4 \cdot \cos 4\varphi + i4r^4 \cdot \sin 4\varphi\right) =$$

$$= \frac{e^{-i\varphi}}{r} \cdot 4r^4 \cdot e^{i4\varphi} = 4r^3 \cdot e^{i3\varphi}$$

Az u harmonikus társát most is a Cauchy–Riemann-egyenletekből kell meghatároznunk.

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r} = 4r^4 \cdot \cos 4\varphi$$

φ szerint integrálva:

$v = r^4 \cdot \sin 4\varphi + c(r)$. A $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}$ egyenlőség teljesüléséből következően $c(r) =$ állandó, így

$$v = r^4 \sin 4\varphi + c_1$$

(a feladatban szereplő függvény az $f(z) = z^4$).

4.2 Taylor-sor

A komplex tagú számsorozatokat és számsorokat, azok konvergnciáját ugyanúgy értelmezzük, mint a valós számsorozatok, illetve számsorok esetében, így ezeket nem definiáljuk. Néhány fogalmat, illetve tételt emelünk csak ki.

A $\{z_n\} = \{a_n + ib_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha valós része és képzetes része is konvergens.

A $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ komplex számsort abszolút konvergensnek nevezzük, ha $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ (valós) számsor konvergens. (Ha a sor nem abszolút konvergens, de konvergens, akkor feltételesen konvergensnek nevezzük.)

A számsorok közül a geometriai sort említjük külön:

$\sum_{n=0}^{\infty} z_0^n$ konvergens, ha $|z_0| < 1$, s ekkor összege $\dfrac{1}{1-z_0}$.

A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ függvénysor egy T tartományban konvergens, ha minden $z_k \in T$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_k)$ számsor konvergens. Egyenletesen konvergál a T tartományban a függvénysor $f(z)$-hez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan z-től független N küszöbszám, hogy minden $z \in T$ esetén teljesül a

$$\sum_{n=0}^{N} \left| f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

Biztosan egyenletesen konvergens a T tartományban a függvénysor, ha minden $z \in T$ esetén teljesül az $\left| f_n(z) \right| < m_n$ egyenlőtlenség, és a $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ számsor konvergens.

A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ alakú függvénysorokat hatványsornak nevezzük. Bár a hatványsorokra vonatkozó tulajdonságok is szinte azonosak a valósban megismertekkel, néhányat kiemelünk közülük.

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor egy z_0 pontban konvergens, akkor minden $|z| < |z_0|$ helyen is konvergens, sőt egyenletesen konvergens (Abel tétele).

A hatványsor konvergenciasugarára vonatkozó tételek közül kettőt említünk:

A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor konvergens a $|z| < R$ tartományban, ahol

$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ (R értéke lehet 0 és ∞ is) (Cauchy–Hadamard).

A konvergenciasugár meghatározása történhet az

$$\frac{1}{R} = \limsup \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

hányadoskritérium alapján is.

A hatványsor $|z| < R$ esetén egyenletesen konvergens, $|z| > R$ esetén divergens.

A $|z| = R$ pontokban lehet konvergens és divergens is a hatványsor.

Igazolható, hogy a konvergenciakörön belül a hatványsor öszszegfüggvénye reguláris függvény, s deriváltja tagonkénti deriválással állítható el. A deriváltakból álló sor konvergenciasugara az eredeti konvergenciasugárral azonos.

Igen lényeges a következő tétel: Ha f reguláris az a pont egy környezetében, akkor itt az f függvény a $(z-a)$ hatványai szerint haladó Taylor-sorba fejthető. A sor:

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(z-a) + \frac{f''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

A sor a konvergenciatartomány minden pontjában egyenletesen konvergál $f(z)$-hez (lásd még 5. fejezet).

Gyakorló feladatok

1. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ számsor?

Írjuk fel a sor néhány tagját:

$$i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \dots$$

A sor részletösszegét átrendezhetjük:

$$i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right)$$

A képzetes és a valós rész egyaránt Leibniz típusú sor, azaz konvergens, így az eredeti sor is konvergens, de a sor nem abszolút konvergens, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens.

2. Milyen z értékekre konvergens az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$ függvénysor?

Minden rögzített z esetén a sor egy geometriai sor, mely akkor konvergens, ha hányadosának abszolút értéke 1-nél kisebb:

$$\left|\frac{z}{1+z}\right| = \frac{|z|}{|1+z|} < 1$$

A függvénysor konvergenciatartománya tehát a

$$|z| < |1+z|$$

tartomány.

Ez a tartomány egy félsík, melyet a $z = 0$ és $z = -1$ pontokat összekötő szakasz felező merőlegese határol, s amely az origót tartalmazza.

A függvénysor tehát a $\mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{2}$ félsíkon konvergens.

3. Milyen z esetén konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{3(z+1)}\right)^n$ függvénysor?

Az előző feladathoz nagyon hasonló a feladat.

A konvergenciához a

$$\left|\frac{z}{3(z+1)}\right| < 1, \text{ azaz a } \frac{|z|}{|z+1|} < 3$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ennek az egyenlőtlenségnek egy körbelső (úgynevezett Apollóniosz-kör belseje) tesz eleget. A kör középpontja a valós tengelyen van, a kör a valós tengelyt $-\frac{3}{2}$-nél és $-\frac{3}{4}$-nél metszi.

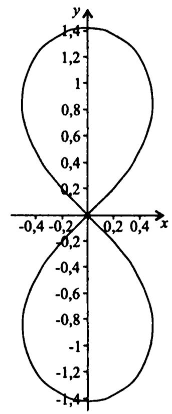
4. Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{\mathrm{Im}(z)}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{y}\right)^n$ függvénysor konvergenciatartományát!

Mivel ismét egy mértani sor szerepel a feladatban, így a

$$\left|\frac{z-i}{y}\right| < 1, \text{ azaz } |z-i| < |y|$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

A $|z-i| = |y|$ tulajdonságú pontok a valós tengelytől és a $z = i$ ponttól egyenlő távol lévő pontok, melyek egy parabolán helyezkednek el. A konvergenciatartomány az $y = \frac{x^2+1}{2}$ parabola feletti síkrész.



4.1 ábra. Lemniszkáta

5. Van-e olyan z érték, amelyre a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^2+1\right)^n$ függvénysor konvergens?

Mivel mértani sor szerepel a feladatban, a konvergenciához a

$$\left|z^2+1\right| < 1$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Valós számok körében nincs az egyenlőtlenségnek megoldása, így a tartománynak a valós tengelyen nem lehet pontja. A képzetes tengely $]-\sqrt{2}i, \sqrt{2}i[$ intervalluma az origó kivételével megfelel a feltételnek.

A konvergenciatartomány, melyet a 4.1 ábra mutat, az

$$\left(x^2-y^2-1\right)^2+4x^2y^2<1$$

feltételnek eleget tevő tartomány. Átalakítva:

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2\left(x^2-y^2\right)=0$$

Az alakzat egy Bernoulli-féle lemniszkáta belseje, a határpontokban az egyenlőtlenség nem teljesül.

6. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{3^n+(-2)^n}$ hatványsor konvergenciasugarát!

A gyökkritériummal dolgozunk: $R=\lim\sup\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}$. Mivel $\frac{1}{3}\cdot 3^n<3^n+(-2)^n<2\cdot 3^n$, s az egyenlőtlenség két szélén álló mennyiség n-edik gyökének határértéke 3, így a középső tagé is ennyi, azaz a hatványsor konvergenciasugara: $R=3$.

7. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(nz)^n}{n!}$ hatványsor konvergenciasugarát!

Most a gyökkritérium helyett célszerűbb a hányadoskritériummal dolgozni: $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{n^n}{n!}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Mivel $\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, így e sor konvergenciasugara $R=\frac{1}{e}$.

Megjegyzés: Ha felhasználjuk a Stirling-formulát, mely szerint $n!$ közelítőleg $\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$, dolgozhatunk a gyökkritériummal is. Természetesen ekkor is $R=\frac{1}{e}$ adódik.

8. Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n(1+i)^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciasugarát!

A gyökkritérium alapján: $\frac{1}{R}=\operatorname{limsup}\sqrt[n]{\frac{|1+i|^n}{n^2}}=\sqrt{2}$, azaz $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$. (Felhasználtuk, hogy $\lim\sqrt[n]{n}=1$.)

9. Írja fel az $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorát!

Bontsuk fel az f függvényt résztörtek összegére:

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

$\frac{1}{1-z}$ egy geometriai sor összege, azaz

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\text{ ha } |z|<1.$$

A másik tag átalakítva ugyancsak geometriai sor összegének tekinthető:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n,\text{ ha } |z|<2.$$

Mivel $|z|<1$ esetén mindkét sor egyenletesen konvergens, így az összeg átrendezhető. Összevonva:

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n\right),\text{ ha } |z|<1.$$

10. Írja fel az $f(z)=\frac{3z^2-2z+1}{(z-1)\left(z^2+1\right)}$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorát!

Az előző feladathoz hasonlóan most is résztörtekre bontjuk a függvényt: $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{2z}{z^2+1}$.

Mindkét tag mértani sor összegeként fogható fel:

$$\frac{1}{z-1} = -1\left(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$\frac{2z}{1+z^2} = 2z\left(1 - z^2 + z^4 - \ldots\right) = 2z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^{2n} \qquad |z| < 1$$

Átrendezve:

$$f(z) = -1 + z - z^2 - 3z^3 - \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^n + 2z(-1)^n \cdot z^{2n}\right) \qquad |z| < 1$$

Racionális törtfüggvények esetében az előző két feladatban látott módszer általában jól alkalmazható.

11. Írja fel az $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^2+1}$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorát!

Az egyik lehetőség most is a résztörtek összegére való bontás volna, de célravezetőbb, ha átalakítjuk a függvényt:

$$f(z) = \frac{1}{z^4+z^2+1} \cdot \frac{1-z^2}{1-z^2} = \frac{1-z^2}{1-z^6}$$

Innen az előző feladathoz hasonlóan:

$$f(z) = \left(1 - z^2\right)\left(1 - z^6 + z^{12} - \ldots\right) =$$

$$= 1 - z^2 - z^6 + z^8 + \ldots = \left(1 - z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot z^{6n}$$

A sor a $|z| < 1$ tartományban konvergens.

12. Határozza meg az $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z + 1}$ függvény $a = \dfrac{1}{2}$ helyhez tartozó Taylor-sorát!

Alakítsuk át a függvényt:

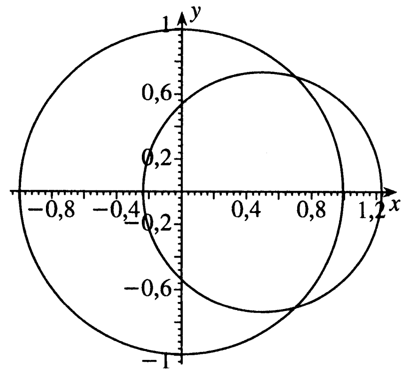
$$f(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3} \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

Ez ismét egy geometriai sor összegének tekinthető, azaz:

$$f_1(z) = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{4}{3}\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{16}{9}\left(z - \frac{1}{2}\right)^4 - \ldots\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right)^n$$

A sor a $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{3}{4}$ körbelsőben állítja elő a függvényt.



4.2 ábra. A 12. feladatban szereplő két tartomány

A függvény 0 helyhez tartozó sora – az előző feladat módszerével:

$$f_2(z) = (1 + z)\left(1 - z^3 + z^6 - \ldots\right) =$$

$$= 1 + z - z^3 - z^4 + \ldots = (1 + z)\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^{3n}, \text{ ha } |z| < 1.$$

Az f_1 és az f_2 hatványsor különböző tartományban állítja elő az f függvényt. A két tartománynak van közös része. Ilyen esetben a f_2-t az f_1 *analitikus folytatásának* nevezzük (4.2 ábra).

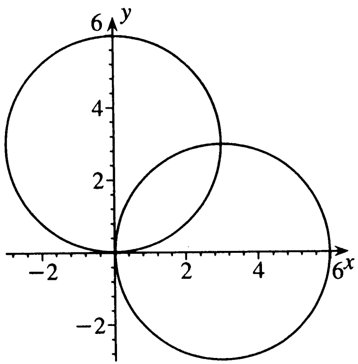
13. Írja fel az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény $a_1 = 3$ és $a_2 = 3i$ helyhez tartozó Taylor-sorát!

A függvényt átalakítva:

$$(1)\qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{3+(z-3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z-3}{3} + \left(\frac{z-3}{3}\right)^2 - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-3}{3}\right)^n, \text{ ha } |z-3| < 3.$$



4.3 ábra. A 13. feladatban szereplő két tartomány

Az előzőkhöz hasonlóan:

$$(2)\qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{3i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3i}{3i}} =$$

$$= \frac{-i}{3}\left(1 - \frac{z-3i}{3i} + \left(\frac{z-3i}{3i}\right)^2 - \ldots\right) =$$

$$= \frac{-i}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-3i}{3i}\right)^n$$

A sor konvergens, ha $|z-3i| < 3$.

A két hatványsor konvergenciatartományát a 4.3 ábra mutatja. A két sor a közös tartományban ugyanazt a függvényt állítja elő. Az előzőhöz hasonlóan (2) most is az (1) analitikus folytatása.

Megjegyzés: Az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény is (1) analitikus folytatása, illetve mivel (1) konvergenciatartományát az $\dfrac{1}{z}$ értelmezési tartománya teljes egészében tartalmazza, szokásos az (1) kiterjesztésének is nevezni.

14. Írja fel a $g(z) = \dfrac{1}{z^2}$ függvény $a = 3$ helyen vett Taylor-sorát!

Az előző feladatban az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény sorát írtuk fel az $a = 3$ helyen.

Mivel $g(z) = -f'(z)$, így $g(z)$ sorát az előző feladatbeli sor tagonkénti deriválásával kapjuk meg:

$$g(z) = \frac{1}{9}\cdot\left(-1 + 2\frac{z-3}{3} - 3\left(\frac{z-3}{3}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(-\frac{z-3}{3}\right)^{n-1}$$

A sor konvergenciatartománya változatlanul a $|z-3| < 3$ körbelső.

15. Írja fel az $f(z) = \sqrt{z}$ függvény $a = 1+i$ helyhez tartozó Taylor-sorát!

A valós függvények körében megismert binominális sort használjuk:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n, \text{ ha}$$

$$|x| < 1, \text{ ahol } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ és } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

A függvényt át kell alakítani:

$$\sqrt{z} = \sqrt{1+i+z-(i+1)} = \sqrt{1+i}\cdot\left(1+\frac{z-1-i}{1+i}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{1+i}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z-1-i}{1+i}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{\frac{(z-1-i)^2}{(1+i)^2}}{2!}\dots\right) =$$

$$= \sqrt{1+i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{0,5}{n}\left(\frac{z-1-i}{1+i}\right)^n$$

A sor konvergens, ha $|z-1-i| < |1+i| = \sqrt{2}$. A konvergenciatartomány tehát az $1+i$ középpontú $\sqrt{2}$ sugarú körlap.

4.3 Hiperbolás és trigonometrikus függvények

Az Olvasó a valós függvények tárgyalásából ismeri, hogy e^x Taylor-sora: $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots\frac{x^n}{n!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

A sor konvergenciasugara $R = \infty$. Ennek mintájára Taylor-sorával definiálhatjuk tetszőleges komplex kitevőre is az exponenciális függvényt: $e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots$

A valóshoz hasonlóan a sor minden z értékre konvergens. Az előző részben már definiáltuk az exponenciális függvényt.

Ezzel a definicióval összhangban van a mostani definició. Ugyanis, ha $z = iy$, akkor:

$$e^{iy} = 1+iy-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\dots =$$

$$= \left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\dots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\dots\right) =$$

$$= \cos y + i\sin y$$

A hiperbolás függvények definiálása is történhet a valósban megszokott módon: $\operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ és $\operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$, s történhet Taylor-sorukkal:

$$\operatorname{ch} z = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} z = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

mely Taylor-sorok a valósban megismert sorok általánosításai. Mindkét sor konvergenciatartománya a teljes komplex számsík – kivéve a $z = \infty$ pontot. A $\operatorname{th} z$ és a $\operatorname{cth} z$ értelmezését a szokásos módon végezzük:

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \text{ (ha } \operatorname{ch} z \neq 0)$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \text{ (ha } \operatorname{sh} z \neq 0)$$

Mivel az exponenciális függvény periodikus volt, a belőle származtatott hiperbolás függvények is periodikusak. $\operatorname{sh} z$ és $\operatorname{ch} z$ esetén ez a periódus $2\pi i$, $\operatorname{th} z$ és $\operatorname{cth} z$ esetén πi. Az exponenciális függvényhez hasonlóan a hiperbolás függvényeknek sincs végtelenben határértékük.

A hiperbolás függvények mintájára a $\sin z$ és a $\cos z$ függvényeket is Taylor-sorukkal értelmezzük.

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Mindkét sor minden véges z esetén konvergens.

Az előzőhöz hasonlóan:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ (ha } \cos z \neq 0) \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \text{ (ha } \sin z \neq 0)$$

Ugyanúgy, ahogy beláttuk, hogy ha y valós szám, akkor

$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$

belátható, hogy az összefüggés általánosabban is igaz:

Tetszőleges komplex z-re érvényes, hogy

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (Euler formula).

Belátható, hogy érvényesek a

$\operatorname{ch}(iz) = \cos z$ és a $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$

összefüggések is. Ugyanis, ha ch$z$ sorában z helyébe iz-t helyettesítünk, akkor:

$$\operatorname{ch}(iz) = 1 + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \ldots \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \cos z$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{sh}(iz) = iz + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) = i \sin z$$

Ezekből következően

$\operatorname{th}(iz) = i \operatorname{tg} z$ és

$\operatorname{cth}(iz) = i \operatorname{ctg} z.$

Ezek az összefüggések magyarázzák a trigonometrikus és a hiperbolás függvények azonosságainak hasonlóságát, és ez a szoros kapcsolat indokolja a hiperbolás függvények körében a szinusz, koszinusz... elnevezések alkalmazását.

Mivel a hiperbolás függvények értelmezése a valósban megismert módon történt, így érvényesek az ott megismert összefüggések. Például:

$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$

$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$

Úgy kaphatjuk meg ezen összefüggéseknek a trigonometrikus függvények körében megfelelő párját, hogy az összefüggésekben z helyett iz-t írunk.

A helyettesítéseket elvégezve:

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$

azaz a trigonometria megszokott összefüggései komplex változó esetén is érvényesek.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a ch$z$, sh$z$, $\cos z$, $\sin z$ függvények valós, illetve képzetes részét!

Az előzőekben felírt összefüggéseket használjuk a $z = x+iy$ összegre:

$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy) =$

$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$, azaz

$u = \cos x \operatorname{ch} y \qquad v = -\sin x \operatorname{sh} y.$

Hasonlóan $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$. A hiperbolás függvényeknél:

$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} iy = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$

$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} iy = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$

2. Milyen z értékekre lesz $\operatorname{ch} z = 0$, illetve $\operatorname{ch} z = -10$?

Valós változó esetén a ch függvény értékeinek minimuma 1-gyel egyenlő, de mivel az exponenciális függvény is vehet fel negatív értéket, így ez a ch$z$-nél sem meglepő. Az előző feladat szerint felírva ch$z$ valós és képzetes részét, a $\operatorname{ch} x \cdot \cos y + i \operatorname{sh} x \cdot \sin y = 0$ egyenletet kell megoldanunk.

Az összeg első tagja csak akkor nulla, ha $\cos y = 0$, ekkor $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A második tagban ekkor $\sin y \neq 0$, tehát $\operatorname{sh} x = 0$, azaz $x = 0$.

A $\operatorname{ch} z = 0$ egyenlet megoldásai tehát a $z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ komplex számok.

(Az eredmény várható volt, mivel $\mathrm{ch}z = \cos iz$, így a koszinuszfüggvény zérushelyeinek i-szeresére teljesül az egyenlőség).

A másik egyenlet:

$$\mathrm{ch}x \cdot \cos y + i\mathrm{sh}x \cdot \sin y = -10$$

Mivel a jobb oldal képzetes része 0, így az összeg második tagja nulla kell legyen. Ha $x = 0$, akkor $\mathrm{ch}x = 1$, így a valós rész nem lehet -10. Ha $y = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor $\cos y = -1$, így az egyenletben $\mathrm{ch}x = 10$-nek kell teljesülnie.

Tehát a megoldás: $z = \mathrm{arch}10 + i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Milyen z értékek esetén lesz $\sin z = 20$, illetve $\cos z = 5i$?

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el. A szinuszfüggvény felbontását használva:

$$\sin x\mathrm{ch}y + i\cos x\mathrm{sh}y = 20$$

Ha a második tagban $y = 0$ értéket választunk, az első tag értéke nem lehet 20, így $\cos x = 0$ kell legyen, de ennek a $\sin x > 0$ megoldásait kell keresnünk.

Tehát $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = \mathrm{arch}20$ választása esetén teljesül az egyenlőség.

A másik egyenlet: $\cos x\mathrm{ch}y - i\sin x\mathrm{sh}y = 5i$

Most a valós résznek kell 0-nak lennie. Ezt az $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ választással érhetjük el.

Ha k páros, akkor $\sin x > 0$, így $y = \mathrm{arsh}(-5)$.

Ha k páratlan, akkor $\sin x < 0$, így $y = \mathrm{arsh}5$.

4. Milyen z érték esetén lesz $\mathrm{th}z = 3$?

Valós változó esetén a th függvény értéke mindig 1-nél kisebb.

Mivel $\mathrm{th}z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, ezért $\mathrm{th}z$ értéke akkor lesz 1-nél nagyobb, ha $e^{-z} < 0$. Ez – mint láttuk – lehetséges.

Oldjuk meg az $\dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \dfrac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = 3$ egyenletet!

Rendezve: $e^{2z} = -2$ adódik.

Mivel $-2 = e^{\ln 2 + i(\pi + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, így:

$$z = \frac{1}{2}\left(\ln 2 + i(\pi + 2k\pi)\right)$$

5. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{tg}\, z$ függvény valós, illetve képzetes részét!

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin(x + iy)}{\cos(x + iy)} = \frac{\sin x \cdot \mathrm{ch}y + i\cos x \cdot \mathrm{sh}y}{\cos x \cdot \mathrm{ch}y - i\sin x \cdot \mathrm{sh}y}$$

Bővítve a nevező konjugáltjával:

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin x\cos x\left(\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y\right) + \mathrm{ch}y\mathrm{sh}y\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)i}{\cos^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x \cdot \mathrm{sh}^2 y}$$

A számláló zárójeles tényezői 1-gyel egyenlők, így a törtet 2-vel bővítve a számláló:

$$\sin 2x + i\mathrm{sh}2y$$

A nevezőt át kell alakítanunk:

$$2\cos^2 x\mathrm{ch}^2 y + 2\sin^2 x\mathrm{sh}^2 y = \cos^2 x\left(1 + \mathrm{sh}^2 y\right) + \left(1 - \sin^2 x\right)\mathrm{ch}^2 y +$$

$$+ \sin^2 x\left(\mathrm{ch}^2 y - 1\right) + \left(1 - \cos^2 x\right)\mathrm{sh}y^2 = \cos 2x + \mathrm{ch}2y$$

Így a függvény valós része: $u = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x + \mathrm{ch}2y}$

képzetes része: $v = \dfrac{\mathrm{sh}2y}{\cos 2x + \mathrm{ch}2y}$

Hasonlóan a $\mathrm{th}z$ függvény esetén:

$$\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}2x + i\sin 2y}{\mathrm{ch}2x + \cos 2y}$$

(Ez a felbontás az előző alakból következik, hiszen $\mathrm{th}z = i\,\mathrm{tg}(iz)$.)

6. Határozza meg, milyen alakzatra képezi le a z sík tengelyekkel párhuzamos egyeneseit a $w = \cos z$ függvény!

A valós tengellyel párhuzamos egyenesekre $z = t + ia$, ahol $t \in \mathbb{R}$, a valós állandó.

Ebben az esetben a $\cos z$ függvény valós, illetve képzetes része:

$$u = \cos t \cdot \mathrm{ch}a \quad \text{és} \quad v = -\sin t\mathrm{sh}a$$

Ha $a = 0$, azaz a valós tengely képét nézzük, akkor $v = 0$ és $u \in [-1, 1]$.

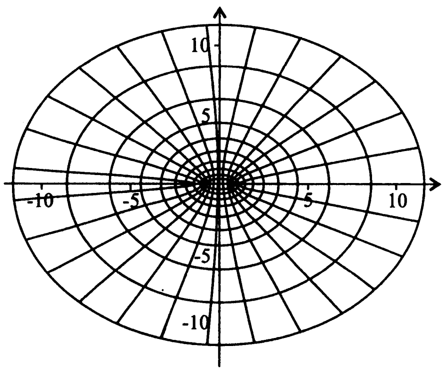
Ha $a \neq 0$, az egyenletekből t értékét kiküszöbölve:

$$\frac{u^2}{\mathrm{ch}^2 a} + \frac{v^2}{\mathrm{sh}^2 a} = 1$$

adódik, ami egy ellipszis egyenlete. Az ellipszis fókusztávolsága 1, mivel $\mathrm{ch}^2 a - \mathrm{sh}^2 a = 1$. (Ahhoz, hogy a w síkon csak egyszer fussa be a képpont az ellipszist, a t-re a $t \in]-\pi, \pi]$ megszorítást kell tennünk. $a = 0$ esetén a valós tengelyt a $[-1, 1]$ intervallumon be kell metszeni az egyértelműséghez).

A képzetes tengellyel párhuzamos egyenesekre $z = a + it$, ahol $t \in \mathbb{R}$, a valós állandó. Ekkor $u = \cos a \cdot \mathrm{ch}t$ és $v = -\sin a \cdot \mathrm{sh}t$.

Ha $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$, akkor $u = 0$, így a képpontok a képzetes tengelyen helyezkednek el.



4.4 ábra. A tengelyekkel párhuzamos egyenesek leképezése a $w = \cos z$ függvénnyel

Ha $a = k\pi$, akkor $v = 0$, s ezért k páros értékére a pozitív, páratlanra a negatív valós tengelyt kapjuk. Ha $\cos a$ és $\sin a$ egyike se nulla, akkor t kiküszöbölhető: $\frac{u^2}{\cos^2 a} - \frac{v^2}{\sin^2 a} = 1$. A képpontok tehát hiperbolán helyezkednek el. A hiperbola fókusztávolsága 1, hiszen $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$. Mivel az ellipsziseknek és a hiperboláknak közös a fókuszpontjuk, így ezek merőlegesen metszik egymást, tehát a leképezés szögtartó (4.4 ábra).

Megjegyzés:

A) Az előző fejezetben láttuk, hogy az exponenciális függvény a tengellyel párhuzamos egyeneseket origóból induló félegyenesekre, illetve origó középpontú körökre képezi le. Láttuk továbbá azt is, hogy az

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

függvény ezeket hiperbolákra, illetve ellipszisekre képezi le. Ezért nem meglepő, hogy a koszinuszfüggvény a tengellyel párhuzamos egyeneseket a 4.4 ábrának megfelelően képezi le.

B) A $\sin z$, a $\mathrm{ch}z$ és a $\mathrm{sh}z$ függvények leképezése hasonló jellegű.

7. Határozza meg a $w = \sin z$ függvény deriváltját!

Mivel a függvényt hatványsorával definiáltuk, s a hatványsor minden véges z-re konvergens, így a deriváltját tagonkénti deriválással állíthatjuk elő.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$(\sin z)' = 1 - 3 \cdot \frac{z^2}{3!} + 5 \cdot \frac{z^4}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \cos z$$

A másik lehetőség a deriváltnak a Cauchy–Riemann-összefüggésből való előállítása.

$f'(z) = u'_x + iv'_x$

Mivel $u = \sin x \cdot \mathrm{ch}y$ és $v = \cos x \cdot \mathrm{sh}y$, így

$f'(z) = \cos x \mathrm{ch}y - i \sin x \mathrm{sh}y = \cos z$

A többi trigonometrikus és hiperbolikus függvény esetében is a valósban megszokott deriváltakat kapjuk.

Megjegyzés: mivel az $f(z) = \sin z$ függvény minden véges z-re reguláris, így leképezése szögtartó minden olyan pontban, ahol deriváltja nem egyenlő 0-val.

8. Írja fel az $f(z) = \mathrm{ch}^2 z$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorát!

Eljárhatunk teljesen mechanikusan a sor felírásakor, meghatározva a deriváltak 0 helyen felvett értékét, de célszerűbb a függvény átalakítása:

$$\mathrm{ch}^2 z = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2z + 1)$$

$\operatorname{ch} 2z$ sorát $\operatorname{ch} z$ sorából kapjuk, ha z helyébe $2z$-t helyettesítünk. Így:

$$\operatorname{ch}^2 z = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \ldots + \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + z^2 + \frac{z^4}{3} + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

A sor minden véges z értékre konvergens.

9. Írja fel az $f(z) = \sin^3 z$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorát!

Deriválás helyett itt is célszerűbb a függvényt átalakítani:

$$\sin^3 z = \sin z \cdot \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2}\sin z - \frac{1}{2}\sin z \cos 2z$$

A második tagot tovább alakítjuk: szorzatból összeggé.

Így $\sin^3 z = \dfrac{3}{4}\sin z - \dfrac{1}{4}\sin 3z.$

Ennek sora:

$$f(z) = \frac{3}{4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\left(3z - \frac{(3z)^3}{3!} + \frac{(3z)^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n (3z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4} \cdot \left(\frac{3z^{2n+1} - (3z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

(Felhasználtuk, hogy a sor abszolút konvergens, így átrendezhető).

Várható volt, hogy a függvény lineáris tagot nem tartalmaz. (A 0 hely háromszoros multiplicitású gyöke a függvénynek). A sor minden véges z-re konvergens.

Megjegyzés: A $z = a$ pontot az $f(z)$ függvény n-szeres zérushelyének nevezzük, ha e pontban a függvény értéke és az első $(n-1)$ derivált értéke zérus, de az n-edik derivált már nem, azaz:

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ és } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ilyenkor a függvény a helyhez tartozó Taylor-sorában $(z-a)^n$ az első el nem tűnő tag.

10. Határozza meg az $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} z}$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorát!

A függvény a 0 pont környezetében reguláris, hiszen $\operatorname{ch} 0 \neq 0$, így beszélhetünk a 0 helyhez tartozó Taylor-soráról. Mivel $\operatorname{ch} z$ 0 helyen vett Taylor-sorában csak a páros kitevők szerepelnek, így reciprokának sorában is csak azok fognak szerepelni: $\dfrac{1}{\operatorname{ch} z} = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6 + \ldots$

$$1 = \left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \ldots\right)\left(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + a_6 z^6 + \ldots\right)$$

Összehasonlítva a két oldalt:

Az állandók:	$1 = a_0$	
A másodfokú tagok:	$0 = a_0 \cdot \dfrac{1}{2} + a_2$	$a_2 = -\dfrac{1}{2}$
A negyedfokú tagok:	$0 = \dfrac{1}{24}\cdot a_0 + \dfrac{a_2}{2} + a_4$	$a_4 = \dfrac{5}{24}$

Azaz a sor első néhány tagja: $\dfrac{1}{\operatorname{ch} z} = 1 - \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{5}{24}z^4 + \ldots$

Láttuk, hogy $\operatorname{ch}\left(i\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, így a sor csak a $|z| < \dfrac{\pi}{2}$ körben konvergens.

A másik lehetőség a sor előállítására, hogy „fordított” osztást végzünk. Az osztást a legkisebb fokszámú taggal kezdve végezzük.

$$1 : \left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} - \ldots$$

$$\underline{-\left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \ldots\right)}$$

$$-\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \ldots$$

$$\underline{-\left(-\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^6}{48} + \ldots\right)}$$

$$\frac{5z^4}{24} + \frac{14z^6}{720} + \ldots$$

$$\vdots$$

11. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{tg} z$ függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorának néhány tagját!

Mivel a tangens páratlan függvény, ezért $\operatorname{tg} z$ Taylor-sorában is csak a páratlan kitevőjű tagok szerepelnek.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$$

$\sin z$ és $\cos z$ helyett azok Taylor-sorának első néhány tagját beírva és rendezve:

$$z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots = \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots\right)\left(a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots\right)$$

A két oldalon z megfelelő kitevőinek együtthatói azonosak kell, hogy legyenek.

A lineáris tag: $1 = a_1$

z^3 együtthatója: $\dfrac{1}{120} = \dfrac{a_1}{24} - \dfrac{a_3}{2} + a_5 \qquad a_3 = \dfrac{1}{3}$

z^5 együtthatója: $\dfrac{1}{120} = \dfrac{a_1}{24} - \dfrac{a_3}{2} + a_5 \qquad a_3 = \dfrac{2}{15}$

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots$$

Természetesen ennél a feladatnál is elvégezhető az előbb látott osztás.

$$\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right) : \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots\right) = z + \frac{z^3}{3} \dots$$

$$\frac{-\left(z - \dfrac{z^3}{2} + \dfrac{z^5}{24} - \dots\right)}{\dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^5}{30} \dots}$$

$$\vdots$$

Ez a módszer természetesen az előző eredményt adja.

Mivel $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, így a sor konvergenciatartománya $|z| < \dfrac{\pi}{2}$.

Megjegyzés: $\operatorname{th} z$ sora hasonlóan írható fel.

12. Írja fel az $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$ sorának néhány tagját!

Az előző feladat eredményét fogjuk felhasználni.

$$\operatorname{tg}^2 z = \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots\right)\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots\right) =$$

$$= z^2 + \frac{2}{3} z^4 + \frac{17}{45} z^6 + \dots$$

A sor konvergenciasugara a $\operatorname{tg} z$ konvergenciasugarával megegyező, azaz $R = \dfrac{\pi}{2}$.

A sor felírásából látszik, hogy a $z = 0$ pont a függvény kétszeres zérushelye.

13. Írja fel az

$$f(z) = \frac{z}{2 + \sin z}$$

függvény 0 helyhez tartozó Taylor-sorának néhány tagját!

Mivel a nevezőben páros és páratlan kitevők is szerepelnek, így a függvény sorában is várhatóan a páros és a páratlan kitevőjű tagok egyaránt szerepelni fognak.

Az előző feladatokban látott módszert alkalmazzuk:

$$z = \left(2 + z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots\right)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right)$$

Összehasonlítva a két oldalt:

Az állandók: $0 = 2a_0 \qquad a_0 = 0$

A lineáris tagok: $1 = 2a_1 + a_0 \qquad a_1 = \dfrac{1}{2}$

A másodfokú tagok: $0 = a_1 + 2a_2 \qquad a_2 = -\dfrac{1}{2}$

A harmadfokú tagok: $0 = -\dfrac{a_0}{6} + a_2 + 2a_3 \qquad a_3 = \dfrac{1}{4}$

Tehát:

$$f(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{4} z^3 + \dots$$

Valós számok körében a nevező soha nem lenne nulla, így a sor minden valós számra konvergens lenne.

Mivel a $\sin z = -2$ egyenlet legkisebb abszolút értékű gyöke a

$$z_0 = \frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{arch}2,$$

így a sor konvergenciasugara:

$$|z_0| \approx 2{,}46$$

14. Írja fel az $f(z) = \sin z$ sorát az $a = 2i$ helyen!

Átalakítva:

$$\sin z = \sin((z-2i)+2i) = \sin(z-2i)\mathrm{ch}2 + i\cos(z-2i)\mathrm{sh}2 =$$

$$= \mathrm{ch}2 \cdot \left(z - 2i - \frac{(z-2i)^3}{3!} + \dots\right) +$$

$$+ i\mathrm{sh}2 \cdot \left(1 - \frac{(z-2i)^2}{2!} + \frac{(z-2i)^4}{4!} - \dots\right)$$

Rendezve:

$$\sin z = i\mathrm{sh}2 + \mathrm{ch}2(z-2i) - i\mathrm{sh}2 \cdot \frac{(z-2i)^2}{2!} + \dots$$

A sor minden véges z-re konvergens.

Természetesen, ha a sort f deriválásával állítjuk elő, ugyanezt az eredményt kapjuk.

4.4 Arkusz- és areafüggvények

Az arkuszfüggvényeket a trigonometrikus függvények inverzeként értelmezzük. Az előzőekben láttuk, hogy a $\sin z$ és a $\cos z$ függvény (ugyanúgy, mint a valósban) 2π szerint periodikus. A függvények a z sík $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, $-\pi < \mathrm{Re}(z) \leq \pi$ részét képezik le kölcsönösen egyértelműen a w sík valós tengelyén a $[-1, 1]$ intervallumon bemetszett teljes síkra. Tehát az inverz képzésekor a függvény értelmezési tartományát le kell szűkítenünk erre a tartományra, hogy egyértékű függvényt kapjunk. Vagyis a következő megszorítást kell tennünk: az inverz valós része a $]-\pi, \pi]$ intervallumba essen, képzetes része nemnegatív valós szám legyen.

A koszinuszfüggvény inverzét, azaz az arkuszkoszinusz-függvényt a következőképpen definiálhatjuk:

A függvény értéke a z helyen az a w szám, amelyre $z = \cos w$, és $\mathrm{Re}(w) \in]-\pi, \pi]$, $\mathrm{Im}(w) \geq 0$.

$\cos w$-t exponenciális függvénnyel kifejezve:

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2-1}$$

Az egyenlet két megoldása közül csak a

$$z + \sqrt{z^2-1}$$

értéket vettük figyelembe, ezzel biztosítjuk az $\mathrm{Im}(w) \geq 0$ megkötés teljesülését. A másik kikötés teljesülését a logaritmusfüggvény definiálásakor tett megállapodás biztosítja:

$$w = -i\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = \arccos z$$

Az így értelmezett $\arccos z$ függvény z valós $[-1, 1]$ intervallumba eső értékei esetén a valósban megismert $\arccos x$ függvénnyel megegyezők.

Például $z = 1$ esetén $w = 0$; $z = 0$ esetén $w = -i\ln i = \frac{\pi}{2}$, $z = -1$ esetén $w = i\ln(-1) = \pi$.

Az $\arccos z$ függvény értelmezéséhez teljesen hasonlóan értelmezhetjük az $\arcsin z$ függvényt is.

Ennek logaritmikus alakja:

$$\arcsin z = -i\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

Ezen függvények esetében is szokásos a

$$z = \cos w, \text{ illetve a } z = \sin w$$

egyenlet összes megoldását az inverz értékeinek tekinteni, végtelen sok értékű függvényről beszélni. Ekkor az általunk értelmezett értékeket a függvények főértékének nevezik.

Az arctg$z$ logaritmikus alakja:

$$\text{arctg}z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

Mivel a logaritmusfüggvény 0-ban és ∞-ben nincs értelmezve, így e függvény a $z = i$ és a $z = -i$ helyen nem értelmezett.

E függvény esetében az egyértelmű előállításhoz a

$$\text{Re}(\text{arctg}z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

megszorítást tesszük.

Mivel ch$iz = \cos z$ és sh$iz = i \sin z$, így az areafüggvények az arkuszfüggvényekből származtathatóak. Ezek logaritmikus alakjai a valósból megszokottak:

$$\text{arch}z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\text{arsh}z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$$

$$\text{arth}z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}$$

(Az arth$z$ értelmezési tartományából a $z = 1$ és a $z = -1$ pont ki van rekesztve.)

Mivel a deriválási szabályok a valósban megszokottak, így e függvények deriváltjai is a valósban ismertek.

Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy

$$\text{arccos}z = \frac{\pi}{2} - \text{arcsin}z$$

A feladat egyenértékű a

$$\cos w = \sin\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$$

összefüggés igazolásával.

Ez utóbbi (az addíciós tételek komplex változó esetén is érvényesek):

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - w\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos w - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin w = \cos w$$

Igazoljuk az összefüggést az arcsin$z$ logaritmikus alakjának alkalmazásával is! Felhasználjuk, hogy:

$$\sqrt{1 - z^2} = i\sqrt{z^2 - 1}$$

$$\text{arcsin}z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) = -i \ln\left(i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)\right) =$$

$$= -i \ln i - i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arccos}z$$

Hiszen $\ln i = i\frac{\pi}{2}$.

A feladatból láthatóan az arcsin$z$ függvény származtatható az arccos$z$-ből. Hasonló összefüggés érvényes az arctg$z$ és az arcctg$z$ függvények között is.

2. Határozza meg az arkuszfüggvények alkalmazásával a

$$\sin z = 20$$

egyenlet megoldásait!

Az egyenlet egyik megoldása:

$$z = \text{arcsin}20 = -i \ln\left(20i + \sqrt{1 - 20^2}\right)$$

Az előző feladatban látott módon átalakítva:

$$z = -i \ln i - i \ln\left(20 + \sqrt{20^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{2} - i\text{arch}20$$

Figyelembe véve az exponenciális függvény periodikusságát; az egyenlet megoldásai:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i(\text{arch}20 + 2l\pi) \qquad k, l \in \mathbb{Z}.$$

3. Igazolja, hogy $(\text{arcsin}z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$!

(A derivált nincs értelmezve a $z = 1$ és a $z = -1$ pontokban.)

Az egyik lehetőség az igazolásra az arcsin$z$ logaritmikus alakjából, az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva:

$$(\arcsin z)' = \left(-i\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\right)' =$$

$$= -i\cdot\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\cdot\left(i-\frac{2z}{2\sqrt{1-z^2}}\right) =$$

$$= -i\cdot\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\cdot\left(1+\frac{iz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

A másik lehetőség az inverzfüggvény deriválási szabályának alkalmazása:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

Hasonlóan látható be a többi arkusz-, illetve areafüggvényre vonatkozóan is, hogy deriváltja a valósban megszokott deriválták.

4. Igazolja, hogy az arctg$z$ 0 helyhez tartozó Taylor-sora:

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

A hatványsor konvergenciasugara $R = 1$ (ennek igazolása például gyökkritériummal végezhető el).

Mivel a hatványsor a konvergenciatartományban reguláris függvény, így az összefüggés mindkét oldalát deriválva:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots$$

Az összefüggés jobb oldalán egy mértani sor áll, melynek $\left(-z^2\right)$ a hányadosa, így összege valóban $\frac{1}{1+z^2}$.

Mivel a deriváltak egyenlősége igaz, és az eredeti sorfejtés érvényes $z = 0$ esetén, így igaz az arctg$z$ Taylor-sorára vonatkozó állítás is.

Megjegyzés: A Taylor-sor a mértani sor tagonkénti integrálásával származtató. (Lásd a következő fejezetet.)

5. Igazolja, hogy az arcsin$z$ 0 helyen vett Taylor-sora:

$$\arcsin z = z + \frac{z^3}{6} + \frac{3z^5}{40} + \ldots + \binom{-0{,}5}{n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\ \text{ha}$$

$|z| < 1$.

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el.

Mindkét oldalt deriválva:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-z^2\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-z^2\right)^2}{2!}+\ldots+$$

$$+\binom{-0{,}5}{n}\left(-z^2\right)^n+\ldots =$$

$$= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{3}{8}z^4 + \ldots + \binom{-0{,}5}{n}\cdot(-1)^n\cdot z^{2n} + \ldots,\ \text{ha } |z| < 1.$$

Ez az összefüggés érvényes, hiszen a bal oldalon álló függvény binomiális sorát felírva éppen a jobb oldalt kapjuk, s mivel $z = 0$ esetén az arcsin$z$ is, a sor is nullát ad, így az állítás igaz.

(Az előző feladathoz hasonlóan most is tagonkénti integrálással kapjuk a binomiális sorból arcsin$z$ sorát.)

Megjegyzés: Az arccos$z$ sora az előbb igazolt

$$\arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z$$

összefüggésből származtató.

5. KOMPLEX FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

Valós függvényeket leggyakrabban a valós számegyenes egy intervallumán integrálunk. Ennek megfelel a komplex függvény síkgörbe menti integrálja. Ezért először a síkgörbe fogalmának tisztázásával foglalkozunk.

Lényegében görbének nevezzük az egyenes szakasz folytonos leképzésével adódó alakzatokat. Pontosabban: legyenek $x(t)$ és $y(t)$ a valós t változó folytonos függvényei a valós számegyenes $[\alpha, \beta]$ intervallumán értelmezve. Ekkor a $z(t) = x(t) + iy(t)$ valós változós komplex értékű függvény a komplex sík γ görbéjének egy paraméterezését adja, mely az $a = z(\alpha)$ pontot köti össze a $b = z(\beta)$ ponttal.

A γ görbét a komplex sík egy részhalmazának tekintjük tehát, amely a $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ folytonos leképezés értékkészlete. Világos, hogy ugyanazt a γ görbét több különböző folytonos $z(t)$ függvény értékkészleteként is megkaphatjuk. Ezért beszélhetünk a γ görbe több különböző paraméterezéséről.

A γ görbét *zártnak* nevezzük, ha $z(\alpha) = z(\beta)$. A görbe kezdőpontjára általában az $a = z(\alpha)$, végpontjára a $b = z(\beta)$ jelet használjuk.

Az integrálás szempontjából is alapvetően fontos kérdés, hogy a γ görbének létezik-e ívhosszúsága. A γ görbét *rektifikálhatónak* nevezzük, ha az $[\alpha, \beta]$ intervallum tetszőleges $t_0 = \alpha, t_1, t_2, \ldots t_n = \beta$ felosztása esetén a $z(t_k)$ pontokat összekötő húrpoligon hossza, tehát a

$$\sum_{k=1}^{n} \left| z(t_k) - z(t_{k-1}) \right|$$

összeg egy felosztástól független korlát alatt marad. Ennek az összegnek a felső határát, tehát az

$$s := \sup \sum_{k=1}^{n} \left| z(t_k) - z(t_{k-1}) \right|$$

véges értéket a γ *görbe ívhosszúságának* nevezzük, ahol a szuprémum az összes lehetséges felosztására értendő.

A fenti módon megadott γ görbe *irányított* abban az értelemben, hogy a folytonos $z(t)$ leképzés a valós $[\alpha, \beta]$ intervallum természetes rendezettségét átviszi a γ görbe pontjaira. Ily módon van értelme beszélni a $z(\alpha)$ kezdő- és $z(\beta)$ végpontról. A γ görbének nyilván kétféle ellentétes irányítása van.

A görbéknek különösen fontos speciális osztályát alkotják az úgynevezett *Jordan-görbék*. A γ görbét Jordan-görbének nevezzük, ha a folytonos $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ leképzés kölcsönösen egyértelmű, azaz $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$-ből következik, hogy $t_1 = t_2$. Ez a tulajdonság szemléletesen azt jelenti, hogy a görbe nem metszheti önmagát. Az ilyen tulajdonságú γ görbét szokás *egyszerű ívnek* is nevezni.

Az integrálás szempontjából fontos további speciális típus az úgynevezett *sima Jordan-görbe*. A Jordan-görbét simának nevezzük, ha a γ görbét megadó $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ komplex függvény folytonosan differenciálható. Ennek általánosabb formája az úgynevezett *szakaszonként sima* görbe, mely véges számú, végpontjaikban illeszkedő sima görbéből áll, és az érintkezési pontokban a görbét megadó $z(t)$ függvény esetleg nem differenciálható.

A komplex vonalintegrál értelmezése:

Legyen $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ egy rektifikálható γ görbe paraméterezése, és f egy a γ görbén értelmezett komplex értékű függvény. Osszuk fel az $[\alpha, \beta]$ intervallumot a $t_0 = \alpha, t_1, t_2, \ldots t_n = \beta$ pontokkal.

Ez szolgáltatja a γ görbének egy $a = z_0 = z(\alpha)$, $z_1 = z(t_1), \ldots$ $b = z_n = z(\beta)$ felosztását véges sok ívdarabra. Minden egyes (z_{k-1}, z_k) íven vegyünk fel egy tetszés szerinti ξ_k pontot, és számítsuk ki az

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

összeget. Finomítsuk úgy a felosztást, hogy a (z_{k-1}, z_k) ívek hossza egyenletesen tartson 0-hoz! Ha ekkor teljesül az, hogy az S összeg bármely minden határon túl finomodó felosztássorozat esetén a felosztástól független határértékhez tart, akkor az f függvényt a γ görbén integrálhatónak nevezzük. Az S összeg határértékét pedig az f függvény γ görbére vonatkozó integráljának nevezzük, és így jelöljük: $S = \int_\gamma f(z)dz$.

Ha a γ zárt görbe, használjuk az alábbi jelölést: $S = \oint_\gamma f(z)dz$.

Igen egyszerűen biztosíthatjuk az integrál létezését egy elégséges feltétellel. Igazolható, hogy ha f a γ görbén folytonos – melyen ekkor bizonyíthatóan egyenletesen is folytonos –, akkor f integrálható γ-n.

Az értelmezés alapján világos, hogy a komplex integrál teljes mértékben analógiája a kétdimenziós vektorfüggvény skalárértékű vonal menti integráljának. A különbség „csak" annyi, hogy vektorok skaláris szorzata helyett komplex számok szorzata értendő.

Ebből egyrészt az is következik, hogy a valós vonalintegrálokra vonatkozó tételek mindegyike – értelemszerű módosítással – igaz komplex vonalintegrálokra is.

Másrészt az említett kapcsolat ad lehetőséget gyakorlatilag a vonalintegrál kiszámítására. Igaz ugyanis az alábbi tétel:

Ha f integrálható a γ görbén, ahol γ egy sima Jordan-görbe, tehát $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$

Tehát a komplex f függvény integrálja formailag is pontosan úgy fest, mint egy valós vonalintegrál. Egy komplex vonalintegrál azonban visszavezethető közönséges valós vonalintegrálokra is az alábbi módon.

Írjuk fel az $f(z) = f(x + iy)$ integrandust valós és képzetes részek segítségével:

$$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

ahol u és v kétváltozós valós függvények. Ha f folytonos a γ görbén, akkor f-nek γ-ra vonatkozó integrálja kiszámítható két valós vonalintegrál segítségével – ha a klasszikus jelölést alkalmazzuk – az alábbi módon:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy)$$

Valós integrálok kiszámításának leghatékonyabb módja a Newton–Leibniz-formula alkalmazása. Ennek megvan a komplex megfelelője is:

Az F reguláris függvényt az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon (egyszerűbben mondva: „tartományon") az f függvény primitív függvényének nevezzük, ha a T tartomány minden pontjában $F'(z) = f(z)$.

A reguláris komplex függvények alapvető tulajdonságát fejezi ki a *Cauchy-féle alaptétel*:

Ha f az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon reguláris függvény, akkor bármely T-ben haladó zárt rektifikálható γ görbére vonatkozó integrálja zérus, azaz:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Ennek egy következménye, hogy ha a és b a T tartomány tetszőleges pontjai, akkor az a-tól b-ig vett integrál értéke független az integrációs úttól, csak az a és b pontok függvénye.

Az alaptétel következményei az alábbi tételek:

A folytonos f függvénynek az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha f reguláris a T tartományon. Ebben az esetben egy primitív függvény előállítható egy integrálfüggvénnyel

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

alakban, ahol $z_0 \in T$ tetszőleges, és az integrálás bármely z_0-ból z-be vezető T-ben haladó rektifikálható görbe mentén történik.

Newton–Leibniz-tétel: Ha F a reguláris f függvény primitív függvénye a T tartományon, akkor bármely T-ben haladó a kezdőpontú és b végpontú rektifikálható γ görbére:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$$

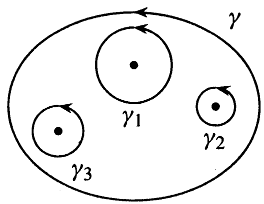
Érdekes módon igaz a Cauchy-féle alaptétel megfordítása is:

Morera tétele: Ha f folytonos a T tartományon, és *bármely* T-ben haladó rektifikálható zárt görbére vonatkozó integrálja zérus, akkor f reguláris T-n.

A Cauchy-féle integráltétel általánosítható többszörösen összefüggő tartományokra is.

A Cauchy-féle alaptétel általánosítása: Ha f reguláris egy $(n+1)$-szeresen összefüggő T tartományban, annak γ külső és γ_k, $k = 1, 2, \ldots n$ belső határgörbéin (5.1 ábra), akkor egyező körüljárás esetén:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz$$



5.1 ábra

A Cauchy-féle alaptétel további általánosításának tekinthető az alábbi Riemann-tól származó kiterjesztés:

Riemann tétele: Ha f a T tartományban a z_0 pont kivételével reguláris, a z_0 pont környezetében pedig korlátos, akkor is igaz, hogy bármely a z_0 pontot nem érintő zárt γ görbére

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0,$$

akár megkerüli γ a z_0-t, akár nem. Ennek a Riemann-féle kiterjesztésnek a következménye a komplex integrálok kiszámítása szempontjából alapvető jelentőségű *Cauchy-féle integrálformula*: Legyen f reguláris az összefüggő nyílt T halmazon, és γ rektifikálható zárt Jordan-görbe, mely belsejével együtt T-hez tartozik. Ekkor a T tartomány minden olyan z_0 pontjára, amely a γ belsejében van, igaz, hogy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

A Cauchy-féle integrálformula a reguláris komplex függvények alapvető tulajdonságát fejezi ki: Ha $f(z)$ reguláris egy γ rektifikálható zárt görbe pontjaiban és γ belsejében, akkor γ belsejében az $f(z)$ függvényértékek egyértelműen meg vannak határozva a γ-n felvett értékekkel.

Ennek a tulajdonságnak egy speciális esetét fejezi ki az alábbi nevezetes középértéktétel.

Gauss-féle középértéktétel: Legyen f reguláris a $|z - z_0| \leq r$ zárt körlapon. Ekkor:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r \cdot e^{i\varphi}\right) d\varphi$$

Ez a tétel nyilván a Cauchy-féle integrálformula következménye arra az esetre, amikor a γ görbe egy kör, és z_0 a kör középpontja. Az egyenlőség tartalma lényegében a következő:

Az f függvény $|z - z_0| = r$ körre vonatkozó integrálközépértéke a kör középpontjában felvett függvényérték.

Megemlítjük még, hogy a fenti két tétel abban az esetben is teljesül, ha f csak a γ görbe belsejében reguláris, a γ görbén elég csak a folytonosságot megkövetelni.

Létezik a Cauchy-féle formulának egy deriváltakra vonatkozó általánosítása is.

Differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle integrálformula: Ha az f függvény reguláris a T tartományon, akkor akárhányszor differenciálható T-ben, és T minden z_0 pontjára.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

ahol γ tetszőleges zárt rektifikálható Jordan-görbe, mely belsejével együtt T-ben van, és z_0 a γ belsejében van.

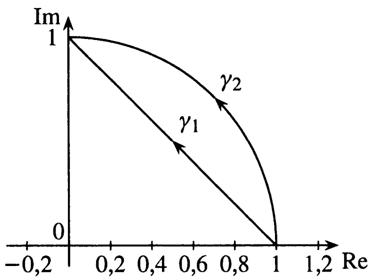
5.1 Komplex integrálok közvetlen kiszámítása

Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az $f(z) = \mathrm{Re}z$ komplex függvény vonalintegrálját a $z = 1$ pontból a $z = i$ pontba vezető alábbi görbék mentén (5.2 ábra):

a) γ_1: egyenes szakasz

b) γ_2: pozitívan irányított negyedkörív



5.2 ábra

a) Először *valós vonalintegrálokkal* számolunk: Ha $z = x + iy$, akkor $\mathrm{Re}z = x$, tehát $u(x, y) = x$, $v(x, y) = 0$.

A γ_1 görbe egy paraméterezése $z(t) = (1 - t) + it$, $t \in [0, 1]$, tehát $x(t) = 1 - t$, $y(t) = t$, így $dx = -1$, $dy = 1$. Helyettesítve a képletbe:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 (udx - vdy) + i\int_0^1 (vdx + udy) =$$

$$= \int_0^1 \big(x(-1) - 0\big)dt + i\int_0^1 (0 + x\cdot 1)dt =$$

$$= \int_0^1 \big((t-1) + (1-t)i\big)dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Ugyanezen a görbén most integráljunk *komplex vonalintegrál* alkalmazásával.

Az egyenes paraméterezése ugyanaz: $z(t) = (1 - t) + it$, $t \in [0, 1]$. Ekkor $\mathrm{Re}z = 1 - t$, $z'(t) = -1 + i$.

Helyettesítve:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 (1-t)(-1+i)dt = \int_0^1 \big((t-1) + (1-t)i\big)dt =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Természetesen ugyanazt az eredményt kaptuk.

b) Integráljunk a negyedkörön. Ennek egy lehetséges paraméterezése:

$$z(t) = \cos t + i\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ekkor $\mathrm{Re}z = \cos t$, $z'(t) = -\sin t + i\cos t$.

Helyettesítve a *komplex vonalintegrál* képletébe:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(-\sin t + i\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-\sin t\cos t + i\cos^2 t\big)dt =$$

$$= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + i\left(\frac{t}{2} + \frac{sin2t}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\pi}{4}$$

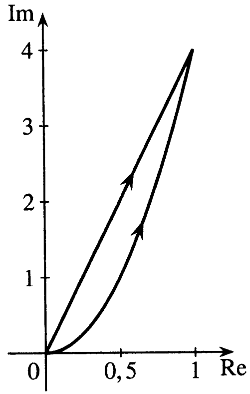
Javasoljuk a Tisztelt Olvasónak, hogy gyakorlásképpen számolja ki a γ_2-re vonatkozó integrált valós vonalintegrálokkal, és vesse össze a két eredményt. Természetesen ugyanezt kell kapnia.

Azonban a γ_1 és γ_2 görbékre vonatkozó integrálok értéke nem egyenlő, pedig azonos a kezdő- és a végpontjuk. Ez azonban nem ellentmondás, hiszen, mint azt tudjuk, az $f(z) = \mathrm{Re}z$ függvény nem reguláris.

2. Integrálja az $f(z) = z^2$ függvényt az origóból induló, $1 + 4i$ pontba vezető alábbi görbék mentén (5.3 ábra)!

a) γ_1: egyenes szakasz

b) γ_2: parabolaív



5.3 ábra

a) Számoljunk először *valós vonalintegrállal*:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy,$$

tehát a valós és képzetes részek:

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \; v(x, y) = 2xy.$$

A görbe egy paraméterezése például:

$$z(t) = t + 4it, \; t \in [0, 1].$$

Így $x(t) = t$, $y(t) = 4t$, $dx = 1$, $dy = 4$. Azaz helyettesítve:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 (udx - vdy) + i \int_0^1 (vdx + udy) =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(t^2 - (4t)^2\right) \cdot 1 - 2t \cdot 4t\right)dt + i \int_0^1 \left(2t \cdot 4t \cdot 1 \left(t^2 - (4t)^2\right) \cdot 4\right)dt =$$

$$= \int_0^1 -47t^2dt + i \int_0^1 -4t^2dt = -\frac{47}{3} - i \cdot \frac{52}{3}$$

Most lássuk ugyanezt *komplex vonalintegrállal* számolva. A görbe paraméterezése legyen ugyanaz, mint az előbb. Ekkor $z'(t) = 1 + 4i$, tehát:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^1 (t + 4it)^2(1 + 4i)dt =$$

$$= (1 + 4i)^3 \cdot \int_0^1 t^2dt = \frac{1}{3}(1 + 4i)^3 = -\frac{47}{3} - i \cdot \frac{52}{3}$$

Ebben az esetben egy harmadik módszert is alkalmazhatunk. Tudjuk, hogy $f(z) = z^2$ az egész síkon reguláris függvény, így a teljes komplex síkon van primitív függvénye, tehát alkalmazható a *Newton–Leibniz*-formula:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^{1+4i} z^2dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+4i} = \frac{1}{3}(1 + 4i)^3 = -\frac{47}{3} - i \cdot \frac{52}{3}$$

Megnyugtató, hogy mindhárom módszer ugyanazt az eredmény szolgáltatta.

b) Térjünk át a parabolaív mentén történő integrálásra.

Komplex vonalintegrállal számolva γ_2 egy paraméterezése:

$z(t) = t + 4it^2$, $t \in [0, 1]$, $z'(t) = 1 + 8it$. Ezért:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^1 \left(t + 4it^2\right)(1 + 8it)dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 - 80t^4\right) + i\left(16t^3 - 128t^5\right)dt = -\frac{47}{3} - i \cdot \frac{52}{3}$$

Az integrál értéke ugyanaz, mint a γ_1 görbére vonatkozó integrál. Ezt számítás nélkül is azonnal tudhatjuk, hiszen $f(z)$ az egész komplex síkon reguláris függvény, így alkalmazható rá a Cauchy-féle alaptétel következménye, mely szerint az integrál független az úttól.

Természetesen ugyanezt jelenti a Newton–Leibniz-formula alkalmazhatósága, hiszen ennek alkalmazhatósága egyenértékű az úttól való függetlenséggel.

3. Számítsa ki az $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$ függvény integrálját az $a = 1 + 2i$ pontból a $b = 2 + 4i$ pontba vezető egyenes szakasz mentén!

Az $f(z)$ függvény a konjugálás művelete miatt nem reguláris, így primitív függvénye nincs. Kénytelenek vagyunk tehát az integrált közvetlenül kiszámítani: Először *valós vonalintegrálokkal* számolunk. Ehhez szükségünk van $f(z)$ valós és képzetes részére:

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x - iy}{x + iy} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Tehát a „koordinátafüggvények":

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad v(x, y) = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}$$

A görbe egy paraméterezése: $z(t) = t + 2it$, $t \in [1, 2]$. Tehát $x(t) = t$, $y(t) = 2t$; $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2$. Helyettesítve:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_1^2 (udx - vdy) + i\int_1^2 (vdx + udy) =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{t^2 - 4t^2}{t^2 + 4t^2} \cdot 1 + \frac{2t \cdot 2t}{t^2 + 4t^2} \cdot 2\right) dt +$$

$$+ i\int_1^2 \left(-\frac{2t \cdot 2t}{t^2 + 4t^2} \cdot 1 + \frac{t^2 - 4t^2}{t^2 + 4t^2} \cdot 2\right) dt =$$

$$= \int_1^2 (1 - 2i)dt = 1 - 2i$$

Természetesen *komplex vonalintegrállal* is ugyanezt az eredményt kapjuk:

A görbe paraméterezése legyen ugyanaz, így:

$z'(t) = 1 + 2i$, $\bar{z}(t) = t - 2it$, tehát:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_1^2 \frac{t - 2it}{t + 2it} \cdot (1 + 2i)dt = \int_1^2 (1 - 2i)dt = 1 - 2i$$

4. Számítsa ki az $f(z) = \bar{z}$ komplex függvény görbe menti integrálját az ábrán látható pozitívan irányított *OABO* zárt γ görbére vonatkozólag (5.4 ábra)!

Ismeretes, hogy az $f(z) = \bar{z}$ függvény nem reguláris, így a zárt görbére vonatkozó integrál kiszámítására nem alkalmazható a Cauchy-féle alaptétel.

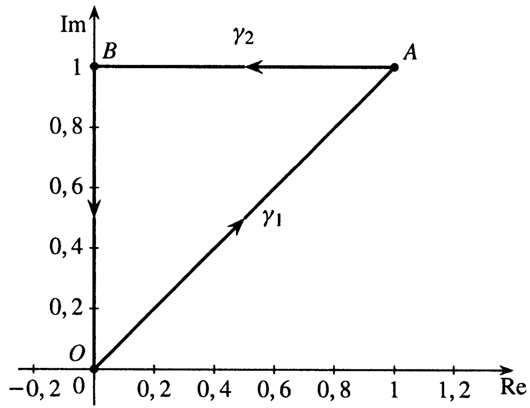
A számítást görbedarabonként végezzük el.

Legyen $\gamma_1 = OA$. Ennek paraméterezése: $z(t) = it$, $t \in [0, 1]$, így $z'(t) = i$, tehát $\bar{z}(t) = -it$, így:

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}dz = \int_0^1 -it \cdot idt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

Legyen $\gamma_2 = AB$. Ekkor $z(t) = (1 - t) + i$, $t \in [0, 1]$, $z'(t) = -1$, $\bar{z}(t) = (1 - t) - i$, tehát:

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}dz = \int_0^1 \big((1 - t) - i\big) \cdot (-1)dt = -\frac{1}{2} + i$$



5.4 ábra

Végül legyen $\gamma_3 = BO$. Ez megadható például a következő alakban: $z(t) = i(1 - t)$, $t \in [0, 1]$, ahonnan $z'(t) = -i$, $\bar{z}(t) = -i(1 - t)$.

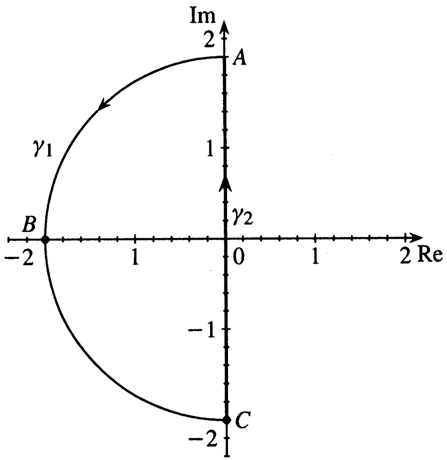
$$\int_{\gamma_3} \bar{z}dz = \int_0^1 \big(-i(1 - t)\big)(-i)dt = (-1) \cdot \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

A zárt γ görbére vonatkozó integrál ezen integrálok összege:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_k} \bar{z}dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + i,$$

ami valóban különbözik nullától. Ez a tény az integrálás szemszögéből is alátámasztja azt a tényt, hogy az $f(z) = \overline{z}$ nem reguláris függvény.

5. Számítsa ki az $f(z) = |z|$ komplex függvény ábrán látható pozitívan irányított zárt γ görbére vonatkozó integrálját (5.5 ábra)!



5.5 ábra

Az előző példához hasonlóan ez az f sem reguláris, tehát az integrált közvetlenül ki kell számítani szakaszonként. Legyen először γ_1 az ABC félkörív. Ezt paraméterezhetjük például az alábbi módon:

$$z(t) = 2e^{it},\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right],\ \text{így } z'(t) = 2ie^{it},\ |z(t)| = 2, \text{ tehát:}$$

$$\int_{\gamma_1} |z|dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2 \cdot 2ie^{it}dt = 4i \cdot \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -8i$$

Ezután legyen γ_2 a CA egyenesszakasz. Ezt az alábbi módon írjuk le: $z(t) = it$, $t \in [-2, 2]$, $z'(t) = i$, $|z(t)| = t$. Tehát:

$$\int_{\gamma_2} |z|dz = \int_{-2}^{2} t \cdot idt = i \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{2} = 0$$

Ezen értékek összege adja a zárt γ görbére vonatkozó integrált:

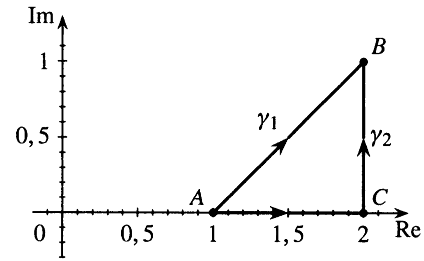
$$\int_{\gamma} |z|dz = \int_{\gamma_1} |z|dz + \int_{\gamma_2} |z|dz = -8i + 0 = -8i$$

Ismét különbözik 0-tól. Morera tétele szerint tehát $f(z) = |z|$ valóban nem lehet reguláris.

6. Számítsa ki az $f(z) = \operatorname{ch}\overline{z}$ függvény vonalintegrálját a $z = 1$ pontból a $z = 2 + i$ pontba vezető alábbi görbék mentén (5.6 ábra):

a) γ_1: egyenes szakasz (AB)

b) γ_2: ACB töröttvonal



5.6 ábra

Mivel f nem reguláris, nem létezik primitív függvénye sem, az integrál függhet az úttól, tehát minden vonalintegrált közvetlen paraméterezéssel ki kell számolni.

a) Az AB szakasz egyenlete: $z(t) = (1+t)+ti$, $t \in [0, 1]$, $z'(t) = 1+i$, $\overline{z}(t) = (1 + t) - ti$.

Az integrál kiszámításához felhasználjuk a $\operatorname{ch}z$ és e^z függvények kapcsolatát megadó alábbi összefüggést:

$$\operatorname{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \text{ tehát } \operatorname{ch}\overline{z} = \frac{1}{2}e^{\overline{z}} + \frac{1}{2}e^{-\overline{z}}, \text{ tehát:}$$

$$\int_{\gamma_1} \operatorname{ch}\overline{z}dz = \int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{2}e^{\overline{z}} + \frac{1}{2}e^{-\overline{z}}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(e^{(1+t)-ti} + e^{-(1+t)+ti}\right)(1 + i)dt =$$

$$= \frac{1+i}{2} \cdot \int_0^1 \left(e^{1+t(1-i)} + e^{-1+t(i-1)} \right) dt =$$

$$= \frac{1+i}{2} \cdot \left[\frac{e^{1+t(1-i)}}{1-i} + \frac{e^{-1+t(i-1)}}{1-i} \right]_0^1 = \frac{1+i}{1-i} \left(\mathrm{sh}(2-i) - \mathrm{sh}1 \right)$$

b) Az integrál valószínűleg függ az úttól, ezért a töröttvonalra vonatkozólag a számítást el kell végezni. Ehhez felhasználjuk az integrál út szerinti additivitását és a chz függvény előbbi átalakítását:

$$\int_{\gamma_2} \mathrm{ch}\bar{z} dz = \int_{AC} \mathrm{ch}\bar{z} dz = \int_{CB} \mathrm{ch}\bar{z} dz$$

Az AC szakasz a valós tengelyen van, ezért: $z(t) = t$, $t \in [1, 2]$, $z'(t) = 1$, $\bar{z}(t) = t$, tehát:

$$\int_{AC} \mathrm{ch}\bar{z} dz = \int_1^2 \mathrm{ch}t \cdot 1 dt = \left[\mathrm{sh}t \right]_1^2 = \mathrm{sh}2 - \mathrm{sh}1$$

A CB szakasz paraméterezése:

$z(t) = 2 + it$, $t \in [0, 1]$, $z'(t) = i$, $\bar{z}(t) = 2 - it$, így:

$$\int_{CB} \mathrm{ch}\bar{z} dz = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(e^{2-it} + e^{-2+it} \right) \cdot i dt =$$

$$= \frac{i}{2} \cdot \left[\frac{e^{2-it}}{-i} + \frac{e^{-2+it}}{i} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{e^{2-i} - e^{-2+i}}{2} = \mathrm{sh}2 - \mathrm{sh}(2-i)$$

Ezek összege adja a keresett integrált:

$$\int_{\gamma_2} \mathrm{ch}\bar{z} dz = 2\mathrm{sh}2 - \mathrm{sh}1 - \mathrm{sh}(2-i)$$

Ha összehasonlítjuk a γ_1-re vonatkozó integrál értékével, láthatjuk, hogy az integrál valóban függ az úttól.

7. Integrálja az $f(z) = 2iz - 3\bar{z}$ komplex függvényt az ábrán látható pozitívan irányított zárt γ görbére vonatkozólag (5.7 ábra).

Mivel f nem reguláris függvény, nem valószínű, hogy a γ-ra vonatkozó integrál nulla, így szakaszonként ki kell számítanunk.

Legyen γ_1 részív az ABC félkörív. Ennek paraméterezése $z(t) = 1 \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Így $z'(t) = ie^{it}$, $\bar{z}(t) = e^{-it}$. Tehát:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^\pi \left(2ie^{it} - 3e^{-it} \right) \cdot ie^{it} dt = \int_0^\pi \left(-2e^{it} - 3i \right) dt =$$

$$= \left[ie^{2it} - 3it \right]_0^\pi = -3i\pi$$

A γ_2 görbe legyen a valós tengely CA szakasza.

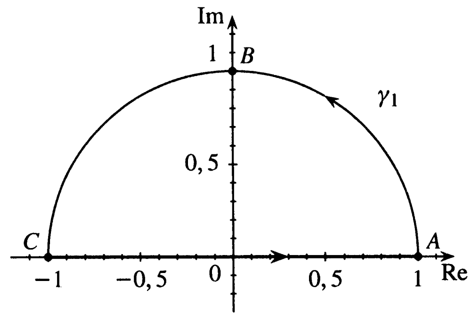
Ennek egyenlete $z(t) = t$, $t \in [-1, 1]$, $z'(t) = 1$, $\bar{z}(t) = t$.

Tehát:

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{-1}^1 (2it - 3t) \cdot 1 dt = (2i - 3) \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$$

Az integrál út szerinti additivitását felhasználva kapjuk:

$$\oint_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = -3i\pi + 0 = -3i\pi$$



5.7 ábra

8. Számítsa ki az $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$ komplex függvény integrálját egy tetszőleges rektifikálható görbére vonatkozólag!

Ha a görbe zárt, akkor alkalmazzuk a Cauchy-féle alaptételt. Ugyanis nemnegatív egész kitevő esetén az $f(z) = z^n$ függvény reguláris a teljes komplex síkon, így bármely zárt görbére vonatkozó integrálja zérus.

Ellenőrizzük ezt egy konkrét esetben!

Legyen a γ egy z_0 középpontú, r sugarú körvonal. (A továbbiakban erre a $C(z_0, r)$ jelölést fogjuk használni.) Ennek egyenlete:

$$z(t) = z_0 + r \cdot e^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ z'(t) = ir \cdot e^{it}$$

Ezek felhasználásával a binomiális tétel alkalmazásával kapjuk:

$$\int_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} \left(z_0 + re^{it}\right)^n ire^{it} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} \cdot \left(re^{it}\right)^k \cdot ire^{it} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} \cdot i \cdot r^{k+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} \cdot i \cdot \frac{r^{k+1}}{i(k+1)} \cdot \left(e^{i(k+1)\cdot 2\pi} - 1\right) = 0$$

Ha a *görbe nem zárt*, akkor a regularitás miatt alkalmazhatjuk a Newton–Leibniz-tételt, hiszen akkor f-nek van primitív függvénye, méghozzá

$$F(z) = \frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1},\ n \geq 0.$$

Legyen a görbe kezdőpontja a, végpontja b. Ekkor bármely a-ból b-be vezető γ görbe mentén:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b z^n dz = \frac{1}{n+1} \cdot \left[z^{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

A mondottak természetesen változtatás nélkül igazak bármely $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén az $f(z) = \left(z - z_0\right)^n$, $n \geq 0$ függvényre is.

9. Számítsa ki az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény vonalintegrálját az alábbi zárt görbék mentén:

a) γ_1: Origó közepű, $r = 2$ sugarú körív, azaz $\gamma_1 = C(0, 2)$.

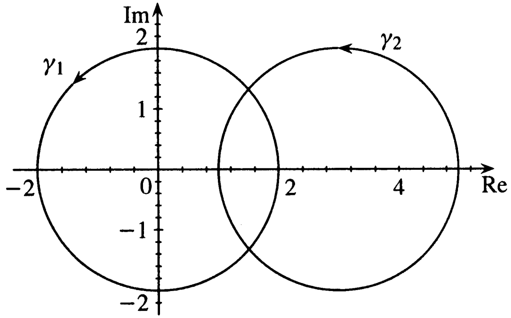
b) γ_2: $z_0 = 3$ középpontú, $r = 2$ sugarú körív, azaz $\gamma_2 = C(3, 2)$.

Mindkét görbe legyen pozitív irányítású (5.8 ábra).

a) A γ_1 zárt görbe belsejében az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény nem reguláris, hiszen a $z = 0$ pont a függvény szinguláris pontja. Nem alkalmazható tehát Cauchy alaptétele. Paraméterezzük γ_1-et: $z(t) = 2 \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ekkor $z'(t) = 2i \cdot e^{it}$, tehát:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

Ez egy nagyon fontos eredmény, amit a későbbiekben még számos alkalommal felhasználunk.



5.8 ábra

A számítás alapján egyrészt világos, hogy a kör sugara nem befolyásolja az integrál értékét. Sőt a Cauchy-féle alaptétel többszörösen összefüggő tartományokra vonatkozó általánosítása alapján az is világos, hogy a görbe alakja sem számít, csak az, hogy γ olyan zárt görbe legyen, amely egyszer pozitív irányban megkerüli az origót. Legyen ugyanis γ' tetszőleges ilyen görbe, γ pedig olyan origó közepű kör, mely teljes egészében γ' belsejében van. Ha az r sugár elég kicsi, akkor ilyen van. Erre vonatkozólag az integrál $2\pi i$, az idézett tétel szerint pedig:

$$\oint_{\gamma'} \frac{1}{z} dz = \oint_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

b) A $C(3, 2)$ köríven és azon belül $f(z) = \dfrac{1}{z}$ reguláris, tehát Cauchy alaptétele szerint:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = 0$$

És ez így van tetszőleges olyan rektifikálható zárt görbére vonatkozólag, amely nem tartalmazza belsejében az origót, és nem is halad át rajta.

Mivel azonban az integrál kiszámítása nem okoz különösebb gondot, gyakorlásképpen elvégezzük.

A $C(3, 2)$ görbe egy paraméterezése: $z(t) = 3 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Ekkor $z'(t) = 2ie^{it}$, ugyanaz, mint az a) pontban. Így:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2e^{it}} \cdot 2ie^{it} dt =$$

$$= \left[\ln\left|3 + 2e^{it}\right|\right]_0^{2\pi} = \ln 5 - \ln 5 = 0$$

Az integrandus $\frac{f'}{f}$ alakú volt, és kihasználtuk, hogy az e^z függvény periódusa $2\pi i$. Megnyugtató az összhang az általános elméleti eredménnyel.

A problémát azonnal általánosíthatjuk is. Legyen $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, ahol $z_0 \in \mathbb{C}$ tetszőlegesen rögzített, γ legyen a $z = z_0$ pontot egyszer pozitív irányban megkerülő rektifikálható zárt görbe. Ekkor:

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

Az előzőek alapján a részletes számítást a Tisztelt Olvasóra bízzuk.

10. Állítsa elő az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény egy primitív függvényét a komplex sík egy alkalmas egyszeresen összefüggő nyílt T halmazán!

Már a 9. példában is említettük, de az elemi függvények értelmezésénél is szó volt arról, hogy az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény a $z = 0$ pontban nem reguláris, a $z = 0$ pont a függvény izolált szinguláris pontja. Ez azt is jelenti, hogy a függvény regularitási tartománya nem egyszeresen összefüggő halmaz. Ha azonban a komplex síkot felmetsszük a negatív valós félegyenes mentén, akkor a kapott felmetszett sík már egyszeresen összefüggő, melyben az $f(z)$ függvény reguláris, így van primitív függvénye is. Például bármely ponthoz tartozó integrálfüggvénye primitív függvény. Rögzítsük

az $a = 1$ pontot, legyen ez az integrációs út kezdőpontja, a végpont pedig tetszőleges $z \neq 0$ komplex szám. Az integrációs út konkrétan legyen az ábrán látható γ görbe, mely áll az $\left[1, |z|\right]$ intervallumból és a $|z| = r$ sugarú körívből (5.9 ábra).

Jelölje ezeket rendre γ_1 és γ_2. A primitív függvény ekkor, az integrál út szerinti additivitását felhasználva, a következő módon számítható:

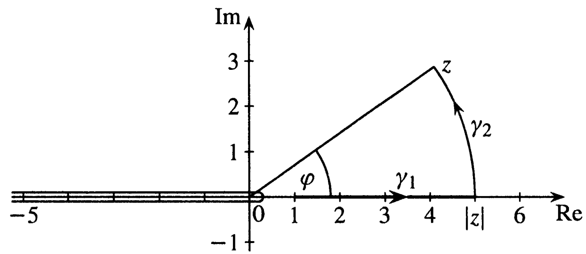
$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz =$$

$$= \int_1^{|z|} \frac{1}{t} dt + \int_0^{\varphi} \frac{1}{|z| \cdot e^{it}} \cdot |z| \cdot ie^{it} dt =$$

$$= \left[\ln|t|\right]_1^{|z|} + \int_0^{\varphi} i dt = \ln|z| + i\varphi = \ln|z| + i\arg z = \ln z,$$

amely éppen a komplex logaritmusfüggvény „főága”. A jelzett tartományon tehát az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény primitív függvénye a $F(z) = \ln z$ függvény, mint a valós analízisben. Ez tehát azt jelenti, hogy az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvényt az 1 ponttól z-ig tetszőleges, negatív valós félegyenest nem metsző és 0-t nem érintő rektifikálható γ görbe mentén integrálva:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_1^z \frac{1}{z} dz = \ln z$$



5.9 ábra

11. Számítsa ki az $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \geq 2$ komplex függvény vonalintegrálját tetszőleges rektifikálható γ görbére vonatkozólag!

Az f függvény a $z = 0$ pont kivételével a teljes komplex síkon reguláris függvény, a $z = 0$ pont izolált szinguláris pont. A függvény regularitási tartománya tehát nem egyszeresen összefüggő.

Első esetben legyen a γ görbe zárt. Ha γ nem kerüli meg az origót, akkor γ a regularitási tartomány egyszeresen összefüggő részében halad, tehát alkalmazható a Cauchy-féle alaptétel. Így tetszőleges origót nem megkerülő és nem is érintő egyszerű zárt γ görbére vonatkozólag:

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^n} dz = 0$$

Ha a γ görbe egyszer pozitív irányban megkerüli az origót, az integrált közvetlenül ki kell számítanunk. Először számoljunk egy origó középű r sugarú körre vonatkozólag, ennek egyenlete: $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Így $z'(t) = rie^{it}$, tehát:

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(re^{it}\right)^n} \cdot rie^{it} dt = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt =$$

$$= \frac{1}{r^{n-1} \cdot (1-n)} \left(e^{i(1-n)2\pi} - e^0\right) = 0$$

Tehát azt a figyelemre méltó eredményt kaptuk, hogy az origót megkerülő bármely körvonalra vonatkozólag nulla az integrál értéke. A Cauchy-féle alaptétel többszörösen összefüggő tartományokra vonatkozó általánosítás szerint a kör helyettesíthető tetszőleges alakú, origót megkerülő egyszerű zárt görbével.

Vegyük észre, hogy a fenti formulák nem érvényesek $n = -1$ esetén, nem véletlen, hogy külön pontokban (a 9. és 10. példában) foglalkoztunk az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény integrálásával.

Ha a γ görbe nem zárt, hanem egy a pontból egy b pontba vezet, anélkül hogy áthaladna az origón, akkor alkalmazható a Newton–Leibniz-tétel. Ekkor ugyanis az $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$, $n \geq 2$ függvénynek létezik primitív függvénye:

$$F(z) = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{z^{n-1}}$$

Így tehát $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^n} dz = \int_a^b \frac{1}{z^n} dz = \frac{1}{1-n} \left(\frac{1}{b^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right).$

A mondottak értelemszerű változtatással igazak tetszőlegesen rögzített $z_0 \in \mathbb{C}$ esetén az

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}, \quad n \geq 2$$

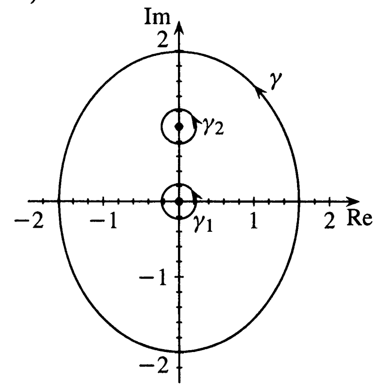
függvényre, melynek a $z = z_0$ pontban van izolált szingularitása.

12. Számítsa ki az alábbi komplex függvény vonalintegrálját a

$$|z - i| + |z + i| = 4$$

egyenletű pozitívan irányított γ görbére vonatkozólag (5.10 ábra)!

$$f(z) = \frac{3z - i}{z(z-i)}$$



5.10 ábra

A γ zárt görbe egy olyan ellipszis, melynek fókuszai i és $-i$, fél nagytengelye 2, fél kistengelye pedig $\sqrt{3}$.

Az f függvény nem reguláris a $z = 0$ és a $z = i$ pontokban. Ezek a szinguláris pontok benne vannak az ellipszis által határolt tartományban. Így alkalmazhatjuk a Cauchy-féle alaptétel többszörösen összefüggő tartományokra vonatkozó általánosítását. Ehhez vegyük körül a két szinguláris pontot egy-egy olyan pozitívan irányított körrel, melyek sugara 1-nél kisebb, például legyen $r = \dfrac{1}{4}$. Tehát $\gamma_1 = C\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, $\gamma_2 = C\left(i, \dfrac{1}{4}\right)$. Az idézett tétel szerint az ellipszisre vonatkozó integrál egyenlő a körökre vonatkozó integrálok összegével, ha mindegyik görbe pozitívan van irányítva:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

Az integrálok kiszámításához az f függvényt parciális törtek összegére bontjuk:

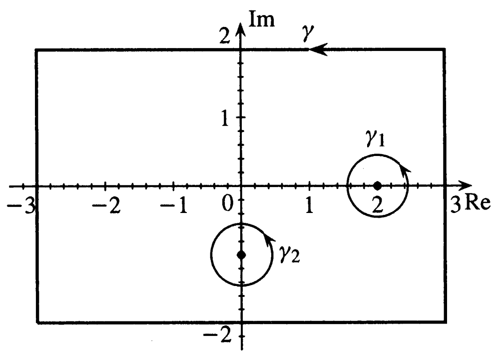
$$\frac{3z - i}{z(z - i)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z - i}$$

Ez a felbontás azért hasznos, mert az első tag a γ_2 görbén és azon belül, a második tag pedig a γ_1 görbén és azon belül reguláris. A Cauchy-féle alaptétel szerint ezen körökre vonatkozó integráljuk zérus. Így elég tehát mindkét tag esetében a „másik" körre integrálni. Felhasználva a 9. példa eredményét:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{2}{z - i}dz = 2\pi i + 2 \cdot 2\pi i = 6\pi i$$

13. Számítsa ki az alábbi f függvény vonalintegrálját a $3+2i$, $-3+2i$, $3-2i$, $-3-2i$ csúcspontú téglalap határvonala mentén pozitív körüljárással (5.11 ábra)!

$$f(z) = \frac{4z + 3i - 2}{z^2 + (i - 2)z - 2i}$$



5.11 ábra

Először is vizsgáljuk meg a függvény regularitását. Ha a nevezőnek van olyan zérushelye, ami a számlálónak nem zérushelye, akkor az biztosan szinguláris pontja f-nek. Ezért először szorzattá alakítjuk a nevezőt.

Komplex polinomok esetében mindig van annyi gyök, amennyi a polinom foka, tehát a szorzattá alakítás mindig elvégezhető:

$$f(z) = \frac{4z + 3i - 2}{(z + i)(z - 2)}$$

A két zérushely tehát a 2 és a $-i$, melyek a számlálónak nem zérushelyei, így ez a két hely a függvény izolált szinguláris pontja. Ez azt jelenti, hogy a függvény regularitási tartománya nem egyszeresen összefüggő.

Alkalmazható tehát az előző feladat logikája, vagyis a Cauchy-alaptétel általánosítása. Ehhez körülvesszük az izolált szingularitásokat egy-egy olyan körvonallal, mely teljes egészében a γ-n belül van, és melyek mindegyike pontosan egy szinguláris pontot kerül meg pozitív irányítással. Például az $r = \frac{1}{2}$ sugarú körívek megfelelnek.

Legyen $\gamma_1 = C\left(2, \frac{1}{2}\right)$ és $\gamma_2 = C\left(-i, \frac{1}{2}\right)$.

Most parciális törtékre bontjuk az f függvényt:

$$f(z) = \frac{1}{z + i} + \frac{3}{z - 2}$$

Itt az első tag a γ_1-en és belsejében, a második pedig a γ_2-n és belsejében reguláris, így integráljuk zérus. Az idézett tétel szerint ekkor:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{3}{z - 2}dz + \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z + i}dz$$

A 9. feladat eredményeit felhasználva:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 3 \cdot 2\pi i + 1 \cdot 2\pi i = 8\pi i$$

14. Számítsa ki az f komplex függvény vonalintegrálját az origó középű $r = 2$ egység sugarú körre vonatkozólag pozitív irányítás esetén, ha

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z(1 + i) + 7}{(z + 1)^2(z - 3i)}$$

Először vizsgáljuk meg az integrandus regularitását!

A nevezőnek két zérushelye van: -1, $3i$. Ezek a komplex számok a számlálónak nem gyökei, tehát ez a két pont a függvény izolált szingularitása. Ezek közül csak a -1 esik a megadott γ görbe belsejébe, a $3i$ kívül esik rajta (5.12 ábra).

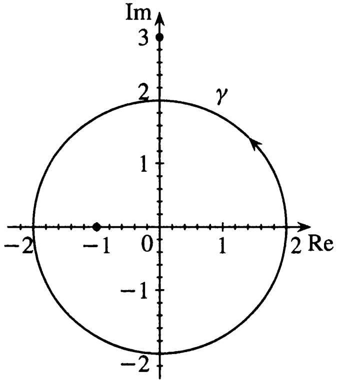
Bontsuk fel f-et parciális törtek összegére:

$$f(z) = \frac{zi}{(z+1)^2} + \frac{1}{z-3i}$$

Az összeg második tagja a $C(0, 2)$ görbén és annak belsejében reguláris, az alaptétel szerint γ-ra vonatkozó integrálja zérus. Elég az első taggal foglalkozni. Ehhez felhasználjuk a 11. példa eredményét és az ott említett általánosítást, mely szerint:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma \frac{2i}{(z+1)^2}dz = 0,$$

ahol az általánosítást $z_0 = -1$, $n = 2$ esetén alkalmaztuk.



5.12 ábra

15. Számítsa ki az $f(z) = \frac{1}{z} \cdot \ln z$ függvény integrálját az origó középpontú r sugarú, pozitívan irányított körív mentén!

A függvény egyetlen szinguláris pontja az origó, a megadott γ görbe ezt megkerüli. Az alaptétel tehát nem alkalmazható. Paraméterezzük ezért a γ görbét a szokott módon: $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z'(t) = ir \cdot e^{it}$. Ezért:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{\ln\left(r \cdot e^{it}\right)}{r \cdot e^{it}} \cdot ire^{it}dt = i\int_0^{2\pi} (\ln r + it)dt =$$

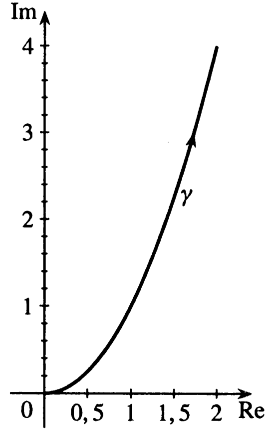
$$= i \cdot \left[\ln r \cdot t + i\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = -2\pi^2 + i \cdot 2\pi \cdot \ln r$$

Felhívjuk a figyelmet arra a nyilvánvaló tényre, hogy többféle dolgot jelölünk ugyanazzal a szimbólummal. f-ben „ln” a komplex logaritmus főágát jelöli – ha mást nem mondunk mindig ezt jelöli –, a végeredménybeli „ln” pedig a közönséges valós logaritmusfüggvény.

Ha γ' egy olyan zárt görbe lenne, amely nem kerüli meg az origót, akkor γ' benne van f regularitási tartományának egyszeresen összefüggő részében, így ekkor az alaptétel szerint:

$$\oint_{\gamma'} f(z)dz = 0$$

16. Számítsa ki az $f(z) = \cos(2 + i)z$ komplex függvény vonalintegrálját az origóból a $2 + 4i$ pontba vezető $z(t) = t + it^2$, $t \in [0, 2]$ parabolaív mentén (5.13 ábra)!



5.13 ábra

Komplex vonalintegrállal számolunk.

Az adott paraméterezésből $z'(t) = 1 + 2it$, tehát:

$$\int_\gamma \cos(2+i)z dz = \int_0^2 \left(\cos(2+i)\cdot\left(t+it^2\right)\right)\cdot(1+2it)dt =$$

$$= \frac{1}{2+i}\cdot\int_0^2 (2+i)\cdot(1+2it)\cdot\cos(2+i)\cdot\left(t+it^2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2+i}\cdot\left[\sin(2+i)\cdot\left(t+it^2\right)\right]_0^2 = \frac{\sin 10i}{2+i}$$

Az integrál kiszámításához felhasználtuk a valós analízisből jól ismert

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

integrálási szabályt, ahol F az f függvény primitív függvénye.

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt. Mivel az integrandus az egész síkon reguláris, ezért létezik primitív függvénye, akkor pedig tudjuk, hogy az integrál csak a kezdő- és végpont függvénye. Könnyen ellenőrizhető, hogy a primitív függvény:

$$F(z) = \frac{\sin(2+i)z}{2+i}$$

Tehát:

$$\int_\gamma \cos(2+i)z dz = \int_0^{2+4i} \cos(2+i)z dz = \left[\frac{\sin(2+i)z}{2+i}\right]_0^{2+4i} =$$

$$= \frac{1}{2+i}\cdot\left(\sin(2+i)\cdot(2+4i) - 0\right) = \frac{\sin 10i}{2+i}$$

Valóban ugyanazt az eredményt kaptuk.

17. Integrálja az alábbi függvényeket a megadott görbék mentén!

$f_1(z) = \sin 2z$,

$f_2(z) = 3e^{5z}$,

$f_3(z) = 2i\mathrm{ch}iz$,

$f_4(z) = 3z^6 + iz^3 + 8z$,

ha az integrációs út:

a) tetszőleges zárt rektifikálható γ görbe,

b) rögzített $a, b \in \mathbb{C}$ esetén a-ból b-be vezető rektifikálható γ' görbe.

a) Ezek a függvények mindannyian regulárisak a teljes komplex síkon, így a Cauchy-féle alaptétel szerint tetszőleges rektifikálható zárt görbére vonatkozó integráljuk zérus:

$$\oint_\gamma f_k(z)dz = 0,\ k = 1, 2, 3, 4.$$

b) Ha a γ' görbe nem zárt, akkor mindegyik esetre alkalmazhatjuk a Newton–Leibniz-tételt, hiszen az említett regularitás miatt mindegyiknek van primitív függvénye, tehát:

$$\int_{\gamma'} f_1(z)dz = \int_a^b \sin 2z dz = \left[\frac{-\cos 2z}{2}\right]_a^b = -\frac{1}{2}(\cos 2b - \cos 2a)$$

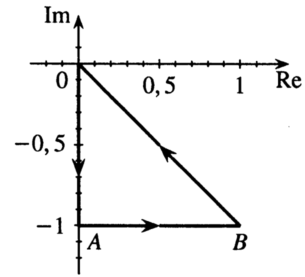
$$\int_{\gamma'} f_2(z)dz = \int_a^b 3\cdot e^{5z}dz = 3\cdot\left[\frac{e^{5z}}{5}\right]_a^b = \frac{3}{5}\left(e^{5b} - e^{5a}\right)$$

$$\int_{\gamma'} f_3(z)dz = \int_a^b 2i\mathrm{ch}iz dz = 2i\cdot\left[\frac{\mathrm{sh}iz}{i}\right]_a^b = 2\cdot(\mathrm{sh}ib - \mathrm{sh}ia)$$

$$\int_{\gamma'} f_4(z)dz = \int_a^b \left(3z^6 + iz^3 + 8z\right)dz =$$

$$= \left[3\cdot\frac{z^7}{7} + i\cdot\frac{z^4}{4} + 8\cdot\frac{z^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{3}{7}\left(b^7 - a^7\right) + \frac{i}{4}\left(b^4 - a^4\right) + 4\left(b^2 - a^2\right)$$



5.14 ábra

A Cauchy-féle alaptétel hatékonyságáról igen könnyen meggyőződhet a Tisztelt Olvasó, ha a fenti integrálokat egy konkrét paraméterezéssel vonalintegrálként kiszámítja.

Példaképpen álljon itt az $f_1(z) = \sin 2z$ függvény 0, $-i$, $1-i$ csúcspontú háromszögre vonatkozó integrálja pozitív irányítás mellett (5.14 ábra).

Az integrandust meghagyhatnánk ebben a formában is, a 16. példában így dolgoztunk. Ezért most más utat választunk. Felírjuk $f_1(z)$-t exponenciális függvényekkel:

$$f_1(z) = \sin 2z = \frac{1}{2i}\left(e^{i2z} - e^{-i2z}\right)$$

Felhasználva az integrál út szerinti additivitását, integrálhatunk szakaszonként. Kezdjük az OA szakasszal.

Ennek egyenlete: $z(t) = -it$, $t \in [0, 1]$, $z'(t) = -i$.

$$\int_{OA} f_1(z)dz = \frac{1}{2i}\int_0^1 \left(e^{2i(-it)} - e^{-2i(-it)}\right)\cdot(-i)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{2t} - e^{-2t}\right)dt = -\int_0^1 \mathrm{sh}2t dt = -\left[\frac{\mathrm{ch}2t}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{ch}2}{2}$$

Az AB szakasz egy paraméterezése: $z(t) = t - i$, $t \in [0, 1]$, $z'(t) = 1$. Tehát:

$$\int_{AB} f_1(z)dz = \frac{1}{2i}\int_0^1 \left(e^{2i(t-i)} - e^{-2i(t-i)}\right)\cdot 1dt =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^1 \left(e^{2+2it} - e^{-2-2it}\right)dt = \frac{1}{i}\int_0^1 \mathrm{sh}(2+2it)dt =$$

$$= -\left[\frac{\mathrm{ch}(2+2it)}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{ch}2}{2} - \frac{\mathrm{ch}(2+2i)}{2}$$

Végül integráljunk a BO egyenes szakaszon. Ennek egy paraméterezése: $z(t) = 1 - t + (t-1)$, $t \in [0, 1]$, $z'(t) = -1 + i$. Ezért:

$$\int_{BO} f_1(z)dz = \frac{1}{2i}\int_0^1 \left(e^{2i(1-t+i(t-1))} - e^{-2i(1-t+i(t-1))}\right)\cdot(i-1)dt =$$

$$= -\frac{1}{2i}\int_0^1 \left(e^{(2+2i)(1-t)} - e^{-(2+2i)(1-t)}\right)\cdot(i-1)dt =$$

$$= \frac{i-1}{i}\int_0^1 \mathrm{sh}(2+2i)(1-t)dt = (1+i)\cdot\left[\frac{\mathrm{ch}(2+2i)(1-t)}{-(2+2i)}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\mathrm{ch}(2+2i)}{2} - \frac{1}{2}$$

Ha összeadjuk a fenti három egyenes szakaszra vonatkozó integrál értékét, megkapjuk a kijelölt zárt görbére, vagyis az $OABO$ háromszögre vonatkozó integrál értékét:

$$\oint f_1(z)dz = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{ch}2}{2} + \frac{\mathrm{ch}2}{2} - \frac{\mathrm{ch}(2+2i)}{2} + \frac{\mathrm{ch}(2+2i)}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

egybehangzóan az alaptétellel. Azonban az a) ponthoz képest aránytalanul sokat kellett számolni, és a számításunk csak egyetlen zárt görbére, egy „egyszerű” háromszögre vonatkozik.

18. Számítsuk ki az alábbi komplex függvények integrálját a megadott görbék mentén!

a) $f_1(z) = 2z\cdot\mathrm{sh}iz$

γ_1: az $a = 1$ pontból a $b = i$ pontba vezető origó középű negyedkörív.

b) $f_2(z) = \dfrac{1}{z^2}\cdot\ln z$

γ_2: az $a = 1$ pontból a $b = 1 + i$-be vezető egyenes szakasz.

c) $f_3(z) = z^3\cdot e^{z^2}$

γ_3: az origóból a $-1 - i$ pontba vezető parabolaív, melynek tengelye az $\mathrm{Im}z$ tengely.

a) Az f_1 függvény mindkét tényezője a teljes komplex síkon reguláris függvény, így szorzatuk is az. Így f_1-nek létezik primitív függvénye, és a sík tetszőleges a és b pontja és e pontokat összekötő rektifikálható γ_1 görbe esetén az integrál csak a kezdő- és végpont függvénye. A primitív függvény előállítására alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét:

$$\int_a^b 2z\cdot\mathrm{sh}iz dz = \left[2z\cdot\frac{\mathrm{ch}iz}{i}\right]_a^b - \int_a^b \frac{2}{i}\cdot\mathrm{ch}iz dz =$$

$$= \left[\frac{2}{i}z\cdot\mathrm{ch}iz\right]_a^b - \frac{2}{i}\left[\frac{\mathrm{sh}iz}{i}\right]_a^b =$$

$$= \frac{2}{i}(b\mathrm{ch}ib - a\mathrm{ch}ia) + 2(\mathrm{sh}ib - \mathrm{sh}ia)$$

A parciális integrálás alkalmazhatóságának jogossága közvetlen deriválással ellenőrizhető. Konkrétan a megadott határok esetén:

$$\int_1^i 2z \cdot \mathrm{sh} z dz = 2\mathrm{ch}(-1) + 2\mathrm{sh}(-1) - \frac{2}{i}\mathrm{ch} i - 2\mathrm{sh} i$$

b) Az f_2 függvény két olyan tényező szorzata, melyeknek a $z = 0$ pont szinguláris pontja, így f_2 egyetlen pontban nem reguláris, és ez az origó. Az origótól megfosztott komplex sík nem egyszeresen összefüggő, de a regularitási tartomány bármely egyszeresen összefüggő résztartományában az f_2-nek létezik primitív függvénye. Így alkalmazható a Newton–Leibniz-tétel, és ebben az esetben a parciális integrálás módszere, bármely olyan a-ból b-be vezető görbére, amely teljes egészében az origót nem tartalmazó összefüggő nyílt halmazban halad:

$$\int_a^b \frac{1}{z^2} \cdot \ln z dz = \left[-\frac{1}{z} \cdot \ln z\right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} dz = \left[-\frac{1}{z} \cdot \ln z - \frac{1}{z}\right]_a^b =$$

$$= -\left[\frac{\ln z + 1}{z}\right]_a^b = \frac{1}{a} \cdot (\ln a + 1) - \frac{1}{b} \cdot (\ln b + 1)$$

A deriválási szabályok alkalmazásával ismét könnyen ellenőrizhető, hogy a parciális integrálás módszerével primitív függvényt kaptunk.

Ha felhasználjuk, hogy $\ln z = \ln |z| + i \cdot \arg z$, és helyettesítjük a konkrét határokat:

$$\int_1^{1+i} \frac{\ln z}{z^2} dz = 1 - \frac{1}{1+i}(\ln(1+i) + 1) =$$

$$= 1 - \frac{1}{1+i}\left(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 1\right)$$

c) Az f_3 függvény ismét a teljes síkon reguláris függvény, tehát az előzőek mintájára bármely a-ból b-be vezető rektifikálható γ_3 görbére parciális integrálással kapjuk:

$$\int_{\gamma_3} f_3(z) dz = \int_a^b z^3 \cdot e^{z^2} dz = \frac{1}{2}\int_a^b z^2 \cdot \left(2z \cdot e^{z^2}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[z^2 \cdot e^{z^2}\right]_a^b - \int_a^b 2z \cdot e^{z^2} dz\right) = \frac{1}{2}\left[\left(z^2 - 1\right) \cdot e^{z^2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(b^2 - 1\right)e^{b^2} - \left(a^2 - 1\right)e^{a^2}\right)$$

Helyettesítve a konkrét határokat kapjuk a kérdéses integrál értékét:

$$\int_0^{-1-i} z^3 \cdot e^{z^2} dz = \frac{1}{2}\left(\left((-1-i)^2 - 1\right)e^{(-1-i)^2} - (0-1)e^0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2i}(2i - 1) + 1\right)$$

Ezzel a feladattal az volt a célunk, hogy illusztráljuk a valós analízisben megismert integrálási szabályok reguláris függvényekre való alkalmazhatóságát.

A parciális integrálás szabálya mellett érvényben maradnak a többi jól ismert szabályok az

$$\frac{f'(z)}{f(z)},\ f^\alpha(z) \cdot f'(z),\ f(g(z)) \cdot g'(z)$$

alakú integrandusokra, a linearizáló formulák stb. Ezeket illusztrálandó utalunk a következő példára.

19. Adjon meg olyan T tartományokat, amelyeken belül az alábbi függvényeknek van integrálfüggvénye, és állítson is elő egy-egy integrálfüggvényt!

a) $f_1(z) = \cos^3 z \cdot \sin z$

b) $f_2(z) = \mathrm{ch}^2 z$

c) $f_3(z) = \mathrm{ctg}(2z - 1)$

d) $f_4(z) = \dfrac{1}{(z+2i)\ln(z+2i)}$

e) $f_5(z) = \sqrt[3]{z+2}$

a) Az f_1 függvény a teljes síkon reguláris, tehát tetszőleges $a \in \mathbb{C}$ választható az integrációs út kezdőpontjának, ekkor az integrálfüggvény bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén:

$$F_a(z) = \int_a^z f_1(\zeta) d\zeta = \int_a^z \cos^3\zeta \cdot \sin\zeta d\zeta = -\left[\frac{\cos^4\zeta}{4}\right]_a^z =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos^4 a - \cos^4 z\right)$$

Itt alkalmaztuk az $f^\alpha(z) \cdot f'(z)$ alakú integrandusra vonatkozó, valós analízisből jól ismert szabályt.

b) Az f_2 függvény szintén reguláris a teljes komplex síkon, így tetszőleges $a \in \mathbb{C}$ kezdőpont és tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ végpont esetén létezik integrálfüggvény. Alkalmazva egy linearizáló formulát:

$$F_a(z) = \int_a^z \mathrm{ch}^2\zeta d\zeta = \int_a^z \frac{\mathrm{ch}2\zeta + 1}{2} d\zeta = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}2\zeta}{2} + \zeta\right]_a^z =$$

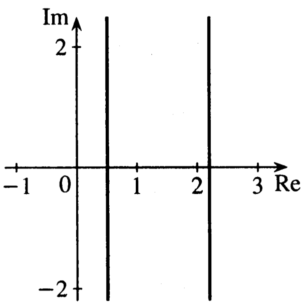
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}2z}{2} - \frac{\mathrm{sh}2a}{2} + z - a\right)$$

c) Az f_3 függvény nem reguláris a teljes síkon, hiszen:

$$f_3(z) = \mathrm{ctg}(2z - 1) = \frac{\cos(2z - 1)}{\sin(2z - 1)},$$

és a $\sin(2z - 1)$ nevező minden zérushelye f_3-nak szinguláris pontja. Ezek a $2z - 1 = k\pi$ egyenletet kielégítő pontok. Bármely olyan T tartomány, amely ezek közül egyet sem tartalmaz, az f_3 függvény regularitási tartománya.

Ilyen például a $0 < 2 \cdot \mathrm{Re}z - 1 < \pi$ egyenlőtlenségnek eleget tevő képzetes tengellyel párhuzamos végtelen sáv, nevezik ezt „főperiódussáv”-nak is (5.15 ábra).



5.15 ábra

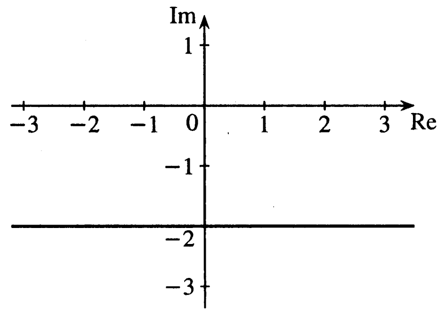
Ez azt jelenti, hogy az $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}z < \frac{\pi + 1}{2}$ sávban $f_3(z)$-nek létezik integrálfüggvénye. Tetszőleges, ebben a tartományban haladó, rektifikálható görbére, melynek kezdőpontja a rögzített $a \in \mathbb{C}$, végpontja a tetszőleges $z \in \mathbb{C}$, az integrálfüggvény:

$$F_a(z) = \int_a^z \mathrm{ctg}\left(2\zeta - 1\right)d\zeta = \int_a^z \frac{\cos\left(2\zeta - 1\right)}{\sin\left(2\zeta - 1\right)} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\sin\left(2\zeta - 1\right)\right)\right]_a^z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin(2z - 1)}{\sin(2a - 1)}\right)$$

Az integrálás során felhasználtuk, hogy az integrandus $\frac{f'(z)}{f(z)}$ alakú.

d) Az f_4 függvénynek több szinguláris pontja is van, ezek a nevező zérushelyei, valamint az $\ln z$ függvény szinguláris pontja. Konkrétan a $z + 2i = 0$ egyenlet megoldása a $z = -2i$ komplex szám. Ez egyúttal az $\ln(z + 2i)$ komplex függvény szinguláris pontja is, hiszen tudvalevő, hogy az $f(z) = \ln z$ függvény egyetlen szingularitása az origó. Másrészt az $\ln(z+2i) = 0$ egyenlet megoldása is szinguláris pont. Tekintettel arra, hogy $\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$, ezért $\ln z$-nek csak a $z = 1$ valós szám az egyetlen nullahelye. Így a $z = 1 - 2i$ is szinguláris pont. Minden olyan egyszeresen összefüggő résztartományban létezik f_4-nek integrálfüggvénye, amely nem tartalmazza ezt a két pontot. Ilyen résztartományai a komplex síknak például $\mathrm{Re}z > 1$, $\mathrm{Re}z < 0$, $\mathrm{Im}z > -2$ (5.16 ábra), $\mathrm{Im}z < -2$ félsíkok.



5.16 ábra

Egy ilyen tartományban levő tetszőlegesen rögzített $a \in \mathbb{C}$, bármely $z \in \mathbb{C}$ és ezeket összekötő ugyancsak az adott tartományban haladó bármely rektifikálható γ görbe esetén létezik integrálfüggvény:

$$F_a(z) = \int_a^z \frac{1}{\left(\zeta + 2i\right)\ln\left(\zeta + 2i\right)} d\zeta = \ln\left[\ln\left(\zeta + 2i\right)\right]_a^z =$$

$$= \ln\left(\frac{\ln(z + 2i)}{\ln(a + 2i)}\right)$$

Felhasználtuk az integrálás során az integrandus $\frac{f'(z)}{f(z)}$ alakját.

e) Az $f_5(z) = \sqrt[3]{z+2}$ függvénynek egyetlen szinguláris pontja van, ez pedig a gyök alatti kifejezés zérushelye, a $z = -2$ pont. Bármely olyan egyszeresen összefüggő tartomány megfelel a célnak, amely nem tartalmazza a $z = -2$ pontot. Ilyen lehet például a $\mathrm{Re}z > -2$ vagy az $\mathrm{Im}z > 0$ félsík. Ezeken belül létezik integrálfüggvény tetszőlegesen rögzített $a \in \mathbb{C}$ és bármely $z \in \mathbb{C}$ mellett, ha az összekötő görbe is a tartományban halad:

$$F_a(z) = \int_a^z \sqrt[3]{\zeta+2}\,d\zeta = \int_a^z (\zeta+2)^{\frac{1}{3}}d\zeta = \left[\frac{3}{4}\cdot(\zeta+2)^{\frac{4}{3}}\right]_a^z =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\left((z+2)^{\frac{4}{3}} - (a+2)^{\frac{4}{3}}\right)$$

A felsorolt példák nemcsak az integrálfüggény előállításának módját hivatottak illusztrálni, hanem arra is rávilágítanak, hogy megfelelő feltételek teljesülése esetén a valós analízisben megismert integrálási szabályok, megszokott formulák változtatás nélkül alkalmazhatók a komplex függvénytanban is.

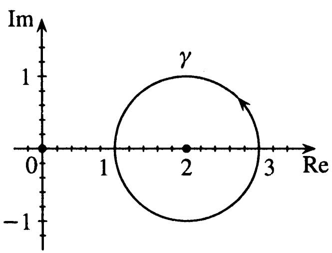
5.2 A Cauchy-féle integrálformulák alkalmazása

Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a

$$g(z) = \frac{3z - i}{z^2 - 2z}$$

komplex függvény integrálját a $|z - 2| = 1$ körvonal mentén, pozitív irányítás mellett (5.17 ábra)!



5.17 ábra

A nevezőt szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy $g(z) = \dfrac{3z - i}{z(z-2)}$, ahonnan leolvashatók a g függvény szinguláris pontjai: a $z_1 = 0$ és a $z_2 = 2$ izolált szingularitások. A megadott γ görbe csak a $z = 2$ pontot tartalmazza a belsejében, a $z = 0$ pont rajta kívül esik. Ebből következik, hogy az

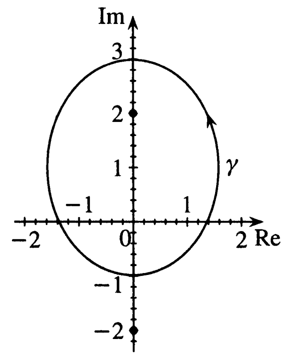
$$f(z) = \frac{3z - i}{z}$$

függvény a γ görbén és belsejében reguláris. Alkalmazható tehát a Cauchy-féle integrálformula az f függvényre és a $z_0 = 2$ pontra vonatkozólag. Tehát: $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma g(z)dz = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \dfrac{f(z)}{z-2}dz = f(2)$. Azaz a keresett integrál értéke $\displaystyle\oint_\gamma g(z)dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i \cdot \frac{6 - i}{2} = \pi(1 + 6i)$.

2. Számítsa ki a $g(z) = \dfrac{\cos(2i\pi z)}{z^2 + 4}$ függvény vonalintegrálját a

$$|z - 2i| + |z| = 4$$

egyenletű, pozitívan irányított ellipszis mentén (5.18 ábra)!



5.18 ábra

Ismét a nevező szorzattá alakításával kezdünk:

$$g(z) = \frac{\cos(2i\pi z)}{(z - 2i)(z + 2i)}$$

A nevező zérushelyei a $2i$ és a $-2i$ komplex számok, melyek a számlálónak nem zérushelyei, tehát g-nek izolált szingularitásai. A megadott ellipszis csak a $z = 2i$ szinguláris pontot tartalmazza a belsejében, a másik rajta kívül esik. Így célravezető az integrandus alábbi átalakítása:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-2i}, \text{ ahol } f(z) = \frac{\cos(2i\pi z)}{z+2i}.$$

Ezzel a definícióval f reguláris a γ görbén és annak belsejében. Így alkalmazható a Cauchy-féle integrálformula az f függvényre és a $z_0 = 2i$ pontra. Tehát az ellipszis menti integrál a Cauchy-formulából adódó

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma g(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-2i}dz = f(2i)$$

egyenlőség alapján:

$$\oint_\gamma g(z)dz = 2\pi i \cdot f(2i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

3. Számítsa ki a $g(z) = \dfrac{\text{sh}iz}{z^6}$ komplex függvény vonalintegrálját tetszőleges olyan egyszerű zárt rektifikálható γ görbére vonatkozólag, amely egyszer pozitív irányban megkerüli az origót!

Vezessük be az $f(z) = \text{sh}(iz)$ jelölést. Az f függvény a teljes komplex síkon reguláris, így a kijelölt γ görbén és annak belsejében is.

A g függvénynek a z^6-nal való osztás miatt a $z = 0$ az egyetlen szinguláris pontja, a γ görbe a feltételek miatt ezt éppen a belsejében tartalmazza.

Alkalmazzuk a deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle formulát az

$f(z) = \text{sh}(iz)$

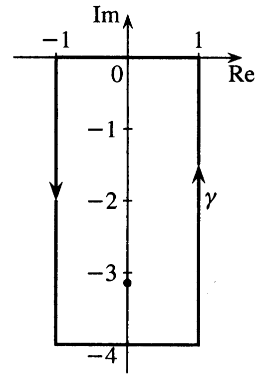
függvényre és a $z_0 = 0$ pontra vonatkozólag $n = 5$ esetén:

$$\frac{5!}{2\pi i}\oint_\gamma g(z)dz = \frac{5!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^6}dz$$

Mivel $(\text{sh}(iz))^{(5)} = i^5 \cdot \text{ch}(iz) = i \cdot \text{ch}(iz)$, ezért a kérdéses integrál átrendezéssel és helyettesítéssel adódik:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \frac{2\pi i}{5!} i \cdot \text{ch}0 = -\frac{2\pi}{5!}$$

4. Számítsa ki a $g(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+i\pi)^4}$ függvény integrálját a γ görbére vonatkozólag, ha γ egy olyan pozitívan irányított téglalap, melynek csúcspontjai az 1, $1-4i$, $-1-4i$, -1 komplex számok (5.19 ábra).



5.19 ábra

A g függvény számlálója mindenütt reguláris, nevezőjének egyetlen zérushelye a $z = -i\pi$ pont. Ez a hely a számlálónak nem nullahelye, tehát g-nek izolált szingularitása. A kijelölt γ téglalap belsejében tartalmazza ezt a szinguláris pontot.

Ezért az integrál kiszámításához felhasználható a differenciálhányadosokra vonatkozó Canchy-féle integrálformula $f(z) = \sin 2z$, $z_0 = -2\pi$, $n = 3$ jelöléssel:

$$\frac{3!}{2\pi i}\oint_\gamma g(z)dz = \frac{3!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\sin 2z}{(z+i\pi)^4}dz = f^{(3)}(-i\pi)$$

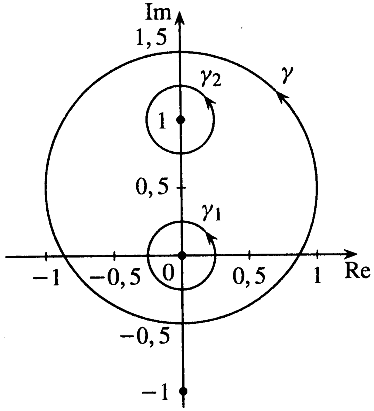
Mivel $f^{(3)}(z) = -2^3 \cdot \cos 2z$, ezért

$$f^{(3)}(-i\pi) = -8\cos(-2i\pi) = -8\text{ch}(-2\pi) = -8\text{ch}2\pi,$$

így átrendezéssel kapjuk a vonalintegrál értékét:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \frac{2\pi i}{3!}(-8\text{ch}2\pi) = -\frac{8\pi i}{3}\text{ch}2\pi$$

5. Számítsa ki a $g(z) = \dfrac{2i}{z(z^2+1)}$ komplex függvény vonalintegrálját a $\left|z - \dfrac{i}{2}\right| = 1$ egyenletű pozitívan irányított γ görbe mentén (5.20 ábra)!



5.20 ábra

A regularitási vizsgálathoz szorzattá bontjuk a nevezőt:

$$g(z) = \frac{2i}{z(z+i)(z-i)}$$

Leolvasható, hogy g-nek a teljes komplex síkon három izolált szinguláris pontja van: i, 0, $-i$. A γ görbe egy olyan kör, mely ezek közül kettőt tartalmaz a belsejében, a 0 és i pontokat, a $-i$ rajta kívül esik.

Az integrál kiszámításához felhasználjuk a Cauchy-féle alaptétel többszörösen összefüggő tartományokra vonatkozó kiterjesztését. Ehhez körülvesszük a szinguláris pontokat egy-egy olyan pozitívan irányított körrel, mely csak egy szinguláris pontot kerül meg. Az $r = \dfrac{1}{4}$ sugár például megfelelő. Ilyen feltételek mellett a γ-ra vonatkozó integrál egyenlő a γ_1-re és γ_2-re vonatkozó integrálok összegével:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \oint_{\gamma_1} g(z)dz + \oint_{\gamma_2} g(z)dz$$

A γ_1 görbe belsejében levő szinguláris pontot a nevező z tényezője okozza. Ezért célszerű a γ_1 körön való integráláshoz g alábbi átalakítása:

$$g(z) = \frac{2i}{z(z^2+1)} = \frac{\dfrac{2i}{z^2+1}}{z}$$

Ez azért hasznos, mert a számlálóban álló

$$f_1(z) = \frac{2i}{z^2+1}$$

függvény γ_1-en és azon belül reguláris. Alkalmazható tehát a Cauchy-féle integrálformula f_1 és $z_0 = 0$ esetén:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z}dz = 2\pi i \cdot f_1(0) = -4\pi$$

Ha a γ_2 körön integrálunk, az integrandust hasonló logikával az alábbi módon alakítjuk át:

$$g(z) = \frac{2i}{z(z-i)(z+i)} = \frac{\dfrac{2i}{z(z+i)}}{z-i}$$

Ekkor ugyanis a számlálóban levő

$$f_2(z) = \frac{2i}{z(z+i)}$$

törtfüggvény reguláris a γ_2 körön és azon belül, tehát ismét használható a Cauchy-féle integrálformula f_2-re $z_0 = i$ esetén:

$$\oint_{\gamma_2} g(z)dz = \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z-i}dz = 2\pi i \cdot f_2(i) = 2\pi$$

Az eredeti γ görbére vonatkozó integrál – a korábbiakban mondottak szerint – ezen integrálok összege:

$$\oint_\gamma g(z)dz = -4\pi + 2\pi = -2\pi$$

6. Számítsa ki a $g(z) = \dfrac{\mathrm{ch}3z}{z^3 - z^2}$ komplex függvény integrálját a

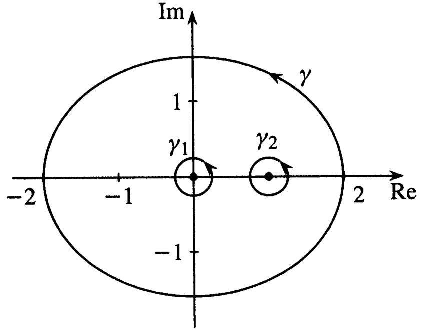
$$|z+1| + |z-1| = 4$$

egyenletű ellipszis mentén, pozitív irányítás mellett (5.21 ábra)!

Először átalakítjuk az integrandust:

$$g(z) = \frac{\text{ch}3z}{z^2(z-1)}$$

Innen leolvassuk a g függvény szinguláris pontjait: 0 és 1. A regularitási tartomány tehát többszörösen összefüggő halmaz. Alkalmazzuk az alaptétel ezen esetre vonatkozó általánosítását. A megadott γ görbe olyan ellipszis, mely mindkét szinguláris pontot belsejében tartalmazza. Vegyük körül ezeket olyan körökkel, melyek nem nyúlnak egymásba, és amelyek teljes egészében γ-n belül vannak. Az $r = \frac{1}{4}$ sugár ismét megfelel.



5.21 ábra

Az említett tétel szerint:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \oint_{\gamma_1} g(z)dz + \oint_{\gamma_2} g(z)dz$$

A γ_1 görbe a $z = 0$ szinguláris pontot kerüli meg. Alakítsuk át az integrandust a célnak megfelelően, azaz úgy, hogy a számlálója γ_1-en és azon belül reguláris függvény legyen, a nevező pedig csak a szingularitást okozó tényezőt tartalmazza; ilyen álalakítás az alábbi:

$$g(z) = \frac{\text{ch}3z}{z^3 - z^2} = \frac{\frac{\text{ch}3z}{z-1}}{z^2}$$

Ha bevezetjük az $f_1(z) = \frac{\text{ch}3z}{z-1}$ jelölést, akkor látható, hogy a differenciálhányadosokra vonatkozó Cauchy-féle formula a célravezető $z_0 = 0$ és $n = 1$ esetén:

$$\frac{1!}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} g(z)dz = \frac{1!}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z^2}dz = f_1'(0)$$

Mivel

$$f_1'(z) = \frac{3\cdot \text{sh}3z\cdot(z-1) - \text{ch}3z}{(z-1)^2},$$

ezért $f_1'(0) = -1$. Az előbbi egyenlet átrendezésével kapjuk a γ_1-re vonatkozó integrált:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)dz = 2\pi i\cdot f_1'(0) = -2\pi i$$

Hasonló logikával integrálunk a γ_2-n is. Ebben az esetben a

$$g(z) = \frac{\text{ch}3z}{z^3 - z^2} = \frac{\frac{\text{ch}3z}{z^2}}{z-1}$$

átalakítás a célravezető. Vezessük be az $f_2(z) = \frac{\text{ch}3z}{z^2}$ jelölést, és alkalmazzuk a Cauchy-formulát f_2-re $z_0 = 1$ mellett:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} g(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z-1}dz = f_2(1)$$

Felhasználva, hogy $f_2(1) = \text{ch}3$, és felszorozva $2\pi i$-vel, kapjuk a következőt:

$$\oint_{\gamma_2} g(z)dz = 2\pi\cdot f_2(1) = 2\pi i\cdot \text{ch}3$$

Összegezve a kapott eredményeket:

$$\oint_\gamma g(z)dz = -2\pi i + 2\pi i\cdot\text{ch}3 = (\text{ch}3 - 1)2\pi i$$

7. Számítsa ki a $g(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 2i}$ komplex függvény vonalintegrálját a $|z + 1 + i| = 3$ egyenletű pozitívan irányított görbe mentén (5.22 ábra)!

Mivel az $e^{\pi z}$ függvény mindenütt reguláris, a szinguláris pontok egybeesnek a nevező zérushelyeivel, tehát a $z^2 + 2i = 0$ egyenlet megoldásaival. Ezek pedig a $-2i$ komplex szám második gyökei. Keressük ezeket például trigonometrikus alakban. Mivel

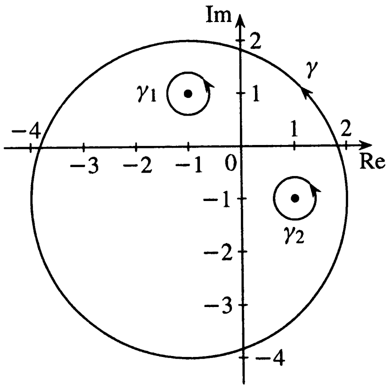
$$-2i = 2\left(\cos 270^\circ + \sin 270^\circ\right),$$

ezért a második gyökök:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ\right) = -1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ\right) = 1 - i$$

Megkaptuk tehát a szinguláris pontokat.



5.22 ábra

A γ görbe egy $-1-i$ középpontú 3 egység sugarú kör. Ez tartalmazza mindkét szinguláris pontot. Innen ugyanúgy járunk el, mint az előző két példában. Az ábrán látható módon felvesszük a pozitívan irányított γ_1 és γ_2 görbéket.

A Cauchy-tétel általánosítása miatt:

$$\oint_{\gamma} g(z)dz = \oint_{\gamma_1} g(z)dz + \oint_{\gamma_2} g(z)dz$$

Az integráláshoz $g(z)$ nevezőjét szorzattá bontjuk,

$$g(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z+1-i)(z-1+i)},$$

majd két különböző módon

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

alakra hozzuk azért, hogy a Cauchy-formula alkalmazható legyen.

A γ_1-en való integráláshoz célszerű az alábbi átalakítás:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z-1+i}}{z+1-i}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{\pi z}}{z-1+i}\right|_{z=-1+i} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^{\pi(-1+i)}}{2(i-1)},$$

ugyanis itt az emeletes tört számlálója γ_1-en és azon belül reguláris függvény.

Hasonlóan kapjuk a γ_2-re vonatkozó

$$\oint_{\gamma_2} g(z)dz = \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{\pi z}}{z+1-i}}{z-1+i}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{\pi z}}{z+1-i}\right|_{z=1-i} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^{\pi(1-i)}}{2(1-i)}$$

integrált, ugyanis ennek az emeletes törtnek a számlálója a γ_2 görbén és azon belül reguláris. Mindkét esetben jogos volt tehát a Cauchy-formula alkalmazása.

A kapott integrálok összege adja a γ görbére vonatkozó

$$\oint_{\gamma} g(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{\pi(i-1)} - e^{-\pi(i-1)}}{2(i-1)} = \frac{2\pi i}{i-1} \cdot \operatorname{sh}(\pi(i-1))$$

integrált.

8. Számítsa ki a

$$g(z) = \frac{e^{2z}}{\left(z^2-1\right)^2}$$

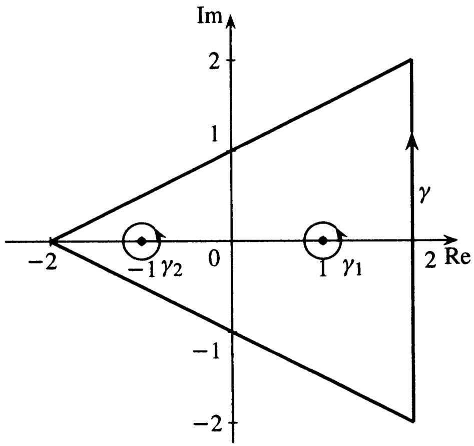
függvény vonalintegrálját a $2-i$, $2+i$, -2 csúcspontú, pozitívan irányított háromszög mentén (5.23 ábra)!

Világos, hogy a számláló regularitása miatt g-nek két szinguláris pontja van: 1, -1. Ezek mindketten a γ görbén belül vannak. Ezért a szokott módon járunk el.

Az ábrán látható módon körülvesszük a szingularitásokat egy-egy pozitívan irányított zárt γ_1 és γ_2 körrel. Ezeken vett integrálok összege adja a γ-ra vonatkozó integrált.

Ha γ_1-en integrálunk, akkor g-t célszerűen az alábbi alakra hozzuk:

$$g(z) = \frac{e^{2z}}{\left(z^2-1\right)^2} = \frac{\frac{e^{2z}}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} = \frac{f_1(z)}{(z-1)^2}$$



5.23 ábra

Ekkor ugyanis f_1 reguláris γ_1-en és belsejében. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula szerint:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{(z-1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f_1'(1)$$

Számítsuk ki a deriváltat:

$$f_1'(z) = \frac{2\cdot e^{2z}(z+1)^2 - e^{2z}\cdot 2(z+1)}{(z+1)^4}$$

Vagyis:

$$f_1'(1) = \frac{e^2}{4}$$

Tehát:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)dz = 2\pi i\cdot\frac{e^2}{4} = \pi i\cdot\frac{e^2}{2}$$

Hasonló logikával számoljuk a γ_2-re vonatkozó integrált. A g függvény célszerű átalakítása most a következő:

$$g(z) = \frac{e^{2z}}{\left(z^2-1\right)^2} = \frac{\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}}{(z+1)^2} = \frac{f_2(z)}{(z+1)^2},$$

ugyanis a γ_2 görbén és belsejében ez az f_2 függvény reguláris.

Az első deriváltra vonatkozó Cauchy-formula szerint:

$$\oint_{\gamma_2} g(z)dz = \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{(z+1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f_2'(-1)$$

Számítsuk ki a deriváltat:

$$f_2'(z) = \frac{2\cdot e^{2z}(z-1)^2 - e^{2z}(z-1)\cdot 2}{(z-1)^4}$$

Vagyis:

$$f_2'(-1) = \frac{12e^2}{16} = \frac{3e^2}{4}$$

Tehát visszahelyettesítve:

$$\oint_{\gamma_2} g(z)dz = 2\pi i\cdot\frac{3e^2}{4} = \pi i\cdot\frac{3e^2}{2}$$

Az alaptétel általánosítása szerint ezen integrálok összege adja a kérdéses integrált:

$$\oint_{\gamma} g(z)dz = \oint_{\gamma_1} g(z)dz + \oint_{\gamma_2} g(z)dz = \pi i\cdot\frac{e^2}{2} + \pi i\cdot\frac{3e^2}{2} = 2e^2\pi i$$

9. Számítsa ki a $g(z) = \dfrac{4\cos(\pi z)}{z^3-3z-2}$ komplex függvény integrálját a $|z-1| + |z+1| = 6$ egyenletű, pozitívan irányított ellipszis mentén!

A szinguláris helyek kiderítéséhez szorzattá kell alakítanunk a nevezőt. Ez harmadfokú polinom, így kereshetünk zérushelyet például kis egész számok helyettesítésével. Könnyen látható, hogy a $z = -1$ zérushely. Most oszthatunk a $(z + 1)$ gyöktényezővel. A hányadosként kapott másodfokú polinom már akár a megoldóképlet segítségével is szorzattá bontható:

$$z^3-3z-2 = (z+1)\cdot(z^2-z-2) = (z+1)(z+1)(z-2) = (z+1)^2\cdot(z-2)$$

Tehát az integrandus:

$$g(z) = \frac{4\cos(\pi z)}{(z+1)^2(z-2)}$$

a g függvénynek tehát két izolált szinguláris pontja van: $-1, 2$. Ezek mindegyike a kijelölt ellipszis belsejében van.

Innentől kezdve a szokott módon járunk el. Körülvesszük ezeket a pontokat egy-egy körrel az ábrán látható módon, legyenek ezek γ_1 és γ_2. A g függvény regularitási tartománya tehát többszörösen összefüggő halmaz. A számításhoz felhasználjuk a Cauchy-féle alaptétel ezen esetre vonatkozó általánosítását, mely szerint:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \oint_{\gamma_1} g(z)dz + \oint_{\gamma_2} g(z)dz$$

Mindkét integrál kiszámításához, hogy a Cauchy-féle integrálformulákat alkalmazni tudjuk, célszerű az integrandust

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

alakra hozni, ahol f az adott görbén és belsejében reguláris függvény. Ha γ_1-en integrálunk, akkor a megfelelő alak:

$$g(z) = \frac{\frac{4\cos(\pi z)}{z-2}}{(z+1)^2} = \frac{f_1(z)}{(z+1)^2}$$

Helyettesítsünk az első deriváltra vonatkozó Cauchy-formulába

$$f_1,\ z_0 = -1,\ n = 1$$

szereposztás esetén:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{(z+1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f_1'(-1)$$

Kiszámítjuk az $f_1'(-1)$ deriváltat:

$$f_1'(z) = \frac{-4\pi\sin((\pi z)(z-2)) - 4\cos(\pi z)}{(z-2)^2}$$

Ahonnan:

$$f_1'(-1) = \frac{0+4}{9} = \frac{4}{9}$$

Tehát:

$$\oint_{\gamma_1} g(z)dz = \frac{2\pi i}{1!}\cdot\frac{4}{9} = \frac{8}{9}\pi i$$

Ha γ_2-n integrálunk, akkor a megfelelő alak:

$$g(z) = \frac{\frac{4\cos(\pi z)}{(z+1)^2}}{z-2} := \frac{f_2(z)}{z-2}$$

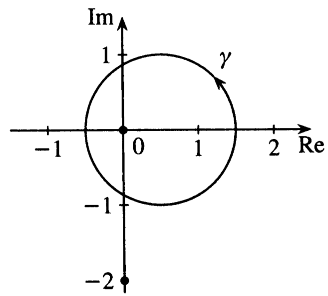
Most a „közönséges” Cauchy-formula alapján integrálhatunk:

$$\oint_{\gamma_2} g(z)dz = \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z-2}dz = 2\pi i\cdot f_2(2) = 2\pi i\cdot\frac{4\cdot\cos 2\pi}{(2+1)^2} = \frac{8}{9}\pi i$$

A kapott integrálok összege a feladat megoldása:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \frac{8}{9}\pi i + \frac{8}{9}\pi i = \frac{16}{9}\pi i$$

10. Számítsa ki a $g(z) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right)}{z^5+2iz^4-z^3}$ komplex függvény vonalintegrálját a $|2z-1| = 2$ egyenletű pozitívan irányított görbe mentén (5.24 ábra)!



5.24 ábra

Először is szokás szerint szorzattá alakítjuk a nevezőben lévő polinomot, z^3 kiemelése után teljes négyzetet kapunk:

$$z^5 + 2iz^4 - z^3 = z^3\left(z^2 + 2iz - 1\right) = z^3(z+i)^2$$

Mivel $\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right)$ mindenütt reguláris, g-nek két szinguláris pontja van: 0, $-i$. Ha a görbe egyenletét elosztjuk 2-vel, látható, hogy γ egy egységnyi sugarú, $\frac{1}{2}$ centrumú körív. A 0 ennek belsejében van, a $-i$ azonban éppen kívül esik rajta. γ-n belül tehát csak egy szinguláris pont van, az origó. Hozzuk a g függvényt

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

alakra, ahol f reguláris γ-n és azon belül. A

$$g(z) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right)}{z^3(z+i)^2} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right)}{(z+i)^2}}{z^3} := \frac{f(z)}{z^3}$$

átalakításból látható hogyan célszerű az f függvényt definiálni, $z_0 = 0$ és $n = 2$ esetén. A második deriváltra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulát alkalmazhatjuk:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \oint_\gamma \frac{f(z)z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = \pi i\cdot f''(0)$$

A második derivált részletes kiszámítását az Olvasóra bízzuk, mi csak a végeredményt közöljük:

$$f''(0) = -2\pi i$$

Ezért az integrál értéke:

$$\oint_\gamma g(z)dz = \pi i\cdot f''(0) = -2\pi^2$$

5.3 Gauss-féle középértéktétel

Számítsuk ki az alábbi komplex függvények integrálját a megadott pozitív irányítású körívek mentén!

a) $f_1(z) = \dfrac{e^z}{z+2}$ $\quad\gamma_1\colon |z+2| = 4$

b) $f_2(z) = \dfrac{\mathrm{ch}2z}{z-i}$ $\quad\gamma_2\colon |z-i| = 3$

c) $f_3(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\quad\gamma_3\colon |z| = 1$

Mindhárom függvény szerkezete azonos: a tört számlálója reguláris függvény, így a nevező zérushelye minden esetben az integrandus szinguláris pontja.

Az integrálok kiszámításához természetesen alkalmazhatnánk a Cauchy-féle formulát, de most másképpen járunk el. Vegyük észre, hogy a körök is nagyon speciálisak. Mindegyik középpontja egybeesik a szinguláris ponttal. Így most alkalmazhatjuk a *Gauss-féle középértéktételt*, mely szerint a körívre vonatkozó integrál-középérték egyenlő a kör középpontjában felvett értékkel.

Ha a köröket a szokott módon paraméterezzük, és az integrálokat felírjuk komplex vonalintegrálként, éppen ilyen típusú kifejezéseket kapunk:

a) γ_1 paraméterezése:

$z(t) = -2 + 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z'(t) = 4ie^{it}$, tehát:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{e^z}{z+2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-2+4e^{it}}}{4e^{it}}\cdot 4ie^{it}dt = i\cdot\int_0^{2\pi} e^{-2+4e^{it}}dt =$$

$$= 2\pi i\cdot\left[e^z\right]_{z=-2} = 2\pi ie^{-2}$$

b) γ_2 paraméterezése:

$z(t) = i + 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z'(t) = 3ie^{it}$, tehát:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\mathrm{ch}2z}{z-i}dz = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{ch}2\left(i+3e^{it}\right)}{3e^{it}}\cdot 3ie^{it}dt =$$

$$= i\cdot\int_0^{2\pi} \mathrm{ch}2\left(i+3e^{it}\right)dt = 2\pi i\cdot\left[\mathrm{ch}z\right]_{z=i} = 2\pi i\cdot\mathrm{ch}i$$

c) γ_3 paraméterezése:

$z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $z'(t) = ie^{it}$, tehát:

$$\oint_{\gamma_3} \frac{\sin z}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(e^{it}\right)}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = i \cdot \int_0^{2\pi} \sin\left(e^{it}\right) dt =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\sin z\right]_{z=0} = 0$$

Az f_3 függvény nem reguláris az origóban, az origót megkerülő körre vonatkozó integrálja mégis zérus. Ez a tény a szingularitás miatt nem következhet a Cauchy-féle alaptételből, de következik az alaptétel Riemann-féle általánosításából, ugyanis f_3 az origó környezetében korlátos. Ez például következik abból a valós függvénytanban jól ismert határértékrelációból, amely komplex függvények esetén is igaz:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Később látni fogjuk, hogy f_3-nak az origóban úgynevezett megszüntethető szingularitása van, azaz megfelelően értelmezve az origóban regulárissá tehető. Ezzel a kiegészítéssel az alaptétel mégiscsak alkalmazhatóvá válik.

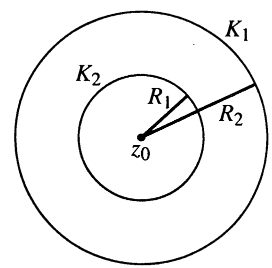
6. LAURENT-SOROK. IZOLÁLT SZINGULÁRIS HELYEK VIZSGÁLATA

A differenciálszámítás fejezetében láttuk, hogy ha egy f függvény reguláris egy T tartományban, akkor a tartomány minden pontja körül hatványsorba fejthető, és a hatványsor konvergenciahalmaza egy olyan körlap, melynek középpontja az adott pont, sugara pedig az adott pontnak és T határának a távolsága. A z_0 körüli Taylor-sor, mint korábban láttuk,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \left(z - z_0\right)^n$$

alakú. Nagyon fontos tény, hogy a Taylor-sor a konvergenciatartományban elő is állítja a reguláris f függvényt.

Igen fontos általánosítása ennek a kérdéskörnek az az eset, amikor f a T tartomány egy vagy több pontjában nem reguláris. Ekkor f ezen pontok körül nem fejthető pozitív egész kitevőjű hatványok szerint haladó sorba, tehát Taylor-sorba. Igaz azonban az, hogy f *pozitív és negatív* egész kitevőjű hatványok szerint haladó sorba fejthető.



6.1 ábra

Pontosabban legyen f reguláris a z_0 pont körüli k_1 és k_2 koncentrikus körök által határolt gyűrűszerű tartományban. Jelölje ezen körök sugarát rendre R_1 és R_2, ekkor a sugarak viszonyára teljesül a $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ egyenlőtlenséglánc (6.1 ábra).

Megengedjük tehát az $R_1 = 0$ esetet is, amikor f a z_0 ponttól megfosztott körlapon reguláris. A gyakorlat szempontjából ez az egyik legfontosabb eset. De előfordulhat az $R_2 = \infty$ eset is, ami azt jelenti, hogy f a k_1 köríven kívül a teljes komplex síkon reguláris.

Legyen f reguláris az $R_1 < |z - z_0| < R_2$ körgyűrűn. Ekkor f az adott körgyűrűn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

alakú – pozitív és negatív egész kitevőjű hatványok szerint haladó – hatványsorba fejthető, mely hatványsort az f függvény z_0 *körüli Laurent-sorának* nevezzük.

A Laurent-sor természetes módon két részre bontható. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

sort, amely a k_2 köríven belül konvergens, a Laurent-sor reguláris részének vagy szabályos részének nevezzük.

Ez egy „közönséges" Taylor-sor, összegfüggvénye a körlapon belül reguláris függvény. A

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

sort pedig a Laurent-sor *főrészének* nevezzük, amely a k_1 köríven kívül konvergens. A két sor összege nyilván az

$$R_1 < |z - z_0| < R_2$$

körgyűrűben konvergens, ahol alább említendő feltételek mellett a sor elő is állítja a függvényt.

Ha f reguláris az

$$R_1 < |z - z_0| < R_2$$

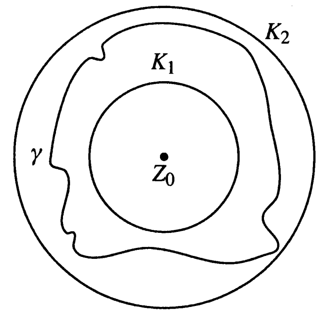
körgyűrűben, akkor e körgyűrű tetszőleges z pontjában érvényes az

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

úgynevezett Laurent-féle sorfejtés, melynek együtthatóit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \; n \in \mathbb{Z}$$

integrálképletek szolgáltatják, ahol γ a körgyűrűben haladó tetszőleges egyszerű zárt görbe, amely a z_0 pontot megkerüli (6.2 ábra).



6.2 ábra

A körgyűrűben konvergens z_0 körüli Laurent-sor összegfüggvényének Laurent-sora az eredeti Laurent-sor. Ha f a k_2 kör belsejében reguláris, akkor z_0 körüli Laurent-sora egybeesik z_0 körüli Taylor-sorával. Másképpen fogalmazva: bármely körgyűrűben reguláris függvény ott Laurent-sorba fejthető, és ez a sorfejtés egyértelmű. Ez az egyértelműség azt jelenti, hogy bármely módon kapott, $z - z_0$ hatványait tartalmazó hatványsor f z_0 körüli Laurent-sora. Ez az egyértelműség a sorfejtési technikák keresésénél jól hasznosítható.

Általánosan egy Laurent-sor konvergenciájáról szól Abel-tételének kiterjesztése: ha a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Laurent-sor egy $z \in \mathbb{C}$ pontban konvergens, akkor van olyan z_0 középpontú körgyűrű, melynek minden belső pontjában abszolút konvergens, a konvergenciatartomány bármely zárt résztartományában egyenletesen konvergens, és a körgyűrű bármely külső pontjában divergens.

Az egyenletes konvergencia következménye, hogy a hatványsor f összegfüggvénye olyan reguláris függvény, amely a konvergenciatartomány belsejében akárhányszor differenciálható, és

$$f^{(k)}(z) = \sum_n \left(c_n (z - z_0)^n\right)^{(k)} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Tehát a differenciálás és az összegzés sorrendje felcserélhető, és a k-adik differenciálással nyert sor konvergenciatartománya megegyezik az eredeti soréval.

Ugyancsak igaz, hogy a konvergenciatartomány belsejében haladó bármely rektifikálható γ görbén f integrálható, és

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_n \int_\gamma c_n (z - z_0)^n dz,$$

vagyis az integrálás és összegzés sorrendje felcserélhető, és a tagonkénti integrálással nyert sor konvergenciatartománya megegyezik az eredeti soréval.

A z_0 pontot az f komplex függvény *izolált szinguláris helyének* nevezzük, ha f a z_0 pontban nem reguláris, de van z_0-nak olyan környezete, amelyben f reguláris.

Az izolált szinguláris helyeknek többféle típusa van.

A z_0 pontot az f függvény *megszüntethető szingularitásának* nevezzük, ha a z_0 körüli Laurent-sorában minden $n < 0$ index esetén $c_n = 0$, azaz a Laurent-sornak nincs főrésze, csak reguláris része van.

A z_0 izolált szinguláris hely akkor és csak akkor megszüntethető szingularitás, ha a

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

határérték létezik. Ezek szerint, ha z_0 megszüntethető szingularitás, akkor f z_0 körüli Laurent-sora Taylor-sorrá egyszerűsödik:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Innen következik, hogy ekkor

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0,$$

tehát a z_0-beli határérték a Taylor-sor konstans tagja. Ha alkalmazzuk ekkor az $f(z_0) = c_0$ kiterjesztést, f z_0 pontbeli reguláris kiterjesztését kapjuk.

A z_0 izolált szinguláris pontot az f függvény *k-adrendű pólusának* nevezzük, ha z_0 körüli Laurent-sorában $c_{-k} \neq 0$, de minden $n > k$ esetén $c_{-n} = 0$. Ez másképpen azt jelenti, hogy ha z_0 pólusszingularitás, akkor f z_0 körüli Laurent-sorának főrésze véges sok k-adrendű pólus esetén legfeljebb k tagot tartalmaz.

A z_0 izolált szinguláris hely akkor és csak akkor pólusszingularitás, ha

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty,$$

tehát ha z_0 az f függvény k-adrendű pólusa, akkor f z_0 körüli Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

alakú.

Azt mondjuk, hogy a z_0 pontban reguláris f függvénynek a z_0 pont *n-szeres zérushelye* vagy n multiplicitású gyöke, ha

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

és

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

A z_0 pont az f függvénynek akkor és csak akkor k-adrendű pólusa, ha az $\frac{1}{f}$ függvénynek a z_0 pont megszüntethető szingularitása, és $\frac{1}{f}$ reguláris kiterjesztésének a z_0 pontban k-szoros zérushelye van.

A z_0 pont az f függvénynek akkor k-adrendű pólusa, ha f előállítható

$$f(z) = \frac{g(z)}{\left(z - z_0\right)^k}$$

alakban, ahol g a z_0 pontban reguláris, és $g(z_0) \neq 0$.

Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy f-nek a z_0 pont akkor és csak akkor k-adrendű pólusa, ha

$$\lim_{z \to z_0} \left(z - z_0\right)^k \cdot f(z) = g\left(z_0\right) \neq 0.$$

A z_0 izolált szinguláris hely az f függvény *lényeges szingularitása*, ha a z_0 szingularitás nem megszüntethető, és nem is pólus.

Előzőek alapján világos, hogyha z_0 izolált szingularitás, akkor f z_0 körüli Laurent-sorának főrésze végtelen sok tagot tartalmaz.

A lényeges szingularitás nagyon különleges tulajdonságú helye a függvénynek. Ebben a pontban nem lehet sem „véges", sem végtelen a határértéke. Ezzel szemben igaz a *Casorati–Weierstrass-féle tétel*:

Legyen z_0 pont az f függvény lényeges szinguláris helye, és legyen w tetszőleges komplex szám, vagy $w = \infty$. Ekkor létezik olyan $z_k \to z_0$ komplex számsorozat, melyre:

$$\lim_{k \to \infty} f(z_k) = w$$

Másképpen fogalmazva: a z_0 pont bármely környezetének képe a komplex számsíkon mindenütt sűrű halmaz.

Ennél többet állít *Picard tétele*:

Lényeges szinguláris hely bármely kis környezetében a függvény minden véges komplex számértéket felvesz legfeljebb egy érték kivételével.

Eddig az f függvény viselkedését csak végesben fekvő pontokban vizsgáltuk. Most áttérünk a függvény *végtelen távoli pontbeli* viselkedésének leírására.

A végtelen távoli pont környezetének nevezzük a $|z| > R$ egyenlőtlenséggel megadott, origó közepű, R sugarú kör külsejét.

Ha az f függvény az

$$R < |z| < \infty$$

„körgyűrűn" reguláris, akkor a végtelen távoli pontot a függvény izolált szinguláris pontjának nevezzük. Ez a szinguláris pont ugyanúgy megszüntethető szingularitás, pólus, illetve lényeges szingularitás, ha a

$$\lim_{z \to \infty} f(z)$$

határérték rendre véges, végtelen, illetve nem létezik.

Szingularitás szempontjából f úgy viselkedik a ∞-ben, mint a

$$z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

összetett függvény az origóban. Eszerint f a végtelenben reguláris is lehet, ha $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$-nek a 0-ban megszüntethető szingularitása van. Legyen f reguláris a $|z| > R$ körgyűrűben. Ebben a tartományban, tehát a ∞ egy környezetében érvényes Laurent-sora a következő:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

Ez f *∞ körüli Laurent-sora*. Ekkor:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} \cdot z^k$$

Laurent-sor a $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ függvényt a $0 < |z| < \frac{1}{R}$ körgyűrűben állítja elő. Az együtthatók, mint látható, ugyanazok, csak fordított indexeléssel.

Ezért a ∞ *körüli Laurent-sor főrészén* a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

hatványsort, a *reguláris részén* pedig a

$$\sum_{n=-\infty}^{0} c_n \cdot z^n$$

hatványsort értjük. A reguláris részt szokás szabályos résznek is nevezni.

Ezek szerint a ∞ megszüntethető szingularitás, ha a ∞ körüli Laurent-sor nem tartalmaz főrészt, k-adrendű pólus, ha a főrész véges sok tagot tartalmaz, melynek legmagasabb hatványú tagja $c_k z^k$, és lényeges szingularitás, ha a főrész végtelen sok tagot tartalmaz.

Állapodjunk meg a következőkben. Ha a példák megoldása során használjuk a (teljes) komplex sík kifejezést, akkor ehhez a végtelen távoli pontot nem gondoljuk hozzá. Ha a ∞-ről akarunk beszélni, azt külön kihangsúlyozzuk.

Az f függvény z_0 körüli Laurent-sorában különleges szerep jut a c_{-1} együtthatónak. Az együtthatókat előállító integrálformula szerint ugyanis:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

szoros kapcsolatban áll tehát közvetlenül f vonalintegráljával.

A z_0 körüli Laurent-sor c_{-1} együtthatóját az f függvény z_0 *ponthoz tartozó reziduumának* nevezzük.

Ha az $f(z)$ függvény az $R < |z| < \infty$ körgyűrűben reguláris, akkor az f függvény végtelen távoli ponthoz tartozó reziduuma: $-c_{-1}$, ahol a véges esethez hasonlóan c_{-1} a ∞ körüli Laurent-sor együtthatója. A különbségtétel okára a következő fejezetben visszatérünk.

Jelölése $\mathrm{Res}(f, z_0)$, illetve ha nem okoz félreértést, egyszerűen $\mathrm{Res}(z_0)$. Ennek a fogalomnak jelentőségére és alkalmazásaira a következő fejezetben részletesen kitérünk.

A komplex függvények fontos osztályát alkotják a *meromorf függvények*. Az f függvény meromorf a T tartományon, ha f reguláris T-n, vagy csak pólusszingularitásai vannak.

Érdekes kapcsolat van a Laurent-sor és a valós analízisből ismert *Fourier-sor* között:

Legyen f reguláris a $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ körgyűrűben. Ebben a körgyűrűben f Laurent-sora az egységkörvonalon megegyezik az

$$f\left(e^{it}\right) := g(t)$$

valós változós komplex függvény Fourier-sorával.

Ugyanis az adott körgyűrűben konvergens

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

Laurent-sor c_n együtthatóit a $z = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ helyettesítés után az alábbi formula szolgáltatja:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\varphi}\right) \cdot e^{-in\varphi} d\varphi$$

Ez a Laurent-sor az egységkörvonal $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ pontjában

$$f\left(e^{it}\right) := g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{int}$$

alakú, ahol az együtthatókat a

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cdot e^{-in\varphi} d\varphi$$

formula szolgáltatja. A felírt Laurent-sor tehát valóban a g függvény komplex Fourier-sora.

6.1 Izolált szinguláris helyek vizsgálata

Gyakorló feladatok

Keresse meg az alábbi függvények szinguláris pontjait, és határozza meg a szinguláris helyek típusát, ha lehet Laurent-sorfejtés nélkül!

1. $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

A függvénynek a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű a regularitási tartománya, tehát a 0 és a ∞ izolált szinguláris helyek. Egyrészt világos, hogy

$$\lim_{z\to\infty} \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \cos 0 = 1,$$

tehát f-nek a ∞-ben van véges határértéke, azaz a függvénynek a ∞ *megszüntethető szingularitása*. Ha f-et kiterjesztjük a ∞-ben az $f(\infty) = 1$ definícióval, akkor f a ∞-ben is regulárissá válik.

Másrészt legyen $(z_n) = \frac{1}{n\cdot\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ „komplex" számsorozat. Ez a sorozat nyilván a 0-hoz tart. De ekkor egyrészt:

ha $n = 2k$: $\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos 2k\pi = 1$, másrészt:

ha $n = 2k+1$: $\lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{(2k+1)\pi}}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos(2k+1)\pi = -1$,

vagyis a páros indexű tagok részszorzata 1-hez, a páratlan indexűeké -1-hez tart, tehát a függvénynek a 0-ban nem létezik határértéke. Ez azt jelenti, hogy f-nek a 0 *lényeges szingularitása*.

2. $f(z) = \operatorname{cth}(3z) = \frac{\operatorname{ch}(3z)}{\operatorname{sh}(3z)}$

A számlálóbeli függvény mindenütt reguláris, a nevező úgyszintén, ezért f szinguláris pontjai egybeesnek a nevező zérushelyeivel. Ha felhasználjuk, hogy sh periodikus függvény, és periódusa $2\pi i$, továbbá azt, hogy a 0 zérushely, azt kapjuk, hogy a szinguláris pontok végtelen sokan vannak:

$$3z_n = 2\pi i\cdot n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$z_n = \frac{2}{3}\pi i\cdot n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

Ezeken a helyeken a számláló nem nulla, továbbá mivel a

$$(\operatorname{sh}(3z))' = 3\cdot\operatorname{ch}(3z)$$

első deriváltfüggvénynek sem zérushelyei ezek a pontok, elmondhatjuk, hogy minden szinguláris pont a nevezőnek egyszeres zérushelye, tehát minden z_n, $n\in\mathbb{Z}$ az f függvény elsőrendű pólusa.

Az a tény, hogy minden z_n, $n\in\mathbb{Z}$ pólus, határérték-számítással is könnyen adódik, hiszen

$$\lim_{z\to z_n} \frac{\operatorname{ch}(3z)}{\operatorname{sh}(3z)} = \infty,$$

és ha felhasználjuk, hogy ch és sh egyaránt $2\pi i$ szerint periodikus függvények, ez az eredmény változatlanul igaz a z_n sorozat minden tagjára. Ebből csak a pólus rendjére nem tudunk azonnal következtetni.

A ∞ ugyancsak szinguláris pontja az f függvénynek, de a szinguláris pontok z_n, $n\in\mathbb{Z}$ sorozatának a torlódási pontja, tehát a ∞ *nem izolált szingularitás*.

3. $f(z) = \frac{\operatorname{sh}(5z)}{3z}$

f két reguláris függvény hányadosa.

Ha figyelembe vesszük a z-vel való osztást, kapjuk, hogy f regularitási tartománya a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű.

A $z = 0$ pont a számlálónak is és a nevezőnek is zérushelye. Ezért a $z = 0$-beli határérték kiszámításához felhasználjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh}(5z)}{3z} = \lim_{z\to 0}\frac{5\cdot\operatorname{ch}(5z)}{3} = \frac{5}{3}\cdot\operatorname{ch}0 = \frac{5}{3},$$

ami azt jelenti, hogy a 0 f-nek *megszüntethető szingularitása*, az $f(0) = \frac{5}{3}$ kiterjesztéssel f a 0-ban regulárissá tehető.

A ∞-beli viselkedés vizsgálatához közelítsünk a ∞-hez különböző módon. Legyen először $z = x$ valós szám. Ekkor az

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(5x)}{3x}$$

függvénynek a ∞-ben $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértéke van, ezért alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(5x)}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot\operatorname{ch}(5x)}{3}=\infty,$$

tehát f valós tengelyre vonatkozó leszűkítése a ∞-ben a ∞-hez tart.

Legyen most $z=iy$, tehát közeledjünk a ∞-hez a képzetes tengelyen. Ekkor:

$$f(iy)=\frac{\operatorname{sh}(5iy)}{3iy}=\frac{-i\sin(i\cdot 5iy)}{3iy}=-\frac{\sin(-5y)}{3y}=\frac{\sin(5y)}{3y}$$

Ismét egy valós-valós függvényt kaptunk. Mivel $\sin(5y)$ korlátos függvény, az $\frac{1}{3y}$ pedig a végtelenben 0-hoz tart, ugyanez igaz a szorzatukra is, tehát

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\operatorname{sh}(5iy)}{3iy}=0$$

A függvény képzetes tengelyre vonatkozó leszűkítése a ∞-ben 0-hoz tart. A ∞-beli határérték tehát attól függ, hogyan közelítünk a ∞-hez, tehát a ∞ f-nek *lényeges szingularitása.*

4. $f(z)=3z^3+6z^2-z+8$

Ez a racionális egészfüggvény a teljes komplex síkon reguláris, egyetlen szinguláris pontja a ∞. Ez a pont definíció szerint *harmadrendű pólus*, hiszen f ezen alakja éppen a függvény 0 körüli Laurent-sora is egyben, melynek csak reguláris része van, főrésze nincs, tehát ez gyakorlatilag egy Taylor-sor. De a regularitási tulajdonságok miatt ez egyben ∞ körüli Laurent-sornak is tekinthető, melynek reguláris része nincs, főrészének legnagyobb hatványkitevője a 3.

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk a $z\to\frac{1}{z}$ helyettesítéssel a 0 pontra vonatkozólag, ugyanis az

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{z^3}+\frac{6}{z^2}-\frac{1}{z}+8$$

függvénynek a 0 izolált szinguláris pontja, mely harmadrendű pólus, hiszen a $z\mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény ezen előállítása éppen a 0 körüli Laurent-sor, melynek főrészében -3 a legkisebb hatványkitevő, azaz $c_{-3}=3$, de $c_{-n}=0$, ha $n>3$.

Végül világos, hogy $\lim_{z\to\infty}\left(3z^3+6z^2-z+8\right)=\infty$, ami azt jelenti, hogy a ∞ pólusszingularitás.

5. $f(z)=\dfrac{2z^5-4z^2}{z^3+2z^2+z}$

Az f egy nem valódi racionális törtfüggvény, mert a számláló magasabb fokú, mint a nevező. Ezért első lépésként végezzünk polinomosztást:

$$\begin{array}{l}
2z^5-4z^2 : z^3+2z^2+z = 2z^2-4z+6\\
\underline{2z^5+4z^4+2z^3}\\
\quad -4z^4-2z^3-4z^2\\
\quad \underline{-4z^4-8z^3-4z^2}\\
\qquad 6z^3\\
\qquad \underline{6z^3+12z^2+6z}\\
\qquad\quad -12z^2-6z
\end{array}$$

Megkaptuk a hányadost és a maradékot. Ezzel f az alábbi alakot ölti:

$$f(z)=2z^2-4z+6-\frac{12z^2+6z}{z(z+1)^2}$$

Ennek a függvénynek három szinguláris pontja van: -1, 0, ∞, hiszen f első része egy polinom, mely mindenütt reguláris, második része egy valódi racionális törtfüggvény, mely nevezőjének zérushelyei: -1 és 0.

A -1 a törtfüggvény számlálójának nem gyöke, a nevezőnek viszont kétszeres zérushelye, tehát a -1 a függvény másodrendű pólusa.

A 0 egyszeres zérushelye a számlálónak és a nevezőnek is. Egyszerűsítsünk tehát z-vel, ekkor kapjuk, hogy

$$f(z)=2z^2-4z+6-\frac{12z+6}{(z+1)^2},$$

ami azt jelenti, hogy a 0 *megszüntethető szingularitás*, helyettesítéssel kapjuk most, hogy az $f(0)=0$ érték a 0 pontbeli reguláris kiterjesztése f-nek.

A ∞ vizsgálatához használjuk fel az alábbi határértékeket:

$$\lim_{z\to\infty}2z^2-4z+6=\infty,$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{12z^2+6z}{z(z+1)^2}=0,$$

amikből következik, hogy $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, tehát a ∞ a függvénynek pólusa. A pólus rendjének kiderítéséhez gondoljunk arra, hogy az f függvény – a -1 szinguláris pont miatt – $|z| > 1$ körgyűrűben érvényes Laurent-sorának főrésze csak a mindenütt reguláris $2z^2 - 4z + 6$ függvény lehet, hiszen a valódi racionális törtfüggvény z hatványai szerinti kifejtésénél nem kaphatunk pozitív egész kitevőjű hatványokat. Tehát a ∞ a függvénynek másodrendű pólusa.

6. $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{z}\right)}$

A függvénynek nyilván szinguláris pontja a 0 pont, a ∞ és a nevező minden zérushelye:

$$\sin\frac{1}{z} = 0, \text{ ha } \frac{1}{z} = k\pi,\ z_k = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Ezek a z_k pontok izolált szinguláris pontok. Mivel azonban a z_k „sorozatnak" a 0 torlódási pontja, ezért a 0 *nem izolált szingularitás*. Továbbá mivel

$$\left(\sin^2\frac{1}{z}\right)'\Bigg|_{z=z_n} = \left[2\cdot\sin\frac{1}{z}\cdot\cos\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)\right]_{z=z_n} =$$

$$= \left[-\frac{1}{z^2}\cdot\sin\frac{2}{z}\right]_{z=z_n} = 0$$

$$\left(\sin^2\frac{1}{z}\right)''\Bigg|_{z=z_n} = \left[\frac{2}{z^3}\cdot\sin\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2}\cdot\cos\frac{2}{z}\cdot\left(-\frac{2}{z^2}\right)\right]_{z=z_n} \neq 0,$$

ezért a z_k pontok a nevezőnek valamennyien kétszeres zérushelyei, ezért f-nek mindannyian másodrendű pólusai.

A ∞ is izolált szingularitás, hiszen a $|z| > \dfrac{1}{\pi}$ körgyűrűn a függvény reguláris. A ∞ vizsgálatához most alkalmazzuk a $z \to \dfrac{1}{z}$ helyettesítést:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

Ennek a $z = 0$ valóban izolált szingularitása, hiszen a $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény reguláris a $0 < |z| < \pi$ körgyűrűn. Deriváljuk a nevezőt:

$$\left(\sin^2 z\right)'\Big|_{z=0} = \left[2\sin z\cos z\right]_{z=0} = \left[\sin 2z\right]_{z=0} = 0$$

$$\left(\sin^2 z\right)''\Big|_{z=0} = (\sin 2z)'\Big|_{z=0} = \left[2\cos 2z\right]_{z=0} = 2 \neq 0$$

Tehát $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$-nek a 0, így definíció szerint f-nek a ∞ *másodrendű pólusa*.

7. $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{z}}}$

A függvénynek szinguláris pontja a 0, a ∞ és a nevező minden zérushelye.

Az $1 - e^{\frac{1}{z}} = 0$ egyenletnek az exponenciális függvény $2\pi i$ szerinti periodicitása miatt végtelen sok megoldása van:

$$\frac{1}{z} = k\cdot 2\pi i,\ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0,\ z_k = \frac{1}{k\cdot 2\pi i},\ k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$$

Ezek a pontok mindannyian izolált szinguláris pontok. Mivel

$$\left(1 - e^{\frac{1}{z}}\right)'\Bigg|_{z=z_n} = \left[-e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{-1}{z^2}\right]_{z=z_n} = \left[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}\right]_{z=z_n} = \frac{1}{z_n^2} \neq 0,$$

ezért a z_n pontok a nevezőnek egyszeres zérushelyei, tehát a z_n helyek f elsőrendű pólusai.

A z_n ponthalmaznak a 0 torlódási pontja, tehát a 0 szinguláris pont nem izolált szingularitás.

A függvénynek izolált szinguláris pontja a ∞ is, hiszen f reguláris a $|z| > \dfrac{1}{2\pi}$ körgyűrűn. A szinguláris pont osztályozásához végezzük el a $z \to \dfrac{1}{z}$ helyettesítést:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1 - e^z}$$

Ennek a 0 elsőrendű pólusa, hiszen egyrészt a 0 a

$$z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

függvénynek izolált szinguláris helye, ugyanis

$$z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$$

reguláris a $0 < |z| < 2\pi$ körgyűrűn, másrészt

$$\left(1 - e^z\right)'\Big|_{z=0} = \left[-e^z\right]_{z=0} = -1 \neq 0,$$

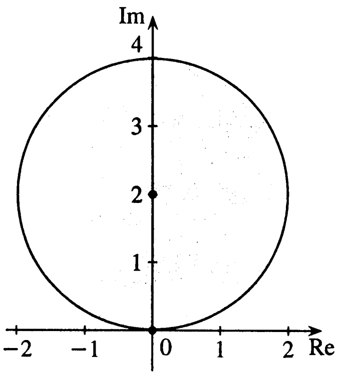
tehát f-nek a ∞ *elsőrendű pólusa*.

6.2 Laurent-sorok előállítása

Gyakorló feladatok

1. Fejtse hatványsorba az $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2i)}$ függvényt a $z = 2i$ izolált szinguláris hely környezetében!

Mivel a $z = 2i$-hez legközelebbi szingularitás a $z = 0$ pont, ezért a sorfejtés a $0 < |z - 2i| < 2$ körgyűrűben lesz konvergens (6.3 ábra).



6.3 ábra

A Laurent-sor együtthatóit a bevezetőben közölt integrálformulák segítségével állítjuk elő. Az együtthatók kiszámításánál külön vizsgáljuk az $n \geq 0$ és az $n < 0$ eseteket.

Ha $n \geq 0$, akkor bármely adott körgyűrűben haladó rektifikálható zárt γ görbe esetén:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\frac{1}{z^2(z-2i)}}{(z-2i)^{n+1}}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-2i)^{n+2}}dz$$

Az integrál kiszámítására például alkalmazható a deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle integrálformula, hiszen az adott körlapon belül $\frac{1}{z^2}$ reguláris függvény. Így:

$$\oint_\gamma \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-2i)^{n+2}}dz = \frac{2\pi i}{(n+1)!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=2i}$$

Előállítjuk a deriváltakat:

$$\left(z^{-2}\right)' = (-2)\cdot z^{-3}$$

$$\left(z^{-2}\right)'' = (-2)(-3)\cdot z^{-4}$$

$$\left(z^{-2}\right)''' = (-2)(-3)(-4)\cdot z^{-5}$$

$$\vdots$$

$$\left(z^{-2}\right)^{(n)} = (-2)(-3)(-4)\ldots(-n-1)\cdot z^{-n-2}$$

$$\left(z^{-2}\right)^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\cdot(n+2)!\cdot z^{-(n+3)}$$

Innen kapjuk, hogy $n \geq 0$ esetén:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2\pi i}{(n+1)!}\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n+2)!\cdot z^{-(n+3)}\Big|_{z=2i^2} =$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot(n+2)\cdot\frac{1}{(2i)^{n+3}}$$

Most állítsuk elő a negatív indexű együtthatókat. Ha $n > 0$, akkor

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_\gamma \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{-n+1}}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{1}{z^2(z-2i)} \cdot (z-2i)^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{(z-2i)^{n-2}}{z^2} dz$$

Ha itt $n \geq 2$, akkor az integrandus egy olyan racionális törtfüggvény, melynek a $z = 0$ az egyetlen szingularitása, tehát az adott körlapon reguláris. Így a Cauchy-féle alaptétel szerint a γ-ra vonatkozó integrál zérus:

$c_{-n} = 0$, ha $n \geq 2$.

Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{z^2}$ regularitása miatt ismét alkalmazható a Cauchy-formula:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{1}{z^2(z-2i)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{\frac{1}{z^2}}{z-2i} \cdot (z-2i) dz =$$

$$= \left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=2i} = \frac{1}{4i^2} = -\frac{1}{4}$$

Megkaptuk az összes együttható értékét, melyek felhasználásával már felírható a függvény Laurent-sora:

$$f(z) = -\frac{1}{4(z-2i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+2)}{(2i)^{n+3}} \cdot (z-2i)^n$$

A függvénynek eszerint a $z = 2i$ pont elsőrendű pólusa, hiszen $c_{-n} = 0$, ha $n \geq 2$, de $c_{-1} = -\frac{1}{4} \neq 0$. Ez egyben azt is jelenti, hogy előállítottuk f $2i$ pontbeli reziduumát:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = -\frac{1}{4}$$

2. Számítsa ki az $f(z) = \frac{\sin \pi(z+i)}{(z+i)^3}$ komplex függvény izolált szinguláris pont körüli Laurent-sorának együtthatóit az integrálformulák segítségével! Írja fel a Laurent-sort, és annak alapján jellemezze a szinguláris pontot!

A $\sin \pi(z+i)$ komplex függvény a teljes komplex síkon reguláris függvény, így f egyetlen szinguláris pontja a nevező $-i$ zérushelye, hiszen a nevező is mindenütt reguláris. Több szinguláris pont nincs, tehát $f(z)$ regularitási tartománya a $|z+i| > 0$ körgyűrű, vagyis a $-i$ ponttól megfosztott komplex sík. A Laurent-sor ezen „kilyukasztott" komplex síkon lesz konvergens, és elő is állítja az f függvényt.

A feladat előírása szerint az együtthatókat integrálással számítjuk ki. Legyen ezért γ tetszőleges egyszerű zárt rektifikálható görbe, mely a $-i$ pontot egyszer pozitív irányban megkerüli. Ekkor az együtthatók:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z+i)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{\sin \pi(z+i)}{(z+i)^{n+4}} dz$$

Az integrálok kiszámításánál használjuk fel, hogy $\sin \pi(z+i)$ mindenütt reguláris.

Ha $n \leq -4$, akkor az integrandus reguláris függvény, tehát a Cauchy-féle alaptétel szerint az integrál értéke nulla, tehát:

$c_{-n} = 0$, ha $n \geq 4$.

A többi együttható kiszámítását a Cauchy-féle integrálformulákkal végezzük el. Ehhez szükség van $\sin \pi(z+i)$ deriváltjaira:

$$\left.\left(\sin \pi(z+i)\right)'\right|_{z=-i} = [\pi \cos \pi(z+i)]_{z=-i} = \pi$$

$$\left.\left(\sin \pi(z+i)\right)''\right|_{z=-i} = \left[-\pi^2 \sin \pi(z+i)\right]_{z=-i} = 0$$

$$\left.\left(\sin \pi(z+i)\right)'''\right|_{z=-i} = \left[-\pi^3 \cos \pi(z+i)\right]_{z=-i} = -\pi^3$$

$$\left.\left(\sin \pi(z+i)\right)^{(4)}\right|_{z=-i} = \left[\pi^4 \sin \pi(z+i)\right]_{z=-i} = 0$$

Innen már sejthető, és teljes indukcióval igazolható is:

$$\left.\left(\sin \pi(z+i)\right)^{(n)}\right|_{z=-i} = \begin{cases} (-1)^k \cdot \pi^{2k+1}, & \text{ha } n = 2k+1; \\ 0, & \text{ha } n = 2k. \end{cases}$$

Alkalmazva a Cauchy-féle integrálformulát:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{\sin \pi(z+i)}{(z+i)^{n+4}} dz = \frac{1}{(n+3)!} \left[\sin \pi(z+i)\right]_{z=-i}^{(n+3)},$$

amely $n \geq -3$ esetén szolgáltatja az együtthatókat:

$$c_{-3} = \frac{1}{0!} \sin 0 = 0$$

$$c_{-2} = \frac{1}{1!} \pi \cos 0 = \pi$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2!}\pi^2(-\sin 0) = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{3!}\pi^3(-\cos 0) = -\frac{\pi^3}{3!}$$

$$c_1 = \frac{1}{4!}\pi^4 \sin 0 = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{5!}\pi^5 \cos 0 = \frac{\pi^5}{5!}$$

$$\vdots$$

Tehát a keresett Laurent-sor:

$$f(z) = \frac{\pi}{(z+1)^2} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!}(z+i)^2 - \frac{\pi^7}{7!}(z+i)^4 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!}(z+i)^{2n-2},$$

mely sor konvergenciatartománya a $|z+i| > 0$ körgyűrű. A sorra tekintve kiderül az is, hogy a $-i$ másodrendű pólus, hiszen $c_{-2} = \pi \neq 0$, de $c_{-n} = 0$, ha $n \geq 3$. A sorból hiányzik a -1 indexű tag, tehát:

$$\text{Res}(f, -i) = 0$$

A szinguláris pontot természetesen a Laurent-sor nélkül is tudjuk jellemezni, ha felhasználjuk a jól ismert

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

határértékrelációt. Ebből következik, hogy

$$\lim_{z\to -i} \frac{\sin \pi(z+i)}{(z+i)^3} = \lim_{z\to -i} \frac{\sin \pi(z+i)}{\pi(z+i)} \cdot \frac{\pi}{(z+i)^2} = 1 \cdot \infty = \infty,$$

tehát a $z = -i$ hely a függvény pólusa. Ha még felhasználjuk, hogy

$$\lim_{z\to -i} (z+i)^2 \cdot f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{\sin \pi(z+i)}{z+i} = \pi,$$

akkor ebből már az is következik, hogy a $-i$ pont másodrendű pólus.

Az 1. és 2. példa illusztrálja, hogyan lehet a hatványsor együtthatóit az integrálformulák segítségével kiszámítani. A fentiekben viszonylag egyszerűen célhoz értünk, azonban – amint azt a soron következő példák mutatják – a gyakorlatban általában más utat választunk a Laurent-sor felírására. Ennek egyrészt az az oka, hogy ezek az integrálformulák az általános esetben nagyon bonyolultak lehetnek.

A másik ok a Laurent-sor bevezetőben említett egyértelműsége, ami lényegében azt jelenti, hogy bármilyen úton jutunk is el f hatványsorához, az biztosan az f függvényt előállító Laurent-sor. Ezt a tényt felhasználva egyszerűbben érünk célhoz, ha már ismert hatványsorokat használunk fel. Ilyenek például a differenciálszámítással foglalkozó fejezetben megismert elemi függvényeket definiáló Taylor-sorok, a mértani sor, a binomiális sor stb.

Azért, hogy ennek előnyeiről meggyőzzük az Olvasót, a 2. feladatbeli függvény Laurent-sorát írjuk fel a $\sin z$ függvény Taylor-sorának felhasználásával is:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

Egyszerűen hajtsuk végre ebben a $z \to \pi(z+i)$ helyettesítést, és szorozzuk meg a kapott sort $\dfrac{1}{(z+i)^3}$-nel:

$$f(z) = \frac{\sin \pi(z+i)}{(z+i)^3} = \frac{1}{(z+i)^3} \cdot$$

$$\cdot \left((z+i)\pi - \frac{\pi^3}{3!}(z+i)^3 + \frac{\pi^5}{5!}(z+i)^5 - \ldots \right) =$$

$$= \frac{\pi}{(z+i)^2} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!}(z+i)^2 - \ldots,$$ ami természetesen megegyezik a 2. példában előállított hatványsorral.

Mivel $\sin z$ sora mindenütt konvergens, és $\dfrac{1}{(z+i)^3}$ a $z = -i$ pont kivételével reguláris, az is adódik, hogy a sor konvergenciatartománya a $z = -i$ ponttól megfosztott komplex sík.

Lényegesen kevesebb munkával sorbafejtettük tehát az f függvényt ezzel az „új" módszerrel. A továbbiakban több különböző példát is mutatunk arra, hogy milyen módon lehet az együtthatók integrál-előállítását megkerülni.

3. Fejtse Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ függvényt az alábbi körgyűrűkben:

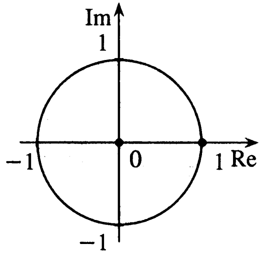
a) $z_0 = 0$ körül, $0 < |z| < 1$ körgyűrűben;

b) $z_0 = 0$ körül, $1 < |z|$ körgyűrűben;

c) $z_0 = 1$ körül, $0 < |z-1| < 1$ körgyűrűben;

d) $z_0 = 1$ körül, $1 < |z-1|$ körgyűrűben.

a) A $z_0 = 0$ hely az f függvény izolált szinguláris pontja, a feladat ezen izolált szinguláris hely körüli Laurent-kifejtést kíván egy olyan körgyűrűben, melyre $R_1 = 0$ és $R_2 = 1$ (6.4 ábra).



6.4 ábra

Mivel a 0-hoz legközelebbi szingularitás a $z = 1$ pont, ezért a 0 pont valóban izolált szingularitás, másrészt $R_2 = 1$ a maximális sugár. Tehát az adott esetben ez a legbővebb halmaz, melyen a sorfejtés elvégezhető. A sorfejtéshez bontsuk a függvényt parciális törtek összegére:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

A második taggal nincs dolgunk, hiszen már eleve z hatványát tartalmazza. Az első tagnál pedig felhasználjuk a jól ismert mértani sort és annak összegfüggvényét:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + z^3 + \dots),$$

amely köztudottan a $|z| < 1$ körlapon konvergens. Visszahelyettesítve az előző egyenletbe, megkapjuk f Laurent-sorát a $0 < |z| < 1$ körgyűrűben:

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - z^4 - \dots = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

A sor alapján elmondhatjuk, hogy a $z_0 = 0$ pont az f függvény elsőrendű pólusa – mely természetesen f eredeti formájából is azonnal látszik –, és leolvashatjuk a függvény $z_0 = 0$ pontbeli reziduumát:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -1$$

b) A $|z| > 1$ tartomány egy olyan körgyűrű, melyre $R_1 = 1$, $R_2 = \infty$ (6.4 ábra). A $|z| > 1$ esetben nem használhatjuk az a) pontbeli mértani sorfejtést, hiszen az csak $|z| < 1$ esetben konvergál. Azonban át tudjuk alakítani az $\frac{1}{z-1}$ törtet úgy, hogy egy abszolút értékben 1-nél kisebb kvóciensű mértani sor összegfüggvénye legyen:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right),$$

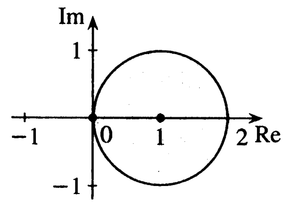
ugyanis $|z| > 1$ miatt $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, tehát a felírt mértani sor éppen a kijelölt körgyűrűben konvergens. Helyettesítéssel ismét megkapjuk a keresett sorfejtést:

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

A $|z| > 1$ körgyűrű a ∞ egy környezetének is tekinthető, melyben f reguláris függvény. Így a kapott Laurent-sor nem más, mint az f függvény ∞ körüli Laurent-sora. Mivel $c_{-1} = 0$, ezért:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$$

c) Ha a $z_0 = 1$ körüli sorfejtés a feladat, akkor a függvényt $z - 1$ hatványai szerint kell kifejteni, méghozzá úgy, hogy a kijelölt körgyűrűben legyen konvergens a sor (6.5 ábra).



6.5 ábra

Használjuk fel ismét az a) pontbeli parciális törtekre bontott alakot. Az első tag már $z - 1$ hatványát tartalmazza, tehát csak a második taggal kell foglalkozni. A törtet úgy alakítjuk át, hogy az a $0 < |z| < 1$ körgyűrűben konvergens mértani sor összegfüggvénye legyen:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{1-(-(z-1))} =$$
$$= 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots,$$

feltéve, hogy $|z-1|<1$ teljesül. Beírva ezt $\frac{1}{z}$ helyére, kapjuk a Laurent-sort:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \dots =$$
$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-1)^n$$

Innen leolvasható – de persze az eredeti képlet alapján is –, hogy a $z_0 = 1$ pont elsőrendű pólus, továbbá:

$\mathrm{Res}(f, 1) = 1$

d) Ha a $|z-1|>1$ körgyűrűn konvergens mértani sort akarunk előállítani, akkor a c) pontbeli, majd a b) pontbeli azonos átalakításokat alkalmazzuk:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z-1}\right)} =$$
$$= \frac{1}{z-1}\cdot\left(1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\dots\right) =$$
$$= \frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}-\frac{1}{(z-1)^4}+\dots =$$

Ez egy olyan mértani sor, mely $\left|\frac{-1}{z-1}\right|<1$ esetén, azaz a $|z-1|>1$ körgyűrűben konvergens.

Ismét helyettesítve $\frac{1}{z}$ helyére, megkapjuk a kijelölt tartománybeli Laurent-sort:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^4}-\dots = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n}$$

4. Fejtse Laurent-sorba az $f(z) = \frac{3}{(z-2)(z+1)}$ komplex függvényt a megadott z_0 pont körül, a kijelölt körgyűrűn, ha:

a) $z_0 = 0$ $|z|<1$
b) $z_0 = 0$ $1<|z|<2$
c) $z_0 = 0$ $2<|z|$
d) $z_0 = -1$ $0<|z+1|<3$
e) $z_0 = -1$ $3<|z+1|$
f) $z_0 = 2$ $0<|z-2|<3$
g) $z_0 = 2$ $3<|z-2|$

Bármelyik tartományról is van szó, hasznos az f függvény parciális törtekre bontott alakja: $f(z) = \frac{3}{(z-2)(z+1)} = \frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}$

a) Az origóban az f reguláris, továbbá $R=1$ a sugara annak a legnagyobb origó középpű körlapnak, amelyen belül f reguláris. Ez azt jelenti, hogy az origó körüli Laurent-sor a $|z|<1$ tartományban a függvény origó körüli Taylor-sora. Ennek felírásához ismét a mértani sort és annak összegfüggvényét használjuk fel. Az átalakítások azt célozzák, hogy olyan hatványsorokat kapjunk, amelyek a $|z|<1$ körlapon konvergensek. Egyrészt:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\dots\right)$$

Ez a mértani sor $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ feltétellel, tehát $|z|<2$ esetén konvergens.

Másrészt:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = 1-z+z^2-z^3+z^4-\dots$$

Ez a hatványsor a $|z|<1$ körlapon konvergál. f Taylor-sora ennek a két hatványsornak a különbsége, amely a két konvergenciatartomány közös részén, tehát a $|z|<1$ körlapon konvergál:

$$f(z) = -\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\frac{z^3}{2^4}-\dots-\left(1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\dots\right) =$$
$$= -\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}-(-1)^n\right)z^n$$

b) Az $1 < |z| < 2$ körgyűrűbeli Laurent-sor előállításához felhasználhatjuk $\dfrac{1}{z-2}$ a) pontbeli kifejtését, hiszen az $|z| < 2$ esetén konvergál. Az $\dfrac{1}{z+1}$ függvényt viszont úgy kell kifejteni, hogy a konvergenciatartománya a $|z| > 1$ körgyűrű legyen. Ehhez az alábbi átalakítás célszerű:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} =$$

$$\frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} - \dots\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots$$

Ez egy olyan mértani sor, melynek kvóciense $-\frac{1}{z}$, tehát akkor konvergens, ha $\left|-\frac{1}{z}\right| < 1$, azaz ha $|z| > 1$. Ezek után ismét összegzéssel kapjuk azt a Laurent-sort, amely a $|z| < 2$ és $|z| > 1$ körgyűrűk közös részén, tehát az $1 < |z| < 2$ tartományban konvergál:

$$f(z) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \frac{z^3}{2^4} - \dots\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

c) A $|z| > 2$ tartományon az $\dfrac{1}{z+1}$ törtfüggvény b) pontbeli kifejtése felhasználható, hiszen $|z| > 1$ esetén konvergált, de $\dfrac{1}{z-2}$ sorfejtése ebben a tartományban már divergens. Ezért most más módon alakítjuk át:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots\right),$$

amely sor akkor konvergál, ha $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, azaz ha $|z| > 2$.

Innen ismét összegzéssel kapjuk a $|z| > 2$ körgyűrűben – a két konvergenciatartomány közös részén – konvergens Laurent-sort:

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \dots\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)\cdot\frac{1}{z^n}$$

Vegyük észre, hogy a $|z| > 2$ körgyűrű a ∞ egy környezetének is tekinthető, tehát a felírt Laurent-sor f ∞ körüli Laurent-sora. Ennek főrésze nincs, csak reguláris része van, tehát a $z = \infty$ az f függvény megszüntethető szingularitása, és az is világos, hogy az $f(\infty) = 0$ a függvény ∞-beli reguláris kiterjesztése, ugyanis:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{3}{(z-2)(z+1)} = 0$$

Mivel $c_{-1} = 0$, ezért a ∞ pontbeli reziduum is zérus:

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$$

d) A végesben a függvénynek két izolált szinguláris pontja van: -1, 2. Ezek távolsága 3 egység, tehát a $z_0 = -1$ pont körüli Laurent-sorfejtés konvergenciatartományának külső köre maximum $R_2 = 3$ sugarú. A sornak $z + 1$ hatványai szerint kell haladnia, tehát elég az $\dfrac{1}{z-2}$ törtet átalakítani, illetve sorba fejteni $(z + 1)$ hatványai szerint:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z+1-3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{z+1}{3} - 1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z+1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(1 + \frac{z+1}{3} + \frac{(z+1)^2}{3^2} + \frac{(z+1)^3}{3^3} + \dots\right)$$

A sor konvergenciatartománya a $\left|\frac{z+1}{3}\right| < 1$, tehát a $|z + 1| < 3$ körlap.

Beírva ezt a parciális törtekre bontott alakban $\dfrac{1}{z-2}$ helyére, adódik a $0 < |z + 1| < 3$ körgyűrűn konvergens Laurent-sor:

$$f(z) = -\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3} - \frac{z+1}{3^2} - \frac{(z+1)^2}{3^3} - \dots =$$

$$= -\frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$$

Ebből következik, hogy a $z = -1$ pont elsőrendű pólus, és leolvasható a pontbeli reziduum is:

$$\mathrm{Res}(f, -1) = 1$$

e) A $|z+1|>3$ körgyűrűben az $\dfrac{1}{z-2}$ d) pontbeli kifejtése nem alkalmazható, ezért most más módon alakítjuk át:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z+1-3}=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{z+1}}=$$

$$=\frac{1}{z+1}\cdot\left(1+\frac{3}{z+1}+\frac{3^2}{(z+1)^2}+\frac{3^3}{(z+1)^3}+\dots\right),$$

amely mértani sor a $\left|\dfrac{3}{z+1}\right|<1$, tehát a $|z+1|>3$ feltétel esetén konvergens. Ez éppen a kijelölt tartomány. A sor helyettesítés és összevonás után adódik:

$$f(z)=-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{3}{(z+1)^2}+\frac{3^2}{(z+1)^3}+\dots=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(z+1)^n}$$

f) A $z_0=2$ pont is izolált szinguláris helye a függvénynek.

Ez a Laurent-sor $(z-2)$ hatványai szerint halad, és a sor maximálisan a $0<|z-2|<3$ körgyűrűben lesz konvergens, hiszen $z=-1$ is izolált szingularitás. A sorfejtéshez csak az $\dfrac{1}{z+1}$ függvényt kell átalakítani:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-2+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\dfrac{z-2}{3}+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-2}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}-\frac{(z-2)^3}{3^3}+\dots\right),$$

melynek konvergenciatartománya a $\left|\dfrac{z-2}{3}\right|<1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő tartomány, tehát a $|z-2|<3$ körlap. Ennek felhasználásával megint összegzéssel kapjuk a Laurent-sort:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{3}+\frac{z-2}{3^2}+\frac{(z-2)^2}{3^3}+\dots=$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(z-2)^n}{3^{n+1}}$$

Innen leolvasható egyrészt az, hogy a $z_0=2$ izolált szingularitás elsőrendű pólus, másrészt a pontbeli reziduum:

$$\operatorname{Res}(f,2)=1$$

g) Végül térjünk rá a $|z-2|>3$ külső körgyűrűre. Ismét $\dfrac{1}{z+1}$ sorfejtését kell oly módon elvégeznünk, hogy a sor a kijelölt tartományban konvergáljon:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-2+3}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{3}{z-2}}=$$

$$=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{3}{z-2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{z-2}\cdot\left(1-\frac{3}{z-2}+\frac{3^2}{(z-2)^2}-\dots\right)$$

Ez a mértani sor a $\left|\dfrac{3}{z-2}\right|<1$ feltétel esetén konvergál, tehát valóban a megkívánt $|z-2|>3$ körgyűrűben. A kérdéses Laurent-sor pedig így fest:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\left(1-\frac{3}{z-2}+\frac{3^2}{(z-2)^2}-\dots\right)=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^{n-1}}{(z-2)^n}$$

5. Írja fel az $f(z)=\dfrac{2z^2-5z+6}{(z-2)^3}$ komplex függvény izolált szinguláris pont körüli Laurent-sorát, és jellemezze a szingularitást!

Mind a számláló, mind a nevező reguláris függvény, így f egyetlen szinguláris pontja a nevező zérushelye: $z_0=2$. A Laurent-sorfejtést ezúttal parciális törtekre bontással oldjuk meg. Ennek szabályai természetesen ugyanazok, mint a valós analízisben:

$$f(z)=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{(z-2)^2}+\frac{C}{(z-2)^3}$$

A számlálókban levő konstansokat közös nevezőre hozás és rendezés után például együttható összehasonlítás útján határozzuk meg. Az eredmény:

$$f(z) = \frac{2}{z-2} + \frac{3}{(z-2)^2} + \frac{4}{(z-2)^3},$$

ami nem más, mint a $|z-2| > 0$ körgyűrűben konvergens Laurent-sor. A sor nem tartalmaz reguláris részt, főrésze három tagból áll úgy, hogy $c_{-n} = 0$, ha $n \geq 4$. Tehát a $z_0 = 2$ pont a függvény harmadrendű pólusa. Mivel a $z_0 = 2$ a számlálónak nem gyöke, a nevezőnek viszont háromszoros zérushelye, ezért közvetlenül is adódik, hogy a 2 harmadrendű pólus. Mivel $c_{-1} = 2$, ezért:

$$\mathrm{Res}(f, 2) = 2$$

6. Határozza meg az $f(z) = \dfrac{8}{z(z+2)^2}$ függvény szinguláris pontjait, azok típusát, és az összes lehetséges gyűrűszerű tartományban a Laurent-sorfejtést!

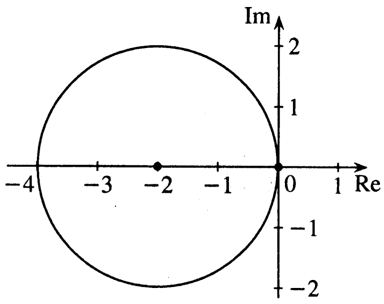
Azonnal látható, hogy f-nek két izolált szinguláris pontja van: $0, -2$. Ezek ugyanis a nevező gyökei, továbbá a számláló és a nevező is reguláris függvény. Mivel a 0 a nevező egyszeres, a -2 pedig kétszeres zérushelye, a számlálónak pedig nem zérushelye, ezért a 0 elsőrendű, a -2 pedig másodrendű pólus.

A sorfejtéshez célszerű a függvényt parciális törtek összegére bontani:

$$f(z) = \frac{8}{z(z+2)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}$$

Összevonások után adódik, hogy $A = 2$, $B = -2$, $C = -4$. Tehát:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{2}{z+2} - \frac{4}{(z+2)^2}$$



6.6 ábra

Kezdjük a $z_0 = -2$ körüli, $(z+2)$ hatványai szerint haladó sorfejtéssel. Mivel a -2-höz legközelebbi szinguláris pont, a 0 két egységnyi távolságra van a -2-től, ezért az alábbi két körgyűrűben lehet a sorfejtést elvégezni (6.6 ábra):

a) $0 < |z+2| < 2$

b) $2 < |z+2|$

Mivel f résztörtekre bontott alakjában az utolsó két tag már eleve $(z+2)$ hatványait tartalmazza, ezekkel nincs dolgunk. Csak a $\dfrac{2}{z}$ törtet kell $(z+2)$ hatványait tartalmazó sorba fejteni.

a) Kezdjük az első esettel. A 3. és 4. feladatban már látott módszerekkel dolgozunk:

$$\frac{2}{z} = \frac{2}{z+2-2} = -\frac{2}{2-(z+2)} = -\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}} =$$

$$= -\left(1 + \frac{z+2}{2} + \frac{(z+2)^2}{2^2} + \frac{(z+2)^3}{2^3} + \ldots\right)$$

Ez a mértani sor akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{z+2}{2}\right| < 1, \text{ azaz ha } |z+2| < 2,$$

tehát éppen a kívánt körgyűrűben. Beírva ezt $\dfrac{2}{z}$ helyére, előáll az f függvény hatványsora:

$$f(z) = -\frac{4}{(z+2)^2} - \frac{2}{z+2} - 1 - \frac{z+2}{2} - \frac{(z+2)^2}{2^2} - \ldots = -\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{2^n}$$

Ebből is adódik, hogy a $z_0 = -2$ pont másodrendű pólus, és $c_{-1} = -2$ miatt az is, hogy

$$\mathrm{Res}(f, -2) = -2$$

b) Térjünk át a $|z+2| > 2$ tartományra. Ismét csak a $\dfrac{2}{z}$ sorfejtéssel kell foglalkoznunk, de úgy, hogy a felírt sor ebben a „külső" körgyűrűben konvergáljon:

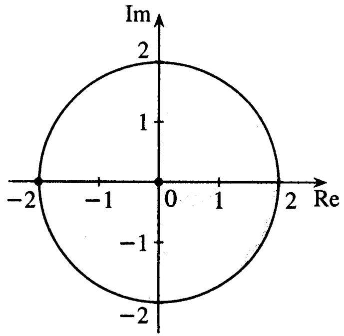
$$\frac{2}{z} = \frac{2}{z+2-2} = \frac{1}{z+2} \cdot \frac{2}{1-\frac{2}{z+2}} =$$

$$= \frac{2}{z+2}\left(1 + \frac{2}{z+2} + \frac{2^2}{(z+2)^2} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z+2)^n}$$

Ez a mértani sor akkor konvergál, ha $\left|\frac{2}{z+2}\right| < 1$, tehát éppen a $|z+2| > 2$ körgyűrűben. Helyettesítsük be $\frac{2}{z}$ helyére, és kapjuk az adott körgyűrűben konvergens Laurent-sort:

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{(z+2)^n}$$

Most térjünk rá a 0 körüli sorfejtésre. A szinguláris helyek elhelyezkedéséből adódóan most is két körgyűrű adódik (6.7 ábra):



6.7 ábra

c) $0 < |z| < 2$

d) $2 < |z|$

Támaszkodjunk ismét f résztörtekre bontott alakjára. Ebben az első tag z hatványát tartalmazza, így csak a 2. és 3. tagot kell kifejtenünk.

c) Mivel a $\frac{2}{z+2}$ törtfüggvény a 0-ban reguláris, ezért ennek a 0 körüli Taylor-sorára van szükségünk. A szokásos átalakítással:

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{2+z} = \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \ldots,$$

melynek konvergenciatartománya a $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ egyenlőséget kielégítő tartomány, tehát a $|z| < 2$ körlap.

A harmadik tag, a $\frac{4}{(z+2)^2}$ tört ismét reguláris függvény a 0-ban és a $|z| < 2$ körlapon, tehát ennek is a 0 körüli Taylor-sorát keressük. Ehhez felhasználjuk a hatványsorok tagonkénti deriválására, illetve integrálására vonatkozó tételt. Integráljuk a sorbafejtendő függvényt:

$$\int_\gamma \frac{4}{(z+2)^2} dz = \frac{-4}{z+2} + C$$

Az előbbiekben éppen a $\frac{2}{z+2}$ törtnek a Taylor-sorát állítottuk elő, tehát annak a sornak a felhasználásával:

$$\int_\gamma \frac{4}{(z+2)^2} dz = C - 2 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2^2} - \frac{z^4}{2^3} + \ldots$$

A keresett sor ennek tagonkénti deriválásával adódik:

$$\frac{4}{(z+2)^2} = 1 - z + \frac{3z^2}{2^2} - \frac{4z^3}{2^3} + \frac{5z^4}{2^4} - \ldots$$

Ez a sor az említett tétel szerint szintén a $|z| < 2$ körlapon konvergens. Behelyettesítve ezeket a sorokat a törtek helyére, megkapjuk a Laurent-sort:

$$f(z) = \frac{2}{z} - 2 + \frac{3}{2}z - z^2 + \frac{5z^3}{2^3} - \frac{6z^4}{2^4} + \ldots =$$

$$= \frac{2}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2^n} z^n$$

Erről egyrészt leolvasható, hogy a 0 elsőrendű pólus, és $c_{-1} = 2$ miatt kapjuk azt is, hogy:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 2$$

d) Végül határozzuk meg a $|z| > 2$ körgyűrűben érvényes Laurent-sorfejtést. Az eljárás hasonlít a c) pontban követett gondolatmenethez, azzal a különbséggel, hogy ebben a körgyűrűben természetesen nem beszélhetünk Taylor-sorról. A Laurent-sor a szokott módon adódik:

$$\frac{2}{z+2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{2}{1+\frac{2}{z}} = \frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= \frac{2}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \frac{2^3}{z^3} + \frac{2^4}{z^4} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{z} - \frac{2^2}{z^2} + \frac{2^3}{z^3} - \frac{2^4}{z^4} + \ldots,$$

melynek konvergenciatartománya a $\left|-\frac{2}{z}\right| < 1$ feltételi egyenlőtlenségből adódóan a $2 < |z|$ körgyűrű.

A harmadik tört kifejtéséhez ismét felhasználjuk a hatványsorok tagonkénti deriválására, illetve integrálására vonatkozó tételt:

$$\int_\gamma \frac{4}{(z+2)^2}dz = -\frac{4}{z+2} + C$$

Az imént éppen a $\frac{2}{z+2}$ tört sorát állítottuk elő, amelyből (-2)-vel való szorzással adódik, hogy

$$\int_\gamma \frac{4}{(z+2)^2}dz = C - \frac{2^2}{z} + \frac{2^3}{z^2} - \frac{2^4}{z^3} + \ldots,$$

ahonnan tagonkénti deriválással születik meg a $\frac{4}{(z+2)^2}$ tört Laurent-sora:

$$\frac{4}{(z+2)^2} = \frac{2^2}{z^2} - \frac{2\cdot 2^3}{z^3} + \frac{3\cdot 2^4}{z^4} - \ldots$$

Mindezeket visszahelyettesítve a résztörtekre bontott alakba, kapjuk, hogy:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \left(\frac{2}{z} - \frac{2^2}{z^2} + \frac{2^3}{z^3} - \frac{2^4}{z^4} + \ldots\right) -$$

$$-\left(\frac{2^2}{z^2} - \frac{2\cdot 2^3}{z^3} + \frac{3\cdot 2^4}{z^4} - \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 2^n - (-1)^{n+1}(n-1)\cdot 2^n}{z^n}$$

Ez a Laurent-sor ismét tekinthető a függvény ∞ körüli hatványsorának, hiszen a $|z| > 2$ körgyűrű a ∞ egy környezete, melyben f reguláris.

Ebből a szempontból tekintve a sort, leolvasható, hogy főrésze nincs, csak reguláris része, és az is nyilvánvaló – akár a sorból, akár f eredeti alakjából –, hogy:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0,$$

tehát az $f(\infty) = 0$ kiterjesztéssel f a ∞-ben is regulárissá válik. Másrészt $c_{-1} = 0$ miatt adódik az is, hogy $\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$.

7. Írja fel az $f(z) = \frac{\mathrm{sh}z}{z^5}$ függvény izolált szinguláris hely körüli Laurent-sorát!

A sh függvény és a z^5 függvény mindenütt reguláris, így a függvény egyetlen szinguláris pontja a $z = 0$ pont. Ez a nevezőnek ötszörös zérushelye, zérushelye azonban a számlálónak is. A L'Hospital-szabállyal azonban kiszámítható, hogy

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{sh}z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{ch}z}{1} = \mathrm{ch}0 = 1, \text{ tehát}$$

$$\lim_{z\to 0} z^4\cdot f(z) = \lim_{z\to 0} z^4\cdot\frac{\mathrm{sh}z}{z^5} = 1,$$

amiből következik, hogy a 0 pont negyedrendű pólus. Nézzük meg, hogyan tükröződik ez a sorfejtésből. Induljunk ki a sh függvény Taylor-sorából, amely a teljes komplex síkon konvergens.

$$\mathrm{sh}z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

Ha ezt a sort tagonként megszorozzuk $\frac{1}{z^5}$-nel, kapjuk a Laurent-sort:

$$\frac{\mathrm{sh}z}{z^5} = \frac{1}{z^5}\cdot\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\cdot z^{2n-4}$$

A sor $\frac{1}{z}$ hatványai miatt a $|z| > 0$ kilyukasztott komplex síkon konvergens.

A sor főrésze véges sok tagot tartalmaz, tehát a 0 pont pólus, mivel

$c_{-4} = 1$, de $c_{-n} = 0$, ha $n \geq 5$.

Ezért a 0 valóban negyedrendű pólus. Mivel $c_{-1} = 0$, ezért $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$.

A $|z| > 0$ körgyűrű egyben a ∞ távoli pontnak is környezete, tehát a függvénynek a ∞ is izolált szinguláris pontja. Ebben az esetben a ∞ körüli

Laurent-sor egybeesik a 0 körüli sorral. Ebből a szempontból a sor főrésze végtelen sok tagot tartalmaz, tehát a ∞ a függvénynek lényeges szingularitása. Mivel $c_{-1} = 0$ most is teljesül, ezért $\operatorname{Res}(f, \infty) = 0$.

8. Írja fel az alábbi függvények izolált szinguláris pont körüli Laurent-sorát!

a) $f_1(z) = z^2 \cdot e^z$

b) $f_2(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$

c) $f_3(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$

d) $f_4(z) = \dfrac{e^z - (1+z)}{z^2}$

e) $f_5(z) = \dfrac{1}{z^2 \cdot e^z}$

Mind az öt függvényben szerepel e^z, amely a teljes komplex síkon reguláris függvény. Minden feladatrészben támaszkodni fogunk e^z 0 körüli Taylor-sorára, mely az alábbi:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

a) Az f_1 függvény a teljes komplex síkon reguláris, hiszen e^z és z^2 is reguláris, így szinguláris pontja nincs. Így bármely véges $z_0 \in \mathbb{C}$ pont körül Taylor-sorba fejthető. Írjuk fel a legegyszerűbbet, a 0 körüli Taylor-sort:

$$f_1(z) = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{n!}$$

Mivel f_1 regularitási tartománya a $|z| < \infty$ körlap, amely a ∞ környezetének is tekinthető, ezért a ∞ izolált szinguláris pontja f_1-nek. A ∞ körüli Laurent-sor egybeesik az előbb felírt Taylor-sorral. Ennek főrésze végtelen sok tagot tartalmaz, tehát a ∞ f_1-nek lényeges szingularitása. Mivel $c_{-1} = 0$, ezért $\operatorname{Res}(f_1, \infty) = 0$.

b) A már említett regularitási tulajdonságok miatt f_2-nek a $z = 0$ pont izolált szinguláris helye. Mivel a nevezőnek ez kétszeres zérushelye, és

$e^0 = 1$, ezért a 0 pont f_2-nek másodrendű pólusa. f_2 a $z_0 = 0$ pont körül, a $|z| > 0$ körgyűrűben Laurent-sorba fejthető:

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots$$

Ebből is látszik, hogy a 0 pont másodrendű pólus, továbbá $c_{-1} = 1$ miatt az is, hogy

$$\operatorname{Res}(f_2, 0) = 1.$$

f_2 regularitási tartománya a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű. Eszerint f_2-nek a ∞ is izolált szinguláris pontja. A ∞ körüli Laurent sor ismét egybeesik a 0 körüli Laurent sorral. Ennek főrésze végtelen sok tagot tartalmaz, tehát a ∞ lényeges szingularitás, továbbá $c_{-1} = 1$ miatt

$$\operatorname{Res}(f_2, \infty) = -c_{-1} = -1$$

c) f_3-nak is $z = 0$ az egyetlen véges izolált szingularitása, hiszen $\dfrac{1}{z^2}$ a 0-ban szinguláris, így f_3 regularitási tartománya a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű. A Laurent-sort megkapjuk, ha e^z Taylor-sorában z helyére $\dfrac{1}{z^2}$-et írunk:

$$f_3(z) = e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \dots$$

A 0 körüli hatványsor végtelen sok negatív kitevőjű hatványt tartalmaz, tehát a 0 pont az f_3 függvénynek lényeges szingularitása. Mivel $c_{-1} = 0$, ezért a pontbeli reziduum zérus:

$$\operatorname{Res}(f_3, 0) = 0$$

Az említett regularitási tulajdonságok miatt ez a sor egyben a ∞ mint izolált szinguláris hely körüli Laurent-sornak is tekinthető. Ebben az esetben a sor csak reguláris részt tartalmaz, főrészt nem, tehát a ∞ f_3-nak megszüntethető szingularitása. Mivel

$$\lim_{z \to \infty} e^{\frac{1}{z^2}} = 1,$$

ezért az $f_3(\infty) := 1$ definícióval f_3 a ∞-ben regulárissá tehető. $c_{-1} = 0$ miatt ebben az esetben is igaz, hogy $\operatorname{Res}(f_3, \infty) = 0$.

d) Az f_4 függvénynek ugyancsak 0 az egyetlen véges szinguláris pontja. Regularitási tartománya a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű.

Laurent-sorát ismét e^z sorából kiindulva kapjuk meg:

$$f_4(z) = \frac{1}{z^2}\left(e^z - (1+z)\right) = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} - (1+z)\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots$$

Az első két tagtól eltekintve „ugyanazt" a sort kaptuk, mint az f_2 függvény esetében, azonban a szinguláris pont más jellegű. A sor nem tartalmaz főrészt, tehát a 0 pont megszüntethető szingularitás. A sorra tekintve világos, hogy az $f_4(0) = \frac{1}{2}$ definíció a függvény 0 pontbeli reguláris kiterjesztése. Ezzel f_4 a teljes komplex síkon regulárissá vált. A ∞ úgyszintén izolált szingularitás. A $0 < |z| < \infty$ regularitási tartomány miatt a ∞ körüli hatványsor egybeesik a 0 körüli hatványsorral. Ekkor a sor főrésze végtelen sok tagot tartalmaz, tehát a ∞ a függvény lényeges szingularitása. Mivel $c_{-1} = 0$, ezért:

$$\operatorname{Res}(f_4, 0) = 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{Res}(f_4, \infty) = -c_{-1} = 0$$

e) Az f_5 függvénynek szintén a 0 pont az egyetlen véges szinguláris helye. A sort ez esetben a polinomosztás, illetve pontosabban a hatványsorral való osztás módszerével állítjuk elő, melynek szabályai megegyeznek a polinomosztás szabályaival. Mivel az a) pont szerint:

$$z^2 \cdot e^z = z^2 + z^3 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^5}{3!} + \frac{z^6}{4!} + \dots \quad \text{Ezért:}$$

$$1 : z^2 \cdot e^z = 1 : z^2 + z^3 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^5}{3!} + \dots = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$\begin{array}{l}
(-)\ 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\
\hline
\quad -z - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} - \dots \\
(-)\quad -z - z^2 - \frac{z^3}{2!} - \frac{z^4}{3!} - \dots \\
\hline
\qquad z^2\left(\frac{1}{2}\right) + z^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + z^4\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots \\
\quad \vdots
\end{array}$$

Tehát f_5 Laurent-sora:

$$f_5 = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \dots$$

alakú. Ebből is adódik, hogy a 0 pont az f_5 függvénynek másodrendű pólusa. Ez közvetlenül is leolvasható f_5-ről, hiszen z^2e^z-nek a 0 pont kétszeres zérushelye. Mivel $c_{-1} = -1$, ezért:

$$\operatorname{Res}(f_5, 0) = -1$$

A korábbiakhoz hasonló okból ugyanez a sor egyben a ∞ mint izolált szinguláris pont körüli Laurent-sor. Ennek főrésze végtelen sok tagot tartalmaz, tehát a ∞ f_5-nek lényeges szingularitása. Továbbá:

$$\operatorname{Res}(f_5, \infty) = -c_{-1} = 1$$

9. Írja fel az $f(z) = \dfrac{e^{3z}}{(z+i)^3}$ függvény izolált szinguláris pont körüli Laurent-sorát, és jellemezze a szingularitást!

f számlálója és nevezője is mindenütt reguláris, tehát a $z = -i$ pont az egyetlen végesben fekvő szinguláris hely. Mivel ez a nevezőnek háromszoros zérushelye, a számláló pedig sehol sem nulla, ezért a $-i$ pont harmadrendű pólus.

A $-i$ körüli Laurent-sor a $0 < |z + i| < \infty$ körgyűrűben konvergens. Ez a sor $(z + i)$ hatványai szerint halad, ezért csak a számlálóban levő e^{3z} függvényt kell sorbafejteni. Ezt azonos átalakításokkal tesszük:

$$f(z) = \frac{e^{3z}}{(z+i)^3} = \frac{e^{3(z+i)} \cdot e^{-3i}}{(z+i)^3} = e^{-3i} \cdot \frac{1}{(z+i)^3} \cdot e^{3(z+i)} =$$

$$= e^{-3i} \cdot \frac{1}{(z+i)^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n \cdot (z+i)^n}{n!} = e^{-3i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n \cdot (z+i)^{n-3}}{n!} =$$

$$= e^{-3i} \cdot \left(\frac{1}{(z+i)^3} + \frac{3}{(z+i)^2} + \frac{3^2}{2!(z+i)} + \frac{3^3}{3!} + \dots\right)$$

A sor főrésze három tagú, és $c_{-n} = 0$, ha $n \geq 4$, tehát a $-i$ valóban harmadrendű pólus.

Ha leolvassuk c_{-1}-et, megkapjuk a reziduumot:

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{e^{-3i} \cdot 3^2}{2!}$$

10. Határozza meg az $f(z) = \dfrac{1}{z^2} \cdot \operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$ függvény izolált szinguláris hely körüli Laurent-sorát, és jellemezze a szingularitást!

Mivel a sh függvény a teljes komplex síkon reguláris függvény, ezért $\dfrac{1}{z}$, illetve $\dfrac{1}{z^2}$ miatt 0 az egyetlen véges szinguláris hely, a regularitási tartomány pedig a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű.

A sorfejtéshez felhasználjuk sh alábbi 0 körüli Taylor-sorát:

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ebből $z \longrightarrow \dfrac{1}{z}$ helyettesítéssel és $\dfrac{1}{z^2}$-tel való szorzással kapjuk a Laurent-sort:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+3}} =$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^5} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^7} + \ldots$$

A sor főrésze végtelen sok tagot tartalmaz, a 0 lényeges szingularitás, és $c_{-1} = 0$ miatt:

$$c_{-1} = \operatorname{Res}(f, 0) = 0$$

A Laurent-sor a függvényt a $0 < |z| < \infty$ körgyűrűben állítja elő, amely a ∞ körüli körgyűrűnek is tekinthető. Ebben a tartományban a felírt hatványsor egyben ∞ körüli Laurent-sor is. Ekkor a sor csak reguláris részt tartalmaz, főrészt nem, tehát a ∞ megszüntethető szingularitás. Világos, hogy

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^2} \cdot \operatorname{sh}\frac{1}{z} = \lim_{w \to 0} w^2 \cdot \operatorname{sh} w = 0 \cdot 0 = 0,$$

ezért az $f(\infty) := 0$ a függvény végtelenbeli reguláris kiterjesztése. Továbbra is $c_{-1} = 0$, tehát:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = 0$$

11. Írja fel az $f(z) = (z+1) \cdot \operatorname{ch}\dfrac{1}{z-i}$ függvény véges izolált szinguláris pont körüli Laurent-sorát, és jellemezze a szingularitást!

Induljunk ki abból, hogy a $z+1$ és a ch függvények a teljes síkon reguláris függvények, így a függvény regularitási tartománya $\dfrac{1}{z-i}$ belső függvény miatt $0 < |z-i| < \infty$ körgyűrű. Tehát az i és ∞ a függvény izolált szinguláris pontjai.

A Laurent-sor előállításához felhasználjuk ch Taylor-sorát:

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

A sornak $(z-i)$ hatványai szerint kell haladni, ezért egyrészt elvégezzük ch sorában a $z \longrightarrow \dfrac{1}{z-i}$ helyettesítést, másrészt a $z + 1 = z - i + 1 + i$ azonos átalakítást:

$$(z+1)\operatorname{ch}\frac{1}{z-i} = \big((z-i) + (1+i)\big) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-i)^{2n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-i)^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+i}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-i)^{2n}} =$$

$$= (z-i) + (1+i) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z-i} + \frac{1+i}{2!} \cdot \frac{1}{(z-i)^2} + \ldots$$

Az i körüli sor főrésze végtelen sok tagú, tehát az i pont a függvény lényeges szinguláris helye, mivel $c_{-1} = \dfrac{1}{2}$, ezért:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{2}$$

12. Vizsgálja meg az $f(z) = \sin\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ függvényt szingularitás szempontjából!

Írjuk fel f Laurent-sorát. Ehhez vegyük figyelembe, hogy a sin függvény mindenütt, a $z + \dfrac{1}{z}$ belső függvény pedig a $z = 0$ pont kivételével reguláris. Ezért f regularitási tartománya a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű. Ez annyit jelent, hogy a 0 és ∞ a függvény izolált szinguláris pontjai.

A sor felírásához felhasználjuk a sin függvény Taylor-sorát:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

Ebben a sorban elvégezzük a $z \to z + \frac{1}{z}$ helyettesítést:

$$f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{3!}\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(z + \frac{1}{z}\right)^5 - \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n+1}$$

Ez azonban még nem „igazi hatványsor”, hiszen annak z hatványai szerint kell haladni. Felhasználjuk még a binomiális tételt $\left(z + \frac{1}{z}\right)$ hatványainak kifejtéséhez:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cdot z^{2n-k+1} \cdot \frac{1}{z^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cdot z^{2n-2k+1},$$

ha ezt visszahelyettesítjük az előző sorfejtésbe, akkor kapjuk meg a 0 körüli Laurent-sort:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \binom{2n+1}{k} \cdot z^{2n-2k+1}$$

A sor „mindkét irányban végtelen”, azaz z-nek végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív egész kitevőjű hatványát tartalmazza. Ha a mondottakhoz hozzátesszük még azt is, hogy a sor egyben a ∞ körüli Laurent-sor, akkor elmondhatjuk, hogy mind a 0, mind a ∞ a függvénynek lényeges szinguláris pontja.

A reziduum most nem olvasható le olyan könnyen, mint az eddigiekben. Az $\frac{1}{z}$ hatvány ugyanis szerepel minden egyes $\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n+1}$ alakú összeg kifejtésében, méghozzá akkor, ha $2n-2k+1 = -1$ teljesül, tehát ha $k = n - 1$. Mivel végtelen sok ilyen tag van, ezek együtthatóinak összege egy végtelen numerikus sor, melynek határértéke a pontbeli reziduum:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -\operatorname{Res}(f, \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \binom{2n+1}{n-1}$$

13. Határozza meg az $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$ függvény origó körüli Laurent-sorát!

A sh függvény mindenütt reguláris, ezért f-nek ott van szinguláris pontja, ahol sh-nak zérushelye. Tudjuk, hogy $\operatorname{sh} 0 = 0$, és azt is, hogy sh periodikus $2\pi i$-vel. Ezért a szinguláris pontok végtelen sokan vannak: $z_k = k \cdot 2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Mivel

$$(\operatorname{sh} z)'\big|_{z=z_k} = \operatorname{ch} z\big|_{z=z_k} = 1 \neq 0,$$

ezért ezek a z_k pontok mindannyian egyszeres zérushelyek, tehát f-nek elsőrendű pólusai.

A szinguláris pontok elhelyezkedéséből adódik, hogy az origó körüli sor legfeljebb egy $R_2 = 2\pi$ sugarú körön belül állítja elő a függvényt, tehát a Laurent-sor konvergenciatartománya a $0 < |z| < 2\pi$ körgyűrű.

A sorfejtéshez felhasználjuk a sh függvény Taylor-sorát:

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

és alkalmazzuk a hatványsorral való osztás technikáját, mely szerint:

$$\frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} - z^3\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2}\right) - \ldots$$

A sor főrésze egytagú, tehát ismét adódik, hogy a 0 elsőrendű pólus. Mivel $c_{-1} = 1$, ezért:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} z}, 0\right) = 1$$

Az izolált szinguláris helyek $z_k = k \cdot 2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ sorozata a ∞-hez torlódik, tehát a ∞ f-nek nem izolált szingularitása. Így ∞ körüli Laurent-sor nem létezik.

14. Írja fel az $f(z) = \dfrac{1}{z \cdot \ln(1+z)}$ függvény 0 körüli Laurent-sorát!

A függvénynek két szinguláris pontja van a végesben. Egyrészt a nevező nullahelye, amely mindkét tényező esetében a $z_0 = 0$ pont, másrészt az $\ln(1+z)$ függvény szinguláris pontja, ez az $1+z = 0$ egyenlet megoldása: $z = -1$. Ezek szerint a 0 körüli Laurent-sor a $0 < |z| < 1$ körgyűrűben állítja elő a függvényt.

Induljunk ki ebben az esetben is abból, hogy ismerjük az $\ln(1+z)$ függvény 0 körüli Taylor-sorát, mely $|z| < 1$ esetén konvergens:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

f sorát hatványsorral való osztás útján állítjuk elő:

$$\frac{1}{z \cdot \ln(1+z)} = \frac{1}{z^2 - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} - \frac{z^5}{4} + \ldots} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{12} + \ldots$$

(Részletesebben a 8. feladat e) részére utalunk.)

Ebből kiderül, hogy a $z = 0$ pont a függvénynek másodrendű pólusa. Ez természetesen egyszerűbben is kimutatható:

Legyen $g(z) = z \cdot \ln(1+z)$, ekkor nyilván $g(0) = 0$, és

$$g'(z)\big|_{z=0} = \left(\ln(1+z) + \frac{z}{1+z}\right)\bigg|_{z=0} = \ln 1 + 0 = 0,$$

$$g''(z)\big|_{z=0} = \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2}\right)\bigg|_{z=0} = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy g-nek a 0 kétszeres zérushelye, tehát f-nek másodrendű pólusa.

Visszatérve a sorra, $c_{-1} = \frac{1}{2}$, tehát:

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$$

Kiegészítésképpen megjegyezzük, hogy a $z = -1$ szinguláris pontot nem tekintjük izolált szingularitásnak. Ennek oka a következő.

Közismert, hogy a komplex logaritmus egy végtelen sok értékű reláció:

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

amely minden $-\pi + k \cdot 2\pi < \mathrm{Im} z < \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ valós tengellyel párhuzamos sávot leképez a negatív valós féltengely mentén felmetszett komplex síkra. Egy-egy ilyen síkot Riemann-felületnek nevezünk. Ezek végtelen sokan vannak, melyek páronként az említett félegyenes mentén érintkeznek egymással, és ebből következően mindannyian érintkeznek az origóban. Az ilyen pontot a függvény elágazási pontjának nevezzük, mely ebben az esetben az említett okok miatt úgynevezett végtelen rendű elágazási pont. Az ilyen elágazási pontot nem tekintjük izolált szingularitásnak, ezért a feladatbeli függvénynek nem létezik a $z = -1$ pont körül Laurent-sora.

15. Fejtse Laurent-sorba az $f(z) = \ln\left(\frac{2-z}{2+z}\right)$ komplex függvényt a 0 körül minden lehetséges körgyűrűben!

A függvénynek két szinguláris pontja van: a nevező nullahelye: -2, ez izolált szinguláris hely, és a komplex logaritmusfüggvény szinguláris pontja, ez a $\frac{2-z}{2+z}$ tört nullahelye: 2. Mint azt az előző feladatban megindokoltuk, ez nem izolált szingularitás.

Ezeknek a szinguláris pontoknak az origótól való távolsága 2. Az origóban és $R = 2$ sugarú környezetében ezek szerint a függvény reguláris, ott Taylor-sorba fejthető, melynek konvergenciatartománya a $|z| < 2$ körlap. A sor felírásához felhasználjuk az $\ln(1+z)$ függvény ismert Taylor-sorát, amely $|z| < 1$ esetén konvergens:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^n}{n},$$

továbbá a logaritmus azonosságait, mely szerint:

$$f(z) = \ln(2-z) - \ln(2+z) = \ln\left(2\left(1 - \frac{z}{2}\right)\right) - \ln\left(2\left(1 + \frac{z}{2}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{z}{2}\right) - \ln\left(1 + \frac{z}{2}\right)$$

Innen f Taylor-sora úgy adódik, hogy $\ln(1+z)$ sorában elvégezzük rendre a $z \to -\frac{z}{2}$, illetve a $z \to \frac{z}{2}$ helyettesítéseket, és összevonunk:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) - (-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} \cdot z^n$$

A kapott Taylor-sor konvergenciájának feltétele a $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ egyenlőtlenség, tehát a sor a $|z| < 2$ körlapon állítja elő a függvényt. Azonban a függvény sorbafejthető a $2 < |z| < \infty$ körgyűrűben is, hiszen ebben a tartományban reguláris. Így kapjuk meg a függvény ∞ körüli Laurent-sorát. Ismét a Taylor-sorból indulunk ki, de f átalakításai azt célozzák, hogy $|z| < 2$ esetén konvergens sorok összegfüggvényei jelenjenek meg:

$$f(z) = \ln(2 - z) - \ln(2 + z) = \ln\left(z\left(\frac{2}{z} - 1\right)\right) - \ln\left(z\left(\frac{2}{z} + 1\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2}{z} - 1\right) - \ln\left(\frac{2}{z} + 1\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{z}\right) + i\pi - \ln\left(1 + \frac{2}{z}\right)$$

Az átalakítások során felhasználtuk a nyilvánvaló $\ln(-z) = \ln z + i\pi$ azonosságot.

Ha itt elvégezzük a korábbi helyettesítéseket, megkapjuk a ∞ körüli Laurent-sort:

$$f(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(-\frac{2}{z}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(\frac{2}{z}\right)^n =$$

$$= i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((-1) - (-1)^{n+1}\right) \cdot 2^n}{n} \cdot \frac{1}{z^n}$$

Innen kiderül, hogy a függvénynek a ∞ megszüntethető szingularitása, hiszen a sor főrészt nem tartalmaz. Mivel

$$\lim_{z \to \infty} \ln\left(\frac{2 - z}{2 + z}\right) = \ln(-1) = \ln\left(e^{i\pi}\right) = i\pi,$$

ami természetesen a Laurent-sorból is azonnal leolvasható, ezért

$$f(\infty) := i\pi$$

a függvény ∞-beli reguláris kiterjesztése. Továbbá, mivel

$$c_{-1} = \frac{(-1)^3 - (-1)^2}{1} \cdot 2 = -4,$$

ezért

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = 4.$$

16. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot z\right)$ függvény szinguláris pontjait, vizsgálja meg azok típusát, majd állítsa elő a 0 körüli Laurent-sort!

A kotangens függvény definíciója alapján

$$f(z) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot z\right)},$$

ahonnan világos, hogy a függvénynek végtelen sok szinguláris pontja van; a nevező minden zérushelye szinguláris pont, ugyanis a trigonometrikus függvények mindenütt regulárisak. A nevező zérushelyei:

$$\frac{\pi}{2} \cdot z = k \cdot \pi, \text{ azaz } z_k = 2k,\ k \in \mathbb{Z},$$

tehát a páros egész helyek a nevező zérushelyei, de a számlálónak nem zérushelyei, hiszen:

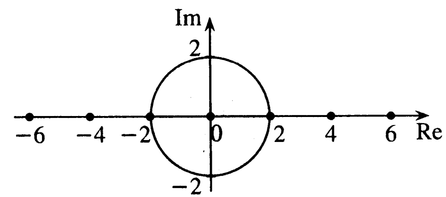
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2k\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$$

Továbbá, mivel

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot z\right)'\right]_{z=2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2k\right) = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

ezért a zérushelyek mindannyian egyszeresek, tehát minden z_k zérushely a függvény elsőrendű pólusa. Ezzel egyben azt is megállapítottuk, hogy ezek a szingularitások mindannyian izoláltak, hiszen a szomszédosak távolsága 2 egység.

Az izolált szingularitások z_k $(k \in \mathbb{Z})$ halmazának a ∞ torlódási pontja – nem létezik olyan $R > 0$, hogy a $|z| > R$ körgyűrűben ne volna szingularitás –, ezért a ∞ nem izolált szinguláris pont.



6.8 ábra

A $z_0 = 0$ körüli Laurent-sor az említett okok miatt a $0 < |z| < 2$ körgyűrűben állítja elő a függvényt (6.8 ábra).

A sort most az együttható-összehasonlítás módszerével állítjuk elő. Mivel kiderült, hogy a 0 elsőrendű pólus, kereshetjük a sort

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

alakban. Feladat nyilván a c_n együtthatók meghatározása. A törtet átrendezve kapjuk, hogy:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right) = f(z)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right)$$

Minden tényezőt helyettesítve a sorával:

$$1 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{z^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cdot\frac{z^4}{4!} - \dots =$$

$$\left(\frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot z - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cdot\frac{z^3}{3!} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^5\cdot\frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

Ha elvégezzük a jobb oldalon a szorzást, rendre meg kell kapnunk a bal oldali sor együtthatóit. A bal oldali konstans tag 1, a jobb oldalon csak egyféle módon kapunk állandót, így:

$$1 = c_{-1}\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{ahonnan}\ c_{-1} = \frac{2}{\pi}.$$

Ezzel megkaptuk a függvény 0 ponthoz tartozó reziduumát is:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{2}{\pi}$$

A bal oldalon nincs elsőfokú tag, a jobb oldalon ismét csak egyféle módon kapunk elsőfokú tagot, ezért

$$0 = c_0\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{ahonnan}\ c_0 = 0.$$

A második hatványok együtthatói:

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!} = c_{-1}\left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right)\cdot\frac{1}{3!} + c_1\cdot\frac{\pi}{2}$$

Ahonnan $c_1 = -\frac{1}{3}$, és így tovább a megfelelő hatványok együtthatóit összehasonlítva megkapjuk az ismeretlen c_n szorzókat:

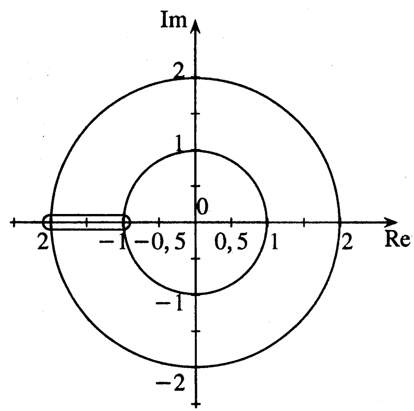
Tehát a Laurent-sor:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot z\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{z} + 0 - \frac{1}{3}z + \dots$$

17. Fejtse origó körüli hatványsorba az összes lehetséges körgyűrűben az $f(z) = \sqrt{(z+1)(z+2)}$ komplex függvényt a 0 pont körül!

A $\sqrt{z}$ függvénynek szinguláris pontja a $z = 0$ pont, mely másodrendű elágazási pont – részletesebben lásd a 14. feladatot –, mely ezért nem izolált szingularitás.

Eszerint f-nek két szingularitása van $z = -1$ és $z = -2$, mindketten másodrendű elágazási pontok. f olyan kétértékű reláció, melynek Riemann-felületei éppen a $[-2, -1]$ intervallum mentén érintkeznek. Ez a szakasz nem szerepelhet egy Laurent-sor konvergenciatartományában, tehát az origó körüli sorfejtés egyrészt a $|z| < 1$ körlapon, másrészt a $|z| > 2$ körgyűrűn végezhető el (6.9 ábra).



6.9 ábra

A $|z| < 1$ körlapon f reguláris, így f hatványsora ezen a körlapon egy Taylor-sor. Ennek előállításához felhasználjuk a binomiális sort, melynek konvergenciatartománya éppen a $|z| < 1$ körlap:

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}z+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}z^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}z^3+\ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \ldots$$

Ennek alkalmazásához átalakítjuk a függvényt:

$$f(z) = \sqrt{(z+1)(z+2)} = (1+z)^{\frac{1}{2}} \cdot (2+z)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{2} \cdot (1+z)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Az első tényező hatványsora éppen a felírt binomiális sor. A második tényező sorát úgy kapjuk, hogy az idézett sorban elvégezzük a $z \longrightarrow \frac{z}{2}$ helyettesítést:

$$\left(1+\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^3 - \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{32}z^2 + \frac{1}{128}z^3 - \ldots$$

Ennek konvergenciatartománya a $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ feltételből adódó $|z| < 2$ körlap.

f Taylor-sorát megkapjuk, ha kiszámítjuk a felírt két hatványsor Cauchy-féle szorzatát:

$$f(z) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \ldots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{32}z^2 + \frac{1}{128}z^3 - \ldots\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)z + \left(-\frac{1}{32}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)z^2 + \ldots\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{32}z^2 + \frac{3}{128}z^3 - \ldots\right)$$

A kapott sor konvergenciahalmaza a

$$|z| < 1 \text{ és } |z| < 2$$

körlapok közös része, tehát a $|z| < 1$ körlap. A sor nem tartalmaz főrészt, tehát a várakozásnak megfelelően Taylor-sor.

Térjünk át a $|z| > 2$ körgyűrűre. Ismét a binomiális sorra támaszkodunk, de szokás szerint f-et úgy módosítjuk, hogy abban a $|z| > 2$ körgyűrűben konvergens hatványsorok összegfüggvényei szerepeljenek:

$$f(z) = \sqrt{(z+1)(z+2)} = \sqrt{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{z}\cdot\left(1+\frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= z\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A Laurent-sort úgy nyerjük, hogy a szorzat 2. és 3. tényezőjének sorát az $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ binomiális sorából $z \longrightarrow \frac{1}{z}$, illetve $z \longrightarrow \frac{2}{z}$ helyettesítéssel előállítjuk, majd a kapott sorokat összeszorozzuk:

$$f(z) = z\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{z^3} - \ldots\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{z} - \frac{1}{8}\cdot\frac{2^2}{z^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{2^3}{z^3} - \ldots\right) =$$
$$= z + \frac{3}{2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^2} - \ldots$$

Az első tényező sora $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ esetén, tehát a $|z| > 1$ körgyűrűben, a második tényezőé pedig $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ feltétel mellett, tehát a $|z| > 2$ körgyűrűben konvergál, a szorzat ezek közös részén, tehát a $|z| > 2$ körgyűrűn állítja elő a függvényt.

A sor főrésze egytagú, és $c_n = 0$, ha $n \geq 2$, tehát a ∞ a függvénynek elsőrendű pólusa. Az, hogy a ∞ pólusszingularitás, adódik az alábbi határértékrelációból:

$$\lim_{z\to\infty}\sqrt{z^2+3z+2} = \infty$$

Másrészt, mivel $c_{-1} = -\frac{1}{8}$, ezért:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = \frac{1}{8}$$

18. Fejtse Laurent-sorba az $f(z) = \sqrt[3]{z\left(z^2-1\right)}$ komplex függvényt az izolált szinguláris pontja körül!

Tudjuk, hogy az $\sqrt[n]{z}$ függvénynek a $z = 0$ pont szinguláris pontja, de nem izolált szingularitása, hiszen ez a pont n-edrendű elágazási pont. Ebből következően f-nek szinguláris pontjai a -1, 0, 1 pontok, de ezek egyike sem izolált szingularitás, hiszen mindegyikük elágazási pont.

Ezért a ∞ az egyetlen izolált szingularitás, amely körül a függvény Laurent-sorba fejthető, az említettek miatt a $|z| > 1$ körgyűrűn. Ehhez felhasználjuk $(1+z)^\alpha$ sorfejtését, azaz a binomiális sort, $\alpha = \frac{1}{3}$ esetén:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \dots,$$

mely a $|z| < 1$ körlapon konvergens. Ehhez átalakítjuk először f-et:

$$f(z) = \sqrt[3]{z\left(z^2-1\right)} = \sqrt[3]{z}\cdot\sqrt[3]{z^2\cdot\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} =$$

$$= z\cdot\sqrt[3]{1-\frac{1}{z^2}},$$

és erre már alkalmazható a binomiális sorfejtés $z \to \frac{1}{z^2}$ helyettesítéssel. Mivel

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}z^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}z^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{9}z^2 + \frac{5}{81}z^3 - \dots,$$

ezért

$$f(z) = z\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z^4} - \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{z^6} - \dots\right) =$$

$$= z - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z^3} - \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{z^5} - \dots$$

a keresett ∞ körüli Laurent-sor. Ebben a főrész egytagú, $c_n = 0$, ha $n \geq 2$, tehát a ∞ a függvénynek elsőrendű pólusa. Az, hogy a ∞ pólusszingularitás, következik abból is, hogy:

$$\lim_{z\to\infty} \sqrt[3]{z^3 - z} = \infty$$

Végül pedig, mivel $c_{-1} = -\frac{1}{3}$, ezért $\mathrm{Res}(f,\infty) = -c_{-1} = \frac{1}{3}$.

19. Fejtse origó körüli hatványsorba az $f(z) = z\cdot\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ komplex függvényt úgy, hogy a sor a ∞ környezetében állítsa elő a függvényt!

A függvény szinguláris pontjai egyrészt: a nevező nullahelye, vagyis $z = -1$, amely elágazási pontja a komplex logaritmusfüggvénynek, tehát nem izolált szingularitás. A 0 körüli hatványsor ezért egyrészt a $|z| < 1$ körlapon konvergens. Mivel itt a függvény reguláris, ez egy közönséges Taylor-sor. Másrészt a $|z| > 1$ körgyűrűn állítja elő f-et a ∞ körüli Laurent-sor.

Felhasználjuk $\ln(1+z)$ Taylor-sorát, mely a $|z| < 1$ körlapon konvergens:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

Előtte azonban alkalmas módon átalakítjuk f-et:

$$f(z) = z\cdot\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = z\cdot\ln\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right) =$$

$$= z\cdot\ln\left(1+\frac{1}{z}\right) - z\cdot\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

A fenti Taylor-sorban elvégezzük a $z \to \frac{1}{z}$, illetve a $z \to -\frac{1}{z}$ helyettesítést, majd szorzunk és összevonunk:

$$f(z) = z\cdot\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^4} + \dots\right) -$$

$$-z\cdot\left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^4} - \dots\right) =$$

$$= 2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{z^4} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{z^6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{z^{2n}}$$

A kapott Laurent-sor konvergenciatartománya az

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \text{ és } \left|-\frac{1}{z}\right| < 1$$

feltételeket kielégítő tartomány, tehát a $|z| > 1$ körgyűrű. A sornak nincs főrésze, csak reguláris része, tehát a ∞ f-nek megszüntethető szingularitása. A sorra tekintve látható:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 2$$

Tehát $f(\infty) = 2$ a függvény ∞-beli reguláris kiterjesztése.

Ez az eredmény határértékszámítási módszerekkel közvetlenül is adódik, ha alkalmazzuk például a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{z\to\infty} z \cdot \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \lim_{z\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}{\frac{1}{z}} =$$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{z}\right)'} = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^2}{z^2-1} = 2$$

Mivel $c_{-1} = 0$, ezért $\mathrm{Res}(f, \infty) = 0$.

6.3 Fourier-sorok

Gyakorló feladatok

1. Fejtse Fourier-sorba a

$$g(t) = \frac{1 - a\cos t}{1 - 2a\cos t + a^2} \qquad \left(|a| < 1\right)$$

2π szerint periodikus függvényt!

A Fourier-sor előállítása ebben az esetben a következő gondolatmenettel történik. Felhasználjuk a trigonometrikus és exponenciális függvények között fennálló alábbi összefüggéseket:

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Ha most alkalmazzuk a $z = e^{it}$ jelölést, akkor a z komplex változóval – mely egységnyi abszolút értékű – írható:

$$\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i},$$

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2},$$

illetve általánosabban:

$$\sin nt = \frac{z^n - \frac{1}{z^n}}{2i},$$

$$\cos nt = \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}, \; n \in \mathbb{Z}^+.$$

Ezen transzformációk végrehajtása után g egy az egységkörvonal környezetében reguláris f függvény lesz, melyet Laurent-sorba fejthetünk az

$$1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon, \; \varepsilon > 0$$

körgyűrűn. A kapott Laurent-sort pedig ugyanezekkel a transzformációs formulákkal visszaalakítjuk úgy, hogy $\sin(nt)$ és $\cos(nt)$ sorává váljon.

Lássuk konkrétan: $f(z) := g\left(e^{it}\right)$ jelöléssel:

$$f(z) = \frac{1 - \frac{a}{2}\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right)}{1 - 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2z - a - az^2}{z - a - az^2 + a^2 z}$$

Vegyük észre, hogy itt a nevező szorzattá alakítható:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2z - a - az^2}{(1 - az)(z - a)}$$

Ez pedig a szokott módon parciális törtekre bontható:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1 - az} + \frac{z}{z - a}\right)$$

Ha a második tagot tovább alakítjuk az alábbi módon:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1 - az} + \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}\right),$$

akkor mindkét tagban észrevehetjük egy-egy mértani sornak az összegfüggvényét, melyek kvóciense rendre az és $\frac{a}{z}$. Ezek konvergenciájának feltétele összevontan az, hogy

$$|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

teljesüljön. Mivel feltettük, hogy $|a| < 1$ és $|z| = 1$, ezek automatikusan igazak. Tehát f Laurent-sora:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \ldots\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2 + a\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + a^3\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{a^2}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \ldots$$

A végrehajtott kiemelések után nem nehéz észrevenni, hogy a zárójeles tényezők éppen a $\cos nt$, $n \in \mathbb{Z}^+$ függvények. Ezeket helyettesítve megkapjuk a g függvény Fourier-sorát:

$$g(t) = 1 + a \cdot \cos t + a^2 \cdot \cos 2t + a^3 \cdot \cos 3t + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos nt$$

2. Fejtse Fourier-sorba a

$$g(t) = \ln\left(1 - 2a\cos t + a^2\right),$$

$|a| < 1$, 2π szerint periodikus függvényt!

Végezzük el a

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

helyettesítést:

$$f(z) = g\left(e^{it}\right) = \ln\left(1 - a\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2\right)$$

Vegyük észre, hogy a logaritmus mögötti kifejezés szorzattá bontható:

$$f(z) = \ln\left((1 - az)\left(1 - \frac{a}{z}\right)\right)$$

Alkalmazzuk a logaritmus azonosságát:

$$f(z) = \ln(1 - az) + \ln\left(1 - \frac{a}{z}\right)$$

f Laurent-sorfejtéséhez használjuk fel $\ln(1 - z)$ Taylor-sorát:

$$\ln(1 - z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right),$$

amely $|z| < 1$ esetén konvergál. Ebben végezzük el a $z \to az$, illetve $z \to \frac{a}{z}$ helyettesítéseket:

$$\ln(1 - az) = -\left(az + \frac{a^2z^2}{2} + \frac{a^3z^3}{3} + \ldots\right)$$

$$\ln\left(1 - \frac{a}{z}\right) = -\left(\frac{a}{z} + \frac{a^2}{2z^2} + \frac{a^3}{3z^3} + \ldots\right)$$

Ezek összeadásával kapjuk f Laurent-sorát, melyben azonnal elvégezzük a célszerű kiemeléseket is:

$$f(z) = -\left(a\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{a^2}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{a^3}{3}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \ldots\right)$$

Itt a zárójelekben felfedezhetjük a $2 \cdot \cos nt$ függvény komplex alakját. Helyettesítéssel kapjuk g Fourier-sorát:

$$g(t) = -\left(2a\cos t + \frac{2a^2}{2}\cos 2t + \frac{2a^3}{3}\cos 3t + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a^n}{n}\cos nt$$

A Laurent-sorfejtéshez még hozzátartozik a konvergencia vizsgálata: a fenti két sor rendre akkor konvergens, ha $|az| < 1$, azaz $|z| < \frac{1}{|a|}$, illetve ha $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$, tehát ha $|a| < |z|$. Mivel $|z| = 1$, és a feltétel szerint $|a| < 1$, ezek a feltételek teljesülnek.

7. A REZIDUUMTÉTEL ÉS ALKALMAZÁSAI

Legyen az a pont az f függvénynek izolált szinguláris helye, az a körüli Laurent-sor pedig:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad 0 < |z-a| < R$$

A Laurent-sor c_{-1} együtthatóját az f függvény $z = a$ ponthoz tartozó reziduumának nevezzük, és $\mathrm{Res}(f, a)$-val, vagy ha nem okoz félreértést, egyszerűen $\mathrm{Res}(a)$-val jelöljük.

Ha felidézzük az előző fejezetben a Laurent-sor együtthatóira ismertetett formulát, abból $n = -1$-re az alábbi adódik:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz,$$

ahol γ az a pontot pozitív irányban megkerülő, egyszerű zárt rektifikálható görbe. Ez indokolja a c_{-1} együttható kitüntetett szerepét. Fontos szerepe van ugyanis bizonyos típusú integrálok kiszámításánál.

Legyen most f reguláris az $R < |z| < \infty$ körgyűrűben. Ez azt jelenti, hogy f-nek a ∞ izolált szingularitása, tehát létezik ∞ körüli Laurent-sor.

A ∞-hez tartozó reziduumot így értelmezzük:

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = -c_{-1}$$

vagyis a Laurent-sor -1 indexű együtthatójának ellentettje. Ez összhangban van a korábbi definicióval, ugyanis legyen γ' olyan görbe, amely a $|z| > R$ körgyűrűben halad, és a ∞-t pozitív irányban kerüli meg, tehát úgy, hogy körüljáráskor a ∞ mindig bal felé esik. Ez pontosan azt jelenti, hogy a 0-t úgy kerüli meg, hogy a 0 körüli irányítás negatív, tehát:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz = -c_{-1}$$

ahol γ ugyanaz a görbe, mint a γ', csak pozitív irányítással.

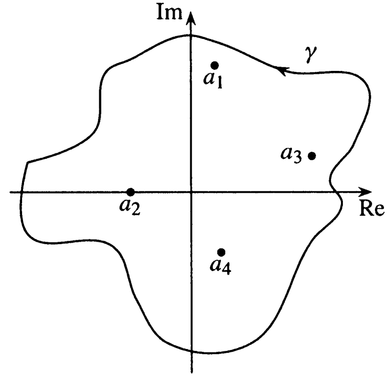
Ha az f függvénynek a komplex számsíkon véges számú szinguláris helye van, akkor a függvény reziduumainak összege (beleértve a ∞-beli reziduumot is) nullával egyenlő.

A reziduumok alapvető szerepét támasztja alá a *reziduumtétel* (7.1 ábra):

Legyen f reguláris függvény a γ zárt görbén és annak belsejében, kivéve a véges sok $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ szinguláris pontot. Ekkor:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k)$$

Ez a tétel teszi lehetővé, hogy viszonylag egyszerűen kiszámítsunk komplex integrálokat anélkül, hogy ténylegesen integrálnánk.



7.1 ábra

A reziduumot közvetlenül a Laurent-sor egyik együtthatójaként definiáltuk. A reziduum meghatározásának nyilvánvaló módja tehát a sor, illetve a -1 indexű tag előállítása. Erre számos példát láttunk az előző fejezetben. Sok esetben egyszerűbben is célhoz érünk.

Legyen például f két reguláris függvény hányadosa, azaz

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)},$$

és legyen az a pont f elsőrendű pólusa, tehát tegyük fel, hogy $h(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, de $g'(a) \neq 0$. Ekkor:

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{h(a)}{g'(a)}$$

Ennél általánosabb összefüggés az alábbi.

Ha az a pont n-ed rendű pólus, akkor:

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \left((z-a)^n \cdot f(z)\right)^{(n-1)}$$

Ha f két reguláris függvény hányadosa, és az a pont elsőrendű pólus, ez a formula egybeesik az előzővel.

Ha az f függvénynek az a pont megszüntethető szingularitása, akkor természetesen $c_{-1} = 0$, tehát $\operatorname{Res}(f, a) = 0$.

Ha pedig az a pont lényeges szingularitás, akkor c_{-1} kiszámítására általában nem létezik egyszerűbb módszer, mint a Laurent-sor felírása.

Legyen f reguláris függvény. Ekkor az

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

hányadost az f függvény logaritmikus deriváltjának nevezzük, ennek $z = a$ pontbeli reziduumát pedig az f függvény a pontbeli logaritmikus reziduumának nevezzük.

Nagyon érdekes eredmények születnek, ha a reziduumtételt erre a hányadosra alkalmazzuk.

Legyen f meromorf függvény, tehát olyan, amelynek legfeljebb pólusszingularitásai lehetnek a T tartományon, továbbá legyen γ olyan egyszerű zárt görbe, amely belsejével együtt a T tartományban van, és amely f egyetlen zérushelyén, illetve pólusán sem halad keresztül. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

ahol Z, illetve P a γ görbe belsejében levő zérushelyek, illetve pólusok száma, mindegyiket annyiszor számolva, ahányszoros a zérushely, illetve ahányadrendű a pólus.

Ennek a tételnek az általánosítását kapjuk, ha az említett feltételekhez még hozzávesszük a következőt.

Legyen F reguláris a T tartományban, ekkor

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma F(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{Z} F(z_j) - \sum_{k=1}^{P} F(p_k),$$

ahol z_j és p_k az f függvény zérushelyei és pólusai, mindegyik multiplicitással számolva.

Speciálisan, ha $F = 1$, visszakapjuk az előző formulát.

Ha különleges esetben az f függvénynek nincsenek pólusai, a zérushelyek számát kapjuk, illetve ha nincsenek zérushelyei, a pólusok számának (-1)-szeresét, multiplicitással számolva.

Ha teljesül, hogy $F(z) = z$, akkor a zérushelyek összegének és a pólusok összegének különbségét kapjuk:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{Z} z_j - \sum_{k=1}^{P} p_k$$

A reziduumtétel lehetőséget nyújt bizonyos típusú valós integrálok kiszámítására. Az alábbiakban vázoljuk a számítási módszereket:

I. Legyen az integrandus $\sin x$-nek és $\cos x$-nek racionális függvénye, azaz legyen

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

alakú. Ilyenkor áttérünk a z komplex változóra a $z = e^{ix}$ definicióval. Ekkor ugyanis $x \in [0, 2\pi]$ esetén z befutja az egységkört: $|z| = 1$, tehát áttérhetünk az egységkörön való integrálásra.

A helyettesítésnél a

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z} \qquad \sin x = \frac{z^2-1}{2iz} \qquad dx = \frac{1}{iz} dz$$

formulákat alkalmazzuk. Az integrál kiszámításánál a reziduumtételt az R függvény egységkörön belül elhelyezkedő pólusaira kell kiterjeszteni.

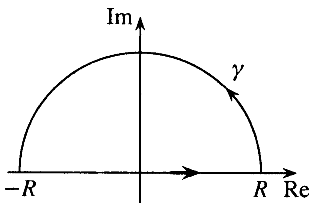
II. Nagyobb részben azonban $]-\infty, \infty[$ vagy $]0, \infty[$ intervallumra vonatkozó improprius integrálok kiszámítására alkalmazhatók a komplex függvénytan tételei, mint például a Cauchy-féle alaptétel, illetve a reziduumtétel.

Ehhez először is vegyük figyelembe, hogy az improprius integrál egy határértékként áll elő.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Terjesszük ki a valós számegyenesen értelmezett f függvényt az $\operatorname{Im} z \geq 0$ felső félsíkra (vagy a teljes komplex síkra) regulárisan, majd a valós számegyenes $[-R, R]$ intervallumát egészítsük ki alkalmas módon a komplex síkon egy zárt görbévé.

Például a $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ félkörívvel (7.2 ábra). A feladat ekkor az, hogy $R \to \infty$ esetén a félkörre vonatkozó integrál határértékét kiszámítsuk.



7.2 ábra

Ha f a teljes felső félsíkon (és a valós tengelyen is) reguláris, akkor a Cauchy-féle alaptétel szerint ez a határérték szolgáltatja az integrált.

Ha f-nek a felső félsíkban vannak szinguláris pontjai, akkor a reziduumtételt alkalmazzuk még kiegészítésképpen.

Ha f-nek a valós számegyenesen vannak szinguláris pontjai, akkor az előbbiekben vázolt görbét úgy módosítjuk, hogy a valós

tengelyen levő szinguláris pontokat kikerüljük egy-egy $\varepsilon > 0$ sugarú félkörívvel, majd számítjuk ezen félkörívekre vonatkozó integrálok határértékét $\varepsilon \to 0$ esetén.

a) Nagyon egyszerűen járhatunk el, ha f egy olyan racionális törtfüggvény, melynek nevezője legalább kettővel magasabb fokú, mint a számlálója:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Ekkor ugyanis alkalmas c állandóval f úgy viselkedik a ∞-ben, mint $\frac{c}{z^{2+\alpha}}$, $\alpha \geq 0$, tehát az R sugarú félkörre vonatkozó integrál abszolút értéke $\frac{c}{R^{2+\alpha}} \cdot R\pi \to 0$, ha $R \to \infty$, tehát az integrál eltűnik. Ebből következik, hogy ha a valós tengelyen nincs szinguláris pont, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \cdot \sum_{k,\, \operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right),$$

ahol a szumma a felső félsíkbeli összes szinguláris pontra kiterjesztendő.

Ha $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ páros függvény, akkor ebből 2-vel való osztással adódik $]0, \infty[$ intervallumra vonatkozó integrál is.

b) Ha f nem racionális törtfüggvény, akkor az R sugarú körívre vonatkozó integrál eltűnésének feltétele, hogy f „erősebben tartson a 0-hoz", mint az $\frac{1}{z}$ függvény, azaz pontosabban az $\operatorname{Im} z > 0$ félsík $|z| > R_0$ pontjaira teljesüljön alkalmas M, α pozitív állandókkal, hogy $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\alpha}}$. Ilyen feltételekkel, ha f a valós tengelyen reguláris, ugyanúgy integrálható a valós számegyenesen, mint a fenti racionális függvény.

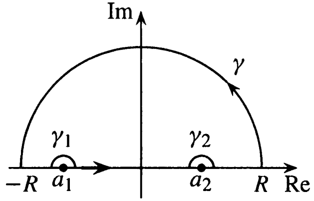
Ha ezen felül f-nek vannak szinguláris pontjai a valós tengelyen, akkor amint említettük, ezek mindegyikét megkerüljük a felső félsíkban egy kis ε sugarú félkörívvel (7.3 ábra).

Ezért ilyenkor az integrál az alábbi formulával számítható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}(f, a_k) + \sum \lim_{\varepsilon_i \to 0} \int_{\gamma_i} f(z)dz,$$

ahol γ_i jelöli az ε sugarú félköríveket.

Ha f páros, ismét 2-vel való osztással kapjuk a $]0, \infty[$-re vonatkozó integrált.



7.3 ábra

III. A valós integrálok kiszámítása során gyakran állnak elő

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i\alpha x} dx$$

alakú integrálok.

Ezek kiszámításához alapvető fontosságú a *Jordan-lemma*:

Ha az f komplex függvény reguláris az $\operatorname{Im} z \geq 0$ felső félsíkon (kivéve véges sok szinguláris pontot), és $|z| \to \infty$ esetén egyenletesen tart zérushoz, akkor tetszőleges $\alpha > 0$-ra:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0,$$

ahol γ a $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ félkörív.

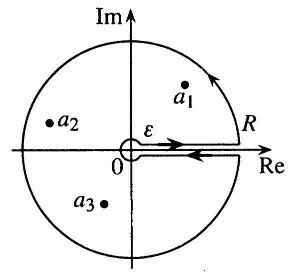
Ennek a lemmának az alkalmazásával az $f(x)e^{i\alpha x}$ alakú függvény improprius integráljának kiszámítására pontosan ugyanazok a formulák vonatkoznak, mint az előző pontban f esetében, attól függően, hogy az f-nek van-e a valós tengelyen szinguláris pontja.

IV. Kissé bonyolultabbak a $]0, \infty[$ intervallumra vonatkozó improprius integrálok kiszámítására alkalmazandó módszerek akkor, ha az integrandus nem páros függvény. Legyen először f ismét racionális törtfüggvény, azaz $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, amelyről tegyük fel, hogy a nevező legalább kettővel magasabb fokú, mint a számláló. Ha a függvénynek a pozitív valós féltengelyen és a 0-ban nincs pólusa, akkor

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\sum \operatorname{Res}\left(\ln(-z) \cdot \frac{P(z)}{Q(z)}\right),$$

ahol az összegzés a $z \mapsto \ln(-z) \cdot \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ függvény összes szinguláris pontjára kiterjesztendő.

Ebben az esetben az integrációs út a $|z| = R$ körív, a „valós tengely alatti” $[R, \varepsilon]$ szakasz, a $|z| = \varepsilon$ körív és a „valós tengely feletti” $[\varepsilon, R]$ intervallum által alkotott zárt görbe (7.4 ábra).



7.4 ábra

Mivel f racionális függvény, legfeljebb véges sok pólusa lehet. Ha ε elég kicsi, és R elég nagy, f összes pólusa a görbe belsejében van. A komplex logaritmusfüggvényről tudjuk, hogy a negatív valós féltengelyen bemetszett síkon reguláris, tehát $\ln(-z)$ a pozitív valós féltengely mentén bemetszett síkon lesz reguláris.

Tehát $z \mapsto f(z)$ és $z \mapsto \ln(-z) \cdot f(z)$ függvények szinguláris pontjai egybeesnek. Ha azonban közeledünk a valós tengely $[\varepsilon, R]$

intervallumához, a két tényező különböző módon viselkedik. f határértéke ugyanaz, azonban $\ln(-z)$ határértéke a felső félsíkról közeledve $2\pi i$-vel kisebb. Tehát

$$\int_\varepsilon^R \log(-z)\cdot f(z)dz + \int_R^\varepsilon \log(-z)\cdot f(z)dz = -2\pi i \int_\varepsilon^R f(z)dz$$

A fokszámokra tett kikötések alapján a körívekre vonatkozó integrálok eltűnnek. Ha ezek után alkalmazzuk a reziduumtételt, éppen a fenti formulát kapjuk.

Itt már látjuk, hogy jobban oda kell figyelni, ha többértékű relációkról van szó. Ha $\int_0^\infty R(x)\cdot f(x)dx$ alakú integrálokat számítunk ki, ahol R racionális függvény, f komplex síkra vonatkozó kiterjesztése többértékű reláció (például $\ln z$, $\sqrt{z}$), akkor az alábbi módon kell eljárnunk.

Az f többértékű relációnak kiválasztjuk azt a reguláris ágát, amely a valós intervallumon értelmezett $x \mapsto f(x)$ függvénynek közvetlen kiterjesztése, és az integrációs útvonalat úgy választjuk meg, hogy az teljes egészében f regularitási tartományában haladjon, és kerülje el a reláció elágazási pontját.

Ha ezt a programot megvalósítjuk, akkor innentől kezdve a módszerek és alapelvek ugyanazok, mint amiket az előző pontokban ismertettünk.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a vázolt módszerek – különösen az integrációs útvonalak alakját illetően – a leggyakoribbaknak tekinthetők, azonban az integrandus konkrét alakjától függően alkalmazhatók más alakú és elhelyezkedésű zárt görbék is.

7.1 Reziduumszámítás

Mint említettük, a reziduum értelmezés szerint a Laurent-sor -1 indexű tagjának c_{-1} együtthatója. Ezért kézenfekvő a reziduumot a megfelelő Laurent-sor előállításával megkeresni. Erre vonatkozólag az előző pontban számos példát láthattunk. Ennek okán ebben a fejezetben a reziduumok kiszámítására más módszereket alkalmazunk, illetve ha mégis a Laurent-sort használjuk fel a meghatározáshoz, akkor célszerűen csak a -1 indexű tag kiszámítására helyezzük a hangsúlyt.

Gyakorló feladatok

Számítsa ki az alábbi függvények összes izolált szinguláris pontjához tartozó reziduum értékét!

1. $f(z) = \dfrac{e^{2iz}}{\cos z}$

A számláló és a nevező mindenütt reguláris függvények, tehát f szinguláris pontjai a nevező zérushelyei: $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ezek mind egyszeres zérushelyek, hiszen:

$$(\cos z)'\big|_{z=z_k} = (-\sin z)\big|_{z=z_k} = (-1)^{k+1} \neq 0,$$

és mindannyian izolált szingularitások, hiszen a „szomszédos” z_k pontok távolsága π. Tehát f-nek a z_k pontok elsőrendű pólusai. Mivel a számlálónak sehol sincs zérushelye, ezért:

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{e^{2iz}}{-\sin z}\bigg|_{z=z_k} = \frac{-1}{(-1)^{k+1}} = (-1)^k$$

Mivel az izolált szingularitások z_k, $k \in \mathbb{Z}$ halmazának a ∞ torlódási pontja, ezért a ∞ nem izolált szingularitás, tehát a ∞-hez tartozó reziduum nem létezik.

2. $f(z) = \dfrac{e^{2\pi z}}{z^2+4}$

A számláló és a nevező mindenütt reguláris függvények. A nevező szorzatalakja $z^2+4 = (z-2i)\cdot(z+2i)$. Így a nevező zérushelyei: $2i$, $-2i$. Ezek a számlálónak nem nullahelyei, mivel az sehol sem zérus. Mivel ezek az imaginárius számok a nevezőnek egyszeres zérushelyei, hiszen

$$\left(z^2+4\right)'\big|_{z=\pm 2i} = 2z\big|_{z=\pm 2i} = \pm 4i \neq 0,$$

ezért f-nek elsőrendű pólusai. Így a reziduumok könnyen meghatározhatók például az alábbi határértékek kiszámításával:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\cdot f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{e^{2\pi z}}{z+2i} = \frac{e^{4\pi i}}{4i} = \frac{1}{4i},$$

és hasonlóan:

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\cdot f(z) = \lim_{z\to -2i}\frac{e^{2\pi z}z}{z-2i} = \frac{e^{-4\pi i}}{-4i} = -\frac{1}{4i}$$

Természetesen a deriváltakat felhasználó formula is ugyanerre az eredményre vezet:

$$\operatorname{Res}(f, \pm 2i) = \left.\frac{e^{2\pi z}}{\left(z^2+4\right)'}\right|_{z=\pm 2i} = \left.\frac{e^{2\pi z}}{2z}\right|_{z=\pm 2i} = \frac{e^{2\pi(\pm 2i)}}{\pm 4i} = \pm\frac{1}{4i},$$

összhangban az előzőekkel.

Ebben az esetben a ∞ izolált szingularitás, hiszen a függvény reguláris a $|z| > 2$ körgyűrűn. A ∞-beli reziduum kiszámításához felhasználjuk, hogy véges sok szinguláris hely esetén a reziduumok összege zérus, így:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = 0 - \operatorname{Res}(f, 2i) - \operatorname{Res}(f, -2i) = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

3. $f(z) = \dfrac{z^3+3z^2}{(z+1)^2}$

A függvény egyetlen véges szinguláris pontja a $z = -1$ pont. Ez a nevezőnek kétszeres zérushelye, a számlálónak nem nullahelye. Tehát a $z = -1$ izolált szinguláris pont f-nek másodrendű pólusa.

A reziduumot határértékkel állítjuk elő:

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\left((z+1)^2\cdot f(z)\right)' = \lim_{z\to -1}\left(z^3+3z^2\right)' =$$

$$= \lim_{z\to -1}\left(3z^2+6z\right) = -3$$

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az f függvényt Laurent-sorba fejtjük a $z = -1$ pont körül, például parciális törtekre bontással:

$$f(z) = 1 + z - \frac{3}{z+1} + \frac{2}{(z+1)^2},$$

és itt $(z+1)^{-1}$ együtthatója valóban -3.

A függvénynek a (-1) az egyetlen véges izolált szingularitása, tehát reguláris a $|z| > 1$ körgyűrűn. Tehát f-nek a ∞ izolált szingularitása. Mivel a reziduumok összege zérus, ezért

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = 3$$

Természetesen más módszerrel is eljuthatunk ehhez az eredményhez. Írjuk fel f ∞ körüli Laurent-sorát polinomosztással:

$$\left(z^3+3z^2\right):\left(z^2+2z+1\right) = z + 1 - \frac{3}{z} + \frac{5}{z^2} + \ldots$$

Ez a sor z hatványai szerint halad, tehát origó körüli hatványsor. Mivel $z = -1$ az egyetlen szingularitás, ez a sor vagy a $|z| < 1$ körlapon, vagy a $|z| > 1$ körgyűrűn konvergál. Mivel a $|z| < 1$ körlapon f reguláris, ezen a körlapon egy Taylor-sor állítja elő, amely nem tartalmazhatja z-nek negatív egész kitevőjű hatványait. Ha még felidézzük azt, amit az előző fejezetben a Laurent-sor egyértelműségéről mondtunk, akkor világos, hogy a polinomosztással kapott hatványsor éppen f-nek a $|z| > 1$ körgyűrűn konvergens Laurent-sora. Ebben $c_{-1} = -3$, ahonnan:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = 3$$

Ebből még az is kiderül, hogy a ∞ f-nek elsőrendű pólusa, hiszen a főrész egytagú, és $c_1 = 1$, de $c_n = 0$, ha $n > 1$.

4. $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$

$f(z)$ a nevező zérushelyeinek kivételével mindenütt reguláris. Az exponenciális függvény periodicitása miatt a nevezőnek végtelen sok zérushelye van, melyek a következők:

$$z_k = k\cdot 2\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ezek a nevezőnek egyszeres zérushelyei, ugyanis

$$\left.\left(1-e^z\right)'\right|_{z=z_k} = \left.-e^z\right|_{z=z_k} = -1 \neq 0,$$

és izolált szingularitások is, hiszen a „szomszédosak” távolsága 2π.

Ha $k \neq 0$, akkor z_k a számlálónak nem nullahelye.

Tehát a z_k, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pontok mindannyian elsőrendű pólusok:

$$\operatorname{Res}(f, k\cdot 2\pi i) = \left.\frac{z}{\left(1-e^z\right)'}\right|_{z=z_k} = \left.\frac{z}{-e^z}\right|_{z=z_k} = -k\cdot 2\pi i,$$

ha $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Azonban $k = 0$ esetén $z_0 = 0$, és ez már a számlálónak is zérushelye. Így most másképpen járunk el. A L'Hospital-szabállyal kiszámíthatjuk f határértékét az origóban:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{1-e^z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{-e^z} = -1,$$

ami azt jelenti, hogy f-nek a 0 pont nem pólusa – hiszen nem ∞ a határérték –, hanem megszüntethető szingularitása. A $0 < |z| < 2\pi$ körgyűrűn a Laurent-sor egy Taylor-sor, amely a $|z| < 2\pi$ körlapon konvergál, és ebben $c_{-1} = 0$, tehát:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 0$$

Mivel a $z_k = k \cdot 2\pi i$ számhalmaznak a ∞ torlódási pontja, ezért a ∞ nem izolált szinguláris pont, tehát ∞-beli reziduum nem létezik.

5. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} 3z}{(z-2)^3}$

f-nek egyetlen véges izolált szinguláris helye van: $z = 2$. Ez a nevezőnek háromszoros zérushelye, a számlálónak viszont nem zérushelye, tehát f-nek a $z = 2$ pont harmadrendű pólusa. A reziduum:

$$\operatorname{Res}(f, 2) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2} \left((z-2)^3 \cdot f(z)\right)'' = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 2} (\operatorname{sh} 3z)'' =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \lim_{z\to 2} \operatorname{sh} 3z = \frac{9}{2} \cdot \operatorname{sh} 6$$

A függvény regularitási tartománya többek között a $|z| > 2$ körgyűrű, tehát a ∞ izolált szingularitás. A ∞-beli reziduum azonnal adódik, ugyanis tudjuk, hogy a reziduumok összege zérus, így:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{9}{2} \cdot \operatorname{sh} 6$$

Módosítunk most egy kissé a kitűzött feladaton. Legyen

$$f_1(z) = \frac{\operatorname{sh} 3iz}{(z-2\pi)^3},$$

és a kérdés ugyanaz.

Ebben az esetben a $z = 2\pi$ pont a nevezőnek ugyancsak háromszoros zérushelye, zérushelye azonban a számlálónak is, ugyanis az sh függvény periódusa $2\pi i$, ezért:

$$\operatorname{sh}(3i \cdot 2\pi) = \operatorname{sh}(6\pi i) = \operatorname{sh} 0 = 0$$

Mivel pedig a L'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{z\to 2\pi} (z-2\pi)^2 \cdot f_1(z) = \lim_{z\to 2\pi} \frac{\operatorname{sh} 3iz}{z-2\pi} = \lim_{z\to 2\pi} 3i \cdot \operatorname{ch} 3iz =$$

$$= 3i \cdot \operatorname{ch} 6\pi i = 3i \cdot \operatorname{ch} 0 = 3i,$$

ezért a $z = 2\pi$ pont f_1-nek másodrendű pólusa. A határérték kiszámításánál ismét felhasználtuk, hogy a ch függvény periódusa $2\pi i$.

A reziduum kiszámításához alkalmazhatnánk a deriválás módszerét, de most egyszerűbben érünk célhoz, ha az együtthatókra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulát használjuk:

$$\operatorname{Res}\left(f_1, 2\pi\right) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\operatorname{sh} 3zi}{(z-2\pi)^3} dz = \frac{1}{2!} (\operatorname{sh} 3zi)'' \Big|_{z=2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(-9)\left[\operatorname{sh} 3zi\right]_{z=2\pi} = -\frac{9}{2} \cdot \operatorname{sh} 6\pi i = -\frac{9}{2} \cdot \operatorname{sh} 0 = 0$$

Az integrálban szereplő γ tetszőleges olyan rektifikálható zárt görbe, amely egyszer pozitív irányban megkerüli a 2π pontot. Innen azonnal adódik az is, hogy:

$$\operatorname{Res}(f_1, \infty) = 0$$

6. $f(z) = z^3 \cdot \cos \dfrac{1}{z-1}$

Mivel a hatványfüggvények és a trigonometrikus függvények mindenütt regulárisak, f egyetlen szinguláris pontja a $z = 1$ pont, mely evégből izolált szingularitás.

Az előző fejezet alapján ránézésre látszik, hogy a $z = 1$ pont lényeges szingularitás, amelyet most más módszerrel is kimutatunk.

Legyen

$$z_n = 1 + \frac{1}{\pi n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

A z_n sorozat konvergens, és a határértéke 1.

Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik az $f(z_n)$ sorozat:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(z_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\pi n}\right)^3 \cdot \cos(n\pi) = 1 \cdot (-1)^n = (-1)^n$$

Ennek a sorozatnak nincs határértéke, hiszen két torlódási pontja is van, ami pontosan azt jelenti, hogy f-nek a $z = 1$ pont lényeges szingularitása.

A lényeges szingularitáshoz tartozó reziduumot nem lehetséges a pólusbeli reziduumhoz hasonlóan kiszámítani, ebben az esetben a Laurent-sort kell felírni.

A sor $(z-1)$ hatványai szerint halad, tehát célszerű az alábbi átalakítás:

$$f(z) = ((z-1)+1)^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) =$$
$$= \left((z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \dots\right)$$

Most csak a c_{-1} együtthatót keressük, a polinom és a hatványsor szorzatából csak ezt az egy tagot kell meghatározni.

$\frac{1}{z-1}$ együtthatója ezek alapján: $c_{-1} = \frac{1}{4!} - \frac{3}{2!} = -\frac{35}{24}$

Ezért $\mathrm{Res}(f, 1) = -\frac{35}{24}$.

7. $f(z) = \dfrac{\mathrm{ch}z}{z^9}$

A függvény egyetlen izolált szinguláris pontja az origó, mely a nevezőnek kilencszeres zérushelye, a számlálónak azonban nem nullahelye. Tehát a 0 pont f kilencedrendű pólusa.

Ebben a pontban a reziduum:

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{8!} \cdot \lim_{z\to 0} \left(z^9 \cdot f(z)\right)^{(9)} = \frac{1}{8!} \cdot \lim_{z\to 0} (\mathrm{ch}z)^{(8)} = \frac{1}{8!} \cdot \mathrm{ch}0 = \frac{1}{8!}$$

Mivel f regularitási tartománya a $0 < |z| < \infty$ körgyűrű, ezért a ∞ is izolált szingularitás. A függvény ezen a tartományon z hatványai szerint haladó hatványsorba fejthető, mely a ch függvény Taylor-sorából az alábbi módon származik:

$$f(z) = \frac{1}{z^9} \cdot \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{z^9} + \frac{1}{2!z^7} + \frac{1}{4!z^5} + \frac{1}{6!z^3} + \frac{1}{8!z} + \dots$$

Innen leolvasható, hogy $c_{-1} = \frac{1}{8!}$. Tehát $\mathrm{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = -\frac{1}{8!}$.

Mivel a felírt Laurent-sor a $0 < |z| < \infty$ körgyűrűn konvergens, ezért a sor nem csak ∞ körüli, hanem egyben 0 körüli sornak is tekinthető.

Látható, hogy a leolvasott c_{-1} együttható ismét szolgáltatja a 0 pontbeli reziduumot is.

8. $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z^2 + iz}$

A nevező szorzatalakja: $z^2 + iz = z(z+i)$, ahonnan azonnal látható, hogy a nevezőnek két egyszeres zérushelye van: $0, -i$.

Mivel a számláló és a nevező egyébként mindenütt reguláris, ezek f izolált szinguláris pontjai. Mivel e^{2z} sehol sem nulla, így ezek a pontok mindketten elsőrendű pólusok.

A reziduumot például deriválással számítjuk:

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \left.\frac{e^{2z}}{(z^2 + iz)'}\right|_{z=0} = \left.\frac{e^{2z}}{2z + i}\right|_{z=0} = \frac{1}{i} = -i$$

$$\mathrm{Res}(f, -i) = \left.\frac{e^{2z}}{2z + i}\right|_{z=-i} = \frac{e^{-2i}}{-i} = ie^{-2i}$$

Mivel a reziduumok összege zérus, így a ∞-beli reziduum is azonnal adódik: $\mathrm{Res}(f, \infty) = -\mathrm{Res}(f, 0) - \mathrm{Res}(f, -i) = i - ie^{-2i}$. Ennek van értelme, hiszen f reguláris a $|z| > 1$ körgyűrűn, tehát a ∞ valóban izolált szingularitás.

Ellenőrzésképpen a ∞-beli reziduumot más módszerrel, a Laurent-sor c_{-1} együtthatójának közvetlen kiszámításával is levezetjük.

Írjuk fel a függvény ∞ körüli Laurent-sorát a $|z| > 1$ körgyűrűben, ezt az alábbi szorzat adja:

$$f(z) = e^{2z} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{i}{z}} = e^{2z} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{i}{z}\right)} =$$
$$= \frac{1}{z^2} \cdot \left(1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^4}{4!} + \dots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 - \frac{i}{z} + \frac{i^2}{z^2} - \frac{i^3}{z^3} + \frac{i^4}{z^4} - \dots\right)$$

A tényezők sorfejtésénél felhasználtuk többek közt a $\left(-\frac{i}{z}\right)$ kvóciensű mértani sorra vonatkozó ismereteket, egyrészt az összegfüggvényt, másrészt azt, hogy $\left|-\frac{i}{z}\right| < 1$, azaz $1 < |z|$ esetén konvergens.

Mi a reziduumot keressük, tehát a fenti sorok szorzatából csak a c_{-1} együtthatót kell meghatározni.

Ha megkeressük $\frac{1}{z}$ együtthatóit, egy végtelen sort kapunk, melyet összegezni kell:

$$c_{-1} = 2 + \frac{2^2}{2!}(-i) + \frac{2^3}{3!}i^2 + \frac{2^4}{4!}(-i)^3 + \frac{2^5}{5!}i^4 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{i}\left(2i - \frac{(2i)^2}{2!} + \frac{(2i)^3}{3!} - \frac{(2i)^4}{4!} + \frac{(2i)^5}{5!} - \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{i}\left(-e^{-2i} + 1\right) = ie^{-2i} - i$$

A végtelenbeli reziduum ennek a c_{-1} együtthatónak definíció szerint az ellentettje:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -ie^{-2i} + i$$

Minden izolált szinguláris pontban kiszámítottuk a reziduumot. Ez utóbbi módszer a korábbival egybehangzó eredményt adott.

9. $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 4}$

A függvény véges szinguláris pontjai: 2, -2. Ezek a nevezőnek egyszeres zérushelyei, és egyszerű helyettesítés mutatja, hogy a számlálónak nem nullahelyei.

Tehát ezek a komplex számok az f függvény elsőrendű pólusai.

A reziduumot számíthatnánk deriválással vagy határérték-számítással, de most egy más módszert alkalmazunk. A Laurent-sorban változótranszformációt alkalmazunk, majd a c_{-1} együtthatót az együttható-összehasonlítás módszerével határozzuk meg.

Először is f-et áttranszformáljuk egy új változó bevezetésével:

Legyen $u := z - 2$, ekkor $z = u + 2$.

Helyettesítve:

$$f(u) = \frac{(u+2)^2 - 2(u+2) + 3}{(u+2)^2 - 4} = \frac{u^2 + 2u + 3}{u^2 + 4u}$$

Mivel $z \mapsto f(z)$-nek a $z = 2$ pont, ezért $u \mapsto f(u)$-nak az $u = 0$ pont elsőrendű pólusa, hatványsorában ezért a legkisebb kitevő a -1, tehát $u \mapsto f(u)$ sora:

$$f(u) = \frac{c_{-1}}{u} + c_0 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 + \ldots$$

alakú.

Helyettesítsük ezt a sort $u \mapsto f(u)$ helyére, és szorozzunk be a nevezővel, ekkor a

$$\left(\frac{c_{-1}}{u} + c_0 + c_1u + \ldots\right) \cdot \left(u^2 + 4u\right) = u^2 + 2u + 3$$

azonosságnak kell teljesülnie. Ez akkor lehetséges, ha a bal oldali, szorzással előálló sor együtthatói rendre megegyeznek a jobb oldali polinom együtthatóival. Itt most elég, ha csak a konstans tagokat összehasonlítjuk. A bal oldalon ez egyféle módon születhet:

$$\frac{c_{-1}}{u} \cdot 4u = 3,$$

ahonnan $c_{-1} = \frac{3}{4}$. Tehát

$$\operatorname{Res}(u \mapsto f(u), 0) = \operatorname{Res}(z \mapsto f(z), 2) = \frac{3}{4},$$

hiszen az $u = z - 2$ helyettesítés az együtthatókat változatlanul hagyja.

A többi együttható összehasonlításával megkaphatjuk a Laurent-sor többi ismeretlen együtthatóját is.

Hasonló módon számítható a (-2)-beli reziduum is.

Legyen $z + 2 := u$, tehát $z = u - 2$. Ekkor:

$$f(u) = \frac{(u-2)^2 - 2(u-2) + 3}{(u-2)^2 - 4} = \frac{u^2 - 6u + 11}{u^2 - 4u}$$

A $z = -2$ pont ugyancsak elsőrendű pólus, tehát az előzőhöz hasonlóan:

$$\left(\frac{c_{-1}}{u} + c_0 + c_1u + \ldots\right) \cdot \left(u^2 - 4u\right) = u^2 - 6u + 11,$$

ahonnan ismét a konstans tagok összehasonlításából adódik, hogy

$$\frac{c_{-1}}{u} \cdot (-4u) = 11,$$

tehát $c_{-1} = -\frac{11}{4}$, vagyis $\operatorname{Res}(f, -2) = -\frac{11}{4}$.

Mivel f reguláris a $|z| > 2$ körgyűrűn, a ∞ is izolált szingularitás. A ∞-beli reziduumot is egy transzformáció segítségével számítjuk ki.

Legyen $u = \dfrac{1}{z}$, azaz $z = \dfrac{1}{u}$. Ezzel a függvény alakja:

$$f(u) = \frac{\dfrac{1}{u^2} - \dfrac{2}{u} + 3}{\dfrac{1}{u^2} - 4} = \frac{3u^2 - 2u + 1}{-4u^2 + 1}$$

Ennek a függvénynek az $u = 0$ pont megszüntethető szingularitása, hiszen $f(0) = 1$, tehát a 0 pont körül $u \mapsto f(u)$ Taylor-sorba fejthető:

$$f(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \dots$$

Mivel $f(0) = 1$, azonnal adódik, hogy $c_0 = 1$.

Elvégezve a helyettesítést, szorzást, ez adódik:

$$\left(1 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots\right)\left(-4u^2 + 1\right) = 3u^2 - 2u + 1$$

Ismételten együttható-összehasonlítást végezve:

$c_1 \cdot 1 = -2$, ahonnan $c_1 = -2$;

$1 \cdot (-4) + c_2 \cdot 1 = 3$, ahonnan $c_2 = 7, \dots$ stb.

Tehát $u \mapsto f(u)$ Taylor-sorának első néhány tagja így fest:

$$f(u) = 1 - 2u + 7u^2 \dots$$

Tehát visszatérve a z változóra, $z \mapsto f(z)$ hatványsora:

$$f(z) = 1 - \frac{2}{z} + \frac{7}{z^2} \dots$$

Ez a Laurent-sor valóban a $|z| > 2$ körgyűrűben konvergál, ugyanis egyrészt 0 körüli hatványsor, másrészt f a $|z| < 2$ körlapon reguláris, tehát hatványsora ott egy Taylor-sor. Mivel pedig a Laurent-sor egyértelmű, a felírt hatványsor nem lehet más, mint f ∞ körüli Laurent-sora.

Itt $\dfrac{1}{z}$ együtthatója -2, tehát:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -(-2) = 2$$

Ellenőrzésképpen adjuk össze a reziduumokat:

$$\operatorname{Res}(f, 2) + \operatorname{Res}(f, -2) + \operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{3}{4} - \frac{11}{4} + 2 = 0,$$

ahogyan annak teljesülnie is kell.

10. Igazolja közvetlenül, hogy az $f(z) = \dfrac{z^9}{z^5 - 1}$ függvény reziduumainak összege zérus!

A függvény izolált szinguláris pontjai az 1 komplex szám ötödik gyökei, tehát az ötödik egységgyökök. Ezek exponenciális alakja a következő:

$$z_k = e^{k \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot i};\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Világos, hogy ezek a komplex számok mindannyian elsőrendű pólusok, hiszen a számlálónak nem gyökei, a nevezőnek pedig $(z^5 - 1)' = 5z^4$ miatt egyszeres gyökei.

A reziduumok deriválással könnyen számíthatók:

$$\operatorname{Res}\left(f, z_k\right) = \left.\frac{z^9}{\left(z^5 - 1\right)'}\right|_{z=z_k} = \left.\frac{z^9}{5z^4}\right|_{z=z_k} = \left.\frac{z^5}{5}\right|_{z=z_k} = \frac{z_k^5}{5} = \frac{1}{5};$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4.$

Tehát minden pólusban ugyanaz a reziduum értéke.

A ∞ izolált szingularitás, hiszen f reguláris a $|z| > 1$ körgyűrűn. Itt a reziduumot a megfelelő Laurent-sorból olvassuk majd le. Ehhez az f függvényt úgy alakítjuk át, hogy egy $|z| > 1$ tartományon konvergens mértani sor összegfüggvénye legyen:

$$f(z) = \frac{z^9}{z^5 - 1} = \frac{z^4}{1 - \dfrac{1}{z^5}} = z^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{15}} + \dots\right) =$$

$$= z^4 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^6} + \dots$$

A sor konvergenciájának feltétele $\left|\dfrac{1}{z^5}\right| < 1$, azaz $|z| > 1$, éppen a kijelölt tartomány.

Ebben a sorban $\dfrac{1}{z}$ együtthatója: $c_{-1} = 1$, tehát

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = -1$$

Számítsuk ki a reziduumok összegét:

$$\sum_{k=0}^{4} \operatorname{Res}\left(f, z_k\right) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 5 \cdot \frac{1}{5} + (-1) = 0$$

7.2 Komplex integrálok kiszámítása

Gyakorló feladatok

Számítsa ki a következő komplex integrálokat a reziduumtétel felhasználásával!

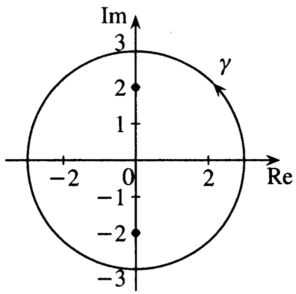
1. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+4}dz$, ahol γ a $|z| = 3$ körív, pozitív irányítással.

Az integrandusnak két elsőrendű pólusa van: $2i$, $-2i$.

Mindkét pólus a γ körív belsejében van (7.5 ábra), tehát ki kell számítani mindkét pontbeli reziduumot:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \left.\frac{e^{\pi z}}{\left(z^2+4\right)'}\right|_{z=2i} = \left.\frac{e^{\pi z}}{2z}\right|_{z=2i} = \frac{e^{2\pi i}}{4i} = \frac{1}{4i}$$

$$\operatorname{Res}(f, -2i) = \left.\frac{e^{\pi z}}{2z}\right|_{z=-2i} = \frac{e^{-2\pi i}}{-4i} = -\frac{1}{4i}$$



7.5 ábra

Alkalmazzuk a reziduumtételt a γ görbére és az f függvényre:

$$\oint_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+4}dz = 2\pi i\cdot\left(\operatorname{Res}(f, 2i)+\operatorname{Res}(f, -2i)\right) = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{4i}-\frac{1}{4i}\right) = 0$$

2. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z^2+1}{\cos iz}dz$, ahol γ a $\left|z-\frac{i\pi}{2}\right| = 4$ egyenletű körív, pozitívan irányítva.

Az integrandusnak végtelen sok elsőrendű pólusa van, ezek a nevező zérushelyei:

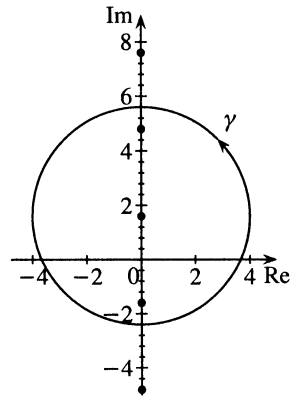
$$iz = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ z_k = -i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

A pólusok valóban elsőrendűek, hiszen:

$$\left.(\cos iz)'\right|_{z=z_k} = \left.(-i\sin iz)\right|_{z=z_k} = -i(-1)^k \neq 0$$

A megadott γ görbén belül ezen pólusok közül három darab van (7.6.ábra):

$$-\frac{i\pi}{2},\ \frac{i\pi}{2},\ \frac{3i\pi}{2}.$$



7.6 ábra

Ezekhez az izolált szingularitásokhoz tartozó reziduumok:

$$\operatorname{Res}\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{z^2+1}{(\cos iz)'}\right|_{z=-i\frac{\pi}{2}} = \left.\frac{z^2+1}{-i\sin iz}\right|_{z=-i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1-\frac{\pi^2}{4}}{-i} = i\left(1-\frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\dfrac{\pi^2}{4}}{-i(-1)} = -i\left(1-\frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(i\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1-\dfrac{9\pi^2}{4}}{-i} = i\left(1-\frac{9\pi^2}{4}\right)$$

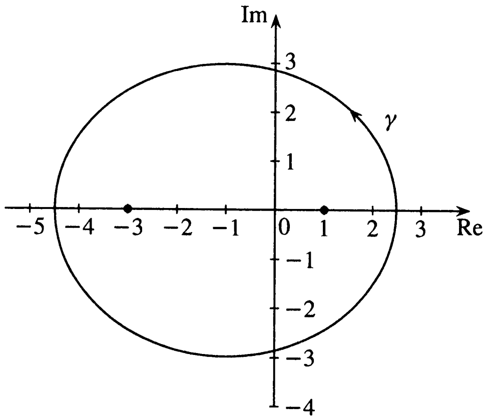
Alkalmazzuk most a reziduumtételt:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(-i\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(i\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(i\frac{3\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\pi i \cdot i\left(1-\frac{9\pi^2}{4}\right) = 2\pi\left(\frac{9\pi^2}{4}-1\right)$$

3. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{1}{(z+3)^3(z-1)^2}dz$, ahol γ a $|z|+|z+2| = 7$ egyenletű ellipszis, pozitív irányítással.

Az integrandus izolált szinguláris pontjai a következők: a $z = -3$ harmadrendű pólus, a $z = 1$ másodrendű pólus. A megadott γ ellipszisen belül található mindkét pólus (7.7 ábra).



7.7 ábra

A reziduumokat határérték-számítással állítjuk elő:

$$\operatorname{Res}(1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\cdot f(z)\right)' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{(z+3)^3}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(\frac{-3}{(z+3)^4}\right) = -\frac{3}{256},$$

és hasonlóan:

$$\operatorname{Res}(-3) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -3}\left((z+3)^3\cdot f(z)\right)'' = \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to -3}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to -3}\left(\frac{6}{(z-1)^4}\right) = \frac{3}{256}$$

A reziduumtétel felhasználásával kapjuk az integrál értékét:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(1)+\operatorname{Res}(-3)\right) = 2\pi i\left(-\frac{3}{256}+\frac{3}{256}\right) = 0$$

4. $\displaystyle\oint_\gamma z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}dz$, ahol γ az origót pozitív irányban megkerülő, tetszőleges egyszerű zárt rektifikálható görbe.

Az integrandus egyetlen szinguláris pontja az origó, mely lényeges szingularitás. Ez azonnal látszik, ha felírjuk a függvény origó körüli Laurent-sorát.

$$z^3\cdot e^{\frac{1}{z}} = z^3\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right) =$$

$$= z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\ldots$$

A sor reguláris része véges sok tagot tartalmaz, de főrésze végtelen sokat, tehát a szingularitás valóban lényeges.

A reziduumot leolvasással kapjuk.

$$\operatorname{Res}(0) = c_{-1} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Alkalmazva tehát a reziduumtételt a megadott tulajdonságú γ görbére:

$$\oint_\gamma z^3\cdot e^{\frac{1}{z}}dz = 2\pi i\cdot\operatorname{Res}(0) = \frac{\pi i}{12}$$

5. $\displaystyle\oint_\gamma \mathrm{ch}\left(\frac{1}{z-2}\right)\cdot\sin\left(\frac{3}{z-2}\right)dz$, ahol γ tetszőleges olyan egyszerű zárt görbe, amely a $z=2$ pontot egyszer pozitív irányban megkerüli.

Az integrandusnak a $z=2$ pont lényeges szingularitása. Ez azonnal látszik, ha felírjuk $|z-2|>0$ körgyűrűben konvergens Laurent-sorát. Ez a sor szorzással adódik a már jól ismert Taylor-sorokból, ha azokban elvégezzük a $z\to\frac{1}{z-2}$ helyettesítést:

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{z-2}\right)\cdot\sin\left(\frac{3}{z-2}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2!(z-2)^2}+\ldots\right)\cdot\left(\frac{3}{z-2}-\frac{3^3}{3!(z-2)^3}+\ldots\right)$$

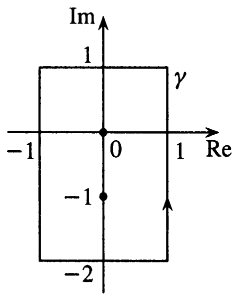
Ebből a szorzatból bennünket csak $\frac{1}{z-2}$ együtthatója érdekel. Ilyen tag csak egyféle módon adódik, méghozzá úgy, hogy ha mindkét sor első tagját szorozzuk össze, tehát:

$$c_{-1}=1\cdot 3=3=\mathrm{Res}(2)$$

A felírtak alapján világos, hogy a szorzást elvégezve végtelen sok tagú főrész adódik, tehát a szingularitás lényeges.

Alkalmazzuk végül a reziduumtételt:

$$\oint_\gamma \mathrm{ch}\left(\frac{1}{z-2}\right)\cdot\sin\left(\frac{3}{z-2}\right)dz=2\pi\cdot\mathrm{Res}(2)=2\pi i\cdot 3=6\pi i$$



7.8 ábra

6. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\mathrm{sh}iz}{z(z+i)^2}dz$, ahol γ az a pozitívan irányított téglalap, melynek csúcsai a következők: $1+i$, $-1+i$, $-1-2i$, $1-2i$.

Az integrálandó függvény számlálója és nevezője mindenütt reguláris függvény, nevezőjének két zérushelye van: a $z=0$ egyszeres, a $z=-i$ kétszeres zérushely. Ezek az integrandus szinguláris pontjai, melyek mind a γ téglalap belsejébe esnek (7.8 ábra).

A $z=0$ pont megszüntethető szingularitás, hiszen egyrészt $\mathrm{sh}(0)=0$, másrészt a L'Hospital-szabállyal kapjuk:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{sh}iz}{z}=\lim_{z\to 0} i\,\mathrm{ch}iz=i\,\mathrm{ch}0=i$$

Tehát a $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\frac{i}{i^2}=-i$ határérték véges, a szingularitás valóban megszüntethető. Ez azt is jelenti, hogy a 0 pontbeli reziduum zérus.

A $z=-i$ pont azonban nem zérushelye a számlálónak, tehát ez a pont az integrandusnak másodrendű pólusa.

A reziduumot határértékkel számítjuk:

$$\mathrm{Res}(-i)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -i}\left((z+i)^2\cdot f(z)\right)'=\lim_{z\to -i}\left(\frac{\mathrm{sh}iz}{z}\right)'=$$
$$=\lim_{z\to -i}\frac{zi\,\mathrm{ch}iz-\mathrm{sh}iz}{z^2}=\frac{1}{2e}$$

Innen a reziduumtétellel adódik az integrál értéke:

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{sh}iz}{z(z+i)^2}dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(-i)=\frac{\pi i}{e}$$

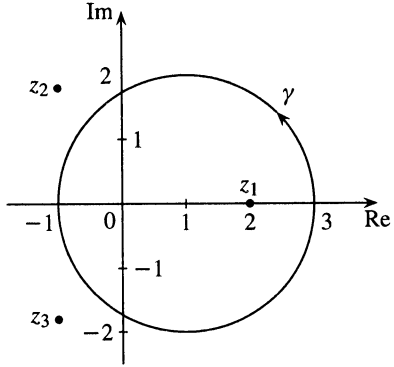
7. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z}{z^3-8}dz$, ahol γ a $|z-1|=2$ egyenletű körív, pozitívan irányítva.

Az integrandus szinguláris pontjai a nevező zérushelyei, tehát a 8 komplex szám harmadik gyökei:

$$z_1=2$$
$$z_2=2\left(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ\right)=-1+i\sqrt{3}$$
$$z_3=2\left(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ\right)=-1-i\sqrt{3}$$

Ezek a zérushelyek mindannyian elsőrendű pólusai az integrandusnak. Azonban közülük csak egy, a $z_1 = 2$ pont van a kijelölt γ görbén belül, a másik kettő a γ-n kívül esik (7.9.ábra). Tehát a reziduumtétel szerint:

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z^3-8}dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(2)$$



7.9 ábra

A reziduumot például határértékként számíthatjuk:

$$\mathrm{Res}(2) = \lim_{z\to 2}\big((z-2)\cdot f(z)\big) = \lim_{z\to 2}\frac{e^z}{z^2+2z+4} = \frac{e^2}{4+4+4} = \frac{e^2}{12}$$

Tehát $\displaystyle\oint_\gamma \frac{e^z}{z^3-8}dz = 2\pi i\cdot\frac{e^2}{12} = \frac{\pi e^2\cdot i}{6}.$

8. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\mathrm{ch}(z-i)}{(z-i)^5}dz$, ahol γ az i pontot egyszer pozitív irányban megkerülő tetszőleges rektifikálható zárt görbe.

A $z = i$ pont az integrandus ötödrendű pólusa, hiszen a nevezőnek ötszörös zérushelye, másrészt $\mathrm{ch}(0) = 1 \neq 0$. Így az i pontbeli reziduum:

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{4!}\lim_{z\to i}\big((z-i)^5\cdot f(z)\big)^{(4)} = \frac{1}{24}\lim_{z\to i}\big(\mathrm{ch}(z-i)\big)^{(4)} =$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\mathrm{ch}0 = \frac{1}{24}$$

A reziduum most könnyen leolvasható az i körüli Laurent-sorból is:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^5}\cdot\left(1+\frac{(z-i)^2}{2!}+\frac{(z-i)^4}{4!}+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{(z-i)^5}+\frac{1}{2!(z-i)^3}+\frac{1}{4!(z-i)}+\dots,$$

ahonnan $c_{-1} = \dfrac{1}{24}$, mint korábban.

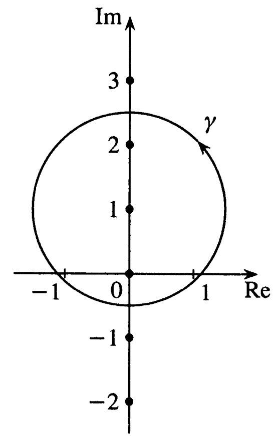
Tehát a reziduumtétellel az integrál értéke:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{24} = \frac{\pi i}{12}$$

9. $\displaystyle\oint_\gamma \mathrm{ctg}\, i\pi z dz$, ahol γ a $|z-i| = \dfrac{3}{2}$ egyenletű körív, pozitív irányítással.

A függvénynek végtelen sok szinguláris pontja van, a $z \mapsto \sin(i\pi z)$ függvény zérushelyei mindannyian pólusok; ezek az alábbiak:

$$i\pi z = k\pi, \text{ azaz } z_k = \frac{k}{i} = -ki = li,\ l, k \in \mathbb{Z}.$$



7.10 ábra

Ezek közül három darab esik a kijelölt kör belsejébe: 0, i, $2i$ (7.10 ábra). Mivel

$$\cos(i\pi z)\big|_{z=z_k} = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0, \text{ és}$$

$$(\sin(i\pi z))'\big|_{z=z_k} = (i\pi\cos i\pi z)\big|_{z=z_k} = i\pi\cdot(-1)^k \neq 0,$$

ezért mindhárom γ görbén belül levő pont – sőt mindegyik szinguláris pont – elsőrendű pólus. Ezért:

$$\oint_\gamma \operatorname{ctg} i\pi z dz = 2\pi i\cdot\big(\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(i)+\operatorname{Res}(2i)\big)$$

Számítsuk ki a pólusokban a reziduum értékét:

$$\operatorname{Res}(z_k) = \left.\frac{\cos i\pi z}{(\sin i\pi z)'}\right|_{z=z_k} = \left.\frac{\cos i\pi z}{i\pi\cdot\cos i\pi z}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{i\pi}$$

A reziduum értéke független attól, hogy melyik szinguláris pontról van szó, mindenütt ugyanaz, tehát:

$$\oint_\gamma \operatorname{ctg} i\pi z dz = 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{i\pi}+\frac{1}{i\pi}+\frac{1}{i\pi}\right) = 6$$

A mondottak alapján, ha γ_1 egy olyan pozitív irányítású egyszerű zárt rektifikálható görbe, amely a z_k pólusok közül pontosan n db-ot kerül meg, akkor:

$$\oint_\gamma \operatorname{ctg} i\pi z dz = 2\pi i\cdot\frac{n}{\pi i} = 2n$$

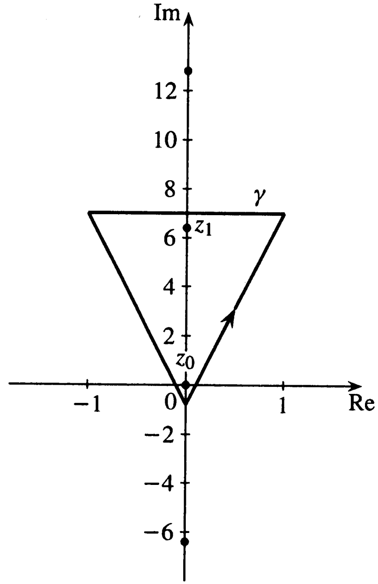
10. $\oint_\gamma \frac{1}{z^2}\cdot\operatorname{cth} z dz$, ahol a γ görbe a $-i$, $1+7i$, $-1+7i$ csúcspontú háromszög, pozitívan irányítva.

A szinguláris helyek meghatározásához átalakítjuk az integrandust:

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^2\cdot\operatorname{sh} z},$$

ahonnan már azonnal leolvashatók a szinguláris helyek.

Egyrészt a $z=0$ pont, amely a sh függvénynek is nullahelye, továbbá a sh $2\pi i$ szerinti periodicitása miatt a $z_k = k\cdot 2\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$ pontok. Ezek közül a γ háromszög belsejében kettő található: 0, $2\pi i$ (7.11 ábra).



7.11 ábra

Mivel $(\operatorname{sh})' = \operatorname{ch}$, és mivel a ch függvény ugyancsak periodikus $2\pi i$-vel, ezért

$$(\operatorname{sh} z)'\big|_{z=2\pi i} = \operatorname{ch} 2\pi i = \operatorname{ch} 0 = 1 \neq 0,$$

ami azt jelenti, hogy $2\pi i$ az integrandus elsőrendű pólusa, melyhez tartozó reziduum értéke:

$$\operatorname{Res}(2\pi i) = \left.\frac{\operatorname{ch} z}{\left(z^2\cdot\operatorname{sh} z\right)'}\right|_{z=2\pi i} = \left.\frac{\operatorname{ch} z}{2z\cdot\operatorname{sh} z + z^2\cdot\operatorname{ch} z}\right|_{z=2\pi i} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} = -\frac{1}{4\pi^2}$$

A 0 pont viszont harmadrendű pólusa az integrandusnak. Ez deriválással könnyen ellenőrizhető:

$$\left(z^2\cdot\operatorname{sh} z\right)'\big|_{z=0} = \left(2z\cdot\operatorname{sh} z + z^2\cdot\operatorname{ch} z\right)\big|_{z=0} = 0$$

$$\left(z^2 \cdot \mathrm{sh}z\right)''\Big|_{z=0} = \left(2z \cdot \mathrm{sh}z + 4z \cdot \mathrm{ch}z + z^2 \cdot \mathrm{sh}z\right)\Big|_{z=0} = 0$$

$$\left(z^2 \cdot \mathrm{sh}z\right)^{(3)}\Big|_{z=0} = \left(6\mathrm{ch}z + 6z \cdot \mathrm{sh}z + z^2 \cdot \mathrm{ch}z\right)\Big|_{z=0} = 6 \neq 0$$

A reziduum kiszámítása történhet a megszokott módon határérték-számítással, ez azonban most eléggé nehézkes. Ezért a Laurent-sor előállításával keressük meg a c_{-1} együtthatót.

Tudjuk, hogy f-nek a 0 harmadrendű pólusa, tehát Laurent-sora a c_{-3} együtthatóval kezdődik:

$$f(z) = \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots$$

Behelyettesítve ezt f helyére, szorozva a nevezővel, és felhasználva a hiperbolikus függvények Taylor-sorát, az alábbi egyenlőség adódik:

$$1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = z^2 \cdot \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots$$

Az integrál kiszámításához nincs szükség az egész Laurent-sorra, csak a c_{-1} együtthatót kell meghatározni. Ehhez ismét az együttható-összehasonlítás módszerét használjuk:

a konstansok egyenlősége: $1 = c_{-3}$

az elsőfokúak egyenlősége: $0 = c_{-2}$

a másodfokúak egyenlősége: $\dfrac{1}{2!} = c_{-1} + \dfrac{c_{-3}}{3!}$

Ahonnan $c_{-1} = \dfrac{1}{3}$, tehát $\mathrm{Res}(0) = \dfrac{1}{3}$.

Ezek alapján az integrál értéke:

$$\oint_\gamma \mathrm{cth}z \cdot \frac{1}{z^2} dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(2\pi i)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi^2}\right)$$

11. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{2z^2}{z^3+1} dz$, ahol γ a $|z-1| + |z+1| = 4$ egyenletű ellipszis, pozitívan irányítva.

Az integrandus szinguláris pontjai a nevező zérushelyei, azaz a -1 komplex szám harmadik gyökei:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_2 = -1 \qquad z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ezek mind elsőrendű pólusok, és mind a kijelölt ellipszis belsejébe esnek. Egyik lehetőség az integrál kiszámítására az, amit az eddigiekben is alkalmaztunk: külön-külön minden pólusban kiszámítjuk a reziduumot, és arra alkalmazzuk a reziduumtételt.

Egyszerűbben érünk célhoz azonban, ha figyelembe vesszük, hogy f-nek nincs több véges szingularitása, továbbá azt, hogy a véges szinguláris helyekhez tartozó és a ∞-hez tartozó reziduumok összege zérus.

Eszerint ugyanis:

$$\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}(z_k) = -\mathrm{Res}(\infty)$$

A reziduumtétel szerint pedig:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}(z_k)$$

A két egyenlőség összevetésével ez adódik:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \cdot \mathrm{Res}(\infty)$$

A ∞-hez tartozó reziduumot számítsuk az alábbi módon: végezzük el f-ben a $z \to \dfrac{1}{z}$ helyettesítést, majd írjuk fel $z \mapsto f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 0 körüli hatványsorát.

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\dfrac{2}{z^2}}{\dfrac{1}{z^3} + 1} = \frac{2z}{1 + z^3} = \frac{2z}{1 - (-z^3)}$$

Vegyük észre, hogy ez egy $\left(-z^3\right)$ kvóciensű mértani sor összegfüggvénye, amely $\left|-z^3\right| < 1$ feltétellel, tehát a $|z| < 1$ körlapon konvergens. Tehát:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = 2z\left(1 - z^3 + z^6 - z^9 + z^{12} - \ldots\right) =$$
$$= 2z - 2z^4 + 2z^7 - 2z^{10} + 2z^{13} - \ldots$$

Mivel f a $|z| > 1$ körgyűrűn reguláris, ezért $f\left(\frac{1}{z}\right)$ a $|z| < 1$ körlapon reguláris. Hatványsora ezen a körlapon ennek megfelelően egy Taylor-sor.

Visszatérve f-re, az inverz transzformációval előáll az f függvény Laurent-sora:

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{2}{z^4} + \frac{2}{z^7} - \dots$$

Ahonnan $\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = -2$.

Tehát:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \cdot \text{Res}(\infty) = -2\pi i \cdot (-2) = 4\pi i$$

12. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z^3}{(z^2-1)(z+2)}dz$, ahol γ tetszőleges, olyan egyszerű zárt rektifikálható görbe, amely a -2, -1, 1 pontokat egyszer pozitív irányban megkerüli.

A felsorolt komplex számok az integrandus elsőrendű pólusai. A komplex síkon a függvénynek nincs több véges szinguláris helye. A feltételek szerint a kijelölt γ görbe az összes véges szingularitást megkerüli.

Kiszámíthatnánk minden esőrendű pólusban a reziduumot, de ismét egyszerűbben érünk célhoz, ha az előző, 11. példa logikáját követjük:

Az integrandus reguláris a $|z| > 2$ körgyűrűn, tehát a ∞ izolált szingularitás. Mivel a kijelölt γ görbén kívül már csak a ∞ szinguláris pont van, a reziduumtétel és a reziduumok összegére vonatkozó tétel szerint:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \cdot \text{Res}(\infty)$$

A ∞-beli reziduumot a $|z| > 2$ körgyűrűn konvergens Laurent-sorból olvassuk le. Ehhez a nevezőt szorzattá alakítjuk, majd a törtet úgy alakítjuk át, hogy a $|z| > 2$ körgyűrűn konvergens mértani sorok összegfüggvényeinek szorzatát kapjuk:

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{z^3}{z^3\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}$$

Itt tényezőnként elvégezzük a sorfejtést:

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots\right) \cdot$$
$$\cdot \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \dots\right)$$

Ezeknek a soroknak a szorzata adja az f függvény ∞ körüli Laurent-sorát. Az integrál kiszámításához azonban csak $\frac{1}{z}$ együtthatóját kell meghatározni: $c_{-1} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = -2$

Tehát a ∞-hez tartozó reziduum:

$$\text{Res}(\infty) = -c_{-1} = 2$$

Ahonnan a keresett integrál értéke:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \cdot (2) = -4\pi i$$

Mellesleg a sorfejtésből az is kiderül, hogy a ∞ a függvénynek megszüntethető szingularitása, hiszen a sornak csak reguláris része van, főrésze nincs, továbbá:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$$

13. $\displaystyle\oint_\gamma \frac{5z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3-8)^4}dz$, ahol γ olyan pozitívan irányított egyszerű zárt rektifikálható görbe, amely megkerüli az integrandus összes véges szinguláris pontját.

f szinguláris pontjai „sokan vannak". Egyrészt a -2 komplex szám négyzetgyökei, melyek harmadrendű pólusok, másrészt a 8 komplex szám harmadik gyökei, melyek mindannyian negyedrendű pólusok.

Tehát az integrandusnak összesen öt szinguláris pontja van, melyek mind magasabb rendű pólusszingularitások. Ha ezekre alkalmazzuk a szokásos $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\left((z-a)^k \cdot f(z)\right)^{(k-1)}$ formulát, látható, hogy mennyi munkát jelentene a kiszámításuk.

Ezért az előző két példa mintájára ismét a ∞-beli reziduumot számítjuk ki. Ez valóban elégséges, hiszen a γ görbe f összes véges szinguláris pontját megkerüli.

A reziduumtétel ebben az esetben:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{5} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

De tudjuk:

$$\sum_{k=1}^{5} \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0$$

Így kapjuk:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, \infty)$$

Írjuk fel f ∞ körüli Laurent-sorát!

Mivel a $|z| > 2$ körgyűrűn f reguláris, ez a Laurent-sor létezik. Ehhez vegyük figyelembe, hogy f olyan racionális törtfüggvény, melynek számlálója alacsonyabb fokú polinom, mint a nevezője. (A számláló foka 17, a nevezőé 18.)

Ebből következik, hogy

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy a ∞ f-nek megszüntethető szingularitása, tehát a ∞ körüli Laurent-sor főrésze hiányzik, azaz a sor nem tartalmaz pozitív egész kitevőjű hatványokat.

Így f hatványsora

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

alakú. Írjuk be ezt f helyére, és szorozzuk a nevezővel:

$$5z^{17} = \left(z^2+2\right)^3\left(z^3-8\right)^4 \cdot \left(c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots\right)$$

Alkalmazzuk ismét az együttható-összehasonlítás módszerét!

A bal oldalon z-nek csak a 17. hatványa szerepel. A jobb oldali szorzat kiszámítása során csak egyféle módon kapunk 17. hatványt, ha az egyes tényezőkből rendre a z^6, z^{12} és $\frac{1}{z}$ hatványokat tartalmazó tagokat szorozzuk össze.

Ezek együtthatóinak szorzata:

$1 \cdot 1 \cdot c_{-1} = 5$, azaz $c_{-1} = 5$.

Tehát:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = -5$$

Ahonnan az integrál értéke:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}(\infty) = -2\pi i \cdot (-5) = 10\pi i$$

14. $\displaystyle\oint_\gamma z^3 \cdot \ln\frac{z^2-1}{z^2-4}dz$, ahol a γ görbe legyen a $|z| = 3$ körív, negatívan irányítva.

A függvénynek négy szinguláris pontja van, ezek a tört számlálójának és nevezőjének zérushelyei, tehát a -2, -1, 1, 2 komplex számok.

A $|z| = 3$ kör ezeket a belsejében tartalmazza. Ebben az esetben a szinguláris pontok osztályozása sem magától értetődő feladat.

Ezért ismét azt az utat választjuk, mint az előző feladatokban:

A véges helyekhez tartozó reziduumok összegét a ∞-hez tartozó reziduum ellentettjével helyettesítjük. Ehhez felírjuk az integrandus $|z| > 2$ körgyűrűn konvergens Laurent-sorát:

$$z^3 \cdot \ln\frac{z^2-1}{z^2-4} = z^3 \cdot \ln\left(\frac{1-\frac{1}{z^2}}{1-\frac{4}{z^2}}\right) =$$

$$= z^3 \cdot \left(\ln\left(1-\frac{1}{z^2}\right) - \ln\left(1-\frac{4}{z^2}\right)\right) =$$

$$= z^3 \cdot \left(\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^6} + \dots\right) - \left(\frac{2^2}{z^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2^4}{z^4} + \dots\right)\right) =$$

$$= -3z - \frac{7}{2z} - \frac{63}{3z^2} - \dots$$

Ahonnan $c_{-1} = -\frac{7}{2}$. Tehát $\operatorname{Res}(f, \infty) = -c_{-1} = \frac{7}{2}$.

Mivel a γ görbe negatívan van irányítva, ezért:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -\left(-2\pi i \cdot \mathrm{Res}(\infty)\right) = 7\pi i$$

Mellékeredményként kiderült a Laurent-sorfejtésből az is, hogy a ∞ a függvénynek elsőrendű pólusa.

7.3 Logaritmikus reziduum

Gyakorló feladatok

Számítsa ki a következő integrálokat a logaritmikus reziduumok meghatározásával!

1. $I := \oint_\gamma \frac{2z^5+z^2}{z^6+z^3}dz$, ha γ a $|z| = 2$ egyenletű körív, pozitívan irányítva.

Világosan látszik, hogy a törtet 3-mal bővítve az integrandus $\frac{f'(z)}{f(z)}$ alakúvá válik, ahol $f(z) = z^6 + z^3$:

$$I = \frac{1}{3}\oint_\gamma \frac{6z^5+3z^2}{z^6+z^3}dz$$

Mivel f polinomfüggvény, ezért nincsenek szinguláris pontjai csak zérushelyei.

A $z^6+z^3 = z^3\left(z^3+1\right)$ átalakításból látszik, hogy a $z = 0$ háromszoros zérushely, a -1 harmadik gyökei pedig egyszeres zérushelyek. Mind a négy zérushely a megadott γ görbén belül található, hiszen a kör sugara kettő, a zérushelyek abszolút értéke legfeljebb 1.

Ezért az integrál kiszámítására alkalmazható a

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(Z-P)$$

formula, ahol Z a zérushelyek, P a pólusok száma, mindegyik annyiszor számolva, amennyi a zérushely multiplicitása, illetve a pólus rendje.

Mivel most pólus nincs, $P = 0$.

A zérushelyeket multiplicitással helyettesítve, megkapjuk az integrál értékét:

$$I = \frac{1}{3}2\pi i(3+1+1+1) = \frac{1}{3}12\pi i = 4\pi i$$

2. $I := \oint_\gamma \operatorname{tg} \pi z dz$, ahol γ a $|z| + |z-2| = 4$ egyenletű ellipszis, pozitívan irányítva.

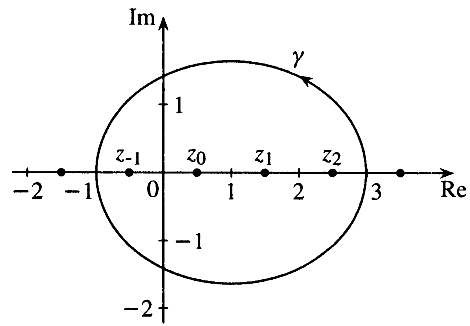
Alakítsuk át az integrandust! Nem nehéz észrevenni, hogy $\frac{f'(z)}{f(z)}$ alakra hozható, ahol $f(z) = \cos \pi z$.

$$\operatorname{tg} \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\pi \sin \pi z}{\cos \pi z}$$

Mivel f reguláris függvény, póIushelyei nincsenek, zérushelyei azonban végtelen sokan vannak:

$$\pi z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ azaz } z_k = k + \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ezek mindannyian egyszeres multiplicítású zérushelyek. A kijelölt γ görbe egy olyan ellipszis, melynek belsejében ezek közül pontosan négy darab zérushely van, méghozzá a $k = -1, 0, 1, 2$ egészekkel indexelt nullahelyek (7.12 ábra).



7.12 ábra

Alkalmazhatjuk a logaritmikus reziduumokra vonatkozó integrálképletet. $P = 0$ miatt az adódik:

$$I = \oint_\gamma \operatorname{tg} \pi z dz = -\frac{1}{\pi} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi i(1 + 1 + 1 + 1) = -8i$$

3. $I := \oint_\gamma \frac{1}{\operatorname{cth} z \cdot \operatorname{sh}^2 z} dz$, ahol γ legyen a $|z| = 81\pi^2$ egyenletű, pozitívan irányított körív.

Mivel $(\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$, ezért (-1)-gyel való bővítés után az integrandus $\frac{f'(z)}{f(z)}$ alakú lesz, ahol $f(z) = \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

Az f függvénynek vannak zérushelyei, és vannak pólusai is.

f zérushelyei egybeesnek a ch függvény zérushelyeivel, ezek végtelen sokan vannak:

$$z_k = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Ezek mind egyszeres multiplicitású zérushelyek, és közülük 18 db esik a γ görbe belsejébe, méghozzá a $k = -9, \; -8, \ldots 0, \ldots 7, 8$ indexűek.

f elsőrendű pólusai azonosak az sh függvény zérushelyeivel. Ezek is végtelen sokan vannak:

$$z_m = i \cdot m \cdot \pi, \; m \in \mathbb{Z}.$$

Ezek közül 17 db esik a γ körív belsejébe, azok, melyeknek indexe: $m = -8, \; -7, \ldots 7, 8$.

Ezek után alkalmazhatjuk a logaritmikus reziduumokra vonatkozó integrálképletet:

$$I = -\oint_\gamma \frac{-1}{\operatorname{cth} z \cdot \operatorname{sh}^2 z} dz = -\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i(Z - P) =$$
$$= -2\pi i(18 \cdot 1 - 17 \cdot 1) = -2\pi i$$

4. $I := \oint_\gamma \frac{e^{2\pi i z}}{z \cdot \ln z} dz$, ahol γ a $|z - 1| = r, \; r < 1$ egyenletű körív.

Most az integrandus

$$\varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$$

alakra hozható, ahol $\varphi(z) = e^{2\pi i z}$, $f(z) = \ln z$. A γ körív által kijelölt körlapon belül $\ln z$ reguláris függvény, egyelten zérushelye van, a $z = 1$ pont. Mivel

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \text{ és } \frac{1}{1} = 1 \neq 0,$$

ezért a zérushely egyszeres multiplicitású.

Szinguláris pontok hiányában az integrál értéke:

$$I = \oint_\gamma \varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot \varphi(1) \cdot 1 = 2\pi i \cdot e^{2\pi i} = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i$$

5. $I := \oint_\gamma \operatorname{sh}^2 z \cdot \operatorname{ctg} z dz$, ahol γ az a pozitív irányítású téglalap, melynek csúcspontjai a $-1 + i, \; -1 - i, \; 4 - i, \; 4 + i$ komplex számok.

Az integrandus a $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ és $(\sin z)' = \cos z$ összefüggések miatt

$$\varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$$

alakú, $\varphi(z) = \operatorname{sh}^2 z$ és $f(z) = \sin z$ szereposztással az integrandus a teljes síkon reguláris függvény, így pólusai nincsenek, zérushelye azonban végtelen sok van:

$$z_k = k\pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

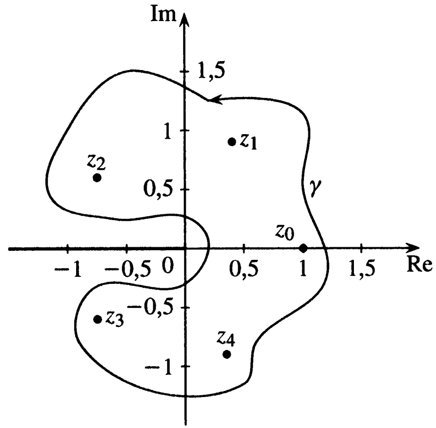
mely zérushelyek mind egyszeres multiplicitásúak.

Közülük kettő esik a kijelölt téglalap belsejébe: $0, \pi$.

Az integrál értéke tehát pólusok hiányában:

$$I = \oint_\gamma \varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \cdot \big(1 \cdot \varphi(0) + 1 \cdot \varphi(\pi)\big) =$$
$$= 2\pi i \cdot \big(\operatorname{sh}^2 0 + \operatorname{sh}^2 \pi\big) = 2\pi i \cdot \operatorname{sh}^2 \pi$$

6. $I := \oint_\gamma \ln z \cdot \frac{5z^4}{z^5 - 1} dz$, ahol γ tetszőleges olyan egyszerű zárt rektifikálható, pozitív irányítású görbe, amely megkerüli az ötödik egységgyököket, de nem metszi a valós tengely negatív szakaszát, és nem megy át a 0 ponton sem (7.13 ábra).



7.13 ábra

Világosan látszik, hogy az integrandus $\varphi(z) = \ln z$, $f(z) = z^5 - 1$ szereposztással

$$\varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$$

alakú. Itt f egy polinom, tehát reguláris függvény, melynek pólusa nincs, csak egyszeres multiplicitású zérushelyei, melyek éppen az ötödik egységgyökök:

$$z_k = e^{ik\frac{\pi}{5}},\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

A γ görbe a feltételek szerint belsejében tartalmazza mind az öt zérushelyet, továbbá φ reguláris a γ-n és belsejében.

Tehát alkalmazható az

$$\oint_\gamma \varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=0}^{4} \varphi(z_k) n_k$$

összefüggés. Most $n_k = 1$ minden k-ra, hiszen minden zérushely egyszeres multiplicitású, így:

$$I = \sum_{k=0}^{4} \ln\left(e^{ik\frac{\pi}{5}}\right) = \sum_{k=0}^{4} k \cdot \frac{i\pi}{5} = 2\pi i$$

7. $I := \oint_\gamma \dfrac{\pi \cdot e^{2z}}{\operatorname{tg} \pi z \cdot \cos^2 \pi z} dz$, ahol γ a $|z - 50| = 50{,}25$ egyenletű körív, pozitív irányítással.

Legyen $f(z) = \operatorname{tg} \pi z$. Mivel ekkor $f'(z) = \dfrac{\pi}{\cos^2 \pi z}$, ezért az integrandus

$$\varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$$

alakú, ahol $\varphi(z) = e^{2z}$.

$f(z)$-nek végtelen sok elsőrendű pólusa és végtelen sok egyszeres zérushelye van. Ezek az alábbiak:

pólusok: $\pi \cdot p_l = \frac{\pi}{2} + l\pi$, azaz $p_l = l + \frac{1}{2}$, $l \in \mathbb{Z}$;

zérushelyek: $\pi \cdot z_k = k \cdot \pi$, azaz $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

A γ görbe egy olyan kör, amely körülvesz 101 db zérushelyet, méghozzá a $k = 0, 1, 2, \ldots 100$ indexűeket, és belsejében tartalmaz 100 db pólust, az $l = 0, 1, 2, \ldots 99$ indexűeket.

Ha ehhez még hozzátesszük, hogy a $\varphi(z) = e^{2z}$ függvény mindenütt reguláris, akkor alkalmazhatjuk az

$$I = \oint_\gamma \varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi \left(\sum_{k=0}^{100} 1 \cdot \varphi(z_k) - \sum_{l=0}^{99} 1 \cdot \varphi(p_l) \right)$$

integrálformulát. Az „1” szorzótényezők azt jelzik, hogy a zérushelyek és a pólusok is egyszeresek. Tehát:

$$I = 2\pi i \left(\sum_{k=0}^{100} e^{2k} - \sum_{l=0}^{99} e^{2l+1} \right)$$

Vegyük észre, hogy a két szumma összefésülésével egy olyan mértani sorozatot kapunk, melynek kvóciense $-e$:

$$I = 2\pi i \cdot \left(1 - e + e^2 - e^3 + \ldots - e^{199} + e^{200}\right)$$

Ennek összege adja az integrál értékét:

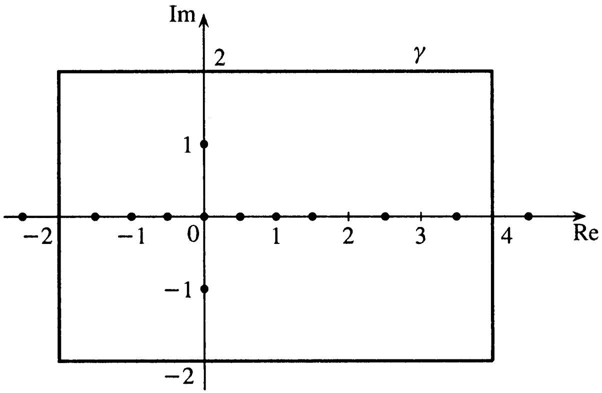
$$I = 2\pi i \cdot \frac{(-e)^{201} - 1}{-e - 1} = 2\pi i \cdot \frac{e^{201} + 1}{e + 1}$$

8. Számítsa ki az $I = \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ integrált, ha

$$f(z) = \frac{\left(z^4 - 1\right)^2}{\cos^3(\pi z)}$$

γ az a pozitívan irányított téglalap, melynek csúcsai a $-2 + 2i$, $-2 - 2i$, $4 - 2i$, $4 + 2i$ komplex számok.

Világos, hogy f-nek kétszeres zérushelyei a negyedik egységgyökök, tehát az 1, i, -1, $-i$ komplex számok.



7.14 ábra

Másrészt f pólusai a $\cos(\pi z) = 0$ egyenlet minden gyöke:

$$\pi z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ z_k = k + \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ezek a gyökök harmadrendű pólusok, ugyanis:

$$\left(\cos^3 \pi z\right)'\Big|_{z=z_k} = \left(-3\pi \cos^2 \pi z \cdot \sin \pi z\right)\Big|_{z=z_k} = 0$$

$$\left(\cos^3 \pi z\right)''\Big|_{z=z_k} = \left(6\pi^2 \cos \pi z \sin^2 \pi z - 3\pi^2 \cos^3 \pi z\right)\Big|_{z=z_k} = 0$$

$$\left(\cos^3 \pi z\right)^{(3)}\Big|_{z=z_k} = \left(-6\pi^3 \sin^3 \pi z + 21\pi^3 \cos^2 \pi z \sin \pi z\right)\Big|_{z=z_k} =$$

$$= -6\pi^3 \cdot (-1)^{3k} \neq 0$$

A megadott γ görbe megkerüli az összes zérushelyet és 6 db harmadrendű pólust, a $k = -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ indexűeket (7.14 ábra).

Ezek alapján az I integrál értéke:

$$I = 2\pi i(Z - P) = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{4} n_k - \sum_{k=-2}^{3} n_k\right),$$

ahol n_k a zérushelyek multiplicitása, illetve a pólusok rendje, tehát:

$$I = 2\pi i \cdot (4 \cdot 2 - 6 \cdot 3) = -20\pi i$$

9. Számítsuk ki az $I = \oint_\gamma z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ integrált, ha

$$f(z) = \frac{z^3 + 6z^2 + 9z}{(z - i)^2 (z^2 + 4zi - 8)^3},$$

és γ olyan egyszerű zárt rektifikálható görbe, amely megkerüli f összes zérushelyét és pólusát.

Kissé átalakítva a törtet, az f függvény alakja áttekinthetőbbé válik:

$$f(z) = \frac{z(z + 3)^2}{(z - i)^2 (z + 2i)^6}$$

Innen már leolvasható, hogy a $z = 0$ egyszeres, a $z = -3$ pedig kétszeres multiplicitású zérushely, a $z = i$ másodrendű, a $z = -2i$ pedig hatodrendű pólusok.

A $\varphi(z) = z$ függvény a teljes síkon reguláris, így a γ görbén és annak belsejében is. Tehát az integrált számíthatjuk az

$$I = \oint_\gamma z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum n_k \cdot z_n - \sum m_l \cdot p_l\right)$$

formulával, ahol z_n-ek a zérushelyek, p_l-ek a póIushelyek, n_k és m_l a megfelelő multiplicitások.

Helyettesítve:

$$I = 2\pi i \cdot \left(1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3)\right) - \left(2i + 6(-2i)\right) = 2\pi i(-6 - 2i + 12i) =$$

$$= -20\pi - 12\pi i$$

7.4 Valós integrálok kiszámítása

Gyakorló feladatok

Számítsa ki a következő valós integrálokat a reziduumtétel felhasználásával!

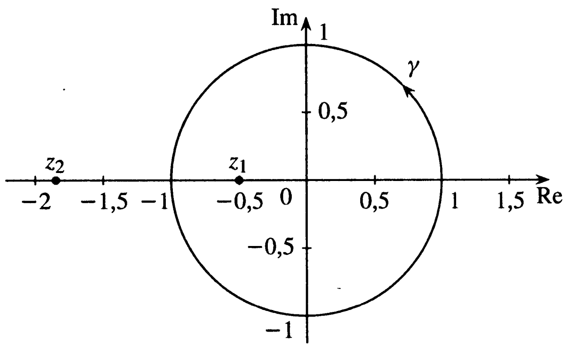
1. $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{6 + 5\cos x} dx$

Végezzük el az integrandusban az $e^{ix} = z$ helyettesítést, melynek alapján

$$x = \frac{1}{i}\ln z,\ dx = \frac{1}{iz}dz, \text{ továbbá } \cos x = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Ha most $0 \le x \le 2\pi$, akkor z éppen a komplex sík $|z| = 1$ egyenletű γ körívét futja be pozitív irányban. Integráljunk a γ köríven:

$$I = \oint_\gamma \frac{1}{6 + 5\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{iz}dz = \oint_\gamma \frac{-2i}{5z^2 + 12z + 5}dz$$



7.15 ábra

Az integrandus szinguláris helyei a nevező nullahelyei:

$$z_1 = -\frac{6}{5} + \frac{\sqrt{11}}{5} \qquad z_1 = -\frac{6}{5} - \frac{\sqrt{11}}{5}$$

Ezek közül z_1 a γ kör belsejébe esik, hiszen abszolút értéke kisebb 1-nél, a z_2 azonban az egységkörön kívül van (7.15 ábra), tehát a reziduumtétel szerint:

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(z_1)$$

Mivel z_1 a nevező egyszeres zérushelye, ezért az integrandusnak elsőrendű pólusa, tehát:

$$\operatorname{Res}(z_1) = \left.\frac{-2i}{10z + 12}\right|_{z=z_1} = \frac{-2i}{\sqrt{44}}$$

Tehát az integrál értéke:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{\sqrt{44}} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$$

2. $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 4\sin x} dx$

Az előző feladat mintájára alkalmazzuk az $e^{ix} = z$ helyettesítést, melynek alapján:

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz} \qquad dx = \frac{1}{iz}dz$$

Az integrációs út pedig ismét a komplex sík $|z| = 1$ egyenletű γ köríve, ezzel:

$$I = \oint_\gamma \frac{1}{3 - 4\cdot\dfrac{z^2-1}{2iz}} \cdot \frac{1}{iz}dz = \oint_\gamma \frac{-1}{2z^2 - 3iz - 2}dz$$

Az integrandus izolált szinguláris helyei a nevező zérushelyei:

$$z_1 = \frac{7 + 3i}{4} \qquad z_2 = \frac{-7 + 3i}{4}$$

Ezek mindketten az egység sugarú körön kívül helyezkednek el, ami azt jelenti, hogy az integrandus a γ görbén és azon belül reguláris függvény.

Tehát a Cauchy-féle alaptétel szerint: $I = 0$

3. $I := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$

Alkalmazzuk a szokásos $z = e^{ix}$ helyettesítést, mellyel

$$\sin x = \frac{z^2-1}{2iz} \qquad dx = \frac{1}{iz}dz,$$

és integráljunk az origó középű egységnyi sugarú γ körvonalon. Ekkor:

$$I = \oint_\gamma \frac{1}{1+\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}\cdot\frac{1}{iz}dz = \frac{4}{i}\cdot\oint_\gamma \frac{z}{z^4-6z^2+1}dz$$

A reziduumtétel alkalmazásához keressük meg az egységkör belsejébe eső szinguláris pontokat! A megoldóképlettel kapjuk, hogy:

$$z_1^2 = 3+2\sqrt{2} \text{ és } z_2^2 = 3-2\sqrt{2}$$

Közülük csak az utóbbi $\left(z_2^2\right)$ esik az egységkörbe, ennek négyzetgyökei (legyenek ezek u_1 és u_2) elsőrendű pólusok. Ezeken a helyeken a reziduumok:

$$\operatorname{Res}\left(u_1\right) = \left.\frac{z}{4z^3-12z}\right|_{z=u_1} = \left.\frac{1}{4z^2-12}\right|_{z=u_1} =$$

$$= \frac{1}{4\left(3-2\sqrt{2}\right)-12} = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

Mivel a reziduum értéke csak u_1^2-től függ, és $u_1^2 = u_2^2 = 3-2\sqrt{2}$, ezért világos, hogy

$$\operatorname{Res}\left(u_1\right) = \operatorname{Res}\left(u_2\right) = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

Tehát az integrál értéke:

$$I = 2\pi i\left(-\frac{4}{i}\cdot 2\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{16}\right)\right) = \sqrt{2}\cdot\pi$$

$$\textbf{4. } I := \int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos x-\sin x}dx$$

Az integrandusban elvégezzük a szokásos helyettesítéseket:

$e^{ix} = z$-ből következően

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \sin x = \frac{z^2-1}{2iz}, \qquad dx = \frac{1}{iz}dz,$$

majd áttérünk a $|z| = 1$ körön való integrálásra. Elvégezve a helyettesítéseket, ezt kapjuk:

$$I = \oint_\gamma \frac{-2i}{(1+i)z^2+4z+(1-i)}dz$$

Az integrandus szinguláris pontjai a következők:

$$z_1 = \frac{-2+\sqrt{2}}{1+i} \qquad z_2 = \frac{-2-\sqrt{2}}{1+i}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $|z_1| = \sqrt{3-2\sqrt{2}} < 1$, tehát z_1 a γ görbén belül van, z_2 azonban kívül. Mivel z_1 a nevezőnek egyszeres zérushelye, ezért az integrandusnak elsőrendű pólusa, tehát:

$$\operatorname{Res}\left(z_1\right) = \left.\frac{-2i}{2(1+i)z+4}\right|_{z=z_1} = -\frac{i}{\sqrt{2}}$$

Tehát a keresett integrál értéke a reziduumtétel felhasználásával:

$$I = 2\pi i\cdot\operatorname{Res}\left(z_1\right) = 2\pi i\cdot\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\pi$$

$$\textbf{5. } I := \int_0^{2\pi}\frac{\cos 3x}{4-2\cos x}dx$$

Alkalmazzuk a megszokott $e^{ix} = z$ helyettesítést, de most szükségünk van az eddigiekben használt formulák általánosítására is.

Már láttuk:

$$\cos x = \frac{z^2+1}{2z} \text{ és } \sin x = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Ugyanezzel a logikával kapjuk:

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) = \frac{z^{2n}+1}{2z^n}$$

Hasonlóan:

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right) = \frac{z^{2n}-1}{2iz^n}$$

Ebben a feladatban az előző formulára van szükség $n = 3$ esetén:

$$\cos 3x = \frac{z^6+1}{2z^3}$$

Elvégezve a helyettesítést, és áttérve a $|z| = 1$ egyenletű γ körön való integrálásra, ezt kapjuk:

$$I = \oint_\gamma \frac{z^6+1}{-2i\cdot z^3\cdot\left(z^2-4z+1\right)}dz$$

Az integrandusnak a $z_0 = 0$ pont harmadrendű pólusa. További pólusokat kaphatunk a megoldóképlettel:

$$z_1 = 2+\sqrt{3} \quad \text{és} \quad z_2 = 2-\sqrt{3}$$

Ezek elsőrendű pólusok. A felsoroltak közül z_0 és z_1 van az egységkör belsejében. Ezeken a helyeken számítjuk a reziduum értékét:

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{z\to 0}\left(z^3\cdot f(z)\right)'' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^6+1}{z^2-4z+1}\right)'' = 15i$$

Másrészt:

$$\mathrm{Res}\left(z_1\right) = \lim_{z\to z_1}\left(\left(z-z_1\right)\cdot f(z)\right) = \lim_{z\to z_1}\left(\frac{z^6+1}{z^3\left(z-z_2\right)}\cdot\frac{i}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\left(z_1-z_2\right)}\left(z_1^3+\frac{1}{z_1^3}\right) = -i\cdot\frac{13\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Tehát a reziduumtétellel az integrál értéke:

$$I = 2\pi i\cdot\left(15i - i\frac{13\cdot\sqrt{3}}{3}\right) = 2\pi\cdot\left(\frac{13\cdot\sqrt{3}}{3}-15\right)$$

7.5 Improprius integrálok kiszámítása

Gyakorló feladatok

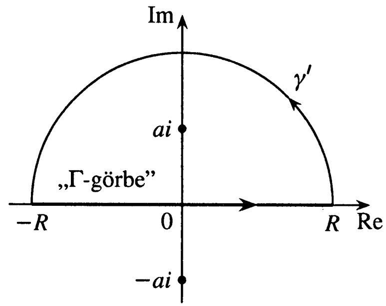
1. $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx \qquad a\in\mathbb{R}^+$

Terjesszük ki az integrandust az $\mathrm{Im}z \geq 0$ félsíkra az

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$$

definicióval. A valós tengelyen f természetesen egybeesik az integrandussal. Ennek a komplex f függvénynek két elsőrendű pólusa van, ezek a $z = \pm ai$ komplex számok.

Integrációs útnak válasszuk a $[-R, R]$ intervallumot és az ehhez csatlakozó $|z| = R$ körív $\mathrm{Im}z \geq 0$ félsíkba eső felét, pozitív irányítással (7.16 ábra).



7.16 ábra

Így kaptunk egy pozitívan irányított zárt görbét, amelyet a következő példákban is gyakran használni fogunk, jelöljük ezért Γ-val. (Természetesen Γ függ az R sugártól, tehát logikusabb lenne a Γ_R jelölés, de az egyszerűbb Γ sem okoz félreértést.)

Számítsuk ki f integrálját a zárt Γ görbére vonatkozólag! Ha $R > a$, az ai pólus a Γ belsejébe esik, a $-ai$ pólus azonban R-től függetlenül mindig Γ-n kívül marad. Így a reziduumtétel szerint:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+a^2}dx + \int_{|z|=R}\frac{1}{z^2+a^2}dz = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(ai)$$

Az I integrál értéke ebből $R\to\infty$ határátmenettel adódik az alábbi módon:

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+a^2}dx = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(ai) - \lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{1}{z^2+a^2}dz$$

Mivel az integrandus egy olyan racionális törtfüggvény, melynek nevezője kettővel magasabb fokú a számlálónál, ezért az általános elmélet szerint a félkörre vonatkozó integrál a 0-hoz tart. Ez a tény ebben a konkrét esetben nagyon egyszerűen adódik az általános tételre való hivatkozás nélkül is, ugyanis:

$$0 \leq \left|\int_{|z|=R}\frac{1}{z^2+a^2}dz\right| \leq \int_{|z|=R}\frac{1}{R^2-a^2}dz = \frac{2\pi R}{R^2-a^2}\to 0$$

Ezekből már következik:

$$I = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(ai)$$

Mivel $z = ai$ elsőrendű pólus, ezért

$$\mathrm{Res}(ai) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=ai} = \frac{1}{2ai}$$

Tehát:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2ai} = \frac{\pi}{a}$$

Ez az eredmény természetesen egyezik a valós analizisbeli számítás eredményével, ugyanis:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \cdot \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \lim_{R\to\infty} \left[a \cdot \mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right]_{-R}^{R} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{a}$$

A megoldott feladat egyszerűen általánosítható az

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n} dx,\ a \in \mathbb{R}^+,\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

esetre. A különbség mindössze abban van, hogy ekkor $z = ai$ nem elsőrendű, hanem n-edrendű pólus.

Így például $n = 2$-re:

$$\mathrm{Res}(ai) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to ai} \left((z - ai)^2 \cdot \frac{1}{\left(z^2 + a^2\right)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to ai} \left(\frac{1}{(z + ai)^2}\right)' = \lim_{z\to ai} \left(\frac{-2}{(z + ai)^3}\right) = \frac{1}{4a^3 i}$$

Ahonnan:

$$I_2 = 2\pi i \cdot \frac{1}{4a^3 i} = \frac{\pi}{2a^3}$$

2. $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 4x + 5\right)} dx$

Első lépésként az integrandust kiterjesztjük az $\mathrm{Im} z \geq 0$ felső féksíkra a következő definicióval:

$$f(z) = \frac{2z}{\left(z^2 + 4\right)\left(z^2 + 4z + 5\right)}$$

f a valós tengelyen természetesen egybeesik a valós $x \mapsto f(x)$ integrandussal.

Határozzuk meg f szinguláris pontjait. Ezek a nevező nullahelyei:

$$z_1 = 2i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = -2 + i,\ z_4 = -2 - i,$$

melyek mindannyian elsőrendű pólusok.

Legyen az integrációs út ismét a Γ zárt görbe (7.16 ábra). Ha $R > \sqrt{5}$, akkor Γ megkerüli a z_1 és z_3 pólusokat, a többi pólus azonban minden R esetén Γ-n kívül esik.

Ezért ha a $|z| = R$, $\mathrm{Im} z \geq 0$ félkörre bevezetjük a γ' jelölést, ezt kapjuk:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma'} f(z)dz = 2\pi i \cdot \left(\mathrm{Res}\left(z_1\right) + \mathrm{Res}\left(z_3\right)\right)$$

Az I integrál értéke ebből átrendezés után $R \to \infty$ határátmenettel adódik:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \cdot \left(\mathrm{Res}\left(z_1\right) + \mathrm{Res}\left(z_3\right)\right) - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'} f(z)dz$$

Mivel a nevező fokszáma 3-mal nagyobb, mint a számlálóé, a félkörre vonatkozó integrál 0-hoz tart, ha $R \to \infty$. Elég tehát a reziduumokat kiszámítani:

$$\mathrm{Res}\left(z_1\right) = \lim_{z\to z_1} \left(\left(z - z_1\right) \cdot f(z)\right) = \lim_{z\to z_1} \frac{2z}{(z + 2i)\left(z^2 + 4z + 5\right)} =$$

$$= \frac{1}{8i + 1} = \frac{1 - 8i}{65}$$

$$\mathrm{Res}\left(z_3\right) = \lim_{z\to z_3} \left(\left(z - z_3\right) \cdot f(z)\right) = \lim_{z\to z_3} \frac{2z}{\left(z^2 + 4\right)\left(z - z_4\right)} =$$

$$= \frac{-1 + 18i}{65}$$

Ezek, valamint a reziduumtétel felhasználásával:

$$I = 2\pi i \cdot \left(\frac{1 - 8i}{65} + \frac{-1 + 18i}{65}\right) = -\frac{4\pi}{13}$$

3. $I := \int_0^\infty \frac{3x^2}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$

Az előzőekkel ellentétben nem a teljes számegyenesen integrálunk. Azonban a függvény páros, így könnyen áttérhetünk a $-\infty$-től $+\infty$-ig vett integrálra:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$$

Ennek kiszámítására a már bevált módszert alkalmazzuk. Kiterjesztjük az $x \mapsto f(x)$ valós integrandust a komplex síkra az

$$f(z) = \frac{3z^2}{z^4 + 13z^2 + 36}$$

definicióval, majd integrálunk a Γ görbére (lásd a 7.16 ábrát).

Az f komplex függvény alábbi

$$f(z) = \frac{3z^2}{(z - 2i)(z + 2i)(z - 3i)(z + 3i)}$$

átalakításából világos, hogy az $\mathrm{Im} z \geq 0$ felső félsíkban f-nek két elsőrendű pólusa van: $2i$, $3i$. Ezeken a helyeken kiszámítjuk a reziduumokat:

$$\mathrm{Res}(f, 2i) = \lim_{z \to 2i} = \big((z - 2i) \cdot f(z)\big) = \frac{3 \cdot (2i)^2}{4i \cdot (-i) \cdot 5i} = -\frac{6}{10i}$$

És hasonlóan:

$$\mathrm{Res}(f, 3i) = \lim_{z \to 3i} = \big((z - 3i) \cdot f(z)\big) = \frac{3 \cdot (3i)^2}{i \cdot 5i \cdot 6i} = \frac{9}{10i}$$

A zárt Γ görbére vonatkozó integrál $R > 3$ esetén a reziduumtétel szerint:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \left(-\frac{6}{10i} + \frac{9}{10i}\right) = \frac{3\pi}{5}$$

Ha elvégezzük Γ szokásos felbontását a $[-R, R]$ intervallumra és a γ' félkörre (7.16 ábra), az alábbit kapjuk:

$$2I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_\Gamma f(z)dz - \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma'} f(z)dz$$

Mivel a nevező fokszáma 2-vel nagyobb a számláló fokszámánál, ezért a γ'-re vonatkozó integrál határértéke zérus, tehát:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \oint_\Gamma f(z)dz = \frac{3\pi}{10}$$

4. $I := \int_0^\infty \frac{1}{x^8 + 1} dx$

Mivel az integrandus páros függvény, áttérhetünk a teljes valós számegyenesen történő integrálásra.

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^8 + 1} dx$$

Terjesszük ki az $x \mapsto f(x)$ valós integrandust a komplex síkra az

$$f(z) = \frac{1}{z^8 + 1}$$

definicióval. Ez a függvény a valós tengelyen egybeesik az integrandussal. Az integrációs út pedig legyen ugyanaz a Γ görbe, mint az előző példákban: $[-R, R]$ intervallum és az $\mathrm{Im} z \geq 0$ félsíkban hozzá csatlakozó $|z| = R$ egyenletű γ' félkörív.

Az f függvénynek 8 db szinguláris pontja van, ezek a -1 komplex szám nyolcadik gyökei. Exponenciális alakban a következők:

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{2\pi}{8}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 7$$

Ezek közül a felső félsíkban található 4 db, a $k = 0, 1, 2, 3$ indexűek, melyek $R > 1$ esetén a Γ görbe belsejébe esnek. A reziduumtétel szerint, ha $R > 1$, akkor:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma'} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Res}\big(f, z_k\big)$$

Átrendezéssel és $R \to \infty$ határátmenettel adódik az I integrál értékének kétszerese:

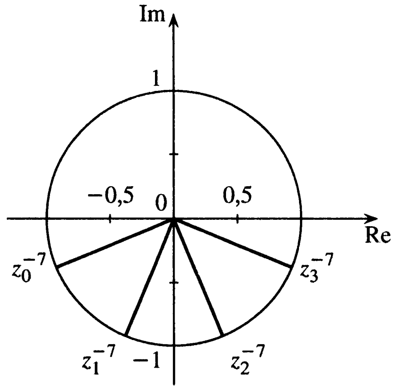
$$2I = 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^{3} \mathrm{Res}\big(f, z_k\big) - \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma'} f(z)dz$$

Mivel f számlálója nulladfokú, nevezője pedig nyolcadfokú – tehát a különbség több, mint kettő – a γ'-re vonatkozó integrál határértéke zérus. Elég tehát a reziduumokat kiszámítani. Mivel mindegyik szinguláris hely elsőrendű pólus, ezért:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \left.\frac{1}{8z^7}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{8 \cdot e^{i\frac{\pi}{8}\cdot(2k+1)\cdot 7}}, \text{ ha } k = 0, 1, 2, 3.$$

Tehát:

$$2I = 2\pi i \cdot \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{8 \cdot e^{i\frac{\pi}{8}\cdot(2k+1)\cdot 7}} = \frac{\pi i}{4}\sum_{k=0}^{3} z_k^{-7}$$



7.17 ábra

Az összegzésnél célszerű kihasználni, hogy z_0^{-7} és z_3^{-7}, illetve z_1^{-7} és z_2^{-7} páronként szimmetrikusan helyezkednek el az imaginárius tengelyre vonatkozólag, rendre $\frac{3\pi}{8}$, illetve $\frac{\pi}{8}$ szöget zárnak be az imaginárius tengellyel (7.17 ábra).

Így az összegzés páronként egyszerűen elvégezhető:

$$I = \frac{\pi i}{8} \cdot \left(\left(z_0^{-7} + z_3^{-7}\right) + \left(z_1^{-7} + z_2^{-7}\right)\right),$$

ahol

$$z_0^{-7} + z_3^{-7} = -2i \cdot \cos\frac{3\pi}{8} \qquad z_1^{-7} + z_2^{-7} = -2i \cdot \cos\frac{\pi}{8}.$$

Tehát:

$$I = \frac{\pi i}{8} \cdot (-2i) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

A példa könnyen általánosítható arra az esetre, amikor a nevezőbeli hatványkitevő páros szám:

$$I_{2n} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{x^{2n} + a^{2n}}\,dx,$$

ahol p tetszőleges olyan legfeljebb $(2n-2)$-ed fokú polinom, melynek a

$$z_k = e^{i\frac{\pi}{2n}(2k+1)} \qquad k = 0, 1, \dots 2n-1$$

komplex számok nem zérushelyei. Ekkor ugyanis a z_k számok mind elsőrendű pólusok, melyek közül csak a felső félsíkba eső izolált szingularitásokat kell figyelembe venni.

Ha valamelyik z_k a p polinomnak zérushelye, akkor z_k megszüntethető szingularitás. Ekkor még egyszerűbb dolgunk van. Erre látunk példát a következő pontban.

5. $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 - 1}{x^8 - 1}\,dx$

Első lépésként szokás szerint kiterjesztjük az integrandust a komplex síkra az alábbi definícióval:

$$f(z) = \frac{z^6 - 1}{z^8 - 1}$$

Ez a függvény a valós tengelyen megegyezik a valós $x \mapsto f(x)$ integrandussal. Integrációs útként jelöljük ki a Γ görbét, amely a $[-R, R]$ intervallum és $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ egyenletű γ' félkör (7.16 ábra).

Keressük meg f szinguláris pontjait. Ezek a nevező zérushelyei közül kerülnek ki, melyek éppen a nyolcadik egységgyökök:

$$z_k = e^{i\cdot k\cdot\frac{\pi}{8}} \qquad k = 0, 1, \dots 7$$

Ezek között van $z_0 = 1$ és $z_4 = -1$ is, melyek a valós tengely pontjai. Ezek a valós számok a nevezőnek egyszeres zérushelyei, de nullahelyei a számlálónak is, tehát ezek a helyek nem pólusok, hanem megszüntethető szingularitások.

Ez adódik például a

$$\lim_{z\to\pm 1} \frac{z^6 - 1}{z^8 - 1} = \frac{6}{8}$$

határértékrelációkból is.

A maradék 6 db szinguláris pont közül $R > 1$ esetén a $k = 1, 2, 3$ indexű esik a Γ görbe belsejébe. Így rögzített $R > 1$ esetén a reziduumtétel szerint:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma'} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}(z_k)$$

Átrendezve az egyenlőséget és képezve az $R \to \infty$ határmenetet, ezt kapjuk:

$$I = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}(z_k) - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'} f(z)dz$$

A fokszámok közötti különbségből adódóan a γ'-re vonatkozó integrál határértéke zérus, így elég a reziduumokat kiszámítani.

A szinguláris helyek közül tehát z_1, z_2 és z_3 esik a Γ belsejébe, illetve a felső félsíkba. Ezek mind elsőrendű pólusok, tehát:

$$\mathrm{Res}(z_k) = \left.\frac{z^6 - 1}{8z^7}\right|_{z=z_k} = \frac{z_k^6 - 1}{8z_k^7} = \frac{z_k^7 - z_k}{8}$$

A bővítésnél felhasználtuk, hogy z_k-k nyolcadik egységgyökök, tehát minden k-ra $z_k^8 = 1$.

Vezessük be az $u = z_1$ jelölést. Ezzel a jelöléssel, alkalmazva a mértani sorozat összegképletét, az alábbi adódik:

$$\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}(z_k) = \frac{u^7 - u + u^{14} - u^2 + u^{21} - u^3}{8} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{u^{28} - u^7}{u^7 - 1} - \frac{u^4 - u}{u - 1}\right)$$

Most használjuk fel, hogy $u^4 = -1$, amiből az is következik, hogy:

$$u^{28} = -1$$

Ezeket helyettesítve:

$$\sum_{k=1}^{3} \mathrm{Res}(z_k) = \frac{1}{8}\left(\frac{1 + u^7}{1 - u^7} - \frac{1 + u}{1 - u}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1 + e^{7i\frac{\pi}{4}}}{1 - e^{7i\frac{\pi}{4}}} - \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{4}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)$$

Az elemi függvények definiciója alapján könnyen levezethető:

$$\mathrm{ctg}\, z = -\frac{1}{i} \cdot \frac{1 + e^{2iz}}{1 - e^{2iz}}$$

Ezt és a reziduumok összegét felhasználva az integrál értékére a következő adódik:

$$I = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{8i}\right) \cdot \left(\mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{8} - \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{8} - \mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{8}\right)$$

A fenti megoldási módszer változtatás nélkül alkalmazható az alábbi általánosabb esetre is:

$$I_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} - 1}{x^{2n} - 1} dx$$

Ha $m < n$, akkor a számítások az alábbi eredményt szolgáltatják:

$$I_{m,n} = \frac{1}{2ni}\left(\mathrm{ctg}\left(\frac{1}{2n}\pi\right) - \mathrm{ctg}\left(\frac{2m + 1}{2n}\pi\right) \cdot 2\pi i\right)$$

6. $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 - x^4}{x^8 - 1} dx$

Ez az integrál könnyen kiszámítható, ha felhasználjuk az előző példa eredményeit. Azonos átalakításokkal:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 - 1 - (x^4 - 1)}{x^8 - 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 - 1}{x^8 - 1} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 - 1}{x^8 - 1} dx =$$

$$= -\frac{2\pi}{4} \cdot \left(\mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{8} - \mathrm{ctg}\,\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\mathrm{ctg}\,\frac{5\pi}{8} - \mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{8}\right)$$

Ez az eredmény is könnyen általánosítható az alábbi módon. Ha $m < n$ és $k < n$, akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} - x^{2k}}{x^{2n} - 1} dx = \frac{\pi}{n} \cdot \left(\mathrm{ctg}\left(\frac{2k + 1}{2n} \cdot \pi\right) - \mathrm{ctg}\left(\frac{2m + 1}{2n} \cdot \pi\right)\right)$$

Mivel ezek az integrandusok páros függvények, ezekből az eredményekből 2-vel való osztással azonnal következnek a $[0, \infty]$ intervallumra vonatkozó integrálok értéke is.

7. $I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx \qquad a \in \mathbb{R}^+$

A kijelölt valós integrandus helyett vizsgáljuk az

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

komplex függvényt! Az Euler-összefüggés szerint:

$$f(z) = \frac{\cos z + i \sin z}{z^2 + a^2}$$

Tehát valós x változó esetén a valós változós komplex értékű $x \mapsto f(x)$ függvény valós része éppen a kijelölt integrandus. Integrációs út ismét legyen a Γ görbe (7.16 ábra).

A komplex f függvénynek két elsőrendű pólusa van: $\pm ai$. Ha $R > a$, akkor az ai pólus benne van a Γ görbe belsejében. Ebben a pontban a reziduum:

$$\operatorname{Res}(f, ai) = \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=ai} = \frac{e^{-a}}{2ai}$$

A reziduumtétel szerint ennek felhasználásával:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma'} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2ai}$$

$x \mapsto f(x)$ improprius integrálját kiszámíthatjuk $R \to \infty$ határmenettel. Átrendezés után adódik, hogy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a} - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'} f(z)dz$$

Mivel a γ' félkörív az $\operatorname{Im} z \geq 0$ félsíkban van, ezért $\left|e^{ix}\right| = 1$ és $y \geq 0$ miatt

$$\left|e^{iz}\right| = \left|e^{i(x+iy)}\right| = \left|e^{ix}\right| \cdot e^{-y} \leq 1,$$

ezért az integrandus becsülhető az alábbi módon:

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\right| \leq \left|\frac{1}{z^2 + a^2}\right|$$

Mivel ez utóbbi tört olyan racionális törtfüggvény, melynek nevezője kettővel magasabb fokú, mint a számláló, ezért a γ'-re vonatkozó integrál határértéke ismét zérus. Tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2}dx = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a}$$

Ennek valós része szolgáltatja a keresett integrált. Mivel ez valós szám, ezért:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}dx = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{a} \cdot e^{-a}\right) = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a}$$

Részeredményként adódik az a nyilvánvaló dolog is, hogy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + a^2}dx = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{a} \cdot e^{-a}\right) = 0$$

Ugyanis a valós tengelyen f képzetes része éppen $\frac{\sin x}{x^2 + a^2}$. A kapott eredmény azért magától értetődő, mert a függvény páratlan, tehát a teljes számegyenesre vonatkozó integrálja csakis zérus lehet.

Megjegyezzük még, hogy a

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)dz = 0$$

határérték a Jordan-lemmából is következik, hiszen

$$f(z) = g(z) \cdot e^{iz}$$

alakú, ahol $g(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$, mely $z \to \infty$ esetén egyenletesen tart 0-hoz.

8. $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin 3x}{x^2 + 16}dx$

Az integrandus páros függvény, hiszen a nevezője páros, a számlálója pedig két páratlan függvény szorzataként szintén páros.

Ezért áttérhetünk a teljes valós számegyenesen vett integrálra:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin 3x}{x^2 + 16}dx$$

Vizsgáljuk az integrandus helyett az

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 16} \cdot e^{i3z}$$

komplex függvényt, és integráljunk a szokásos Γ görbe mentén (7.16 ábra)!

A kijelölt valós integrandus ezen komplex f függvény valós tengelyre vonatkozó leszűkítésének képzetes része. Keressük meg f szinguláris pontjait! Ezek a -16 komplex szám második gyökei: $\pm 4i$.

Ha $R > 4$, akkor a $z = 4i$ esik a Γ görbe belsejébe. A $z = 4i$ komplex szám elsőrendű pólus, tehát:

$$\mathrm{Res}(f, 4) = \left.\frac{z \cdot e^{i3z}}{2z}\right|_{z=4i} = \frac{e^{-12}}{2}$$

Tehát $R > 4$ esetén a reziduumtétel szerint:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma'} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-12}}{2}$$

Ebből $R \to \infty$ határátmenettel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \cdot e^{-12} - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'} f(z)dz$$

Becsüljük meg most f racionális részét:

$$\left|\frac{z}{z^2+4}\right| \le \max\left|\frac{z}{z^2+4}\right| = \frac{R}{R^2-4}$$

Ahonnan világos, hogy $R \to \infty$ esetén $\frac{z}{z^2+4}$ egyenletesen tart 0-hoz, tehát Jordan lemmája szerint:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'} \frac{z}{z^2+4} e^{3iz} dz = 0$$

Tehát:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Im}\left(\pi i \cdot e^{-12}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-12}$$

9. $I := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot \cos 2x}{x^4 + 6x^2 + 9} dx$

Mivel az integrandus páros függvény, áttérhetünk a teljes számegyenesre vonatkozó integrálra:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cdot \cos 2x}{x^4 + 6x^2 + 9} dx$$

Vizsgáljuk az alábbi komplex függvényt:

$$f(z) = \frac{z^2 \cdot e^{2iz}}{z^4 + 6z^2 + 9} = \frac{z^2}{\left(z^2+3\right)^2} \cdot e^{2iz}$$

Világos, hogy a valós tengelyen a komplex f valós része éppen a kijelölt valós integrandus.

Az f függvénynek 2 db másodrendű pólusa van, ezek: $\pm\sqrt{3}i$. Az integrációs útvonal legyen megint a Γ görbe (7.16 ábra).

Ha $R > \sqrt{3}$, a $z_1 = \sqrt{3} \cdot i$ pólus Γ-n belül van, a $z_2 = -\sqrt{3} \cdot i$ pedig mindig kívül marad. Elég tehát a z_1 ponthoz tartozó reziduumot kiszámítani, ugyanis a reziduumtétel szerint:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(z_1\right)$$

Mivel z_1 másodrendű pólus, ezért:

$$\mathrm{Res}\left(z_1\right) = \lim_{z\to z_1} \left((z-z_1)^2 \cdot f(z)\right)' = \lim_{z\to z_1} \left(\frac{z^2 \cdot e^{2iz}}{\left(z+\sqrt{3}i\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{3}}{12} e^{-2\sqrt{3}} i$$

Tehát:

$$\oint_\Gamma \frac{z^2}{\left(z^2+3\right)^2} dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left(z_1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5}{6}\right) \pi e^{-2\sqrt{3}}$$

Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5}{6}\right) \pi e^{-2\sqrt{3}} - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'} f(z)dz,$$

ezért ki kell számítani a γ'-re vonatkozó integrál határértékét.

Becsüljük meg f racionális részét:

$$\left|\frac{z^2}{\left(z^2+3\right)^2}\right| \le \max_{|z|=R} \left|\frac{z^2}{\left(z^2+3\right)^2}\right| \le \frac{R^2}{\left(R^2-3\right)^2} \to 0,$$

ha $R \to \infty$, ami azt jelenti, hogy a racionális törtfüggvény egyenletesen tart 0-hoz, tehát a Jordan-lemma szerint a γ'-re vonatkozó integrál eltűnik.

Tehát:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot e^{-2\sqrt{3}}$$

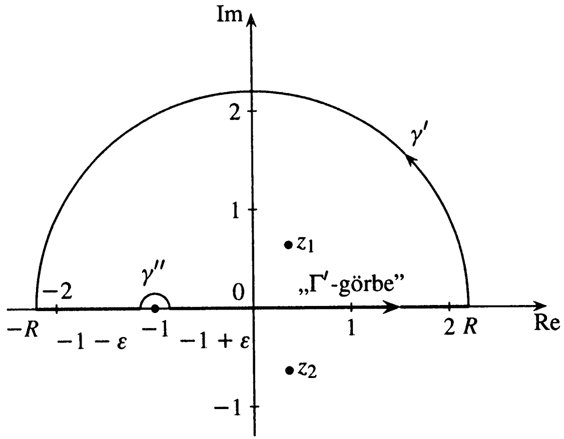
10. $I := \displaystyle\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$

Terjesszük ki az integrandust az $\operatorname{Im} z \geq 0$ felső félsíkra egyszerűen az

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$$

definícióval. Ennek valós tengelyre vonatkozó leszűkítése megegyezik az $x \mapsto f(x)$ integrandussal.

Az integrációs út megválasztásánál azonban óvatosabban kell eljárnunk, hiszen az f függvénynek a valós tengelyen van szingularitása, a $z = -1$ pont elsőrendű pólus.



7.18 ábra

A reziduumtétel alkalmazásához olyan integrációs utat kell választani, amely egyes szingularitásokat megkerül, egyeseket elkerül, de nem halad át rajtuk. Ezért az előző pontokban alkalmazott zárt Γ görbét úgy módosítjuk, hogy beiktatunk egy olyan ε sugarú félkörívet, amely megkerüli a -1 szinguláris pontot.

Pontosabban a Γ' görbe legyen a következő: a $[-R, -1-\varepsilon]$ intervallumhoz csatlakozik a $|z+1| = \varepsilon$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ egyenletű γ'' félkörív, ehhez a $[-1+\varepsilon, R]$ intervallum, majd a megszokott $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ egyenletű γ' félkörrel záródik a Γ' görbe, összességében pozitívan irányítva (7.18 ábra).

Az integrandusnak három darab elsőrendű pólusa van, a -1 harmadik gyökei:

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2 = e^{i\pi} = 1 \qquad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

Ha $R > 1$, akkor z_1 a Γ' belsejében van, z_2 és z_3 mindig kívül esik rajta.

Alkalmazzuk a reziduumtételt:

$$\int_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\gamma''} f(z)dz + \int_{-1+\varepsilon}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma'} f(z)dz =$$
$$= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(z_1)$$

Ha kiszámítjuk $R \to \infty$ és $\varepsilon \to 0$ esetén a határértékeket, akkor a bal oldal első és harmadik tagja szolgáltatja a keresett integrált:

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(z_1) - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma'} f(z)dz - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma''} f(z)dz$$

A γ'-re vonatkozó integrál a nevező és számláló fokszáma közötti különbség miatt tart a zérushoz.

Feladatunk még a γ''-re vonatkozó integrál határértékének kiszámítása. Ehhez használjuk fel, hogy a $z = -1$ pont az $\frac{1}{z^3+1}$ törtnek elsőrendű pólusa, és ehhez a ponthoz tartozó reziduuma:

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \left.\frac{1}{3z^2}\right|_{z=-1} = \frac{1}{3}$$

Tehát az f függvény -1 körüli Laurent-sora csak egy negatív indexű tagot tartalmaz, a sor többi része a reguláris rész, tehát

$$f(z) = \frac{1}{3(z+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$$

alakú a Laurent-sor, melynek konvergenciatartománya a $0 < |z+1| < \sqrt{3}$ körgyűrű, ugyanis z_1-nek és z_3-nak a (-1)-től való távolsága pontosan $\sqrt{3}$.

Ezen a körlapon a reguláris rész előállít egy reguláris függvényt, mely (-1)-ben is reguláris, tehát korlátos. Az ε sugarú félkörív hossza $\varepsilon \cdot \pi$, ez viszont 0-hoz tart, ha $\varepsilon \to 0$, tehát a reguláris rész integrálja 0-hoz tart.

A főrészt viszont integráljuk a félkörívre a szokásos paraméterezéssel. Mivel γ'' irányítása, mint -1 középpontú félkörív, negatív, ezért:

$$\int_{\gamma'} \frac{1}{3(z+1)} dz = -\int_0^{\pi} \frac{1}{3(-1+\varepsilon\cdot e^{it}+1)} \cdot \varepsilon \cdot i \cdot e^{it} dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi} i dt = -\frac{1}{3} i\pi$$

állandó érték (nem függ ε-tól), tehát $\varepsilon \to 0$ esetén a határértéke is ennyi.

Hátra van még, hogy kiszámítsuk f reziduumát a z_2 pontban. Mivel z_2 elsőrendű pólus, ezért:

$$\operatorname{Res}(z_2) = \left.\frac{1}{3z^2}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{6}$$

Az integrál értéke tehát:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{6} - 0 - \left(-\frac{1}{3}i\pi\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Ugyanezzel a logikával számítható ki minden

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{x^{2n+1} + a^{2n+1}} dx, \ a \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

alakú improprius integrál, ahol p tetszőleges legfeljebb $(2n-1)$-ed fokú polinom. Ugyanis ekkor a $z = -a$ valós szám az integrandusnak elsőrendű pólusa (feltéve, hogy $p(-a) \neq 0$). Ekkor a $-a$ pontot vesszük körül egy ε sugarú negatívan irányított félkörívvel, és az így adódó zárt Γ' görbén integrálunk.

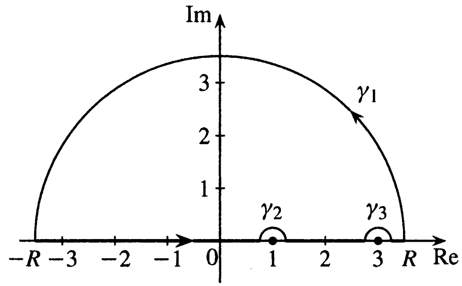
$$\textbf{11.}\ I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2 - 4x + 3} dx$$

Terjesszük ki az integrandust a komplex síkra az alábbi definícióval.

$$f(z) = \frac{z \cdot e^{iz}}{z^2 - 4z + 3}$$

A valós tengelyre vonatkozó leszűkítésének valós része egyenlő az integrandussal. f-nek két elsőrendű pólusa van: 1, 3. Ezek mindketten a valós tengelyen vannak. A komplex sík minden más pontjában f reguláris függvény.

Az integrációs utat vegyük fel úgy, hogy az 1 és 3 pontokat körülvesszük egy-egy ε sugarú félkörívvel (jelölje ezeket rendre γ_2 és γ_3), ezekhez csatoljuk a valós tengely $[-R, 1-\varepsilon]$, $[1+\varepsilon, 3-\varepsilon]$ és $[3+\varepsilon, R]$ intervallumait $R > 3$ esetén, majd a görbét zárttá tesszük a $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ félkörívvel (jelölje ezt γ_1) (7.19 ábra).



7.19 ábra

Mivel a felső félsíkon az f függvény reguláris, a Cauchy-féle alaptétel szerint a γ görbére vonatkozó integrál zérus:

$$\int_{-R}^{1-\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{1+\varepsilon}^{3-\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz +$$
$$+ \int_{3+\varepsilon}^{R} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$$

Vizsgáljuk meg f racionális részét:

$$\frac{z}{z^2 - 4z + 3}$$

Mivel ez a tört a ∞-ben úgy viselkedik, mint az $\frac{1}{z}$ függvény, ezért egyenletesen tart 0-hoz. Így a Jordan-lemma szerint:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$$

A γ_2 félkör a $z = 1$ elsőrendű pólust kerüli ki. Így a függvény 1 körüli Laurent-sorának főrésze egytagú, $c_{-n} = 0$, ha $n \geq 2$, és c_{-1} éppen a pontbeli reziduum:

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \left.\frac{z \cdot e^{iz}}{z-3}\right|_{z=1} = \frac{e^i}{-2}$$

Tehát az f függvény 1 körüli Laurent-sorának alakja:

$$f(z) = -\frac{e^i}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$$

A sor szabályos részének összegfüggvénye reguláris függvény, mely az 1 pont környezetében korlátos. Az integrációs út azonban $\varepsilon \to 0$ esetén 0-hoz tart, tehát $\varepsilon \to 0$ esetén a reguláris rész integrálja eltűnik.

A főrész integrálásához paraméterezzük a görbét: $z(t) = 1 + \varepsilon \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$

Ha figyelembe vesszük, hogy a félkör negatívan van irányítva:

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = -\int_0^{\pi} -\frac{e^i}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon e^{it} - 1} \cdot \varepsilon i e^{it} dt = \frac{e^i}{2} \int_0^{\pi} i dt = \frac{i e^i \pi}{2}$$

Ez az integrál független ε-tól, tehát határértéke is ez a komplex szám.

Azonos logikával adódik a γ_3 görbére vonatkozó integrál határértéke. A reguláris rész integrálja eltűnik, a főrész integrálja pedig:

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = \frac{3}{2} e^{3i} \cdot \pi i$$

Ez ismét független ε-tól, tehát megegyezik a határértékkel.

A három egyenes szakaszra vonatkozó integrál összegének határértéke $\varepsilon \to 0$ és $R \to \infty$ esetén éppen a kitűzött integrállal egyenlő.

A reziduumtétel szerint, figyelembe véve a kiszámított határértékeket:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot e^{ix}}{x^2 - 4x + 3} dx + \left(\frac{1}{2} e^i + \frac{3}{2} e^{3i} \right) \pi i = 0$$

Átrendezéssel majd a jobb oldal valós részének képzésével megkapjuk a keresett integrál értékét:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \cos x}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{\pi}{2} (\sin 1 + 3 \cdot \sin 3)$$

12. $I := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Mivel az integrandus páros függvény, ezért világos, hogy:

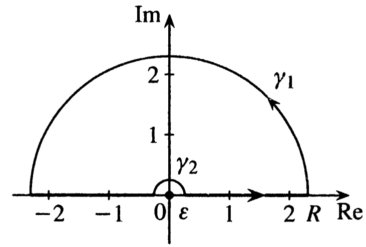
$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Vizsgáljuk az integrandus helyett az

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{\cos z + i \sin z}{z}$$

komplex függvényt. Az f függvény valós tengelyre vonatkozó leszűkítésének képzetes része az integrandus.

Az f függvénynek a valós tengely $z = 0$ pontjában elsőrendű pólusa van. Ezért a 0 pontot kikerüljük egy origó középpű, ε sugarú félkörívvel (legyen ez γ_2), ehhez csatlakozik a valós tengely $[-R, \ -\varepsilon]$ és $[\varepsilon, R]$ intervalluma, ezekhez pedig a szokásos $|z| = R$, $\mathrm{Im} z \geq 0$ félkörív. Az így adódó zárt Γ görbe az integrációs út (7.20 ábra).



7.20 ábra

Mivel az f függvény egyetlen szinguláris pontja az origó, és ez Γ-n kívül esik, ezért a Cauchy-féle alaptétel szerint:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

A kérdéses integrál az egyenlet átrendezése, valamint $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ határértékképzés után úgy adódik, hogy vesszük az eredmény képzetes részét:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Im} \left(-\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} dz \right)$$

Itt a γ_1-re vonatkozó integrál például a Jordan-lemma szerint a 0-hoz tart, ha $R \to \infty$. De ebben az egyszerű esetben nem kell a lemmára támaszkodni. Legyen ugyanis γ_1 paraméterezése: $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Ekkor helyettesítéssel és az Euler-formula figyelembevételével az alábbi adódik:

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot e^{iRe^{it}} \cdot iRe^{it} dt = i \int_0^{\pi} e^{iR\cos t} \cdot e^{-R\sin t} dt$$

Ennek az integrandusnak az abszolút értéke $e^{-R\sin t}$, így elég megmutatni, hogy ennek az integrálja eltűnik, ha $R \to \infty$. Mivel a sin függvény szimmetrikus a $\frac{\pi}{2}$ pontra, elég a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$-re vonatkozó integrált becsülni.

Mivel ezen az intervallumon $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$, ezért

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}t} dt = \frac{\pi}{2R}\left(1 - e^{-R}\right),$$

ami valóban 0-hoz tart, ha $R \to \infty$.

Az ε sugarú γ_2 köríven az integrált a Laurent-sor felhasználásával számítjuk. Az e^{iz} függvény Taylor-sorának felhasználásával kapjuk, hogy f 0 körüli Laurent-sora:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$$

alakú, ahol g reguláris függvény. Ezért az origó környezetében korlátos. Mivel γ_2 ívhossza 0-hoz tart, ezért g integrálja eltűnik. Az $\frac{1}{z}$ függvényt pedig már számos alkalommal integráltuk. Ha figyelembe vesszük a görbe irányítását is, akkor:

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = -i\pi$$

Helyettesítve a határértékeket:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Im}(-(-i\pi)) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

13. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $I_2 := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

b) $I_3 := \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$

Ezek az integrálok az 12. feladat eredménye alapján kiszámíthatók:

a) Integráljunk parciálisan, majd alkalmazzuk a $t = 2x$, $dx = \frac{1}{2}dt$ helyettesítést:

$$\int_0^R \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = -\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^R + \int_0^R \frac{\sin 2x}{x} dx =$$

$$= -\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^R + \int_0^{2R} \frac{\sin t}{t} dt$$

A kiintegrált rész a $\frac{\sin^2 x}{x} = \sin x \cdot \frac{\sin x}{x}$ átalakítás alapján könnyen láthatóan a 0-ban eltűnik, és $R \to \infty$ esetén is eltűnik, hiszen egy korlátos és egy 0-hoz tartó függvény szorzata.

Tehát:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2R} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

b) Ismét integráljunk parciálisan:

$$\int_0^R \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = -\left[\frac{\sin^3 x}{2x^2}\right]_0^R + \frac{3}{2}\int_0^R \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{x^2} dx$$

A kiintegrált rész az a) pontban említett okok miatt $R \to \infty$ esetén eltűnik. A második tagot a

$$\sin(nx) \cdot \sin(kx) = \sin^2\left(\frac{n+k}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{n-k}{2}x\right)$$

trigonometrikus azonossággal számítjuk:

$$\frac{3}{2}\int_0^R \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{x^2} dx = \frac{3}{4}\int_0^R \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{x^2} dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^R \frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)}{x^2} dx - \frac{3}{4}\int_0^R \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

Az a) pontból tudjuk, hogy a második tag értéke $R \to \infty$ esetén $\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$, az első tagot pedig az $x = \frac{2}{3}t$, $dx = \frac{2}{3}dt$ helyettesítéssel számoljuk:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{\left(\frac{2}{3}t\right)^2}\cdot\frac{2}{3}dt = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Behelyettesítve ezeket az integrálokat a fenti egyenlőségbe, ezt kapjuk:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}dx = \frac{3\pi}{16}$$

14. $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+5x+4}dx$

Terjesszük ki az integrandust a komplex síkra az

$$f(z) = \frac{1}{z^2+5z+4} = \frac{1}{(z+1)(z+4)}$$

definícióval. A valós tengelyen f egybeesik az $x \mapsto f(x)$ valós integrandussal. Mivel ez utóbbi nem páros függvény, nem térhetünk át egyszerűen a $-\infty$-től ∞-ig vett integrálra.

Vizsgáljuk meg az f függvényt regularitás szempontjából. f-nek két elsőrendű pólusa van, mindkettő a negatív valós féltengelyen: -1, -4. A teljes nemnegatív valós féltengelyen a függvény reguláris. Ha még figyelembe vesszük, hogy a számláló és a nevező fokszáma közötti különbség kettő, akkor látjuk, hogy alkalmazható az

$$\int_0^\infty f(x)dx = -\sum \operatorname{Res}\big(\ln(-z)\cdot f(z)\big)$$

formula, ahol az összegzés az f függvény összes szinguláris pontjára kiterjesztendő. Az integrációs útvonal a 7.4.ábrán látható.

Mivel f-nek két elsőrendű pólusa van, ezekben a reziduum:

$$\operatorname{Res}\big(\ln(-z)\cdot f(z),\ -1\big) = \left.\frac{\ln(-z)}{2z+5}\right|_{z=-1} = \frac{\ln 1}{3} = 0$$

$$\operatorname{Res}\big(\ln(-z)\cdot f(z),\ -3\big) = \left.\frac{\ln(-z)}{2z+5}\right|_{z=-3} = \frac{\ln 3}{-1} = -\ln 3$$

Tehát az integrál értéke:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+5x+4}dx = -(-\ln 3) = \ln 3$$

15. $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+a^3}dx,\ a \in \mathbb{R}^+$

Mivel az integrálban szereplő függvény nem páros, nem következtethetünk az integrál értékére a teljes valós számegyenesre vonatkozó integrál alapján (pedig ez utóbbit egy korábbi példában már kiszámítottuk).

Ezért az 14. példában követett gondolatmenetet alkalmazzuk. Az integrációs utat lásd a 7.4. ábrán.

Terjesszük ki az integrandust a teljes komplex síkra. Legyen

$$f(z) = \frac{1}{z^3+a^3}.$$

Ennek valós tengelyre vonatkozó leszűkítése egyenlő az integrandussal. f egy olyan racionális törtfüggvény, melynek három elsőrendű pólusa van, ezek a $\left(-a^3\right)$ komplex szám harmadik gyökei:

$$z_1 = -a \qquad z_2 = a\cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_3 = a\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Itt z_1 a negatív valós tengelyre esik, z_2 és z_3 pedig konjugált komplex számok. A nemnegatív valós féltengelyen tehát f reguláris. Ha még figyelembe vesszük, hogy a nevező 3-mal magasabb fokú, mint a számláló, akkor ismét alkalmazhatjuk az

$$\int_0^\infty f(x)dx = -\sum \operatorname{Res}\big(\ln(-z)\cdot f(z)\big)$$

formulát, ahol a szumma az f függvény összes szinguláris pontjára kiterjesztendő.

Számítsuk ki a reziduumokat:

$$\operatorname{Res}(z_1) = \left.\frac{\ln(-z)}{3z^2}\right|_{z=z_1} = \frac{a\cdot\ln a}{3a^3}$$

$$\operatorname{Res}(z_2) = \frac{\ln(-z_2)}{3z_2^2} = -\frac{a\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot\left(\ln a + i\frac{\pi}{3}\right)}{3a^3}$$

$$\operatorname{Res}(z_3) = \frac{\ln(-z_3)}{3z_3^2} = -\frac{a\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\cdot\left(\ln a - i\frac{\pi}{3}\right)}{3a^3}$$

Összegzés után adódik az eredmény: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+a^3}dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{9a}.$

16. $I := \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+4x+4}dx$

Terjesszük ki az integrandust a komplex síkra! Ebben az esetben azonban óvatosabban kell eljárnunk, hiszen a $\sqrt{z}$ kétértékű reláció.

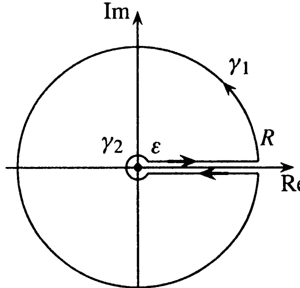
A kiterjesztést úgy kell elvégezni, hogy a kiterjesztett függvény „egyértékű” reguláris függvény legyen. Tudjuk, hogy $\sqrt{z}$ a pozitív valós félegyenes mentén bemetszett síkon már ilyen tulajdonságú. Tekintsük a $0 < \arg z < 2\pi$-vel jellemzett reguláris ágat!

Az ily módon bemetszett komplex síkon értelmezzük az

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+4z+4} = \frac{\sqrt{z}}{(z+2)^2}$$

komplex függvényt. Ennek a $z = -2$ pont másodrendű pólusa. Az integrációs útvonalat úgy választjuk meg, hogy az végig a függvény regularitási tartományában haladjon, tehát ne keresztezze a pozitív valós féltengelyt, megkerülje a függvény pólusát, és kikerülje $\sqrt{z}$ reláció elágazási pontját, a $z = 0$ pontot.

Ilyen görbe például az $[\varepsilon, R]$ egyenes szakasz, a $|z| = R$ körív, az $[R, \varepsilon]$ intervallum és a $|z| = \varepsilon$ körív egyesítése abban az értelemben, hogy kezdetben a két párhuzamos egyenes szakasz között van egy nagyon keskeny sáv, és az $[\varepsilon, R]$ intervallumot az egyikkel felülről, a felső félsíkból, a másikkal pedig az alsó félsíkból közelítjük (7.21 ábra).



7.21 ábra

Ha $\varepsilon < 2 < R$, akkor a görbe valóban megkerüli a pólust. Ebben a pontban a reziduum:

$$\operatorname{Res}(f, -2) = \lim_{z\to-2}\left((z+2)^2\cdot f(z)\right)' = \frac{1}{i\cdot 2\sqrt{2}}$$

Alkalmazva a reziduumtételt:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_R^{\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)dz =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{i\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

ahol a γ_1 görbe a $|z| = R$, γ_2 pedig a $|z| = \varepsilon$ egyenletű kör, előbbi pozitív, utóbbi negatív irányítással.

Az improprius integrál kiszámításához képezni kell az $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ hatványértékeket.

Az integrandus a ∞-ben úgy viselkedik, mint a $z^{-\frac{2}{3}}$ függvény, tehát alkalmas c_1 konstanssal

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right| \le c_1\cdot R^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\pi R \to 0, \text{ ha } R\to\infty.$$

Másrészt $\varepsilon \to 0$ esetén f úgy viselkedik, mint a $z^{\frac{1}{2}}$ függvény, tehát alkalmas c_2 állandóval

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \le c_2\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\pi\varepsilon \to 0, \text{ ha } \varepsilon\to 0.$$

Tehát a γ_1-re és γ_2-re vonatkozó integrálok eltűnnek, ha $R \to \infty$, illetve, ha $\varepsilon \to 0$.

Nyilvánvaló, hogy ha a felső félsíkból közeledünk az $[\varepsilon, R]$ intervallumhoz, akkor

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R} f(z)dz = \int_0^{\infty} f(x)dx = I,$$

ugyanis ebben az esetben az intergrandus az $x \mapsto f(x)$ valós függvényhez tart. Ha azonban az alsó félsíkból közelítjük az $[\varepsilon, R]$ intervallumot, akkor $\sqrt{z}$-nek köszönhetően

$$\frac{\sqrt{z}}{(z+2)^2} \to \frac{-\sqrt{x}}{(x+2)^2},$$

hiszen ebben az esetben $\arg z \to 2\pi$, tehát $\arg\sqrt{z} \to \pi$, vagyis z négyzetgyöke – változatlan abszolút értékkel – a negatív valós féltengelyen lesz. Ezért:

$$\int_R^\varepsilon f(z)dz \to \int_R^\varepsilon \frac{-\sqrt{x}}{(x+2)^2}dx = \int_\varepsilon^R f(x)dx$$

Tehát a reziduumtételből adódó egyenlőség második tagja is I-hez tart, tehát

$$2I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \text{ azaz } I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

17. $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+9}dx$

Terjesszük ki az integrandust a komplex síkra regulárisan! Most ismét óvatosan kell eljárnunk, hiszen tudjuk, hogy $\ln z$ egy végtelen sok értékű reláció. De az $\ln z$ relációról tudjuk, hogy például a negatív valós féltengely mentén bemetszett komplex síkon reguláris függvény. Legyen ln szokás szerint a reláció főága, melyre:

$$-\pi < \operatorname{arc} z \le \pi$$

Ezzel $x \mapsto f(x)$ kiterjesztése:

$$f(z) = \frac{\ln z}{z^2+9}$$

Az integrációs útvonalat úgy kell kijelölni, hogy az megkerülje a függvény $z = 0$ végtelen rendű elágazási pontját. Továbbá ne keresztezze a bemetszést, és ne haladjon át egyetlen póluson sem, végül tartalmazza a valós tengely egy intervallumát.

Az f függvénynek két elsőrendű pólusa van: $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$. Ennek figyelembevételével a megfelelő görbe az alábbi, a $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \ge 0$ félkörív, pozitívan irányítva. Ehhez csatlakozik a $[-R, -\varepsilon]$ intervallum, majd a $|z| = \varepsilon$, $\operatorname{Im} z \ge 0$ félkörív, és a görbe az $[\varepsilon, R]$ szakasszal záródik (7.22 ábra).

Ha $\varepsilon < 3 < R$, akkor a z_1 pólus a görbén belül van, a z_2 mindig kívül marad rajta. A reziduumtétel alkalmazásához elég a z_1-beli reziduum kiszámítása:

$$\operatorname{Res}(f, 3i) = \lim_{z\to 3i}\left(\frac{\ln z}{z+3i}\right) = \frac{\ln 3i}{6i} = \frac{\ln 3 + i\frac{\pi}{2}}{6i}$$

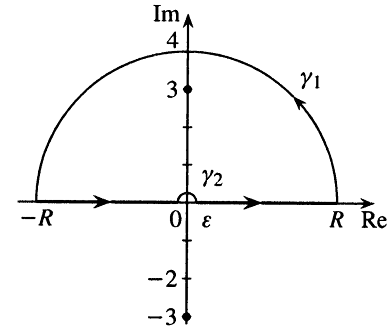
Tehát:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_\varepsilon^R f(z)dz = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\ln 3 + i\frac{\pi}{2}\right)$$

Az improprius integrál kiszámításához meg kell határozni az $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ esetben a határértékeket. Egyrészt:

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{\ln z}{z^2+9}dz\right| \le \frac{\ln R + i\pi}{R^2-9}\cdot R\pi \to 0,$$

ha $R \to \infty$, ami például a L'Hospital-szabállyal könnyen adódik.



7.22 ábra

Másrészt pedig

$$\left|\int_{\gamma_2} \frac{\ln z}{z^2+9}dz\right| \le \frac{|\ln\varepsilon + i\pi|}{9}\cdot\varepsilon\pi \to 0,$$

ha $\varepsilon \to 0$, hasonló módszerrel. A reziduumtétel alkalmazásával adódik tehát:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)dz + \int_\varepsilon^R f(z)dz\right) = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\ln 3 + i\frac{\pi}{2}\right)$$

Ha z a pozitív valós tengely $[\varepsilon, R]$ intervallumához tart, akkor nyilván $f(z) \to \dfrac{\ln x}{x^2+9}$, tehát:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R} f(z)dz = I$$

Ha viszont z a negatív valós tengely $[R, \ -\varepsilon]$ intervallumához közelít, akkor a nevező páros volta miatt $z^2+9 \to x^2+9$, de $x \in \mathbb{R}^+$ jelölés mellett, ha $z \to x\cdot e^{i\pi}$, akkor $\ln z \to \ln x + i\pi$, ahol $x \in [\varepsilon, R]$.

Tehát:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{-R} f(z)dz = \int_0^\infty \frac{\ln x + i\pi}{x^2+9}dx = I + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{x^2+9}dx$$

Utóbbi egy közönséges valós integrál, értéke: $\frac{\pi}{6}$.

Ha ezeket a részeredményeket mind helyettesítjük a fenti egyenlőségbe, kapjuk:

$$I + I + i\pi\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\ln 3 + i\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahonnan:

$$I = \frac{\pi}{6}\cdot\ln 3$$

A fenti gondolatmenettel a következő általánosabb eredmény is levezethető:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}\ln a,\ a \in \mathbb{R}^+$$

8. FOURIER-SOR, FOURIER-INTEGRÁL

8.1 Periodikus függvények Fourier-sora

Egy adott (2π szerint periodikus) valós, integrálható függvényt akarunk közelíteni $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ alakú trigonometrikus sorral.

A 2π szerint periodikus f függvény Fourier-együtthatóin az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \text{ (átlagérték, egyszerű közép)}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$$

számokat értjük, s az ezekkel alkotott $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ függvénysort f Fourier-sorának nevezzük (függetlenül attól, hogy ez a sor konvergens-e).

Belátható, hogy az együtthatók kiszámításakor a $[0, 2\pi]$ intervallum helyett egy tetszőleges $[x_0, x_0+2\pi]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ intervallumra is integrálhatunk. Az integrálást a $[-\pi, \pi]$ intervallumra végezve:

Ha f páros, akkor $f(x)\sin kx$ páratlan, azaz integrálja nulla, tehát $b_k = 0$; $f(x)\cos kx$ páros, így kiszámításához elegendő a $[0, \pi]$ intervallumra integrálni, s az integrál értéket kettővel szorozni.

Hasonlóan, ha f páratlan, akkor $f(x)\cos kx$ is páratlan, azaz $a_k = 0$; $f(x)\sin kx$ páros, így b_k számításánál elég félperiódusra integrálni.

Ha a függvény periódusa T, akkor az $x = \frac{2\pi}{T} = \omega t$ helyettesítést alkalmazva az együtthatókra, a következő formulák adódnak:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega t dt$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega t dt$$

A Fourier-sorok konvergenciájának vizsgálatával nem foglalkozunk, csak néhány lényeges tételt említünk:

Minden szakaszonként differenciálható $[0, T]$-ben folytonos, periodikus függvény előállítható Fourier-sor alakjában.

Ha a függvény folytonos az x_0 helyen, és a Fourier-sor konvergens, akkor a sor összege $f(x_0)$.

Ha a függvénynek szakadása van az x_0 helyen, de létezik külön a jobb oldali és a bal oldali (véges) határértéke, akkor a Fourier-sor x_0 pontbeli értéke e határértékek átlagával egyenlő.

Megjegyzés:

A Fourier-sorfejtést nemcsak periodikus függvényeknél alkalmazzák, hanem egy tetszőleges $[0, T]$-ben értelmezett függvénynél is, feltételezve, hogy a függvényt periodikusan folytatjuk. Alkalmazása igen sokrétű. Fourier a hővezetés vizsgálatakor alkalmazta a róla elnevezett módszert, de például elektromos hálózatok vizsgálatánál, parciális differenciálegyenletek megoldásánál is alkalmazzák.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{ha } x = k\pi, \\ -1, & \text{ha } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

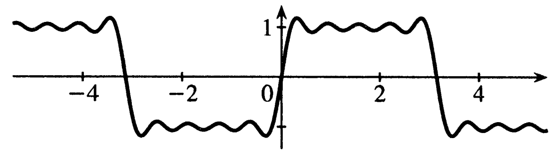
függvény Fourier-sorát!

Mivel a függvény páratlan, sorában csak a szinuszos összetevők fordulnak elő, $a_k = 0$, b_k kiszámításakor félperiódusra integrálva:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin kx dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^\pi = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k}$$

A sor első néhány tagja $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$.

A sor értéke az $x = \pi \cdot n$ helyen 0, a függvényértékkel megegyező. A 8.1 ábrán az első öt tag összege szerepel.



8.1 ábra. A $\operatorname{sgn}(\sin x)$ függvény Fourier-sora első tagjainak összege

2. Határozza meg a $g(x) = |x|$, $-\pi \le x \le \pi$, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát!

A függvény páros, így sorában csak a koszinuszos tagok szerepelnek, azaz $b_k = 0$; a_0 és a_k kiszámításánál itt is félperiódusra integrálhatunk:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}$$
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx dx$$

Parciálisan integrálva $a_k = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$. Tehát a függvény Fourier-sora:

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots\right)$$

Mivel a zárójelben levő sort majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ konvergens számsor, így a Fourier-sor konvergens, s minden pontban előállítja a g függvényt.

Megjegyzés:

a) Mivel $g(0) = 0$, így a Fourier-sort is a nulla helyen vizsgálva:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \text{azaz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Mivel:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

Ebből következően $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b) A feladatban szereplő Fourier-sort tagonként differenciálva az előző feladatbeli sort kapjuk, ami nem meglepő, hiszen ha $x \neq k\pi$, akkor:

$$g'(x) = f(x)$$

3. Határozza meg az $f(x) = \sin^5 x$ és a $g(x) = \cos^4 x$ függvények Fourier-sorát!

Mivel f páratlan, sorában csak szinuszos tagok fognak szerepelni. Ezek együtthatóinak kiszámításához az integrálás helyett célszerűbb a függvényt átalakítani:

$$\sin^5 x = \sin x \cdot \left(\sin^2 x\right)^2 = \sin x \cdot \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{2}\sin x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin x \cdot \frac{1-\cos 4x}{2}$$

Felhasználva, hogy:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

Átalakítások után:

$$f(x) = \frac{5}{8}\cdot\sin x - \frac{5}{16}\cdot\sin 3x - \frac{1}{16}\cdot\sin 5x$$

A függvény Fourier-sora tehát most csak 3 tagból áll.

g sorának előállításakor hasonlóan járunk el.

$$\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \cos 2x + \frac{1-\cos 4x}{8} =$$

$$= \frac{3}{8} + \cos 2x - \frac{1}{8}\cos 4x$$

4. Határozza meg az $f(t) = \begin{cases} 2-t, & \text{ha } t \in \,]0,2[, \\ 1, & \text{ha } t = 0, 2 \end{cases}$ $T = 2$ periódusú függvény Fourier-sorát!

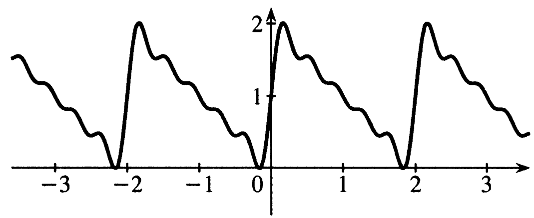
A függvény se nem páros, se nem páratlan, de ha a t tengelyt 1-gyel eltoljuk, páratlanná válik. (Ez az eltolás csak a_0 értékét módosítja.) Mivel a függvény páratlanná vált, így $a_k = 0$.

$$b_k = \frac{2}{T} = \int_0^T f(t)\sin k\omega t dt = \int_0^2 (2-t)\sin k\pi t dt,$$

ahol $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Parciálisan integrálva: $b_k = \frac{2}{k\pi}$, így $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\cdot\sin k\pi t$.

Mivel a $t = 2n$ pontokban a függvény értéke 1, s a jobb oldal is 1-gyel egyenlő, így a sor minden pontban előállítja a függvényt. (A 8.2 ábrán az első öt tag összege szerepel.)



8.2 ábra. Az $f(t) = 2 - t$, $T = 2$ periódusú függvény Fourier-sora első tagjainak összege

5. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{2}\left(\cos x + |\cos x|\right)$ függvény Fourier-sorát!

A függvény a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban $\cos x$-szel, a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumban nullával egyenlő.

Mivel páros függvény, így sorában csak koszinuszos tagok fognak szerepelni, azaz $b_k = 0$.

Félperiódusra integrálva:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos kx dx$$

$k = 1$ esetén $a_1 = \frac{1}{2}$, $k \neq 1$ esetén felhasználva, hogy

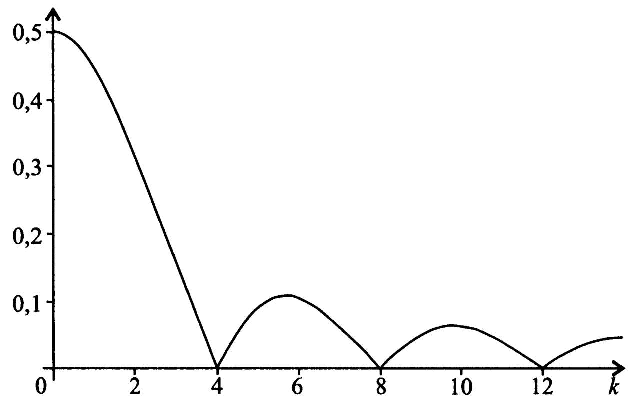
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{2}}{k+1} + \frac{\sin(k-1)\frac{\pi}{2}}{k-1}\right), \text{ ahonnan}$$

$$a_2 = \frac{3}{4\pi},\ a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{2}{15\pi}, \ldots$$

A sor első néhány tagja tehát:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{4\pi}\cos 2x - \frac{2}{15\pi}\cos 4x + \ldots$$



8.3 ábra. A feladatban szereplő függvény Fourier-együtthatóinak burkoló görbéje

6. Határozza meg az $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in \left]-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right[\\ 0, & \text{ha } t \in \left[\frac{T_0}{2}, T - \frac{T_0}{2}\right] \end{cases}$

T periódusú függvény Fourier-sorát!

Mivel a függvény páros, sorában csak a koszinuszos összetevők fognak szerepelni.

$$a_0 = \frac{T_0}{T} \qquad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T_0}{2}} \cos k\cdot\omega t dt = 2\frac{T_0}{T}\cdot\frac{\sin k\pi\frac{T_0}{T}}{k\pi\frac{T_0}{T}}$$

A 8.3 ábra $T = 4$, $T_0 = 1$ esetén mutatja $|a_k|$ burkoló görbéjét.

7. Határozza meg az $f(t) = e^{-t}$, $0 < t < 1$, $T = 1$ periódusú függvény Fourier-sorában a_0, a_1, b_1 értékét!

$$a_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$$

$$a_1 = 2\int_0^1 e^{-t}\cos\omega t dt = \frac{2\left(1 - e^{-1}\right)}{1 + 4\pi^2}$$

Kétszer parciálisan integrálva, majd rendezve az egyenletet (a számítást nem részletezve).

Hasonlóan $b_1 = 2\int_0^1 e^{-t}\sin\omega t dt = \dfrac{4\pi\left(1 - e^{-1}\right)}{1 + 4\pi^2}$.

8.2 Periodikus függvények komplex Fourier-sora

Az előző rész utolsó két feladatánál láttuk, hogy bizonyos függvények esetében az integrálás bonyolulttá válhat. Ilyen esetekben a valós Fourier-sor helyett célszerűbb a komplex Fourier-sor alkalmazása.

Legyen $c_0 = a_0$ és $c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}$, ha $k \neq 0$.

Mivel a komplex Fourier-sorban k negatív értékei is szerepelnek, állapodjunk meg abban, hogy $a_{-k} = a_k$ és $b_{-k} = -b_k$.

A függvény komplex Fourier-sora alatt az

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

sort értjük.

Egyszerűbb átalakításokkal belátható, hogy ez az összeg az előző részben szereplő Fourier-sorral megegyező.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + c_0$$

Az első tagban k helyett $(-k)$-t helyettesítve:

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{-k} e^{-ikx} + c_k e^{ikx}\right) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k + ib_k}{2} (\cos kx - i \sin kx) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_k - ib_k}{2} (\cos kx + i \sin kx) \right) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Ha c_k adott, akkor ebből $a_k = 2\mathrm{Re}(c_k)$, $b_k = -2\mathrm{Im}(c_k)$.

Szokás az $|c_k|$-t a k-adik összetevő amplitúdójának, $\mathrm{arc}(c_k)$-t a k-adik összetevő fázisának nevezni.

c_k kiszámításához a 2.3 feladatait alkalmazzuk. Legyen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Feltételezve, hogy a sor konvergens, szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát e^{-inx}-szel, s integráljuk (a jobb oldalt tagonként) a $[0, 2\pi]$ intervallumon:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} c_k e^{ikx} \cdot e^{-inx} dx$$

Figyelembe véve, hogy az integrál $k \neq n$ esetén nulla, $k = n$ esetén $c_n \cdot 2\pi$, így $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

Természetesen, ha a periódus nem 2π, hanem T, akkor:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega nt} dt, \text{ ahol } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Az előző részben láttuk, hogy páros függvény sorában csak a koszinuszos, páratlan függvény sorában csak a szinuszos tagok szerepelnek. Komplex Fourier-sornál ennek a megfelelője: páros függvény esetén valós, páratlannál képzetes számok lesznek az együtthatók. (De félperiódusra integrálva páros függvény esetén általában nem lesznek valósak.)

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f(x) = \mathrm{sgn}(\sin x) + 1 = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in]0, \pi[, \\ 1, & \text{ha } x = k\pi, \\ 0, & \text{ha } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

$T = 2$ periódusú függvény Fourier-sorát!

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \cdot e^{-ikx} dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_0^{\pi} = \frac{i}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k}, \text{ ha } k \neq 0.$$

Ebből $a_k = 2\mathrm{Re}\left(c_k\right) = 0,\quad b_k = 2\mathrm{Im}\left(c_k\right) = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k}.$

c_0 értékét külön kell számítanunk, $a_0 = c_0 = 1$.

A függvény az előző rész első feladata volt (1-gyel eltolva), az eredmény természetesen az előzővel megegyező.

2. Határozza meg az $f(t) = e^{-t}$, $0 < t < 1$, $T = 1$ periódusú függvény Fourier-sorát!

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{ik\omega t}dt, \text{ ahol } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.$$

$$c_k = \int_0^1 e^{-t}e^{-ik\omega t}dt = \int_0^1 e^{-t(1+ik\omega)}dt =$$

$$= \left[-\frac{e^{-t(1+ik\omega)}}{1+ik\omega}\right]_0^1 = -\frac{e^{-1}\cdot e^{-ik2\pi}-1}{1+ik2\pi} = -\frac{e^{-1}-1}{1+ik2\pi}$$

Ahhoz, hogy a_k és b_k értékét megkapjuk, meg kell határoznunk c_k valós és képzetes részét. Ha $k = 0$, akkor $c_0 = a_0 = 1 - e^{-1}$; $k \neq 0$ esetén:

$$c_k = \frac{\left(1-e^{-1}\right) - ik2\pi\left(1-e^{-1}\right)}{1+4\pi^2k^2}$$

Azaz $a_k = 2\mathrm{Re}\left(c_k\right) = 2\cdot\dfrac{1-e^{-1}}{1+4\pi^2k^2}$, $b_k = -2\mathrm{Im}\left(c_k\right) = \dfrac{4\pi k\left(1-e^{-1}\right)}{1+4\pi^2k^2}$.
($k = 1$ esetén az előző rész 7. feladatának eredményét kapjuk.)

A Fourier-sor az $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ pontok kivételével előállítja a függvényt. Ezekben a pontokban a függvény jobb és bal oldali határértékének átlagát adja a sor összege.

3. Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin x + |\sin x|\right)$ Fourier sorát!

A függvény: $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } x \in [0,\pi], \\ 0, & \text{ha } x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$

A Fourier-sor együtthatói: $a_0 = c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin x dx = \dfrac{1}{\pi}$;

c_k kiszámításához érdemes $\sin x$ exponenciális alakját használni. Mivel:

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \text{ tehát így:}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}e^{-ikx}dx =$$

$$= \frac{1}{4i\pi}\int_0^\pi \left(e^{ix(1-k)} - e^{-ix(1+k)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4i\pi}\left[\frac{e^{ix(1-k)}}{i(1-k)} + \frac{e^{-ix(1+k)}}{i(1+k)}\right]_0^\pi \text{ (ha } k \neq 1)$$

A határokat helyettesítve (felhasználva, hogy $e^{i\pi} = -1$):

$$c_k = \frac{(-1)^{k-1}-1}{4\pi(k-1)} - \frac{(-1)^{k+1}-1}{4\pi(k+1)}, \text{ ha } k \neq 1.$$

Mivel c_k valós, így $b_k = 0$ $(k \neq 1)$.

A $k = 1$ esetet külön kell vizsgálnunk. Ekkor az integrálandó kifejezés első tagja 1, azaz:

$$c_1 = \frac{1}{4i}\int_0^\pi \left(1 - e^{-2ix}\right)dx = \frac{\pi}{4i\pi}$$

Ebből láthatóan $a_1 = 0$, $b_1 = -2\mathrm{Im}\left(c_1\right) = -\dfrac{1}{2}$.

A függvény Fourier-sorában tehát csupán egyetlen szinuszos tag szerepel.

4. Határozza meg az $f(t) = e^{-|t|}$, $-1 \leq t \leq 1$, $T = 2$ periódusú függvény Fourier-sorát!

$$c_0 = a_0 = \frac{2}{T}\int_0^1 e^{-t}dt = 1 - e^{-1}$$

c_k kiszámításánál figyelembe vehetjük, hogy a függvény páros, azaz c_k-nak valós számnak kell lennie. Az integrálást végezhetjük félperiódusra, de c_k-nak csak a valós részét vesszük figyelembe.

$$c_k = 2\cdot\mathrm{Re}\left(\int_0^1 e^{-t}e^{ik\omega t}dt\right), \text{ ahol } \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

A 2. feladathoz hasonlóan (nem részletezve a számítást):

$$c_k = 2\cdot\mathrm{Re}\left(-\frac{e^{-1}\cdot e^{-ik\pi}-1}{1+ik\pi}\right) = 2\cdot\frac{1-e^{-1}\cdot(-1)^k}{1+k^2\pi^2}$$

a_k ennek kétszerese, b_k értéke nullával egyenlő. (Ha a teljes intervallumra integrálunk, akkor c_k képzetes része valóban 0 lesz.)

5. Határozza meg az $f(t) = \begin{cases} 4, & \text{ha } t \in]0,1[, \\ 0, & \text{ha } t \in]1,4[, \end{cases}$ $T = 4$ periódusú függvény Fourier-sorát!

Mivel a függvény se nem páros, se nem páratlan, így (valós) Fourier-sorában szinuszos és koszinuszos tagok egyaránt szerepelni fognak.

Az átlagérték $c_0 = 1$.

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^1 f(t)e^{-ik\omega t}dt, \text{ ahol } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}.$$

$$c_k = \left[\frac{e^{-ik\omega t}}{-ik\omega}\right]_0^1 = 2i \cdot \frac{\cos k\frac{\pi}{2} - i\sin k\frac{\pi}{2} - 1}{k\pi} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k\pi} + i \cdot 2 \cdot \frac{\cos k\frac{\pi}{2} - 1}{k\pi}.$$

Tehát: $a_k = 4 \cdot \dfrac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k\pi}$ $\quad b_k = 4 \cdot \dfrac{1 - \cos k\frac{\pi}{2}}{k\pi}$

A k-adik összetevő (komplex) amplitúdója:

$$\left|c_k\right|^2 = 4 \cdot \frac{\sin^2 k\frac{\pi}{2} + \left(\cos k\frac{\pi}{2} - 1\right)^2}{k^2\pi^2} = 4 \cdot \frac{2\left(1 - \cos k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

$\left(c_0 = 1\right)$

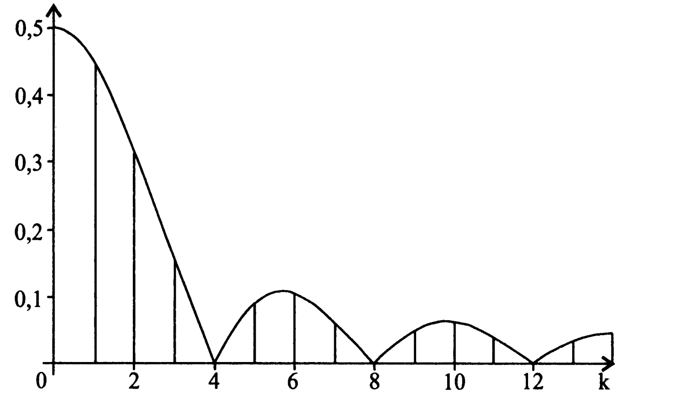
Az amplitúdókat egy vonalas spektrummal szemléltethetjük, amely arra utal, hogy a függvény frekvenciafelbontásában csak az $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ alapfrekvencia többszörösei szerepelnek.

Megjegyzés:

Valós Fourier-soroknál is szokásos a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k \sin\left(k\omega t + \varphi_k\right)$ sor felírása.

Itt F_k a k-adik összetevő (valós) amplitúdója, φ_k a fázisa. Az előzővel összehasonlítva látható, hogy $F_k = 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

A 8.4 ábrán a valós amplitúdóspektrumot és annak burkolóját ábrázoltuk. A komplex spektrum esetén az egyes vonalak fele akkora magasságúak, de ebben az esetben a negatív k értékek is szerepelnek a felbontásban. Figyeljük meg, hogy a burkoló görbe közel azonos a 8.3 ábrán szereplő görbéhez, bár a két Fourier-sor különböző. Mindkét feladat egy négyszögjel sorbafejtése volt. Mindkét függvény esetén a függvényérték a periódusidő negyedrészében volt zérustól különböző. Az együtthatók abszolút értékét elsősorban ez határozza meg. Az, hogy a függvényt eltoltuk, csak a fázisok értékét változtatta meg.



8.4 ábra. A Fourier-sor együtthatóinak abszolút értéke és a burkoló görbe

8.3 Fourier-transzformált

Ha az f függvény nem periodikus függvény, akkor a függvény Fourier-sora helyett annak Fourier-transzformáltját vehetjük, ha a függvény bizonyos feltételeknek megfelel.

Az f függvény Fourier-transzformáltja az az F függvény, melyet az

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \text{ ahol } \omega \in \mathbb{R}$$

integrál határoz meg minden olyan ω értékre, melyre az integrál létezik. Az integrál létezéséhez bizonyos kikötéseket kell tennünk az f függvényre: f-nek abszolút integrálhatónak kell lennie, vagyis az

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

legyen véges, továbbá az f függvénynek csak véges sok szakadási helye, maximum-, illetve minimumhelye lehet.

Az inverz transzformáció $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}dt$.

A Fourier-transzformáció definícióját a következő gondolatmenet indokolja. Alakítsuk át a komplex Fourier-együtthatókra, illetve a komplex spektrumra vonatkozó (az előző részben megismert) összefüggéseket.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega = k\omega_0 \qquad \Delta\omega = (k+1)\omega_0 - k\omega_0 = \omega_0$$

Ezekkel $f(t) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{\Delta\omega} \cdot e^{ik\omega t}\Delta\omega$, és mivel:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{ik\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{ik\omega t}dt, \text{ ezért:}$$

$$\frac{c_k}{\Delta\omega} = \frac{1}{T\Delta\omega}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

A nem periodikus $f(t)$ függvényt egy periodikus függvényből származtatjuk $T \to \infty$ határátmenettel. E határátmenetnél $\Delta\omega \to 0$, így a vonalas spektrum folytonossá válik, de $c_k \to 0$. Ezért szerepeltettük a $\dfrac{c_k}{\Delta\omega}$ értéket, amely általában már nullától különböző.

$\dfrac{c_k}{\Delta\omega}$ helyett $c(\omega)$ jelölést bevezetve, figyelembe véve, hogy

$$T\Delta\omega = 2\pi,\ c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

A Fourier-transzformált definíciójaként felírt $F(\omega) = 2\pi c(\omega)$, azaz:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

(Egyes szerzők a $c(\omega)$ alakot nevezik $f(t)$ Fourier-transzformáltjának, illetve mindkét képletben az $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ tényezőt szerepeltetik, mely formulák a transzformációk szimmetriáját hangsúlyozzák.) Ez a gondolatmenet természetesen nem bizonyítja a visszatranszformálásra vonatkozó összefüggést, csak a Fourier-sor és a Fourier-transzformált közötti összefüggésre utal.

Az $F(\omega)$ $A(\omega) + iB(\omega)$ alakban írható. Ha $f(t)$ páros, akkor $B(\omega)$ zérussal egyenlő, ha páratlan, akkor $A(\omega) = 0$. Ilyen esetekben (de nemcsak ekkor) alkalmazhatjuk a Fourier-féle koszinusz-, illetve szinusz-transzformáltat. Jelölésük F_c, illetve F_s. E transzformáltak az

$$F_c(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos\omega t dt, \text{ illetve az}$$

$$F_s(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\sin\omega t dt \text{ képletekkel számolhatók.}$$

Ebben az esetben a visszatranszformálás az

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\omega)\cos\omega t d\omega, \text{ illetve az}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega t d\omega \text{ képletekkel számolható.}$$

E transzformációk esetében is szokásos mindkét képletben a $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ tényező alkalmazása, mely esetben az oda- és a visszatranszformálás szimmetrikus képlettel történik. Az állandók megválasztásának módja a transzformációk lényeges részét nem változtatja meg. Ez a szimmetria azt jelenti, hogy ekkor a szinusz- és a koszinusz-transzformációk esetén, ha $f(t)$ transzformáltja $F(\omega)$, akkor $F(t)$ transzformáltja $f(\omega)$.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az $f(t) = e^{-|t|}$ függvény Fourier-transzformáltját!

Mivel a függvény páros, így a kiszámítást a koszinusz-transzformálttal végezhetjük: $F_c(\omega) = 2\int_0^\infty e^{-t}\cos\omega t dt$.

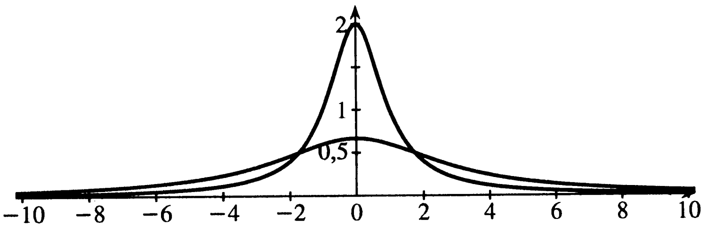
A határozatlan integrál:

$$\int e^{-t}\cos\omega t dt = \frac{1}{1+\omega^2}\left(\omega e^{-t}\sin\omega t - e^{-t}\cos\omega t\right)$$

Mivel ennek végtelenben zérus a határértéke, így

$$F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2},\quad f_1(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha \in \mathbb{R}^+$$

esetén a transzformált $F_1(\omega) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ (8.5 ábra).



8.5 ábra. Az $e^{-|\alpha t|}$ Fourier-transzformáltja $\alpha = 1$, illetve $\alpha = 3$ esetén

Természetesen a transzformált az $F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|}\cdot e^{-i\omega t}dt$ képlettel is számolható.

Ekkor a $|t|$ miatt az integrált két részre kell bontani $-\infty$ től 0-ig, illetve 0-tól ∞-ig kell integrálnunk.

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\cdot e^{-i\omega t}dt + \int_0^\infty e^{-\alpha t}\cdot e^{-i\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t(\alpha - i\omega)}dt + \int_0^\infty e^{-t(\alpha+i\omega)}dt =$$

$$= \left[\frac{e^{t(\alpha-i\omega)}}{\alpha - i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-t(\alpha+i\omega)}}{-(\alpha+i\omega)}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

A felírt improprius integrál csak akkor konvergens, ha $|\mathrm{Im}(\omega)| < \mathrm{Re}(\alpha)$.

Végezzük el a visszatranszformálást is!

Ha $t > 0$, akkor $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\cdot e^{i\omega t}d\omega$.

Az integrált a reziduumtétel alapján fogjuk kiszámítani.

Hogy zárt görbét kapjunk, és az integrál konvergens legyen, a felső félsíkon haladó kontúrral (félkörrel) zárjuk le a görbét.

Erre a félkörre a függvény integrálja nulla, így:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\cdot e^{i\omega t}d\omega = \oint \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\cdot e^{i\omega t}d\omega =$$

$$= 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\cdot e^{i\omega t}, i\alpha\right)$$

(Az integrálandó függvénynek az adott tartományban csak az $(i\alpha)$ helyen van szingularitása, itt egyszeres pólushelye van).

A reziduum értékét meghatározva az integrál értéke:

$2\pi\cdot e^{-\alpha t}$, azaz $f(t) = e^{-\alpha t}$, ha $t > 0$.

$t < 0$ esetén az integráláskor az alsó félsíkon zárunk.

Ekkor az egyetlen pólushely a $(-i\alpha)$ lesz, s az előzőhöz hasonlóan $f(t) = e^{\alpha t}$, ha $t < 0$.

Megjegyzés:

Láttuk, hogy a Fourier-féle koszinusz-transzformáció és inverze teljesen hasonló képlettel számolható.

Tehát a $g(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ függvény esetén a transzformált

$G(\omega) = ce^{-|t|}$, ahol $c = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Határozza meg az $f(t) = e^{-\alpha|t|}\cos\beta t,\ \alpha \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}$ függvény Fourier-transzformáltját!

Ahhoz, hogy az előző feladat eredményét felhasználhassuk, alakítsuk át a függvényt: $f(t) = e^{-\alpha|t|} \cdot \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}$.

Ha $t \geq 0$, akkor $f(t) = \frac{-1}{2} \cdot \left(e^{-t(\alpha - i\beta)} + e^{-t(\alpha+\beta)}\right)$.

Mivel a Fourier-transzformáltat egy integrállal értelmeztük, így lineáris transzformáció, vagyis a transzformálást tagonként végezhetjük. Az előző feladatban $F_1(\omega)$-ra bemutatott módon:

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{i\omega + (\alpha - i\beta)} + \frac{1}{i\omega + (\alpha + i\beta)}\right) =$$

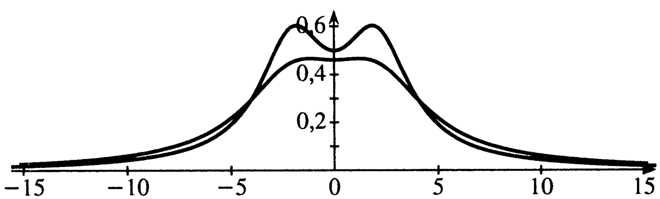
$$= \frac{1}{\alpha + i(\omega - \beta)} + \frac{1}{\alpha + i(\omega + \beta)}$$

Az eredményt az előző feladattal összehasonlítva látszik, hogy az első tagban ω helyett $\omega - \beta$, a másodikban $\omega + \beta$ szerepel.

Ebből következően a transzformált:

$$F(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2}$$

A kapott függvényt $\beta = 2$, $\alpha = 2$ és $\beta = 2$, $\alpha = 3$ esetben ábrázoltuk (8.6 ábra). Az első esetben a görbének két maximumhelye van, a második esetben „szétfolyik".)



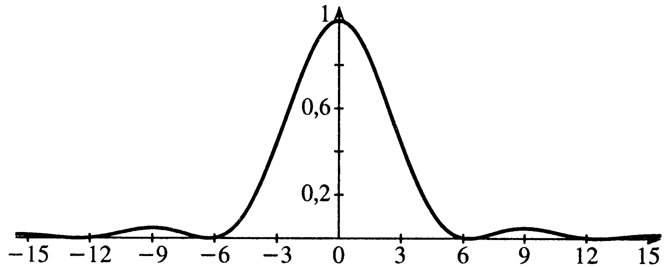
8.6 ábra. A 2. feladatban szereplő függvény Fourier-transzformáltja különböző *a* és *b* értékek esetén

Megjegyzés:

A feladattal azonos módon határozható meg az $f_1(t) = e^{-\alpha|t|} \cdot \sin\beta t$ függvény Fourier-transzformáltja.

3. Határozza meg az $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & \text{ha } t \in]-T, T[, \\ 0, & \text{ha } t \notin]-T, T[\end{cases}$ függvény Fourier-transzformáltját!

Mivel f páros, az első feladatban látott Fourier-féle koszinusz-transzformálttal számolhatunk: $F(\omega) = F_c(\omega) = 2\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos\omega t dt$. Parciálisan integrálva: $F(\omega) = \frac{2(1 - \cos\omega T)}{T\omega^2}$. A függvény $\omega \to 0$ esetén T-hez tart, zérushelyei $k\frac{2\pi}{T}$-nél ($k \in \mathbb{Z}$) vannak (8.7 ábra).



8.7 ábra. A 3. feladatbeli függvény Fourier-transzformáltja ($T = 1$-re)

4. Határozza meg az $f(t)$ függvényt, ha Fourier-transzformáltja:

$$F_c(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}, & \text{ha } \omega \in [\omega_1, \omega_2], \\ 0, & \text{ha } \omega \notin [\omega_1, \omega_2]. \end{cases}$$

Az előzőekben láttuk, hogy az inverz transzformáció:

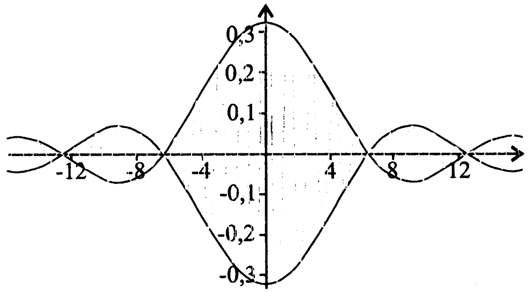
$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty F_c(\omega) \cos\omega t d\omega = \frac{1}{\pi(\omega_2 - \omega_1)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos\omega t d\omega$, azaz

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \cdot \left(\frac{\sin\omega_2 t - \sin\omega_1 t}{t}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi t(\omega_2 - \omega_1)} \cdot \cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \cdot \sin\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}$$

Az $f(t)$ függvényt párosnak feltételezve mutatja a 8.8 ábra.

$\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 5$ esetben ábrázoltuk a függvény burkoló görbéit is.



8.8 ábra. A 4. feladatban szereplő $f(t)$ függvény és annak burkolói (a feladatban szereplő állandók értéke 4, illetve 5)

5. Határozza meg az $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in]-1, 1[, \\ 0, & \text{ha } t \notin]-1, 1[\end{cases}$

függvény Fourier-transzformáltját!

A függvény páros, így:

$$F(\omega) = F_c(\omega) = 2\int_0^1 1 \cdot \cos\omega t dt = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

Az inverz transzformáció elvégzéséhez célszerű $\sin\omega$ átalakítása:

$$\sin\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

Így $f(t) = \dfrac{1}{i\pi}\displaystyle\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{i\omega(t+1)}}{\omega} d\omega - \frac{1}{i\pi}\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{i\omega(1-t)}}{\omega} d\omega.$

Mivel az integrálási út az origót nem tartalmazhatja, így a valós tengellyel párhuzamos, az $\omega = i$ ponton átmenő egyenesen haladva végezzük el az integrálást.

Ezt az egyenest (azért, hogy az improprius integrálok konvergensek legyenek) a $t < -1$ esetben a felső félsíkon zárjuk le. Mivel az integrálandó függvényeknek egyedül az $\omega = 0$ hely a pólushelye, s ezt a zárt görbe nem tartalmazza, így erre az integrál értéke zérus.

Ha $|t| < 1$, akkor az első integrált az alsó, a másodikat a felső félsíkon zárjuk. Az első integrál tartalmazza az origót, így értéke a függvény 0 helyhez tartozó reziduumának $2\pi i$-szerese lesz, azaz 1.

$t > 1$ esetben mindkét integrálnál alul zárjuk a görbét. Ekkor mindkettő tartalmazza a pólushelyet, de a reziduumok kiejtik egymást.

Így az inverz transzformáció valóban visszaadja az eredeti függvényt.

6. Határozza meg az $f(t) = te^{-|t|}$ függvény Fourier-transzformáltját!

Az 1. feladathoz hasonlóan az integrált most is két részre bontjuk:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} te^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^\infty te^{-t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} te^{t(1-i\omega)} dt + \int_0^\infty te^{-t(1+i\omega)} dt$$

A második tag:

$$\int_0^\infty te^{-t(1+i\omega)} dt = \left[\frac{te^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)}\right]_0^\infty + \frac{1}{1+i\omega}\int_0^\infty e^{-t(1+i\omega)} dt$$

Mivel ennek az első tagja mindkét határon zérushoz tart, így az integrál: $\dfrac{1}{(1+i\omega)^2}$. Az első integrál hasonlóan számítható. Így:

$$F(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} - \frac{1}{(1-i\omega)^2} = \frac{4\omega i}{(1+\omega^2)^2}$$

($f(t)$ páratlan függvény volt, így $F(\omega)$ tisztán képzetes.)

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a feladatot a Fourier-féle szinusz-transzformálttal oldjuk meg.

A visszatranszformálást az első feladathoz hasonlóan végezhetjük el. $t < 0$ esetén az alsó félsíkon zárjuk az integrálási görbét. Ekkor a függvény egyetlen szinguláris pontja a tartományban az $\omega = -i$ pont, amely másodrendű pólus. Ebben az esetben a reziduum kiszámítása a

$$\text{Res}F(\omega) = \left((\omega + i)^2 \cdot F(\omega)\right)'_{\omega=-i}$$

képlet alapján történik, és az integrál értéke:

$$f(t) = 2\pi i \text{Res}F(\omega) = te^t \qquad (\text{ha } t < 0)$$

$t > 0$ esetén az integrálási görbét a felső félsíkon zárjuk.

A Fourier-transzformáltak néhány lényeges tulajdonságát említjük meg, melyek a feladatmegoldások során sok esetben könnyítik a számítást.

Az előzőekben már említettük, hogy a Fourier-transzformáció lineáris transzformáció, azaz ha f_1 és f_2 transzformáltja létezik, akkor tetszőleges a, b komplex állandók esetén létezik $af_1(t) + bf_2(t)$ transzformáltja is, és ez $aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$-val egyenlő.

Jelöljük f Fourier-transzformáltját $F\big(f(t)\big)$-vel. Ha f deriválható, és létezik a Fourier-transzformáltja, akkor $F\big(f'(t)\big) = -i\omega F\big(f(t)\big)$.

Hasonlóan, ha $tf(t)$ transzformáltja létezik, akkor:

$$F\big(tf(t)\big) = -i\frac{d}{d\omega}F\big(f(t)\big)$$

Ha a függvényt t_0-val eltoljuk, akkor, ha f transzformáltja létezik, az eltolt függvény transzformáltját az alábbi képletek alapján határozhatjuk meg:

$$F\left(f\big(t-t_0\big)\right) = e^{-i\omega t_0}\cdot F\big(f(t)\big) \text{ és}$$

$$F\big(e^{i\alpha t}f(t)\big) = F\big(f(\alpha+\omega)\big), \text{ ahol } F(\omega) = F\big(f(t)\big).$$

A konvolúciótétel:

$$F\big(f_1(t)\big)\cdot F\big(f_2(t)\big) = F\big(f_1(t) * f_2(t)\big), \text{ ahol}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

(feltéve, hogy léteznek a transzformáltak).

Parseval-tétel: $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{F}\big(f_1(t)\big)\cdot F\big(f_2(t)\big)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}_1(t)\cdot f_2(t)dt$

Ez az összefüggés $f_1 = f_2$ esetén:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_1(t)\right|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F_1(\omega)\right|^2d\omega$$

Ez utóbbi összefüggéssel kapcsolatban említjük meg, hogy ha $f(t)$ egy tetszőleges elektromos jel feszültség-, illetve áram-idő-függvénye, akkor $\left|f(t)\right|^2$ e jel teljesítményével arányos.

E teljesítmény frekvencia szerinti eloszlását adja meg $\left|F(\omega)\right|^2$.

Hasonló összefüggések érvényesek a Fourier-féle szinusz-, illetve koszinusz-transzformáltakra is.

Ezek közül néhány:

$$F_c\big(f(t)\cos\omega_0 t\big) = \frac{1}{2}\Big(F_c\big(\omega+\omega_0\big) + F_c\big(\omega-\omega_0\big)\Big)$$

$$F_s\big(f(t)\sin\omega_0 t\big) = \frac{1}{2}\Big(F_s\big(\omega+\omega_0\big) - F_s\big(\omega-\omega_0\big)\Big)$$

$$F_s\big(f'(t)\big) = -\omega\cdot F_c\big(f(t)\big)$$

7. Az előző összefüggések alapján határozza meg az $f(t) = te^{-|t|}$ transzformáltját!

Az első feladatban láttuk, hogy $F\big(e^{-|t|}\big) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$.

Mivel az előzőek szerint: $F\big(tf(t)\big) = -i\dfrac{d}{d\omega}F\big(f(t)\big)$, tehát:

$$F\big(te^{-|t|}\big) = -i\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)' = \frac{4\omega i}{\big(1+\omega^2\big)^2},$$

ami a 6. feladat eredményével megegyező. A feladat eredményéből:

$$F\big(t^2e^{-|t|}\big) = -i\left(\frac{4\omega i}{\big(1+\omega^2\big)^2}\right)' = \frac{4-12\omega^2}{\big(1+\omega^2\big)^3}$$

8. Határozza meg az $f_1(t) = e^{-\alpha|t|}\cdot\cos\beta t$, $\alpha\in\mathbb{R}^+, \beta\in\mathbb{R}$ függvény Fourier-transzformáltját az előző összefüggések alkalmazásával!

Mivel a függvény páros, így $F(\omega) = F_c(\omega)$. Láttuk, hogy:

$$F\big(e^{-\alpha|t|}\big) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \text{ és}$$

$$F_c\big(f(t)\cdot\cos\beta t\big) = \frac{1}{2}\big(F_c(\omega+\beta) + F_c(\omega-\beta)\big), \text{ így:}$$

$$F_1(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}$$

9. Határozza meg az $f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t\in\,]0,2[, \\ 0, & \text{ha } t\notin\,]0,2[\end{cases}$

függvény Fourier-transzformáltját!

Láttuk, hogy az $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t| < 1, \\ 0, & \text{ha } |t| > 1 \end{cases}$ függvény esetén:

$$F(\omega) = 2\frac{\sin\omega}{\omega} \text{ és } F\big(f(t-t_0)\big) = e^{i\omega t_0} \cdot F\big(f(t)\big)$$

Ebből következően $F\big(f_1(t)\big) = 2e^{i\omega} \cdot \dfrac{\sin\omega}{\omega}$.

10. Határozza meg az $f(t) = \begin{cases} \cos\dfrac{t}{2}, & \text{ha } |t| < 1, \\ 0, & \text{ha } |t| > 1 \end{cases}$

függvény Fourier-transzformáltját!

Láttuk, hogy $F_c\big(f(t)\cdot\cos\omega_0 t\big) = \dfrac{1}{2}\big(F_c(\omega+\omega_0) + F_c(\omega-\omega_0)\big)$.

Esetünkben f az előző feladatbeli függvény, $\omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$, így:

$$F_c\big(f_1(t)\big) = \frac{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)}{\omega + \frac{\pi}{2}} + \frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)}{\omega - \frac{\pi}{2}}$$

A feladatok megoldása során láttuk, hogy a Fourier-transzformált létezéséhez az f függvényre elég erős megszorításokat kell tennünk.

Ha a függvény végtelenben nem tart nullához, nem létezik a transzformált. Ezeken a nehézségeken segít a Laplace-transzformáció, mely lényegesen kevesebbet követel a transzformálandó függvénytől.

8.4 Mintavett függvények spektrálfelbontása

Az előző részekben folytonos (illetve majdnem minden pontban folytonos) függvényekkel foglalkoztunk.

A digitális technika fejlődésével egyre gyakoribb, hogy az $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ függvény helyett csak az $f\big(kt_o\big)$, $k \in \mathbb{N}$, t_0 pozitív valós állandó függvényértékek adottak. Tehát a függvénynek csak bizonyos pontjaiban ismert az értéke. Az $f(t)$ függvény értékeit tehát csak bizonyos pontokban – az úgynevezett mintavételi pontokban – ismerjük. Ilyenkor mintavett függvényről, mintavett jelről beszélünk.

Ezek a mintavételi pontok egyenlő távolságra vannak egymástól, azaz a megfigyelési időtartamot egyenlő – ekvidisztáns – részekre bontjuk, s az e pontokban felvett függvényértékekkel jellemezzük a függvényt.

Ezen az $f\big(kt_0\big) = f\big(t_k\big)$ sorozaton a Fourier-sorok mintájára értelmezhető egy spektrálfelbontás.

Legyen az intervallum, ahol a felbontást végezzük, a $[0, 2\pi[$. Ezt az intervallumot $n+1$ egyenlő részre bontjuk. Az osztópontok:

$$t_k = \frac{2\pi k}{n+1}, \qquad k = 0, \dots n.$$

(A $t = 2\pi$ hely már nincs az osztópontok között.)

Az $f\big(t_k\big)$ sorozat természetesen csak az osztópontokban adja meg a függvény értékét. A folytonos függvények komplex Fourier-sorának mintájára szeretnénk olyan c_j $(j = 0, \dots n)$ együtthatókat találni, amelyekkel az $f_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k e^{ikt}$ függvény az osztópontokban előállítja az $f(t)$ függvényt, azaz teljesüljön k minden értékére $(k = 0, \dots n)$ az $f_n\big(t_k\big) = f\big(t_k\big)$ egyenlőség.

Az $n+1$ ismeretlen c_j együttható kiszámításához $n+1$ lineáris egyenlettel rendelkezünk, ezekből az együtthatók kiszámíthatók. Az osztópontok speciális felvétele azonban egy egyszerűbb eljárást tesz lehetővé.

A komplex Fourier-együtthatók meghatározásánál a sorfejtésben szereplő függvények ortogonalitását használtuk fel. Most hasonlóképpen járunk el.

Legyen $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{n+1}}$. Ekkor $e^{it_k} = w_1^k$.

Mivel w_1 $(n+1)$-edik egységgyök, tehát $w_1^{n+1} = 1$, és természetesen a $w_k^{n+1} = 1$ egyenlőség is teljesül. Ebből következően:

$$\sum_{k=0}^{n} w_m^k \overline{w}_j^k = \sum_{k=0}^{n} \left(w_1^{m-j}\right)^k = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq j, \\ n+1, & \text{ha } m = j. \end{cases}$$

Mivel $m \neq j$ esetben az összeg egy mértani sorozat összege, melynek hányadosa $q = w_1^{m-j}$, ezért $q^{n+1} - 1 = 0$, hiszen q egységgyök.

Ha $m = j$, akkor a sorozat minden tagja 1-gyel egyenlő, így az összeg ebben az esetben $n + 1$.

Az együtthatók meghatározása tehát a következőképpen történik. Ha az $f_n(t_k)$ felírásában szereplő összeget e^{-imt_k}-val szorozzuk, akkor az ortogonalitás miatt csak c_m marad meg, s ennek együtthatója $n + 1$ lesz. Tehát az együtthatók:

$$c_m = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} f(x_k) w_k^{-m} = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} f(x_k) w_1^{-mk}$$

És ezekkel az együtthatókkal $f(x_k) = \sum_{m=0}^{n} c_m w_1^{mk}$.

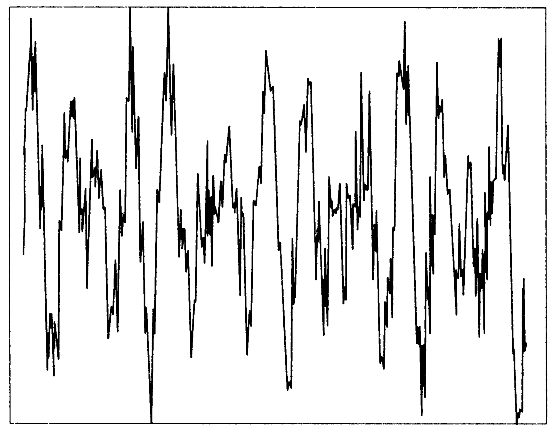
A fenti összefüggések adják meg a mintavett függvény Fourier-transzformáltját, illetve az inverz transzformációt. Az $|c_m|$ értékek adják a függvény spektrumát. A Fourier-analízis során tehát az $f(t_k)$ értékekből határozzuk meg a c_j együtthatókat, az inverz transzformáció során a c_j együtthatókból készített $f_n(t)$-vel közelítjük az eredeti függvényt.

A c_j együtthatók meghatározása igen számolásigényes, a szükséges műveletek száma n^2-tel arányos. Ha az osztópontok száma $n + 1 = 2^m$ (ahol $m \in \mathbb{N}^+$), akkor az osztópontokat páros, illetve páratlan indexű tagokra bonthatjuk (a lépésközt kétszeresére növeljük), s külön-külön számítjuk ki az összegeket. Ezzel a műveletek száma felére csökken. Ezt a kétfelé bontást tovább folytathatjuk, hiszen mindkét csoportban ismét páros számú tag szerepel. Ezzel a módszerrel a számítás gyorsítható. Ezt a módszert nevezik gyors Fourier-transzformációnak (FFT) Az eljárás általában a számítógépes matematikai programokban megtalálható.

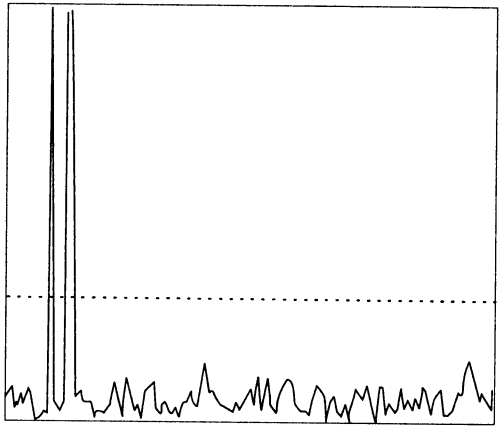
Megemlítjük, hogy az előzőekben szereplő 0-tól n-ig való összegzés helyett szokás a $-\left[\frac{n}{2}\right]$-től $\left[\frac{n+1}{2}\right]$-ig való összegzést alkalmazni; $\left[\frac{n}{2}\right]$ az $\frac{n}{2}$ egész részét jelöli. Ekkor a Fourier-felbontásban szereplő maximális „frekvencia" a mintavételi frekvencia fele. Az eljárást igen sokféle módon alkalmazzák. Az alkalmazások közül csak kettőt említünk.

Adottak a $t_k = k \cdot \frac{2\pi}{n+1}$ $(k = 0, \dots n)$ pontokban egy $f(t)$ függvény értékei (maga a függvény nem ismert). Az osztópontok közötti pontokban kell közelíteni a függvény értékeit (interpoláció). Az előzőekben megismert módon meghatározzuk a c_j együtthatókat, s $f_n(t)$-vel közelítjük a függvényt. Ez a közelítő függvény az alappontokban az $f(t_k)$ értékeket adja. Szokás a spektrumból k nagyobb értékeinek megfelelő tagokat elhagyni, ezzel simítani az interpolációs függvényt. Ekkor a kapott interpolációs függvény már nem halad át az alappontokon, de elég közel halad azokhoz.

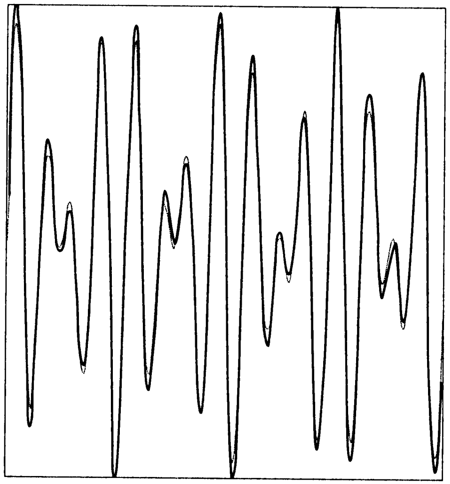
A másik alkalmazásként egy szűrési feladatot említünk: a $p(t)$ periodikus jelre (függvényre) egy additív $z(t)$ zaj rakódik. Számunkra csak a $p(t) + z(t)$ összegfüggvény ismert. Ebből kell lehetőleg pontosan a $p(t)$ függvényt meghatároznunk. Az összeg spektrálfelbontását meghatározva, ebből a kis abszolút értékű tagokat elhagyva, a maradékot visszatranszformáljuk. Az eredeti és a szűrt jel igen jól közelíti egymást. (Az ábrán $n + 1 = 256$.)



8.9a ábra. Az additív zajjal kevert jel



8.9b ábra. A zajos jel spektrumából a szaggatott vonallal jelzett szint alatti összetevőket elhagyjuk a visszatranszformálás során



8.9c ábra. Az eredeti és a Fourier-analízissel szűrt jel

9. LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ

Legyen t egy valós változó, és f ennek valamely valós vagy komplex értékű függvénye. A vizsgálatainkban megelégszünk a gyakorlati alkalmazások szempontjából teljesen elegendő olyan f függvények vizsgálatával, melyek értelmezési tartománya adott $t_0 \in \mathbb{R}$ esetén a $t \geq t_0$ félegyenes. Mivel a t változó általában az időt jelenti, ez gyakorlatilag annyit jelent, hogy egy fizikai, illetve műszaki problémát írunk le az f időfüggvény segítségével, amely egy a t_0 időpontban kezdődő folyamatot, változást jellemez. Ezért nem jelenti majd az általánosság csorbítását, ha a t_0 kezdő időpontot 0-nak tekintjük, hiszen az időmérés kezdetétől a leírás lényege független.

A Laplace-transzformáció az f valós változójú – valós vagy komplex értékű – függvényhez az alábbi F komplex változós függvényt rendeli: $F(s) := \int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}$, illetve az említettek miatt, ha az általánosság ezzel nem korlátozódik, egyszerűbben:

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Az ily módon előállított komplex s változótól függő $s \mapsto F(s)$ függvényt nevezzük a $t \mapsto f(t)$ valós változós függvény Laplace-transzformáltjának. Szokás az f függvényt eredeti függvénynek vagy generátorfüggvénynek nevezni. Jelölése szimbolikusan az alábbi: $L[f] = F$. Annak feltétele, hogy valamely f függvénynek létezzen Laplace-transzformáltja, nyilván az, hogy az s komplex paramétertől függő improprius integrál konvergens legyen. Ennek viszonylag kevés feltétele van, amelyek a gyakorlati problémák során legtöbbször teljesülnek is.

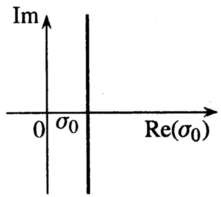
Ezek a következők:

1. az f függvénynek egy véges hosszúságú intervallumon belül legfeljebb véges számú ugrása legyen;
2. bármely $t_0 < t_1 \leq t \leq t_2$ intervallumra vonatkozó integrálnak korlátosnak kell lennie;
3. tudvalevő, hogy $t \mapsto e^{-\sigma t}$ függvény $t \to \infty$ esetén „nagyon erősen" tart 0-hoz, azaz teljesülnek még a

$$\lim_{t\to\infty} t^n \cdot e^{-\sigma t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-\sigma t} = 0,$$
$$\alpha < \sigma, \quad \sigma > 0, \quad n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

határértékrelációk is. Ez nagyjából annyit jelent, hogy ha $t \to \infty$, akkor f legfeljebb úgy tarthat a ∞-hez, mint az $e^{\sigma t}$ függvény, ahol σ tetszőleges véges pozitív valós szám. Ezzel nagyjából körülírtuk, hogy „legrosszabb esetben" hogyan viselkedhet f a ∞-ben. Az $e^{-\sigma t}$ függvény a $-\infty$-ben természetesen tart a ∞-hez, de ez nem számít ebben az esetben, hiszen, amint említettük, f csak $t \geq t_0$ esetén értelmezett.

Az F függvény konvergenciatartományának vizsgálata során kimutatható, hogy ha $\lim_{t\to\infty} f(t) \cdot e^{-\sigma t} = 0$, ha $\sigma > \sigma_k$, akkor a σ_k értékek alsó határa – jele σ_0 – az F függvény konvergenciatartományának alsó határa a valós tengelyen. Ez azt jelenti, hogy ha $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor erre a σ-ra a fenti határérték teljesül, de $\sigma = \sigma_0 - \varepsilon$-ra már nem lesz korlátos a határérték. Ezt a σ_0-t „konvergenciaabszcisszá"-nak is nevezik, ami azt jelenti, hogy az F függvény a $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$ félsíkban reguláris függvény (9.1 ábra).



9.1 ábra

Legyen például F meromorf függvény, azaz F-nek legfeljebb csak pólusszingularitásai vannak.

Legyenek ezek az s_k, $k = 1, 2, \ldots n$ pontok. Ekkor F reciprokának az s_i pontok zérushelyei. Azaz:

$$\frac{1}{F(s_k)} = 0, \text{ ahol } s_k = \sigma_k + i\omega_k,\ k = 1, 2, \ldots n.$$

Ekkor nyilván a σ_k-k (valós részek) maximuma lesz a konvergenciaabszcissza: $\sigma_0 = \max\{\sigma_k | k = 1, 2, \ldots n\}$.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban a σ_0 konvergenciaabszcisszát nem szükséges ismerni. Formálisan annak sincs jelentősége, hogy az s komplex változó, akár valósnak is tekinthetjük. Egyes problémák megoldásánál azonban jelentős egyszerűsítést jelent az, ha s-et komplexnek tekintjük, hiszen a $\sigma > \sigma_0$ félsíkon F reguláris függvény. A reguláris függvényeknek pedig számos előnyös tulajdonsága van.

A Laplace-transzformáció egyik legfontosabb tulajdonsága a linearitás, mely az integrál linearitásából következik. Vagyis:

1. $L[c \cdot f(t)] = c \cdot L[f(t)]$

Ugyanis a konstans kiemelhetősége miatt:

$$L[c \cdot f(t)] = \int_0^\infty c \cdot f(t) e^{-st} dt = c \cdot \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt =$$
$$= c \cdot L[f(t)]$$

2. $L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$

Ugyanis az integrál additivitása és a disztributív törvény felhasználásával:

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t)) e^{-st} dt =$$
$$= \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$$

Általánosan a linearitás az alábbi formulában foglalható össze:

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_i(t)\right] = c_i \cdot \sum_{i=1}^{n} L\left[f_i(t)\right]$$

Tehát összeget lehet tagonként transzformálni, és a konstans a transzformáció során egyszerűen kiemelhető.

9.1 Laplace-transzformáltak közvetlen kiszámítása

Gyakorló feladatok

Számítsuk ki a definíció alapján néhány függvény Laplace-transzformáltját!

1. Legyen $f(t) = 1$.

Ekkor $F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$. Tehát $L[1] = \frac{1}{s}$, illetve a linearitás miatt tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén $L[c] = \frac{c}{s}$.

2. Legyen $f(t) = t$.

Ekkor parciálisan integrálva:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 + \left[\frac{e^{-st}}{-s^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Tehát $L[t] = \frac{1}{s^2}$, illetve bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén $L[c \cdot t] = \frac{c}{s^2}$.

Mindkét fenti példában az integrál akkor konvergál, ha $\mathrm{Re}(s) > 0$, tehát a konvergenciaabszcissza: $\sigma_0 = 0$.

3. Legyen $f(t) = e^{at}$, ahol a tetszőleges valós vagy komplex állandó.

Ekkor: $F(s) = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt =$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

Azaz $L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a}$. Világos azonban, hogy ez az integrál csak abban az esetben konvergens, ha $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$, tehát most a konvergenciaabszcissza: $\sigma_0 = \mathrm{Re}(a)$. (Valós a esetén nyilván $\mathrm{Re}(s) > a$, $\sigma_0 = a$.)

4. Legyen $f(t) = \cos(at)$, ahol a ismét tetszőleges valós vagy komplex szám.

A Laplace-transzformáltat számolhatnánk a valós analízisből ismert kétszeri parciális integrálás után egyenletrendezéssel. Azonban sokkal egyszerűbben érünk célhoz, ha a cos függvény exponenciálisokkal kifejezett alakját használjuk: $\cos at = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}$. Ezt helyettesítve a definíciós képletbe:

$$F(s) = \int_0^\infty \cos at \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{iat} \cdot e^{-st} dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-iat} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

A transzformálásnál felhasználtuk a 3. példa eredményét. Szintén az előző példából adódik, hogy a konvergenciatartomány a $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$ félsík.

5. Legyen $f(t) = t \cdot e^{at}$, ahol a tetszőleges valós vagy komplex állandó.

Parciálisan integrálva:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-(s-a)t} dt = \left[t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{(s-a)^2}$$

A konvergenciaabszcissza ismét $\sigma_0 = \mathrm{Re}(a)$.

6. Számítsuk ki a hiperbolikus függvények Laplace-transzformáltját!

a) $f(t) = \text{ch}at$, $a \in \mathbb{C}$ (vagy $a \in \mathbb{R}$) tetszőleges.

Mivel $\text{ch}z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, ezért támaszkodva a 3. példa eredményére:

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(e^{at} \cdot e^{-st} + e^{-at} \cdot e^{-st}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Tehát $L[\text{ch}at] = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$.

b) Hasonlóan egyszerűen adódik az $f(t) = \text{sh}at$ függvény Laplace-transzformáltja is. Csak annyit kell tenni, hogy a ch-t megadó tört számlálójában az összeg helyére különbséget kell írni:

$$L[\text{sh}at] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Mindkét esetben $\sigma_0 = \text{Re}(a)$.

7. Transzformáljuk az $f(t) = t \cdot \text{sh}at$ függvényt!

A szokott módon a tetszőleges állandót jelent. Felhasználva az 5. példa eredményét, továbbá az sh függvény exponenciálisokkal kifejezett

$$\text{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

alakját, kapjuk:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot \text{sh}at \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t \cdot \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty t \cdot e^{-at} \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-a)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+a)^2} = \frac{2as}{\left(s^2 - a^2\right)^2}$$

Az integrál ismét $\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$ félsíkon konvergens.

8. Legyen $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 2$.

A Laplace-transzformált előállításához parciálisan integrálunk, majd alkalmazzuk az 5. példa eredményét.

a) Legyen először $n = 2$. Ekkor:

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \left[t^2 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 + \frac{2}{s} \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{s} \cdot L[t] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3} = L\left[t^2\right]$$

b) Ha $n = 3$, akkor:

$$F(s) = \int_0^\infty t^3 \cdot e^{-st} dt = \left[t^3 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 3t^2 \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt =$$

$$= 0 + \frac{3}{s} \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-st} dt = \frac{3}{s} \cdot L\left[t^2\right] = \frac{3 \cdot 2}{s^4} = \frac{3!}{s^4} = L\left[t^3\right]$$

c) Teljes indukcióval ezek alapján már könnyen igazolható:

$$L\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

9. Legyen $f(t) = t^n \cdot e^{at}$, ahol a tetszőleges komplex vagy valós állandó, n pozitív egész szám.

a) $n = 1$ esetre már láttuk az 5. példában, hogy:

$$L\left[t \cdot e^{at}\right] = \frac{1}{(s-a)^2}$$

b) $n = 2$ esetben integráljunk parciálisan:

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-(s-a)t} dt =$$

$$= \left[t^2 \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2t \cdot \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} dt =$$

$$= 0 + \frac{2}{(s-a)} \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \frac{2}{(s-a)} \cdot L\left[t \cdot e^{at}\right] =$$

$$= \frac{2}{(s-a)} \cdot \frac{1}{(s-a)^2} = \frac{2}{(s-a)^3} = \frac{2!}{(s-a)^3}$$

c) Folytatható az eljárás $n \geq 3$ esetén is. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy $L\left[t^n \cdot e^{at}\right] = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$.

10. Legyen $f(t) = \sin(at+\beta) \cdot e^{-bt}$, ahol a, b és β tetszőleges konstansok.

Felhasználjuk a sin függvény exponenciálisokkal való előállítását:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Ezzel $f(t) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i(at+\beta)} - e^{-i(at+\beta)}\right) \cdot e^{-bt}$.

A 3. feladat eredményére támaszkodva, felhasználva a transzformáció linearitását, kapjuk:

$$L\left[f(t)\right] = \frac{1}{2i} \cdot \left(L\left[e^{i\beta} \cdot e^{(ia-b)t}\right] - L\left[e^{-i\beta} \cdot e^{-(ia+b)t}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i\beta} \cdot \frac{1}{s-(ia-b)} - e^{-i\beta} \cdot \frac{1}{s+(ia+b)}\right) =$$

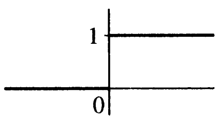
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{\cos\beta + i\sin\beta}{(s+b)-ia} - \frac{\cos\beta - i\sin\beta}{(s+b)+ia}\right)$$

Ha itt közös nevezőre hozunk, összevonunk és egyszerűsítünk, akkor kapjuk a Laplace-transzformáltat: $L\left[f(t)\right] = \dfrac{a\cos\beta + (s+b)\sin\beta}{(s+b)^2 + a^2}$.

A továbbiakban néhány különleges, a gyakorlat számára azonban fontos függvény ismertetésével és Laplace-transzfomáltjának kiszámításával foglalkozunk.

11. Az *egységugrás függvény* értéke zérus, ha argumentuma negatív, és egységnyi értékű, ha argumentuma pozitív (9.2 ábra), azaz:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ 1, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

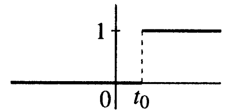


9.2 ábra

Fizikai szempontból ez úgy értelmezhető, mint egy $t = 0$ időpontban bekapcsolt, állandó értékű gerjesztés. Ha a folyamat nem a $t = 0$ időpontban, hanem valamilyen $t = t_0$ időpontban kezdődik, akkor ez az

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < t_0, \\ 1, & \text{ha } t > t_0 \end{cases}$$

függvénnyel adható meg (9.3 ábra).

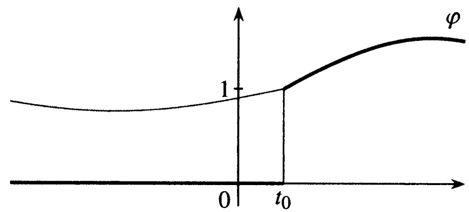


9.3 ábra

Az egységugrás függvény Laplace-transzformáltja:

$$L\left[1(t)\right] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \frac{1}{s}, \text{ ha } \operatorname{Re}(s) > 0,$$

hiszen ezt már láttuk az 1. példában az azonosan 1 függvény esetében. A két transzformált egyenlősége abból következik, hogy amint azt a bevezetőben említettük, az f függvény csak $t > t_0$ esetén érdekes a folyamatok időbeli lefolyásának vizsgálatakor, $t > t_0$ esetén pedig a két függvény megegyezik.



9.4 ábra

Általánosabban: $L\left[1(t-t_0)\right] = \displaystyle\int_{t_0}^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t_0}^\infty = \frac{e^{-st_0}}{s}$.

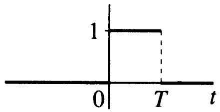
A következőkben látni fogjuk, hogy éppen az e^{st_0} szorzótényezők utalnak arra, hogy a vizsgált folyamatok nem a $t = 0$ időpontban kezdődnek. Az egységugrás függvénynek a bekapcsolási jelenségek vizsgálatánál van szerepe. A t_0 időpontban úgynevezett „belépő függvény” értéke azonosan 0, ha $t < t_0$, és adott φ, ha $t > t_0$, azaz:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < t_0, \\ \varphi(t), & \text{ha } t > t_0. \end{cases}$$

Az egységugrás függvénnyel ez $f(t) = 1\left(t - t_0\right) \cdot \varphi(t)$ formában adható meg (9.4 ábra).

12. Fontos szerepe van még az úgynevezett *„egységnyi amplitúdójú impulzus”* függvénynek. Ha az impulzus hosszúsága T, akkor ez a függvény a T hosszúságú intervallumon egységnyi, másutt zérus (9.5 ábra). Azaz:

$$d(t, T) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t < T, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

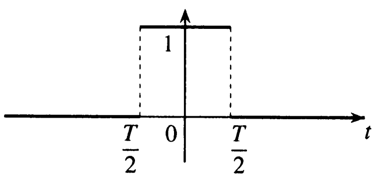


9.5 ábra

Világos, hogy az egységugrás függvénnyel ez könnyen kifejezhető: $d(t, T) = 1(t) - 1(t - T)$. Ennek Laplace-transzformáltja a transzformáció linearitásának és a 11. pont eredményének felhasználásával:

$$L\left[d(t, T)\right] = L\left[1(t) - 1(t - T)\right] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Fontos speciális eset az, amikor az impulzusfüggvény az origóra szimmetrikus (9.6 ábra).



9.6 ábra

Ezt úgy kapjuk, hogy a $d(t, T)$ függvényt negatív irányban eltoljuk $\frac{T}{2}$-vel: $d\left(t + \frac{T}{2}, T\right)$. Ennek Laplace-transzformáltja:

$$L\left[d\left(t + \frac{T}{2}, T\right)\right] = L\left[1\left(t + \frac{T}{2}\right) - 1\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{s} - \frac{e^{-s\frac{T}{2}}}{s} = \frac{2}{s} \cdot \operatorname{sh}\frac{sT}{2}$$

Ennek az egységnyi amplitúdójú impulzus függvénynek segítségével matematikailag egyszerű formában megadhatók olyan függvények, amelyek egyébként csak szakaszonként különböző módon volnának megadhatók. Ha például egy φ függvény csak a $[0, T]$ intervallumban lép fel, a vizsgált mennyiség minden más helyen zérus, azaz:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ \varphi(t), & \text{ha } 0 < t < T, \\ 0, & \text{ha } T > t \end{cases}$$

alakú, akkor f nagyon egyszerűen felírható az alábbi formulákkal:

$$f(t) = \left(1(t) - 1(t - T)\right) \cdot \varphi(t) = d(t, T) \cdot \varphi(t)$$

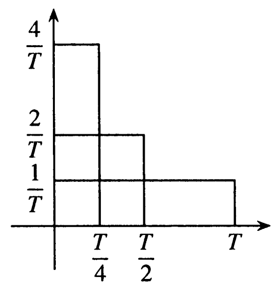
Az ilyen alakú függvényeket általánosan *impulzusnak* nevezzük.

13. Az előző pontban tárgyalt egységnyi amplitúdójú impulzusnak az erőssége definíció szerint $I = \int_{-\infty}^{\infty} d(t, T)dt = \int_0^T 1dt = T$. Gyakran célszerű ehelyett az úgynevezett *„egységnyi erősségű impulzust”* alkalmazni. Ez nyilván az előzőből T-vel való osztással adódik:

$$\delta(t, T) := \frac{1}{T}d(t, T) = \frac{1}{T}\left(1(t) - 1(t - T)\right)$$

Ennek Laplace-transzformáltja a transzformáció linearitásából következően $L\left[\delta(t, T)\right] = \frac{1}{T}L\left[d(t, T)\right] = \frac{1 - e^{-sT}}{Ts}$.

Az értelmezésből világos, hogy ez az impulzus annál nagyobb amplitúdójú, minél rövidebb ideig tart, tehát minél kisebb a T (9.7 ábra).



9.7 ábra

14. Ha ezt a gondolatmenetet tovább folytatjuk, a T időtartamot olyan rövidnek választjuk, hogy ezalatt a többi mennyiség változása elhanyagolható, akkor eljutunk a Dirac-impulzushoz, vagy más néven a Dirac-féle delta függvényhez. Ez lényegében egy nagyon rövid és igen nagy amplitúdójú egységnyi erősségű impulzus. Határátmenettel adódik:

$$\delta(t) := \lim_{T\to 0}\delta(t, T) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \neq 0, \\ \infty, & \text{ha } t = 0. \end{cases}$$

A Dirac-delta Laplace-transzformáltja ebből levezethető, ha felhasználjuk a L'Hospital-szabályt:

$$L\left[\delta(t)\right] = L\left[\lim_{T\to 0}\delta(t, T)\right] = \lim_{T\to 0}\frac{1 - e^{-sT}}{sT} = \lim_{T\to 0}\frac{se^{-sT}}{s} = 1$$

A Dirac-féle delta impulzus lényegének kiderítéséhez tegyük fel a következőket: Legyen f a $t = t_0$ időpont környezetében fellépő folytonos függvény, és legyen $\delta\left(t - t_0\right)$ a t_0 pontban végtelenné váló Dirac-impulzus. Számítsuk ki az f függvény „hatását” Dirac-impulzus fellépésekor. Definíció szerint ez a hatás

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta\left(t - t_0\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\lim_{T\to 0}\delta(t - t_0, T)dt =$$

$$= \lim_{T\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta(t - t_0, T)dt = \lim_{T\to 0}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\frac{1}{T}dt =$$

$$= \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt = \lim_{T\to 0}\frac{1}{T}f\left(t_0 + \alpha\cdot t\right)\cdot T = f\left(t_0\right),$$

ahol felhasználtuk az integrálszámítás középértéktételét, valamint az integrálás és határértékképzés sorrendjének felcserélhetőségét. Ez utóbbi a Dirac-deltára lényegében definíció szerint teljesül.

A kapott relációnak a felhasználásával újra könnyedén előállíthatjuk a Laplace-transzformáltat: $L\left[\delta(t)\right] = \int_0^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt = e^0 = 1$, összhangban a korábbi eredménnyel.

A Dirac-impulzus bevezetésével *formálisan* lehetőség nyílik a derivált fogalmának általánosítására. A fogalom bevezetésével lehetőség nyílik arra, hogy mindenütt deriválhatónak tekintsünk olyan függvényeket is, amelyek szakaszonként differenciálhatók, a szakaszok határain pedig véges jobb és bal oldali határértékeik vannak, tehát a szakadási helyeken mindenütt csak véges ugrással rendelkeznek. Tudvalevő, hogy hagyományos értelemben, ha egy függvény deriválható egy pontban, akkor ott folytonos is. Ha tekintetbe vesszük például a $t \mapsto 1(t)$ egységugrás függvényt, az a $t = 0$ hely kivételével mindenütt folytonos és deriválható is:

$$1'(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } t = 0, \\ 0, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$$

Tisztán formálisan azonban lehetőség nyílik a 0-beli derivált értelmezésére is. Ehhez használjuk fel a Dirac-impulzus fent levezetett tulajdonságát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\delta\left(t - t_0\right)dt = f\left(t_0\right)$$

A Dirac-függvény értelmezéséből nyilvánvaló, hogy ez az összefüggés igaz tetszőleges $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ (akkor $t_1 = \infty$, és/vagy $t_2 = \infty$) esetén is az alábbi formában:

$$\int_{t_0-t_1}^{t_0+t_2} f(t)\cdot\delta\left(t - t_0\right)dt = f\left(t_0\right)$$

Legyen most speciálisan $f(t) = 1$, $t_1 = \infty$, $t_0 + t_2 := t$, ekkor:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta\left(t - t_0\right)dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < t_0, \\ 1, & \text{ha } t > t_0. \end{cases}$$

Azaz: $\int_{-\infty}^{t}\delta\left(t - t_0\right)dt = 1\left(t - t_0\right)$. Ha még konkrétabban, $t_0 = 0$, akkor:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt = 1(t)$$

Adódott tehát egy integrálfüggvény változó felső határral. A valós analízisből ismert, hogy az integrálfüggvény felső határ szerinti deriváltja az integrandus. Ha ezt formálisan alkalmazzuk erre az esetre, akkor azt kapjuk, hogy:

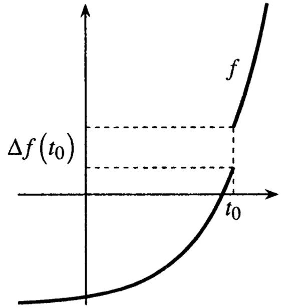
$$1'(t) = \delta(t), \text{ illetve } 1'\left(t - t_0\right) = \delta\left(t - t_0\right),$$

tehát az egységugrás függvény deriváltja a Dirac-impulzus.

Legyen ezek után f olyan függvény, melynek a t_0 pontban elsőfajú szakadása van, ugrása legyen $\Delta f\left(t_0\right)$. A $t < t_0$, illetve $t > t_0$ pontokban a függvény a klasszikus értelemben deriválható. Mivel a t_0-beli egységugrás deriváltja $\delta(t-t_0)$, a $\Delta f(t_0)$ nagyságú ugrás deriváltja nyilvánvalóan $\Delta f(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$ (9.8. ábra).

Tehát f általánosított deriváltja:

$$f'(t)=\begin{cases} f'(t) \text{ a klasszikus értelemben}, & \text{ha } t\neq t_0,\\ \Delta f(t_0)\cdot\delta(t-t_0), & \text{ha } t=t_0. \end{cases}$$



9.8 ábra

Szakadásos függvények magasabb rendű deriváltjainak értelmezéséhez ezek után világos, hogy a Dirac-féle delta függvény deriváltját kell definiálnunk. Ehhez induljunk ki a $\delta f(t-t_0,T)$ T hosszúságú, egységnyi erősségű impulzusból, melynek $T\to 0$ esetén a határértéke a $\delta f(t-t_0)$ Dirac-függvény. A 13. példabeli összefüggés szerint:

$$\delta(t-t_0)=\lim_{T\to 0}(t-t_0,T)=\lim_{T\to 0}\frac{1(t-t_0)-1(t-t_0-T)}{T},$$

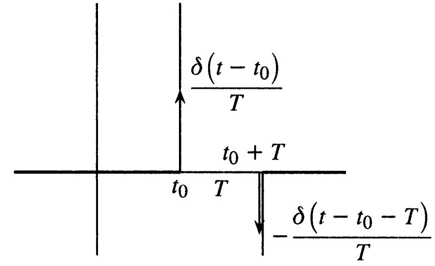
melynek deriváltja a fentiek szerint:

$$\delta'(t-t_0)=\lim_{T\to 0}\frac{\delta(t-t_0)-\delta(t-t_0-T)}{T}$$

A Dirac-féle delta függvény deriváltja tehát két olyan Dirac-impulzus különbségének a határértéke, melyek minden határon túl közelednek egymáshoz, és amelyek amplitúdói ugyanilyen arányban minden határon túl növekednek (9.9 ábra). Vegyük észre, hogy ezzel tulajdonképpen előállítottuk a $t\mapsto 1(t-t_0)$ egységugrás függvény második deriváltját, hiszen:

$$1'(t-t_0)=\delta(t-t_0),\ \text{így}\ 1''(t-t_0)=\delta'(t-t_0).$$

Hasonlóan általánosítható a fenti gondolatmenet a magasabb rendű deriváltak előállítására is. A Dirac-impulzus magasabb rendű deriváltjainak azonban nincs különösebb műszaki jelentősége.



9.9 ábra

9.2 A generátorfüggvény deriválása

Az eddigiekben lényegében a definíció alapján határoztuk meg néhány függvény Laplace-transzformáltját. A továbbiakban olyan, a gyakorlat számára fontos tételt és eljárást említünk meg, melyek felhasználásával sokkal egyszerűbben előállíthatók a transzformáltak, mint az integrál közvetlen kiszámításával.

Az alábbiakban először egy függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja kiszámításával foglalkozunk.

A definíció alapján egyszerűen adódik:

$$L[f'(t)]=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=\left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty-\int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st}dt=$$

$$=-f(0)+s\cdot\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=s\cdot L[f(t)]-f(0)=s\cdot F(s)-f(0),$$

ahol F az f függvény Laplace-transzformáltja. Tehát:

$$L[f'(t)]=s\cdot L[f(t)]-f(0)$$

Abban a különleges esetben, amikor $f(0)=0$, a differenciálás egyszerűen egy s-sel való szorzással egyenértékű.

Ennek a formulának az ismételt alkalmazásával előállíthatjuk magasabb rendű deriváltak Laplace-transzformáltját is.

$$L\left[f''(t)\right] = sL\left[f'(t)\right] - f'(0) = s \cdot \left(sL\left[f(t)\right] - f(0)\right) - f'(0) =$$
$$= s^2 L\left[f(t)\right] - s \cdot f(0) - f'(0)$$

Ismét elmondhatjuk, hogy abban a speciális esetben, amikor az $f(0) = f'(0) = 0$, a kétszeri deriválás a Laplace-transzformáltban s^2-tel való szorzásként jelentkezik. A fenti gondolatmenet folytatásával és teljes indukcióval bizonyítható az alábbi n-ed rendű deriváltakra vonatkozó formula $n \in \mathbb{N}^+$ esetén:

$$L\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n L\left[f(t)\right] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Az imént levezetett formulákat – amint az alábbi példák illusztrálják – felhasználhatjuk Laplace-transzformáltak kiszámítására. Azonban tényleges hasznukat a differenciálegyenletek és differenciál-egyenletrendszerek megoldása során tapasztalhatjuk.

Gyakorló feladatok

1. Egy egyszerű bevezető példaként tekintsük az $f(t) = t$ függvényt.

A 9.1 2. példában láttuk, hogy $L[t] = \frac{1}{s^2}$. Mivel $f'(t) = 1$, ezért a deriváltra vonatkozó formulát alkalmazva: $L[1] = s \cdot \frac{1}{s^2} - f(0) = \frac{1}{s}$, amint az a 9.1 1. példában már kiderült.

2. Legyen $f(t) = \cos at$.

A 9.1 4. példában láttuk, hogy $L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$.

Mivel $f'(t) = -a \cdot \sin at$, ezért:

$$L\left[f'(t)\right] = L[-a \sin at] = s \cdot \frac{s}{s^2 + a^2} - f(0)$$

Ahonnan $L[\sin at] = -\frac{1}{a}\left(\frac{s^2}{s^2 + a^2} - 1\right) = \frac{a}{s^2 + a^2}$.

3. Számítsuk ki a deriváltakra vonatkozó formula felhasználásával az $f(t) = \cos^2 at$ függvény transzformáltját!

Mivel $f'(t) = 2\cos at \cdot (-\sin at) \cdot a = -a \cdot 2 \cdot \sin at \cdot \cos at = -a \cdot \sin 2a$, ezért:

$$L\left[f'(t)\right] = -aL[\sin 2at] = -a \cdot \frac{2a}{s^2 + 4a^2} =$$
$$= L\left[f(t)\right] \cdot s - f(0) = s \cdot L\left[f(t)\right] - 1$$

Tehát:

$$L\left[f(t)\right] = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \frac{2a^2}{s^2 + 4a^2}\right) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 4a^2 - 2a^2}{s^2 + 4a^2} =$$
$$= \frac{s^2 + 2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)}$$

Hasonlóan kapható $L\left[\sin^2 at\right] = \frac{2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)}$.

9.3 A Laplace-transzformált deriválása

Az előbbiekben a generátorfüggvény deriváltjából indultunk ki, annak a transzformáltját kerestük. Most megvizsgáljuk, milyen eredményt mondhatunk a Laplace-transzformált deriváltjára vonatkozólag. Igazolható, hogy a Laplace-transzformált létezéséhez szükséges feltételek tejesülése esetén a transzformált deriválása során a deriválás és az integrálás sorrendje felcserélhető. Ezért írhatjuk, hogy:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \frac{d}{ds} e^{-st} dt =$$
$$= \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-t) e^{-st} dt = -\int_0^{\infty} t \cdot f(t) e^{-st} dt$$

Tehát $\frac{d}{ds}F(s) = -L\left[t \cdot f(t)\right]$. Általánosítva tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén n-edrendű deriváltra:

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty (-t)^n \cdot f(t)e^{-st}dt =$$
$$= (-1)^n \cdot \int_0^\infty t^n \cdot f(t)e^{-st}dt = (-1)^n \cdot L\left[t^n \cdot f(t)\right]$$

Vagyis $\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \cdot L\left[t^n \cdot f(t)\right]$.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $f(t) = t \cdot \sin at$ függvény transzformáltját!

Használjuk fel, hogy $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2} = F(s)$, valamint alkalmazzuk a $\frac{d}{ds}F(s) = -L\left[t \cdot f(t)\right]$ formulát, mely szerint:

$$L[t \cdot \sin at] = -\frac{d}{ds}\frac{a}{s^2+a^2} = -\left(-\frac{a \cdot 2s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right) = \frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$$

2. Transzformáljuk az $f(t) = t^2 \cdot \mathrm{ch}\, at$ függvényt!

Ismerjük a hiperbolikus függvény transzformáltját:

$$F(s) = L[\mathrm{ch}\, at] = \frac{s}{s^2-a^2}$$

Erre alkalmazzuk a $\frac{d^2}{ds^2}F(s) = (-1)^2 \cdot L\left[t^2 \cdot \mathrm{ch}\, at\right]$ relációt. Innen:

$$L\left[t^2 \cdot \mathrm{ch}\, at\right] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1\left(s^2-a^2\right) - s \cdot 2s}{\left(s^2-a^2\right)^2}\right) =$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{-s^2-a^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}\right) = \frac{2s\left(s^2+3a^2\right)}{\left(s^2-a^2\right)^3}$$

3. Transzformáljuk az $f(t) = t^n \cdot e^{at}$ függvényt, ahol n pozitív egész!

Induljunk ki e^{at} Laplace-transzformáltjából a 9.1 3. feladata alapján:

$$L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} = F(s)$$

Alkalmazzuk erre az F-re a $\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \cdot L\left[t^n \cdot f(t)\right]$ formulát:

$$L\left[t^n \cdot e^{at}\right] = \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s-a} = (-1)^n \cdot \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{(-1)}{(s-a)^2} =$$
$$= (-1)^n \cdot \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\frac{(-1)(-2)}{(s-a)^3} = \ldots =$$
$$= (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},$$

ahogyan azt más módszerrel a 9.1 9. példájában már előállítottuk.

9.4 A generátorfüggvény primitív függvényének transzformálása

A deriváltra vonatkozó formula alkalmazásával könnyen levezethetünk egy összefüggést egy f függvény integrálfüggvényének Laplace-transzformáltjára vonatkozólag.

Legyen $\phi(t) = \int_0^t f(t)dt$. Ekkor $\frac{d}{dt}\phi(t) = f(t)$ összefüggés miatt egyrészt:

$$L\left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right] = L\left[f(t)\right]$$

Másrészt a deriváltra vonatkozó szabály szerint:

$$L\left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right] = s \cdot L\left[\phi(t)\right] - \phi(0) = s \cdot L\left[\phi(t)\right]$$

Hiszen $\phi(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$. Átrendezve az egyenletet, kapjuk a keresett összefüggést: $L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}L\left[f(t)\right] = \frac{F(s)}{s}$, ahol F szokás szerint f Laplace-transzformáltja.

Eszerint a generátorfüggvény integrálása a Laplace-transzformált s-sel való osztásával egyenértékű.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a $\phi(t) = \int_0^t t \cdot \sin atdt$ függvény Laplace-transzformáltját!

Eredményeink szerint a ϕ deriváltjának, tehát az integrandusnak a Laplace-transzformáltját kell osztani s-sel. A 9.3 1. példájának eredményét felhasználva:

$$L[\phi(t)] = \frac{1}{s} \cdot L[t \cdot \sin at] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2} = \frac{2a}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$$

2. Számítsuk ki a $\phi(t) = \int_0^t t^2 \cdot e^{-t} dt$ függvény Laplace-transzformáltját!

Az integrálra vonatkozó összefüggés, valamint a 9.1 9. feladat $n = 2$ és $a = -1$ esetre vonatkozó eredményére támaszkodva:

$$L[\phi(t)] = \frac{1}{s} \cdot L\left[t^2 \cdot e^{-t}\right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{2!}{\left(s - (-1)\right)^3} = \frac{2}{s(s + 1)^3}$$

3. Számítsuk ki a $\phi(t) = \int_0^t \cos^2 atdt$ függvény Laplace-transzformáltját!

Felhasználjuk a 9.2 3. feladatának eredményét, és alkalmazzuk az integrálokra vonatkozó formulát. Ezek szerint:

$$L[\phi(t)] = \frac{1}{s} \cdot L\left[\cos^2 at\right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2 + 2a^2}{s\left(s^2 + 4a^2\right)} = \frac{s^2 + 2a^2}{s^2\left(s^2 + 4a^2\right)}$$

9.5 A Laplace-transzformált integrálása

Az előbbiekben a generátorfüggvény integrálfüggvényének a Laplace-transzformáltját vizsgáltuk. Hasznos összefüggést kapunk akkor is, ha magának a Laplace-transzformáltnak az integrálfüggvényét vizsgáljuk. Ehhez állítsuk elő a $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ függvény transzformáltját.

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_s^\infty e^{-st} dt =$$

$$= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt\right) ds = \int_s^\infty F(s)ds,$$

ahol felhasználtuk a $\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-st}}{t}\right) = -e^{-st}$ összefüggést.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $f(t) = \frac{\sin at}{t}$ függvény transzformáltját!

Az előbb levezetett összefüggést alkalmazva:

$$L\left[\frac{\sin at}{t}\right] = \int_s^\infty L[\sin at]ds = \int_s^\infty \frac{a}{s^2 + a^2} ds =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \int_s^\infty \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} ds = \left[\frac{1}{a} \cdot \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{s}{a}\right)\right) \cdot a\right]_s^\infty =$$

$$= \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{s}{a}\right)\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{s}\right)$$

2. Számítsuk ki az $f(t) = \frac{\sin^2 at}{t}$ függvény transzformáltját.

Ehhez felhasználjuk a 9.2. 3. példájában közölt eredményt, miszerint:

$L[\sin^2 at] = \dfrac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$. Innen következik:

$$L\left[f(t)\right] = \int_s^\infty L\left[\sin^2 at\right]ds = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}ds$$

Az integrál kiszámításához parciális törtekre bontunk:

$$\frac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+4a^2}$$

Ennek primitív függvénye:

$$\int\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{4}\cdot\frac{2s}{s^2+4a^2}\right)ds = \frac{1}{2}\ln|s| - \frac{1}{4}\ln\left|s^2+4a^2\right| =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{s^2}{s^2+4a^2}\right|$$

Ahonnan:

$$L\left[\frac{\sin^2 at}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}ds = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{s^2}{s^2+4a^2}\right|\right]_s^\infty =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\ln 1 - \ln\left|\frac{s^2}{s^2+4a^2}\right|\right] = \frac{1}{4}\cdot\ln\left|1+\frac{4a^2}{s^2}\right|$$

3. Számítsuk ki az $f(t) = \dfrac{e^{at}-e^{bt}}{t\cdot e^t}$ függvény Laplace-transzformáltját!

Először átalakítjuk f-et, majd a linearitást felhasználva alkalmazzuk a levezetett formulát:

$$L\left[f(t)\right] = L\left[\frac{e^{(a-1)t}}{t} - \frac{e^{(b-1)t}}{t}\right] = \int_s^\infty\left(\frac{1}{s-a+1} - \frac{1}{s-b+1}\right)ds =$$

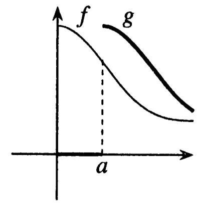
$$= \left[\ln\left|\frac{s-a+1}{s-b+1}\right|\right]_s^\infty = \ln 1 - \ln\left|\frac{s-a+1}{s-b+1}\right| = \ln\left|\frac{s-b+1}{s-a+1}\right|$$

9.6 Eltolási, hasonlósági tételek

Gyakorló feladatok

a) Legyen $a > 0$ rögzített valós szám, f adott generátorfüggvény. Definiáljuk a g függvényt az alábbi módon:

$$g(t) := \begin{cases} f(t-a), & \text{ha } t \geq a, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < a. \end{cases}$$



9.10 ábra

Tehát g nem más, mint az f függvény elcsúsztatva a valós x tengely mentén jobbra a-val (9.10 ábra). Számítsuk ki g transzformáltját:

$$L\left[g(t)\right] = \int_0^\infty g(t)\cdot e^{-st}dt = \int_a^\infty g(t)\cdot e^{-st}dt =$$

$$= \int_a^\infty f(t-a)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(x)\cdot e^{-s(x+a)}dx =$$

$$= e^{-as}\cdot\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-sx}dx = e^{-as}\cdot L\left[f(t)\right],$$

ahol alkalmaztuk az $x = t-a$, $t = x+a$, $dt = dx$ helyettesítést. Tehát $L\left[f(t-a)\right] = e^{-as}\cdot L\left[f(t)\right]$. A generátorfüggvény eltolása a Laplace-transzformált exponenciális tényezővel való szorzását eredményezi. Ezt az összefüggést nevezzük *eltolási tételnek*.

1. Számítsuk ki az alábbi függvény Laplace-transzformáltját!

$$g(t) := \begin{cases} (t-2)^3, & \text{ha } t \geq 2, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < 2. \end{cases}$$

Itt nyilvánvalóan $f(t) = t^3$ és $a = 2$, így az előbbiek és a 9.1 8. példájának eredménye szerint: $L\left[g(t)\right] = e^{-2s}\cdot L\left[f(t)\right] = e^{-2s}\cdot\dfrac{3!}{s^4}$

2. Számítsuk ki az $1(t-t_0)$ egységugrás függvény transzformáltját!

Azt már tudjuk a 9.1 11. példája alapján, hogy $L\left[1(t)\right] = \frac{1}{s}$. Ezt felhasználva: $L\left[1\left(t-t_0\right)\right] = e^{-st_0}\cdot L\left[1(t)\right] = \frac{e^{-st_0}}{s}$, összhangban a korábbi eredményünkkel.

3. Legyen $g(t) := \begin{cases} e^{-b(t-a)}, & \text{ha } t \geq a, \\ 0, & \text{ha } 0 \leq t < a. \end{cases}$

Itt nyilván $f(t) = e^{-bt}$, és $L\left[e^{-bt}\right] = \frac{1}{s+b}$.

Ebből következően $L\left[g(t)\right] = e^{-as}\cdot L\left[e^{-bt}\right] = \frac{e^{-as}}{s+b}$.

b) Vizsgáljuk meg az előző kérdés fordítottját. Ha F az f függvény transzformáltja, akkor az $s \mapsto F(s+a)$ függvény mely generátorfüggvényhez tartozik?

Mivel $F(s) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt$, ezért:

$$F(s+a) = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(s+a)t}dt = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-at}\cdot e^{-st}dt =$$
$$= L\left[f(t)\cdot e^{-at}\right]$$

Tehát a Laplace-transzformált eltolása a generátorfüggvény e^{-at} exponenciális tényezővel való szorzásával egyenértékű. Ezt az összefüggést nevezik *csillapítási tételnek*, de nevezhetjük a Laplace-transzformáltra vonatkozó eltolási tételnek is. Ez az összefüggés nyilván az előzőekben bemutatott eltolási tétel megfelelője a transzformáltra vonatkozólag.

4. A csillapítási tétel alkalmazásával számítsuk ki a következő függvény Laplace-transzformáltját!

Legyen $f(t) = e^{-at}\cdot \text{ch}bt$. A 9.1 6. példájában láttuk, hogy:

$$L[\text{ch}bt] = \frac{s}{s^2-b^2}$$

Ebből következően az $s \to s+a$ helyettesítéssel adódik:

$$L\left[e^{-at}\cdot\text{ch}bt\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2-b^2}$$

5. Számítsuk ki az $f(t) = \frac{t^n}{n!}\cdot\text{sh}at$ generátorfüggvény transzformáltját!

Alakítsuk át a hiperbolikus tényezőt:

$$f(t) = \frac{t^n}{n!}\cdot\frac{e^{at}-e^{-at}}{2} = e^{at}\cdot\frac{t^n}{2n!} - e^{-at}\cdot\frac{t^n}{2n!},$$

és használjuk a 9.1. 8. példa eredményét, miszerint $L\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$. Innen a Laplace-transzformáció linearitását alkalmazva $s \to s-a$, illetve $s \to s+a$ helyettesítéssel érünk célhoz:

$$L\left[f(t)\right] = \frac{1}{2n!}\cdot\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} - \frac{1}{2n!}\cdot\frac{n!}{(s+a)^{n+1}} =$$
$$= \frac{(s+a)^{n+1}-(s-a)^{n+1}}{2\left(s^2-a^2\right)^{n+1}}$$

6. Vezessük le az $f(t) = t\cdot e^{-at}\cdot\sin bt$ függvény transzformáltját!

Induljunk ki a 9.3 1. példájának eredményéből, mely szerint:

$$L[t\cdot\sin bt] = \frac{2bs}{\left(s^2+b^2\right)^2},$$

majd az e^{-at} szorzónak megfelelően végezzük el az $s \to s+a$ helyettesítést: $L\left[f(t)\right] = \frac{2b(s+a)}{\left((s+a)^2+b^2\right)^2}$.

c) Legyen adva az f generátorfüggvény és annak F Laplace-transzformáltja. Ezek ismeretében könnyen át lehet térni más argumentumú függvényekre az úgynevezett *hasonlósági tétel* segítségével. A definíció szerinti

$$F(s) = L\left[f(t)\right] = \int_s^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt$$

egyenletben a t változó helyére vezessük be az $\alpha\cdot t$ változót, ahol α legyen pozitív állandó.

Ez lényegében egy helyettesítéses integrálás, amely a $\tau = \alpha\cdot t$ jelölés bevezetésével az alábbi alakot ölti:

$$L[f(\alpha t)] = \int_0^\infty f(\alpha t)\cdot e^{-st}dt = \int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-s\cdot\frac{\tau}{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}d\tau =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\cdot\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-\frac{s}{\alpha}\cdot\tau}d\tau = \frac{1}{\alpha}\cdot F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Ezzel megkaptuk a hasonlósági tétel matematikai alakját:

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}\cdot F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

A tétel jelentősége elsősorban abban van, hogy táblázatban adott generátorfüggvény és transzformált esetén könnyedén áttérhetünk más argumentumú függvénypárra.

7. Korábbi példáinkból kiderült, hogy:

$$L[t-\sin t] = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

Innen a hasonlósági tétellel kapjuk:

$$L[at-\sin at] = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2+1\right)} =$$
$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{s^2}{a^2}\cdot\frac{s^2+a^2}{a^2}} = \frac{a^3}{s^2(s^2+a^2)}$$

8. Laplace-transzformáltakat tartalmazó táblázatból kiderül:

$L[\ln t] = -\frac{1}{s}\cdot(C+\ln s)$, ahol C egy állandó.

Innen a hasonlósági tétellel adódik:

$$L[\ln at] = \frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{\frac{s}{a}}\cdot\left(C+\ln\frac{s}{a}\right)\right) = -\frac{1}{s}\cdot\left(C+\ln\frac{s}{a}\right)$$

9. Ugyancsak táblázatból kiolvasható, vagy a korábbi eredményeink alapján nyerhető $L\left[t^2\cdot \mathrm{ch}t\right] = \frac{2s(s^2+3)}{(s^2-1)^3}$.

Ahonnan a hasonlósági tétellel adódik:

$$L\left[(at)^2\cdot \mathrm{ch}at\right] = \frac{1}{a}\cdot\frac{2\cdot\frac{s}{a}\cdot\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2+3\right)}{\left(\left(\frac{s}{a}\right)^2-1\right)^3} = a^2\cdot\frac{2s(s^2+3a^2)}{(s^2-a^2)^3}$$

Innen a transzformáció linearitásának felhasználásával adódik például az is, hogy:

$$L\left[t^2\cdot \mathrm{ch}at\right] = \frac{a^2}{a^2}\cdot\frac{2s(s^2+3a^2)}{(s^2-a^2)^3} = \frac{2s(s^2+3a^2)}{(s^2-a^2)^3},$$

ahogyan azt a 9.3 2. példájában más eljárással már megkaptuk.

9.7 Paramétert tartalmazó függvények transzformálása

Tegyük fel, hogy a generátorfüggvény a t változón kívül tartalmaz még egy p valós vagy komplex paramétert is, tehát $t\mapsto f(t,p)$ alakú. Ha ezt a függvényt transzformáljuk, a transzformáció során – a többváltozós analízisben megszokott módon – a p paramétert állandónak tekintjük. Ezek után a Laplace-transzformált is természetesen tartalmazza a p paramétert: $F(s,p) = \int_0^\infty f(t,p)\cdot e^{-st}dt$.

Be lehet bizonyítani, hogy a gyakorlatban általában előálló esetekben a transzformáció és a p paraméter szerinti műveletek sorrendje felcserélhető. Tehát például a p szerinti differenciálás, illetve integrálás elvégezhető a transzformáció előtt vagy után, az eredmény ettől független, azaz:

a) $L\left[\frac{\partial}{\partial p}f(t,p)\right] = \frac{\partial}{\partial p}F(s,p)$

b) $L\left[\int_0^p f(t, p)dp\right] = \int_0^p F(s, p)dp$

Ezek a formulák szintén felhasználhatók Laplace-transzformáltak kiszámítására.

Gyakorló feladatok

1. A 9.6 4. feladatában bebizonyítottuk, hogy:

$$L\left[e^{-at} \cdot \mathrm{ch}bt\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2 - b^2}$$

Itt a generátorfüggvény $t \mapsto f(t, a, b)$ alakú, ahol az a és b állandók paraméternek tekinthetők. Deriváljunk a b paraméter szerint.

Egyrészt $\frac{\partial}{\partial b}\left(e^{-at} \cdot \mathrm{ch}bt\right) = t \cdot e^{-at} \cdot \mathrm{sh}bt.$

Másrészt $\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{s+a}{(s+a)^2 - b^2}\right) = -\frac{(s+a)\cdot(-2b)}{\left((s+a)^2 - b^2\right)^2}.$

Ahonnan azt kapjuk, hogy $L\left[t \cdot e^{-at} \cdot \mathrm{sh}bt\right] = \frac{2(s+a)b}{\left((s+a)^2 - b^2\right)^2}.$

2. A 9.1 6. feladatában bizonyítottuk, hogy:

$$L[\mathrm{ch}at] = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Ez esetben a generátorfüggvény $t \mapsto f(t, a)$ alakú, ahol a a paraméter. Integráljuk most külön-külön a generálfüggvényt és a Laplace-transzformáltat az a paraméter szerint: $\int_0^a \mathrm{ch}at\,da = \left[\frac{\mathrm{sh}at}{t}\right]_0^a = \frac{\mathrm{sh}at}{t}.$

Másrészt parciális törtekre bontással:

$$\int_0^a \frac{s}{s^2 - a^2}da = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)da =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ln|s-a|}{-1} + \ln|s+a|\right)\right]_0^a = \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+a}{s-a}\right|\right]_0^a =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+a}{s-a}\right|$$

Ahonnan kapjuk az alábbi eredményt: $L\left[\frac{\mathrm{sh}at}{t}\right] = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s+a}{s-a}\right|.$

3. A 9.1. 3. példájában láttuk, hogy $L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a}$, ahol a generátorfüggvény $t \mapsto f(t, a)$ alakú, az a jelenti a paramétert.

Deriváljuk a generátorfüggvényt a paraméter szerint többször egymás után: $\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{at}\right) = t \cdot e^{at}$, $\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(e^{at}\right) = t^2 \cdot e^{at}$ ...

Majd deriváljuk a Laplace-transzformáltat ugyancsak az a paraméter szerint: $\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{1}{(s-a)^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{2}{(s-a)^3}$ ...

A megfelelő rendű deriváltakat összevetve adódnak a transzformáltak:

$$L\left[te^{at}\right] = \frac{1}{(s-a)^2},\ L\left[t^2e^{at}\right] = \frac{2}{(s-a)^3}\ \ldots$$

Most pedig integráljuk külön-külön a generátorfüggvényt és a transzformáltat:

$$\int_0^a e^{at}da = \left[\frac{e^{at}}{t}\right]_0^a = \frac{e^{at}-1}{t}.$$

Másrészt:

$$\int_0^a \frac{1}{s-a}da = \left[-\ln|s-a|\right]_0^a =$$

$$= -\ln|s-a| + \ln|s| = -\ln\left|\frac{s-a}{s}\right| = \ln\left|\frac{s}{s-a}\right|$$

Ahonnan $L\left[\frac{e^{at}-1}{t}\right] = -\ln\left|\frac{s-a}{s}\right| = \ln\left|\frac{s}{s-a}\right|.$

9.8 Konvolúció

Az f_1 és f_2 generátorfüggvények $f_1 * f_2$-vel jelölt konvolúcióját az alábbi összefüggéssel értelmezzük:

$$\left(f_1 * f_2\right)(t) := \int_0^t f_1(x) \cdot f_2(t-x)dx$$

A definíció alapján könnyen igazolható, hogy ez a művelet kommutatív, tehát $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$. Számítsuk most ki az $f_1 * f_2$ konvolúció Laplace-transzformáltját! A számítások során alkalmazunk egy helyettesítést, bevezetjük a t' új változót a $t' = t - x$ definícióval, ahonnan $t = t' + x$, $dt = dt'$ következik. Így:

$$L\left[(f_1 * f_2)(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f_1(x)\cdot f_2(t-x)dx\right)dt =$$
$$= \int_0^\infty f_1(x)\left(\int_0^\infty e^{-st}\cdot f_2(t-x)dt\right)dx =$$
$$= \int_0^\infty f_1(x)\left(\int_0^\infty e^{-s(t'+x)}\cdot f_2(t')dt'\right)dx =$$
$$= \left(\int_0^\infty f_1(x)\cdot e^{-sx}dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty f_2(t')\cdot e^{-st'}dt'\right) = F_1(s)\cdot F_2(s)$$

Azt kaptuk tehát, hogy f_1 és f_2 konvolúciójának Laplace-transzformáltja a függvények Laplace-transzformáltjainak szorzata.

Ez az összefüggés alapvető jelentőségű, különösen az inverz Laplace-transzformáció végrehajtásánál van lényeges szerepe. Ha ugyanis sikerül a Laplace-transzformáltat szorzattá alakítani, és az egyes tényezőket visszatranszformálni, akkor ezeknek a generátorfüggvényeknek a konvolúciója szolgáltatja az inverz transzformáltat. Ezt később az inverz transzformáció témakörében példákon keresztül részletesen megmutatjuk.

Annak érdekében, hogy megbarátkozzunk ezzel a művelettel, kiszámítunk néhány konvolúciót, és annak transzformáltját.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $f_1(t) = e^{at}$ és $f_2(t) = e^{bt}$ függvények konvolúcióját, ahol a és b adott állandók!

$$(f_1 * f_2)(t) = e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{ax}\cdot e^{b(t-x)}dx =$$

$$= \int_0^t e^{ax}\cdot e^{bt}\cdot e^{-bx}dx = e^{bt}\cdot\int_0^t e^{(a-b)x}dx = e^{bt}\cdot\left[\frac{e^{(a-b)x}}{a-b}\right]_0^t =$$
$$= e^{bt}\cdot\left(\frac{e^{(a-b)t}-1}{a-b}\right) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$$

A konvolúciótétel szerint ennek Laplace-transzformáltja:

$$L\left[\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right] = L\left[e^{at} * e^{bt}\right] = \frac{1}{s-a}\cdot\frac{1}{s-b}$$

2. Legyen $f_1(t) = t$ és $f_2(t) = t^2$. Számítsuk ki f_1 és f_2 konvolúcióját!

A kommutativitás felhasználásával kapjuk:

$$(f_1 * f_2)(t) = t * t^2 = \int_0^t x^2\cdot(t-x)dx = \int_0^t \left(x^2 t - x^3\right)dx =$$
$$= \left[t\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12}$$

A konvolúciótétel szerint ennek transzformáltja – amint az a korábbiak szerint is könnyen ellenőrizhető: $L\left[\frac{t^4}{12}\right] = L\left[t * t^2\right] = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{2}{s^3} = \frac{2}{s^5}$.

3. Legyen $f_1(t) = \mathrm{ch}at$ és $f_2(t) = t$!

Ezek konvolúciója parciális integrálással:

$$(f_1 * f_2)(t) = \mathrm{ch}at * t = \int_0^t \mathrm{ch}ax\cdot(t-x)dx =$$
$$= \left[\frac{\mathrm{sh}ax}{a}(t-x)\right]_0^t + \int_0^t \frac{\mathrm{sh}ax}{a}dx = \left[\frac{\mathrm{ch}ax}{a^2}\right]_0^t =$$
$$= \frac{\mathrm{ch}at}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{\mathrm{ch}at - 1}{a^2}$$

Ennek Laplace-transzformáltja a konvolúciótétel szerint:

$$L[\mathrm{ch}at * t] = L[\mathrm{ch}at]\cdot L[t] = \frac{s}{s^2-a^2}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s\left(s^2-a^2\right)}$$

4. Számítsa ki az $f_1(t) = \sin at$ és $f_2(t) = \cos bt$ függvények konvolúcióját, ahol a és b adott állandók!

Definíció szerint $\left(f_1 * f_2\right)(t) = \int_0^t \sin ax \cdot \cos b(t-x)dx$.

Az integrál kiszámításához alkalmazzuk a trigonometriából ismert alábbi azonosságot: $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$, mely szerint:

$$\sin\alpha x \cdot \cos(bt - bx) = \frac{1}{2}\left(\sin\left((a-b)x + bt\right) + \sin\left((a+b)x - bt\right)\right)$$

Az integrálást ezek után tagonként végezhetjük el:

$$f_1(t) * f_2(t) = \left[\frac{-\cos\left((a-b)x + bt\right)}{2(a-b)} - \frac{\cos\left((a+b)x - bt\right)}{2(a+b)}\right]_0^t =$$

$$= \frac{\cos bt - \cos at}{2(a-b)} + \frac{\cos bt - \cos at}{2(a+b)} = (\cos bt - \cos at)\cdot\frac{a}{a^2 - b^2}$$

A konvolúciótétel felhasználásával ismét egyszerűen kapjuk a Laplace-transzformáltat:

$$L\left[\frac{a}{a^2 - b^2}\cdot(\cos at - \cos bt)\right] = L[\sin at]\cdot L[\cos bt] =$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}\cdot\frac{s}{s^2 + b^2}$$

A korábbi példáinkban levezetett eredmények alapján ez a formula is leellenőrizhető úgy, hogy közvetlenül a konvolúciót transzformáljuk. Mindenesetre megnyugtató, hogy független módszerek ugyanazt az eredményt adják. Visszatérve a kiszámított konvolúcióra, világos, hogy annak nincs értelme $a = b$ esetén. Végezzük el a számítást erre a speciális esetre is:

$$\left(f_1 * f_2\right)(t) = \int_0^t \sin ax \cdot \sin a(t-x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^t \left(\sin at + \sin(2ax - at)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[x\cdot\sin at - \frac{\cos(2ax - at)}{2a}\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(t\cdot\sin at - \frac{\cos at}{2a} + \frac{\cos(-at)}{2a}\right) = \frac{1}{2}t\sin at$$

Jellegében eltérő eredményt kaptunk. Ennek transzformáltja a konvolúciótétel szerint:

$$L\left[\frac{1}{2}t\sin at\right] = L[\sin at]\cdot L[\cos at] = \frac{a}{s^2 + a^2}\cdot\frac{s}{s^2 + a^2} = \frac{as}{\left(s^2 + a^2\right)^2}$$

összhangban a 9.3 1. feladat eredményével.

9.9 Inverz Laplace-transzformáció

Függvények Laplace-transzformáltjának előállítása mellett legalább olyan fontos dolog az inverz transzformáció, azaz adott F Laplace-transzformálthoz megkeresni az f generátorfüggvényt. Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy az inverz kapcsolatot az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\cdot e^{st}ds \qquad t \geq 0$$

integrálformula szolgáltatja, ahol az integrálást a komplex számsík képzetes tengellyel párhuzamos bármely olyan egyenese mentén kell elvégezni, melyre $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$.

Ez az integrál elvileg természetesen minden esetben szolgáltatja a generátorfüggvényt. A gyakorlatban azonban legtöbbször mégsem ez a formula használatos. Ugyanis számos függvény Laplace-transzformáltját már ismerjük, amelyeket táblázatba foglalunk – egy ilyen táblázatot talál az Olvasó a fejezet végén –, és a táblázat, valamint az előző részben ismertetett tételek segítségével sok esetben viszonylag egyszerűen előállíthatjuk az inverz transzformáltat.

Ha a visszatranszformálandó függvény megegyezik egy táblázatbeli függvénnyel, már készen is vagyunk, ha $F_1 \cdot F_2$ alakú, alkalmazzuk a konvolúciótételt. Ha az argumentum a táblázatbelitől csak konstans szorzóban különbözik, alkalmazzuk a hasonlósági tételt. Ha a visszatranszformálandó függvény $s \mapsto F(s+a)$ alakú, a csillapítási tétel alapján dolgozhatunk, ha pedig $s \mapsto s\cdot F(s)$, illetve $s \mapsto \frac{1}{s}\cdot F(s)$ formájú, akkor a generátorfüggvény deriválásával, illetve integrálásával érünk célhoz.

A könnyebb áttekinthetőség érdekében felsoroljuk az inverz transzformációhoz használható alapvető összefüggéseket, de előbb megállapodunk egy jelölésben. Ha az f generátorfüggvény Laplace-transzformáltja az F függvény, tehát $L[f] = F$, akkor az inverz kapcsolatot az $L^{-1}[F] = f$ jelöléssel juttatjuk kifejezésre.

1. *Konvolúciótétel*

Ha f transzformáltja F, és g transzformáltja G, akkor:

$$L^{-1}\left[F(s) \cdot G(s)\right] = (f * g)(t) = \int_0^t f(s) \cdot g(t-s)ds$$

2. *A generátorfüggvény deriválási tétele*

$L^{-1}\left[s \cdot F(s)\right] = L^{-1}\left[L\left[f'(t)\right] + f(0)\right]$. Speciális esetben, ha $f(0) = 0$, nyilván $L^{-1}\left[s \cdot F(s)\right] = f'(t)$.

3. *A transzformált deriválási tétele*

$$L^{-1}\left[F'(s)\right] = -tf(t)$$

4. *A generátorfüggvény integrálási tétele*

$$L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(x)dx$$

5. *A transzformált integrálási tétele*

$$L^{-1}\left[\int_s^\infty F(s)ds\right] = \frac{1}{t} \cdot f(t)$$

6. *Hasonlósági tétel*

$$L^{-1}\left[F(as)\right] = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{t}{a}\right)$$

7. *A generátorfüggvényre vonatkozó eltolási tétel*

$$L^{-1}\left[e^{-as} \cdot F(s)\right] = \begin{cases} f(t-a), & \text{ha } t > a, \\ 0, & \text{ha } t < a. \end{cases}$$

8. *Csillapítási tétel* (a transzformáltra vonatkozó eltolási tétel)

$$L^{-1}\left[F(s+a)\right] = e^{-at} \cdot f(t)$$

Gyakorló feladatok

Keressük meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját a felsorolt tételek felhasználásával!

1. Legyen $F(s) = \dfrac{6}{s^4 - 5s^3 - 36}$!

Az inverz transzformációhoz a nevezőt szorzattá alakítjuk, majd a törtet két tört szorzataként írjuk fel:

$$F(s) = \frac{6}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-9\right)} = \frac{2}{s^2+2^2} \cdot \frac{3}{s^2-3^2}$$

A kapott két tényező ismert függvény transzformáltja, a táblázat 12. és 27. sorában találhatók. Mivel szorzat inverz transzformáltjáról van szó, alkalmazzuk a konvolúciótételt, mely szerint:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right] * L^{-1}\left[\frac{3}{s^2-3^2}\right] = \sin 2t * \mathrm{sh}3t,$$

és innen a $\sin at = \dfrac{e^{ait} - e^{-ait}}{2i}$ és az $\mathrm{sh}bt = \dfrac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}$ összefüggések felhasználásával, a 9.8 1. feladatának eredményére támaszkodva egyszerű helyettesítéssel eljuthatunk az inverz transzformálthoz.

2. Legyen $F(s) = \dfrac{s^3 - s}{\left(s^2+1\right)^2}$!

Ha elvégezzük az $F(s) = s \cdot \dfrac{s^2 - 1^2}{\left(s^2+1^2\right)^2}$ átalakítást, világosan látszik, hogy F az $f(t) = t \cdot \cos t$ generátorfüggvény transzformáltjának s-szerese (táblázat 19. sora). Ezért alkalmazhatjuk a 2. tételt a generátorfüggvény deriválására vonatkozólag. Mivel $f'(t) = \cos t - t \cdot \sin t$ és $f(0) = 0$, ezért:

$L^{-1}\left[L\left[f'(t)\right] + f(0)\right] = f'(t)$, tehát $L^{-1}\left[F(s)\right] = \cos t - t \cdot \sin t$.

3. $F(s) = \dfrac{2s+4}{\left(s^2+4s+3\right)^2}$

Ha a nevezőt teljes négyzetté kiegészítettük:

$$F(s)=\frac{2s+4}{\left((s+2)^2-1\right)^2},$$

akkor észrevehető, hogy a táblázat 37. sorában álló transzformált deriváltjával állunk szemben $a=1$ és $b=2$ esetén (a -1 szorzótól egyelőre eltekintve), hiszen $F(s)=-\left(\frac{1}{(s+2)^2-1}\right)'$, így alkalmazható a transzformált deriválási tétele, mely szerint:

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[-\left(\frac{1}{(s+2)^2-1}\right)'\right]=t\cdot e^{-2t}\cdot \mathrm{sh}t$$

4. $F(s)=\dfrac{8}{\left(s^2-16\right)^2}$

A táblázat 34. sorával összehasonlítva látszik, hogy F az $f(t)=t\cdot\mathrm{sh}4t$ függvény transzformáltjának $\frac{1}{s}$-szerese, ezért felhasználható a generátorfüggvény integrálási tétele, mely szerint:

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot L[t\cdot\mathrm{sh}4t]\right]=\int_0^t t\cdot\mathrm{sh}4t\,dt$$

Az integrál parciálisan kiszámítható:

$$\int_0^t t\cdot\mathrm{sh}4t\,dt=\left[t\cdot\frac{\mathrm{ch}4t}{4}\right]_0^t-\int_0^t\frac{\mathrm{ch}4t}{4}dt=$$

$$=t\cdot\frac{\mathrm{ch}4t}{4}-\left[\frac{\mathrm{sh}4t}{16}\right]_0^t=t\cdot\frac{\mathrm{ch}4t}{4}-\frac{\mathrm{sh}4t}{16}$$

Tehát $L^{-1}\left[\dfrac{8}{\left(s^2-16\right)^2}\right]=\dfrac{t\cdot\mathrm{ch}4t}{4}-\dfrac{\mathrm{sh}4t}{16}.$

5. $F(s)=\dfrac{1}{4}\cdot\ln\left(\dfrac{s^2}{s^2-4a^2}\right)$

Ebben az esetben könnyen meggyőződhetünk arról – például deriválással –, hogy F az $f(t)=\mathrm{sh}^2at$ generátorfüggvény Laplace-transzformáltjának az s és ∞ határok közötti integrálásával származik. Így a transzformáltra vonatkozó integrálási tétel felhasználásával adódik az inverz transzformált:

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\int_s^\infty L\left[\mathrm{sh}^2at\right]ds\right]=\frac{1}{t}\cdot\mathrm{sh}^2at$$

6. $F(s)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{4s^2+9}{4s^2+25}\right)$

Ha végrehajtjuk a triviális $F(s)=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\dfrac{(2s)^2+3^2}{(2s)^2+5^2}\right)$ átalakítást, és a táblázat 25. sorára pillantunk, akkor világos, hogy az $F(s)$ az $f(t)=\dfrac{\cos 3t-\cos 5t}{t}$ függvény transzformáltjából adódik az $s\longrightarrow 2s$ helyettesítéssel. A hasonlósági tétel alkalmazásával tehát az alábbi következik:

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{3}{2}t\right)-\cos\left(\frac{5}{2}t\right)}{\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{t}\cdot\left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right)-\cos\left(\frac{5t}{2}\right)\right)$$

7. $F(s)=e^{-2s}\cdot\dfrac{6\left(3s^2-9\right)}{\left(s^2+9\right)^3}$

Észrevesszük, hogy a racionális tört tényező – a táblázat 22. sorának felhasználásával – éppen az $f(t)=t^2\cdot\sin 3t$ generátorfüggvény transzformáltja. Ennek exponenciális tényezővel való szorzata az eltolási tétel alkalmazását igényli, mely szerint az inverz transzformált egyszerűen $t\longrightarrow t-2$ helyettesítéssel adódik $L^{-1}\left[F(s)\right]=(t-2)^2\cdot\sin(3t-6)$, ha $t>2$.

8. $F(s)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{(s+5)^3}}$

A táblázat 5. sorára tekintve kitűnik, hogy F az $f(t)=\sqrt{t}$ generátorfüggvény Laplace-transzformáltjának elcsúsztatottja, ugyanis az $s\longrightarrow s+5$

helyettesítéssel származik a táblázatbeli függvényből. Ez esetben a csillapítási tétellel kapjuk az inverz transzformáltat, mely szerint az a generátorfüggvény exponenciális tényezővel való szorzással adódik.

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = e^{-5t} \cdot f(t) = e^{-5t} \cdot \sqrt{t}$$

9.10 Parciális törtekre bontás módszere

Racionális törtfüggvények esetében több olyan módszer is létezik, amely az előzőeknél általánosabb, és inverz transzformációt tesz lehetővé. A legelemibb ezek között a parciális törtekre bontás módszere. Ennek lényege, hogy a racionális törtfüggvényt – a valós analízisben megismert módon – egy polinomnak és elemi résztörteknek az összegére bontjuk, majd – felhasználva az inverz transzformáció linearitását – az egyes tagokat inverz transzformáljuk úgy, hogy az egyes tagokra alkalmazzuk az előző részben említett nyolc tétel valamelyikét, vagy ha szerencsénk van, egy-egy résztört inverz transzformáltja közvetlenül kiolvasható a táblázatból. Lássunk erre példákat! Határozzuk meg az alábbi F függvények inverz Laplace-transzformáltját a parciális törtekre bontás módszerével!

Gyakorló feladatok

1. $F(s) = \dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}$

A függvény parciális tört alakja a következő: $F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1}$. A táblázat 39. és 11. sorából az inverz transzformált tagonként azonnal leolvasható: $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right] = 1 - \cos t$.

2. $F(s) = \dfrac{3s+10}{s^2+4s+5}$

A nevezőt teljes négyzetté kiegészítve – mivel a diszkrimináns negatív – az alábbi törtet kapjuk: $F(s) = \dfrac{3s+10}{(s+2)^2+1}$. A táblázatot vizsgálva, annak 14. és 16. sora hasonlít legjobban erre a függvényre, ennek megfelelően alakítunk tovább:

$$F(s) = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+1} + \frac{4}{(s+2)^2+1} =$$

$$= 3 \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + 4 \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

Ezen átalakítások és az említett táblázati adatok után az inverz transzformált $L^{-1}\left[F(s)\right] = 3 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t + 4 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t$.

Hivatkozhattunk volna a 11. és 12. sorra is, majd pedig a csillapítási tételre. A végeredmény természetesen ugyanez. Ennek ellenőrzését az Olvasóra bízzuk.

3. $F(s) = \dfrac{s^2-2}{(s+2)^3}$

Bontsuk fel F-et parciális törtek összegére:

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^3}$$

Itt hivatkozhatunk rendre a táblázat 6., 1. és 2. sorára, valamint a 2. és 3. tört esetében a csillapítási tételre. Ezek szerint – felhasználva a linearitást is – az inverz transzformált:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = e^{-2t} - 4 \cdot t \cdot e^{-2t} + t^2 \cdot e^{-2t}$$

4. $F(s) = \dfrac{s^2+23}{(s-3)\left(s^2+6s+5\right)}$

A résztörtekre bontásnál, ha a szokásos módon járunk el, a nevezőben levő másodfokú tényezőt szorzattá bontjuk. Azonban kevesebb munkával is célhoz érhetünk, ha ezt a tényezőt nem szorzattá alakítjuk, hanem teljes négyzetté, és csak két résztört összegére bontunk:

$$F(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{6}{s^2+6s+5} = \frac{1}{s-3} - 3 \cdot \frac{2}{(s+3)^2-4}$$

Ugyanis ekkor a táblázat 6. és 37. sorában foglaltak szerint az inverz transzformált $L^{-1}\left[F(s)\right] = e^{3t} - 3 \cdot e^{-3t} \cdot \mathrm{sh}2t$. Ha a megszokott módon, három tört összegére bontva transzformálunk vissza, a következőt kapjuk:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = e^{3t} - \frac{3}{2} \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot e^{-5t}$$

Ha a hiperbolikus függvény és az exponenciális függvény kapcsolatát felidézzük, akkor világos, hogy a két eredmény azonosan egyenlő.

5. Legyen $F(s) = \dfrac{2s^6 + 96s^2}{\left(s^4 - 16\right)^2}$!

Vegyük észre, hogy:

$$\left(s^4 - 16\right)^2 = \left(s^4 - 2^4\right)^2 = \left(s^2 - 2^2\right)^2 \cdot \left(s^2 + 2^2\right)^2$$

Ha szemügyre vesszük a táblázat 19. és 20., illetve 33. és 34. sorát, akkor világos, hogy nem kell tovább szorzattá bontani a nevezőt, elég, ha itt megállunk. Ilyen nevezőkkel a résztörtekre bontott alak:

$$F(s) = \frac{s^2 - 4}{\left(s^2 + 4\right)^2} + \frac{s^2 + 4}{\left(s^2 - 4\right)^2}$$

Innen pedig az inverz transzformált $L^{-1}\left[F(s)\right] = t \cdot \cos 2t + t \cdot \mathrm{ch}2t$.

9.11 A kifejtési tétel speciális alakja

Az előzőekben bemutatott elemi törtekre való bontás módszere racionális törtfüggvények esetén elvileg mindig működik, de magas fokszámú nevező esetén a szorzattá alakítás gondot okozhat, és a résztörtekre bontás sok számítást igényel.

Az eljárásnak kidolgozták egy mechanikusabb, kevesebb számítással végrehajtható változatát, amit *kifejtési tételnek* nevezünk. Ennek először azt a változatát mutatjuk be, amely valódi racionális törtfüggvényekre vonatkozik – melyeknek a számlálója alacsonyabb fokszámú polinom, mint a nevező –, abban az esetben, amikor a nevezőnek csak egyszeres zérushelyei vannak.

Legyen tehát $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ olyan racionális törtfüggvény, melynek Q nevezője pontosan n-edfokú, P számlálója legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, és a Q polinom zérushelyei egyszeresek. F-nek tehát legfeljebb pólusszingularitásai lehetnek, azaz F meromorf függvény, és a zérushelyekre tett kikötések szerint F pólusai legfeljebb elsőrendűek.

Legyenek F elsőrendű pólusai a következők: $s_1, s_2, \dots s_n$.

A feltételek szerint:

$$Q(s_i) = 0,\ Q'(s_i) \neq 0,\ P(s_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \dots n.$$

Ekkor F felírható résztörtek összegeként az alábbi alakban:

$$F(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - s_i}$$

Az inverz transzformációt tagonként elvégezve:

$$f(t) = L^{-1}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{K_i}{s - s_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot e^{s_i t}$$

A feladat természetesen a K_i együtthatók meghatározása. Igazolható, hogy $K_i = \dfrac{P(s_i)}{Q'(s_i)}$, $i = 1, 2, \dots n$, ami nem más, mint az F meromorf függvény s_i elsőrendű pólusában a reziduum értéke:

$$K_i = \mathrm{Res}(F, s_i),\ i = 1, 2, \dots n.$$

A kifejtési tétel speciális alakjával határozzuk meg a következő feladatokban az adott F függvények inverz transzformáltját!

Gyakorló feladatok

1. Első példaképpen határozzuk meg az 9.10 1. példabeli függvény inverz transzformáltját!

$F(s) = \dfrac{1}{s\left(s^2 + 1\right)} = \dfrac{1}{s^3 + s}$. F-nek három elsőrendű pólusa van: $s_1 = 0$, $s_2 = i$, $s_3 = -i$. Mindhárom pólusban kiszámítjuk a reziduumot:

$$K_1 = \mathrm{Res}(F, 0) = \left.\frac{1}{3s^2+1}\right|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = \mathrm{Res}(F, i) = \left.\frac{1}{3s^2+1}\right|_{s=i} = \frac{1}{-3+1} = -\frac{1}{2}$$

$$K_3 = \mathrm{Res}(F, -i) = \left.\frac{1}{3s^2+1}\right|_{s=-i} = \frac{1}{-3+1} = -\frac{1}{2}$$

Tehát a résztörtekre bontott alak: $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-i} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+i}$.

Ebből tagonként kapjuk az inverz transzformáltat:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = 1 - \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{2}e^{-it} = 1 - \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

Ha figyelembe vesszük a cos függvény és az exponenciális függvény kapcsolatát, visszakapjuk a korábbi végeredményt: $L^{-1}\left[F(s)\right] = 1 - \cos t$.

2. Legyen $F(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^3-3s^2+2s}$!

Az inverz transzformációhoz először szorzattá bontjuk a nevezőt: $s\cdot(s-1)\cdot(s-2)$. Eszerint F-nek 3 darab elsőrendű pólusa van: 0, 1, 2. Ezeken a helyeken kiszámítjuk a reziduumot:

$$K_1 = \mathrm{Res}\big(F(s), 0\big) = \left.\frac{s^2+2s+2}{3s^2-6s+2}\right|_{s=0} = 1$$

$$K_2 = \mathrm{Res}\big(F(s), 1\big) = \left.\frac{s^2+2s+2}{3s^2-6s+2}\right|_{s=1} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$K_3 = \mathrm{Res}\big(F(s), 2\big) = \left.\frac{s^2+2s+2}{3s^2-6s+2}\right|_{s=2} = \frac{10}{2} = 5$$

Tehát a függvény parciális törtekre bontott alakja:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{5}{s-1} + \frac{5}{s-2}$$

Innen pedig az inverz transzformált azonnal adódik:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = 1 - 5\cdot e^t + 5\cdot e^{2t}$$

3. $F(s) = \frac{s^2}{s^4-5s^2-36} = \frac{s^2}{\left(s^2+4\right)\left(s^2-9\right)}$

F-nek 4 darab elsőrendű pólusa van, hiszen a nevező szorzatalakja:

$(s+2i)\cdot(s-2i)\cdot(s+3)\cdot(s-3)$

Tehát a pólusok: $-2i$, $2i$, -3, 3. A résztörtek K_i együtthatóit ismét a reziduumok szolgáltatják:

$$K_1 = \mathrm{Res}(-2i) = \left.\frac{s^2}{4s^3-10s}\right|_{s=-2i} = \left.\frac{s}{4s^2-10}\right|_{s=-2i} =$$

$$= \frac{-2i}{-26} = \frac{i}{13}$$

$$K_2 = \mathrm{Res}(2i) = \left.\frac{s}{4s^2-10}\right|_{s=2i} = \frac{2i}{-26} = \frac{-i}{13}$$

$$K_3 = \mathrm{Res}(-3) = \left.\frac{s}{4s^2-10}\right|_{s=-3} = \frac{-3}{26}$$

$$K_4 = \mathrm{Res}(3) = \left.\frac{s}{4s^2-10}\right|_{s=3} = \frac{3}{36-10} = \frac{3}{26}$$

Megkaptuk tehát a résztörtekre bontott alakot:

$$F(s) = \frac{i}{13}\cdot\frac{1}{s+2i} - \frac{i}{13}\cdot\frac{1}{s-2i} - \frac{3}{26}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{3}{26}\cdot\frac{1}{s-3} =$$

$$= \frac{1}{13}\cdot\left(\frac{i}{s+2i} - \frac{i}{s-2i} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-3}\right)$$

Ebből az inverz transzformált tagonként számítható:

$$f(t) = \frac{1}{13}\cdot\left(i\cdot e^{-2it} - i\cdot e^{2it} - \frac{3}{2}\cdot e^{-3t} + \frac{3}{2}\cdot e^{3t}\right) =$$

$$= \frac{1}{13}\cdot\left(2\sin 2t + 3\mathrm{sh}3t\right)$$

4. Keressük meg az $F(s) = \frac{15s+48}{s^3+5s^2-16s-80}$ függvény inverz transzformáltját!

A nevező szorzattá alakítható például páronkénti kiemeléssel, de könnyen ellenőrizhető az is, hogy például az $s = 4$ gyöke a nevezőnek, így az $(s-4)$ gyöktényezővel való polinomosztás is helyes eredményre vezet, melynek alakja $F(s) = \frac{15s+48}{\left(s^2-16\right)\left(s+5\right)}$. Ahonnan már látható, hogy F-nek három elsőrendű pólusa van: -4, 4, -5. A kifejtési tétel alkalmazásához számítani kell a reziduumokat ezeken a helyeken:

$$K_1 = \mathrm{Res}(-4) = \left.\frac{15s+48}{3s^2+10s-16}\right|_{s=-4} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$K_2 = \mathrm{Res}(4) = \left.\frac{15s+48}{3s^2+10s-16}\right|_{s=4} = \frac{108}{72} = \frac{3}{2}$$

$$K_3 = \mathrm{Res}(-5) = \left.\frac{15s+48}{3s^2+10s-16}\right|_{s=-5} = -3$$

Tehát a résztörtekre bontott alak a következő:

$$F(s) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s-4} - 3\cdot\frac{1}{s+5}$$

Ahonnan az inverz transzformált már egyszerűen adódik:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{3}{2}e^{-4t} + \frac{3}{2}e^{4t} - 3e^{-5t}$$

Ha figyelembe vesszük még a hiperbolikus és exponenciális függvények közötti összefüggést, akkor az eredeti függvény az alábbi alakban is megadható: $f(t) = 3\cdot \mathrm{ch}4t - 3\cdot e^{-5t}$.

9.12 A kifejtési tétel általános alakja

Térjünk most át olyan valódi racionális törtfüggvények inverz transzformáltjának előállítására, melyeknek magasabbrendű pólusai, tehát a nevezőnek többszörös multiplicitású zérushelyei is vannak. Ilyenkor F az alábbi alakot ölti:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2}\dots(s-s_k)^{n_k}},$$

ahol a nevező fokszáma $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, a P számláló fokszáma pedig legfeljebb $n-1$, és feltesszük még, hogy $P(s_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \dots n$. F-et ebben az esetben is résztörtekre bontjuk:

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s-s_1} + \frac{K_{12}}{(s-s_1)^2} + \frac{K_{13}}{(s-s_1)^3} + \dots \frac{K_{1n_1}}{(s-s_1)^{n_1}} +$$

$$\vdots$$

$$+\frac{K_{k1}}{s-s_k} + \frac{K_{k2}}{(s-s_k)^2} + \frac{K_{k3}}{(s-s_k)^3} + \dots \frac{K_{kn_k}}{(s-s_k)^{n_k}}$$

Innen az inverz transzformált (a táblázat 3. és 6. sora, valamint a csillapítási tétel alapján):

$$L^{-1}\left[F(s)\right] =$$

$$= K_{11}\cdot e^{s_1t} + K_{12}\cdot t\cdot e^{s_1t} + K_{13}\cdot\frac{t^2}{2!}\cdot e^{s_1t} + \dots K_{1n_1}\cdot\frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\cdot e^{s_1t} +$$

$$\vdots$$

$$+K_{k1}\cdot e^{s_kt} + K_{k2}\cdot t\cdot e^{s_kt} + K_{k3}\cdot\frac{t^2}{2!}\cdot e^{s_kt} + \dots K_{kn_k}\cdot\frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!}\cdot e^{s_kt}$$

Innen világos, hogy az inverz transzformáció ebben az általánosabb esetben is a K_{ij} együtthatók kiszámítását kívánja meg. Ha bevezetjük a $Q_i(s) := \frac{Q(s)}{(s-s_i)^{n_i}}$ egyszerűsítő jelölést, akkor az együtthatók előállíthatók az alábbi formulával:

$$K_{ij} = \frac{1}{(n_i-j)!}\cdot\left.\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\frac{P(s)}{Q_i(s)}\right|_{s=s_i}$$

Részletezve az n_i-ed rendű s_i pólushoz tartozó főrész együtthatóit, a legnagyobb indexű tagtól kezdve a csökkenő indexek irányában tudjuk egymás után előállítani:

$$K_{in_i} = \frac{P(s_i)}{Q_i(s_i)} = \frac{P(s_i)}{Q(s_i)}\cdot(s-s_i)^{n_i}$$

$$K_{in_i-1} = \left[\frac{P(s)}{Q_i(s)}\right]'_{s=s_i} \qquad K_{in_i-2} = \frac{1}{2}\left[\frac{P(s)}{Q_i(s)}\right]''_{s=s_i}$$

$$K_{in_i-3} = \frac{1}{3!}\left[\frac{P(s)}{Q_i(s)}\right]'''_{s=s_i} \quad \dots \quad K_{i1} = \frac{1}{(n_i-1)!}\left[\frac{P(s)}{Q_i(s)}\right]^{(n_i-1)}_{s=s_i}$$

A kifejtési tétel általánosításának felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények inverz transzformáltját!

Gyakorló feladatok

1. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2-1)^2}$

Ha a nevezőt szorzattá alakítjuk, a következő adódik:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s-1)^2}$$

F-nek tehát két másodrendű pólusa van, a -1 és 1. F résztörtekre bontott alakja: $F(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{21}}{s-1} + \frac{K_{22}}{(s-1)^2}$.

Annak érdekében, hogy a bemutatott elmélet alkalmazása világosabb legyen, alkalmazzuk a bevezetett jelöléseket:

$$P(s) \equiv 1,\ Q(s) = \left(s^2-1\right)^2,\ s_1 = -1,\ s_2 = 1,$$

$$Q_1(s) = \frac{Q(s)}{(s+1)^2} = (s-1)^2,\ Q_2(s) = \frac{Q(s)}{(s-1)^2} = (s+1)^2.$$

A K_{ij} együtthatók most már könnyen számíthatók. Ahogy mondtuk, mindig a nagyobb indexűekkel kezdjük a számítást:

$$K_{12} = \left.\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=s_1} = \left.\frac{1}{(s-1)^2}\right|_{s=-1} = \frac{1}{4}$$

$$K_{11} = \left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]'_{s=s_1} = \left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]'_{s=-1} = -\left.\frac{2(s-1)}{(s-1)^4}\right|_{s=-1} =$$

$$= \left.\frac{-2}{(s-1)^3}\right|_{s=-1} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

$$K_{22} = \left.\frac{P(s)}{Q_2(s)}\right|_{s=s_2} = \left.\frac{1}{(s+1)^2}\right|_{s=1} = \frac{1}{4}$$

$$K_{21} = \left[\frac{P(s)}{Q_2(s)}\right]'_{s=s_2} = \left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]'_{s=1} = -\left.\frac{2(s+1)}{(s+1)^4}\right|_{s=1} =$$

$$= \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Ahonnan a parciális tört alak az alábbi:

$$F(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\right)$$

Ebből az eredeti függvény exponenciális és hatványfüggvényekkel, valamint a csillapítási tétel segítségével a következő alakban írható:

$$f(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-t} + t\cdot e^{-t} - e^t + t\cdot e^t\right),$$

illetve hiperbolikus függvényekkel kifejezve: $f(t) = \frac{t}{2}\cdot \mathrm{ch}t - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{sh}t$.

2. Legyen most $F(s) = \frac{s^2}{(s+2)^3}$!

F résztörtekre bontott alakja most a következő:

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{12}}{(s+2)^2} + \frac{K_{13}}{(s+2)^3}$$

Ismét használjuk a bevezetett jelöléseket: $s_1 = -2$, az egyetlen harmadrendű pólus, $P(s) = s^2$, $Q(s) = (s+2)^3$ és $Q_1(s) = \frac{Q(s)}{(s+2)^3} \equiv 1$.

Elvégezzük az együtthatók meghatározását:

$$K_{13} = \left.\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=-2} = \left.s^2\right|_{s=-2} = (-2)^2 = 4$$

$$K_{12} = \left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]'_{s=-2} = \left.\left(s^2\right)'\right|_{s=-2} = 2s|'_{s=-2} = -4$$

$$K_{11} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]''_{s=-2} = \frac{1}{2}\cdot\left.\left(s^2\right)''\right|_{s=-2} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Ahonnan az F racionális törtfüggvény kifejtett alakja:

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^3}$$

Amiből az eredeti függvény:

$$f(t) = e^{-2t}\cdot -4\cdot t\cdot e^{-2t} + 4\cdot\frac{t^2}{2!}\cdot e^{-2t} = \left(1-4t+2t^2\right)\cdot e^{-2t}$$

3. Legyen $F(s) = \frac{s+1}{s^5-6s^4+9s^3}$!

Először is szorzattá alakítjuk F nevezőjét: $F(s) = \frac{s+1}{s^3\cdot(s-3)^2}$.

Innen leolvasható, hogy F-nek az $s_1 = 0$ harmadrendű, az $s_2 = 3$ másodrendű pólusa. Ennek következtében F kifejtett alakja:

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s}+\frac{K_{12}}{s^2}+\frac{K_{13}}{s^3}+\frac{K_{21}}{s-3}+\frac{K_{22}}{(s-3)^2}$$

A bevezetett jelölések most az alábbi konkrét jelentéssel bírnak:

$$P(s)=s+1,\ Q(s)=s^3(s-3)^2,\ s_1=0,\ s_2=3,$$
$$Q_1(s)=(s-3)^2,\ Q_2(s)=s^3.$$

Ezek felhasználásával az együtthatók:

$$K_{13}=\left.\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=s_1}=\left.\frac{s+1}{(s-3)^2}\right|_{s=0}=\frac{1}{9}$$

$$K_{12}=\left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]'_{s=s_1}=\left.\frac{1(s-3)^2-(s+1)2(s-3)}{(s-3)^4}\right|_{s=0}=$$
$$=\frac{9+6}{81}=\frac{15}{81}=\frac{5}{27}$$

$$K_{11}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]''_{s=s_1}=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{s+1}{(s-3)^2}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

$$K_{22}=\left.\frac{P(s)}{Q_2(s)}\right|_{s=s_2}=\left.\frac{s+1}{s^3}\right|_{s=3}=\frac{4}{27}$$

$$K_{21}=\left[\frac{P(s)}{Q_2(s)}\right]'_{s=s_2}=\left.\frac{s^3-(s+1)3s^2}{s^6}\right|_{s=3}=-\frac{1}{9}$$

F kifejtett alakja tehát a következő:

$$F(s)=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s-3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(s-3)^2}\right)$$

A generátorfüggvény felírásához megint alkalmazhatjuk a táblázat 3. és 6. sorában foglaltakat – az exponenciális és hatványfüggvény transzformáltjait –, valamint a csillapítási tételt. Ezek szerint az eredeti függvény:

$$f(t)=\frac{1}{9}\cdot\left(1+\frac{5}{3}t+\frac{t^2}{2}-e^{3t}+\frac{4}{3}t\cdot e^{3t}\right)$$

4. Legyen $F(s)=\dfrac{128s}{(s^2+4)(s-2)^4}$!

F-nek három pólusa van: az $s_1=2i$ és $s_2=-2i$ elsőrendű pólusok, az $s_3=2$ pedig negyedrendű pólus. Ennek megfelelően F főrészek szerint kifejtett alakja most így fest:

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s-2i}+\frac{K_{21}}{s+2i}+\frac{K_{31}}{s-2}+\frac{K_{32}}{(s-2)^2}+\frac{K_{33}}{(s-2)^3}+\frac{K_{34}}{(s-2)^4}$$

A számításokhoz bevezetjük a szokásos jelöléseket:

$$P(s)=128s,\ Q(s)=(s^2+4)(s-2)^4,\ s_1=2i,\ s_2=-2i,\ s_3=2,$$
$$Q_1(s)=(s+2i)(s-2)^4,\ Q_2(s)=(s-2i)(s-2)^4,\ Q_3(s)=s^2+4.$$

Az együtthatókat a szokott módon számítjuk. Vegyük azonban észre, hogy az s_1 és s_2 elsőrendű pólusokhoz tartozó főrészek egytagúak, a kifejtéshez szükséges K_{11} és K_{21} együtthatók az s_1 és s_2 pólusokhoz tartozó reziduumok. De vegyük észre azt is, hogy az elméleti összefoglalóban a K_{ij} együtthatókra adott általános összefüggések erre az esetre éppen a reziduumot szolgáltatják. Ugyanis valóban:

$$K_{11}=\lim_{s\to s_1}\left((s-s_1)\cdot F(s)\right)=\left.\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=s_1}=\left.\frac{128s}{(s+2i)(s-2)^4}\right|_{s=2i}=$$
$$=\frac{256i}{4i(2i-2)^4}=\frac{128}{32(-1+i)^4}=\frac{128}{32(-4)}=-1$$

Hasonlóan:

$$K_{21}=\lim_{s\to s_2}\left((s-s_2)\cdot F(s)\right)=\left.\frac{P(s)}{Q_2(s)}\right|_{s=s_2}=\left.\frac{128s}{(s-2i)(s-2)^4}\right|_{s=-2i}=$$
$$=\frac{-256i}{-4i(-2i-2)^4}=\frac{128}{32(1+i)^4}=\frac{128}{32(-4)}=-1$$

Tehát a kifejtési tétel általános alakja abban a különleges esetben, amikor a pólusok elsőrendűek, természetesen szolgáltatja a tétel speciális alakját.

Most következzenek a K_{3j}, $j=1,2,3,4$ együtthatók:

$$K_{34}=\left.\frac{P(s)}{Q_3(s)}\right|_{s=s_3}=\left.\frac{128s}{s^2+4}\right|_{s=2}=\frac{128\cdot 2}{8}=32$$

$$K_{33}=\left[\frac{P(s)}{Q_3(s)}\right]'_{s=s_3}=\left[\frac{128s}{s^2+4}\right]'_{s=2}=0$$

$$K_{32} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{P(s)}{Q_3(s)}\right]''_{s=s_3} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{512 - 128s^2}{\left(s^2+4\right)^2}\right]'_{s=2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$K_{31} = \frac{1}{3!} \cdot \left[\frac{P(s)}{Q_3(s)}\right]'''_{s=s_3} = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{256s^3 - 3072s}{\left(s^2+4\right)^3}\right]'_{s=2} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (-24) = -4$$

Ezek szerint az F Laplace-transzformált résztörtekre bontott alakja így írható:

$$F(s) = \frac{-1}{s-2i} + \frac{-1}{s+2i} + \frac{32}{s-2} + \frac{-4}{(s-2)^3} - \frac{4}{(s-2)^4}$$

Ha most ismételten alkalmazzuk a hatványfüggvény, az exponenciális függvény transzformáltjára vonatkozó ismereteket és a csillapítási tételt, adódik a generátorfüggvény:

$$f(t) = -e^{2it} - e^{-2it} + 32e^{2t} - \frac{4}{2}t^2 \cdot e^{2t} - \frac{4}{3!}t^3 \cdot e^{2t}$$

Az első két tag összevonva lényegében egy cos függvény, az utolsó három tagból pedig az exponenciális tényező kiemelhető. Így az eredeti függvény végső alakja $F(t) = -2\cos 2t + \left(32 - 2t^2 - \frac{2}{3}t^3\right) \cdot e^{2t}$.

9.13 Nem valódi racionális törtfüggvények esete

A kifejtési tételt most alkalmazzuk olyan racionális törtfüggvények esetére, melyeknek számlálója legalább akkora fokszámú polinom, mint a nevezője, azaz $F(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$, ahol Q n-edfokú, R pedig m-edfokú polinom, ahol $m \geq n$. Ebben az esetben elosztjuk az R polinomot maradékosan a Q polinommal:

$$R(s) = H(s) \cdot Q(s) + P(s),$$

ahol a H hányados racionális egészfüggvény, tehát polinom, melynek fokszáma $m - n$, a P maradék pedig egy legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinom. Így F az alábbi alakot ölti:

$$F(s) = \sum_{i=0}^{m-n} c_i s^i + \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Ebben $\frac{P}{Q}$ már valódi racionális törtfüggvény, ennek visszatranszformálása a kifejtési tétellel már végrehajtható. A $c_i s^i$ alakú tagok visszatranszformálásához pedig felhasználjuk a Dirac-impulzust és deriváltjait. Ugyanis már láttuk, hogy:

$$L^{-1}[1] = \delta(t), \text{ így } L^{-1}\left[C_0\right] = C_0\delta(t)$$

Növekvő hatványkitevők szerint haladva tovább, alkalmazzuk a generátorfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt:

$$L\left[\delta'(t)\right] = s \cdot L\left[\delta(t)\right] - \lim_{t\to 0}\delta(t) = s$$

Ahonnan $L^{-1}[s] = \delta'(t)$, $L^{-1}\left[c_1 s\right] = c_1 \cdot \delta'(t)$, és hasonlóan adódnak a magasabb rendű deriváltak is:

$$L^{-1}\left[c_i s^i\right] = c_i \delta^{(i)}(t)$$

Tehát például elsőrendű pólusok esetén F inverz transzformáltja:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = \sum_{i=0}^{m-n} c_i \cdot \delta^{(i)}(t) + \sum_{i=1}^{k} \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)} e^{s_i t}$$

alakú. Magasabb rendű pólusok esetén a visszatranszformálást az előző részben megszokott módon végezzük.

Gyakorló feladatok

Számítsuk ki a következő racionális törtfüggvények inverz transzformáltját!

1. Legyen $F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 5s + 6}$!

F átalakításához alkalmazhatjuk a polinomosztás általános módszerét, de most egyszerűbben is célhoz érünk: $F(s) = 1 - \frac{5s+6}{(s+2)(s+3)}$. A nevezőnek csak elsőrendű pólusai vannak, így a kifejtési tétel egyszerűsített alakja is célravezető. A két pólus: $s_1 = -2$ és $s_2 = -3$. Tehát:

$$\mathrm{Res}(-2) = \left.\frac{5s+6}{2s+5}\right|_{s=-2} = \frac{-10+6}{-4+5} = -4$$

$$\mathrm{Res}(-3) = \left.\frac{5s+6}{2s+5}\right|_{s=-3} = \frac{-15+6}{-6+5} = 9$$

Így F kifejtett alakja $F(s) = 1 + \dfrac{4}{s+2} - \dfrac{9}{s+3}$.

Ahonnan az inverz transzformált $L^{-1}\left[F(s)\right] = \delta(t) + 4 \cdot e^{-2t} - 9 \cdot e^{-3t}$.

2. Legyen $F(s) = \dfrac{s^3+1}{s^2-2s+1}$!

Polinomosztással leválasztjuk F-ből az egészfüggvényt:

$$s^3 + 1 = (s+2)\left(s^2 - 2s + 1\right) + (3s - 1)$$

Így F visszatranszformálásra alkalmas alakja:

$$F(s) = s + 2 + \frac{3s-1}{(s-1)^2}$$

A törtfüggvénynek az $s = 1$ másodrendű pólusa, így a visszatranszformálás a kifejtési tétel általánosításával végezhető el. F résztörtekre bontott alakja:

$$F(s) = s + 2 + \frac{K_{11}}{s-1} + \frac{K_{12}}{(s-1)^2}$$

Szokás szerint bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$P(s) = 3s - 1,\ \ Q(s) = (s-1)^2,\ \ Q_1(s) = \frac{Q(s)}{(s-1)^2} = 1. \text{ Ezzel:}$$

$$K_{12} = \left.\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=1} = 3s - 1\Big|_{s=1} = 2$$

$$K_{11} = \left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]'_{s=1} = 3$$

Tehát a következőt kaptuk: $F(s) = s + 2 + \dfrac{3}{s-1} + \dfrac{2}{(s-1)^2}$.

Ebből pedig az inverz transzformált a Dirac-impulzus, annak deriváltja és a csillapítási tétel alapján $f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 3e^t + 2t \cdot e^t$.

3. Legyen $F(s) = \dfrac{2s^5 - 3s^3 + 4}{s^3 - 3s^2}$!

Először elvégezzük a két polinom maradékos osztását:

$$2s^5 - 3s^3 + 4 = \left(2s^2 + 6s + 15\right)\left(s^3 - 3s^2\right) + 45s^2 + 4$$

Majd a nevező szorzattá alakítását:

$$F(s) = 2s^2 + 6s + 15 + \frac{45s^2 + 4}{s^2(s-3)}$$

A kapott valódi törtfüggvénynek az $s_1 = 0$ másodrendű, az $s_2 = 3$ pedig elsőrendű pólusa. A kifejtési tétel általánosításával dolgozhatunk tovább, ha használjuk az alábbi jelöléseket: $P(s) = 45s^2 + 4$, $Q(s) = s^2(s-3)$, $Q_1(s) = \dfrac{Q(s)}{s^2} = s - 3$, $Q_2(s) = \dfrac{Q(s)}{s-3} = s^2$.

F a résztörtekre bontás után az alábbi alakot ölti:

$$F(s) = 2s^2 + 6s + 15 + \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_{21}}{s-3}$$

Az együtthatókat a megszokott módon számítjuk:

$$K_{12} = \left.\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=0} = \left.\frac{45s^2+4}{s-3}\right|_{s=0} = -\frac{4}{3}$$

$$K_{11} = \left[\frac{P(s)}{Q_1(s)}\right]'_{s=0} = \left[\frac{45s^2+4}{s-3}\right]'_{s=0} =$$

$$= \left.\frac{90 \cdot s \cdot (s-3) + \left(45s^2 + 4\right)}{(s-3)^2}\right|_{s=0} = \frac{4}{9}$$

$$K_{21} = \mathrm{Res}(3) = \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=3} = \left.\frac{45s^2+4}{3s^2-6s}\right|_{s=3} = \frac{409}{9}$$

Tehát F kifejtett alakja:

$$F(s) = 2s^2 + 6s + 15 + \frac{4}{90} - \frac{4}{3s^2} + \frac{409}{9(s-3)}$$

A generátorfüggvény ismét a Dirac-delta deriváltjaival és a táblázat 1., 2., 6. és 39. sorának felhasználásával fejezhető ki:

$$f(t) = 2\delta''(t) + 6\delta'(t) + 15\delta(t) - \frac{4}{9} - t + \frac{409}{9} \cdot e^{3t}$$

A racionális törtfüggvények visszatranszformálására bemutatott kifejtési tétel általánosítható arra az esetre, amikor az F függvény nem polinomok hányadosa. A legegyszerűbb ilyen típusú függvény egy olyan tört, melynek nevezője polinom, számlálója azonban polinomok és exponenciálisok szorzatának összege. Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ adott konstansok. Ekkor a nevezett F általános alakja:

$$F(s) = \frac{P_0(s) + P_1(s) \cdot e^{\lambda_1 s} + P_2(s) \cdot e^{\lambda_2 s} + \dots + P_k(s) \cdot e^{\lambda_k s}}{Q(s)},$$

ahol a P_k függvények polinomok, Q is polinom. Ha ezt átalakítjuk

$$F(s) = \frac{P_0(s)}{Q(s)} + \frac{P_1(s)}{Q(s)} \cdot e^{\lambda_1 s} + \frac{P_2(s)}{Q(s)} \cdot e^{\lambda_2 s} + \dots + \frac{P_k(s)}{Q(s)} \cdot e^{\lambda_k s}$$

formára, és felidézzük a Laplace-transzformált exponenciálissal való szorzásának tételét (eltolási tétel), akkor a visszatranszformálás módszere világos. Minden egyes $\frac{P_i}{Q}$ polinomot visszatranszformálunk a kifejtési tétellel a megszokott módon, majd ezekre alkalmazzuk az

$$L\left[f(t+\lambda)\right] = e^{\lambda s} \cdot L\left[(f(t)\right] = e^{\lambda s} \cdot F(s)$$

eltolási tételt.

Alkalmazzuk ezt a módszert az alábbi függvények visszatranszformálására!

4. $F(s) = \dfrac{e^{3s} + s \cdot e^{-2s}}{s^2 - 1}$

Hozzuk először F-et a bevezetőben mutatott alakra:

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \cdot e^{3s} + \frac{s}{(s-1)(s+1)} \cdot e^{-2s}$$

Alkalmazva a bemutatott jelöléseket:

$$P_1(s) = 1,\ P_2(s) = s,\ Q(s) = s^2 - 1$$

Először visszatranszformáljuk külön-külön a racionális törtfüggvényeket. Mindkét tört két elsőrendű pólussal rendelkezik, a reziduumok kiszámításával felírhatjuk a résztörtekre bontott alakot:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P_1(s)}{Q(s)}, 1\right) = \left.\frac{1}{2s}\right|_{s=1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P_1(s)}{Q(s)}, -1\right) = \left.\frac{1}{2s}\right|_{s=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P_2(s)}{Q(s)}, 1\right) = \left.\frac{s}{2s}\right|_{s=1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P_2(s)}{Q(s)}, -1\right) = \left.\frac{s}{2s}\right|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

Ahonnan a felbontás:

$$F(s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) \cdot e^{3s} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \cdot e^{-2s}$$

A generátorfüggvényt is tagonként írjuk fel. Először ismét a törtekkel foglalkozunk:

$$L^{-1}\left[\frac{P_1(s)}{Q(s)}\right] = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) = \operatorname{sh} t$$

$$L^{-1}\left[\frac{P_2(s)}{Q(s)}\right] = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) = \operatorname{ch} t$$

Ezt persze táblázat felhasználásával is azonnal felírhattuk volna. Erre a két eredeti függvényre – az exponenciálisokkal való szorzás miatt – alkalmazzuk az eltolási tételt:

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(t+3), & \text{ha } -3 < t < 2, \\ \operatorname{ch}(t-2) + \operatorname{sh}(t+3), & \text{ha } 2 < t. \end{cases}$$

Az egységugrás függvény felhasználásával szakaszokra bontás nélkül is felírható a generátorfüggvény:

$$f(t) = 1(t-2) \cdot \operatorname{ch}(t-2) + 1(t+3) \cdot \operatorname{sh}(t+3)$$

5. Legyen $F(s) = \dfrac{s \cdot e^{-s} - (s+1) \cdot e^{-2s} - \left(s^2 - 1\right) \cdot e^{-3s}}{s^3 - 4s^2 + 4s}$!

Írjuk F-et az alábbi alakba:

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \cdot e^{-s} - \frac{s+1}{s(s-2)^2} \cdot e^{-2s} + \frac{s^2-1}{s(s-2)^2} \cdot e^{-3s}$$

A szokott jelölésekkel $\dfrac{P_1(s)}{Q(s)} = \dfrac{1}{(s-2)^2}$.

A korábbiak alapján ennek inverz transzformáltját azonnal felírhatjuk a csillapítási tétellel: $f_1(t) = L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-2)^2}\right] = t \cdot e^{2t}$.

A második és a harmadik törtet a kifejtési tétel általános alakjával tudjuk visszatranszformálni. Mivel $s_1 = 0$ elsőrendű, $s_2 = 2$ másodrendű pólus, ezért a szokott módszerekkel:

$$\frac{P_1(s)}{Q(s)} = \frac{s+1}{s(s-2)^2} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{21}}{s-2} + \frac{K_{22}}{(s-2)^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{6}{(s-2)^2}\right)$$
$$\frac{P_2(s)}{Q(s)} = \frac{s^2-1}{s(s-2)^2} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{21}}{s-2} + \frac{K_{22}}{(s-2)^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{s} + \frac{5}{s-2} + \frac{6}{(s-2)^2}\right)$$

Ezek alapján a generátorfüggvények a táblázat felhasználásával:

$$L^{-1}\left[\frac{P_1(s)}{Q(s)}\right] = \frac{1}{4}\left(1 - e^{2t} + 6 \cdot t \cdot e^{2t}\right)$$
$$L^{-1}\left[\frac{P_2(s)}{Q(s)}\right] = \frac{1}{4}\left(-1 + 5 \cdot e^{2t} + 6 \cdot t \cdot e^{2t}\right)$$

Összevonva a kapott eredményeket, felírhatjuk az F Laplace-transzformált generátorfüggvényét. Legegyszerűbb, ha az egységugrás függvényt használjuk:

$$f(t) = 1(t-1) \cdot (t-1) \cdot e^{2(t-1)} +$$
$$+\frac{1}{4} \cdot 1(t-2) \cdot \left(1 - e^{2(t-2)} + 6 \cdot (t-2) \cdot e^{2(t-2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4} \cdot 1(t-3) \cdot \left(-1 + 5 \cdot e^{2(t-3)} + 6 \cdot (t-3) \cdot e^{2(t-3)}\right)$$

9.14 Inverziós integrál

Ebben a részben vázoljuk annak módját, hogyan lehet teljesen általános alakú függvények – tehát nem racionális törtfüggvények – inverz transzformáltját előállítani. Már említettük a fejezet elején, hogy az F függvény inverz transzformáltját az alábbi úgynevezett inverziós integrállal állíthatjuk elő:

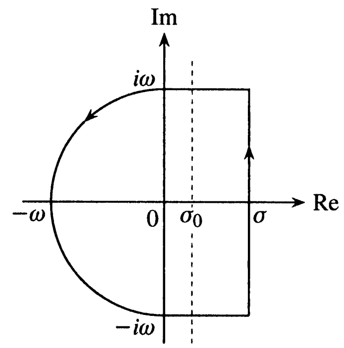
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega\to\infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(s) \cdot e^{st} ds, \quad t \geq 0,$$

ahol F minden s_i szinguláris pontjára $\mathrm{Re}(s_i) < \sigma_0 < \sigma$, σ_0 a konvergenciaabszcissza, és az integrációs út bármely olyan képzetes tengellyel párhuzamos egyenes, melynek valós tengellyel való σ metszetére $\sigma > \sigma_0$ teljesül.

Ez az inverziós integrál közvetlen számításokra nem alkalmas. Most viszont kihasználhatjuk azt a lényeges feltételt, hogy s komplex változó, és így az integrál kiszámítására például alkalmazhatjuk a reziduumtételt. A módszer lényegében ugyanaz, ahogyan valós improprius integrálokat is kiszámítottunk a reziduumelmélet fejezetében. Legyen ezért először ω véges, és tegyük zárttá a görbét a 9.11 ábrán látható módon két valós tengellyel párhuzamos szakasszal és egy félkörrel.

Tegyük fel, hogy az F függvény kielégíti a Jordan-lemma feltételeit (lásd a reziduumelmélet fejezetében a valós integrálok kiszámítását). Ez biztosítja azt, hogy $\omega \to \infty$ esetén a félkörre vonatkozó integrál tart a zérushoz:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_\gamma F(s) \cdot e^{st} ds = 0, \quad \text{ahol } \gamma : |s| = \omega, \; \mathrm{Re}(s) \leq 0.$$



9.11 ábra

Ugyancsak a Jordan-lemma biztosítja azt is, hogy a két valós tengellyel párhuzamos szakaszra vonatkozó integrál eltűnik, hiszen az integrandus $|s| \to \infty$ esetén egyenletesen tart 0-hoz, az integrációs út hossza pedig véges és állandó marad.

Mivel F összes szinguláris pontja a σ_0 egyenestől balra esik, így ha ω elég nagy, az összes szinguláris pont a zárt görbén belülre kerül. Így alkalmazható a reziduumtétel:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F(s) \cdot e^{st}, s_k\right),$$

ahol a $\sum$ az F függvény összes szinguláris pontjára kiterjesztendő.

Legyen most F konkrét alakja az alábbi tört: $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$, ahol P és Q most már nem jelent feltétlenül polinomot, de mindketten reguláris függvények, és a nevező zérushelyein a számláló nullától különböző értéket vesz fel.

Tegyük fel elsőként, hogy F csak elsőrendű pólusokkal rendelkezik, tehát $Q(s_i) = 0$, $Q'(s_i) \neq 0$, $P(s_i) \neq 0$, ahol az s_i pontok ($i = 1, 2, 3, \ldots n$) az F függvény pólusai, melyek akár végtelen sokan is lehetnek. Elsőrendű pólus esetén a reziduum:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P(s)}{Q(s)} \cdot e^{st}, s_i\right) = \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)} \cdot e^{s_i t}$$

Ezt helyettesítve a reziduumtétellel kapott összefüggésbe:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)} \cdot e^{s_i t}$$

éppen a kifejtési tétel speciális alakja, mely ezek szerint változatlanul igaz racionális törtfüggvényeknél általánosabb alakú függvényekre is.

Megjegyezzük még, hogy a kifejtési tétel általános alakja is igaz marad, csak a reziduumok kiszámítása nagyon hosszadalmas feladat, ugyanis ekkor:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s \to s_i} \frac{1}{(m-1)!} \left(\left(s - s_i\right)^m \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} \cdot e^{st}\right)^{(m-1)}$$

Az említett ok miatt ebben a példatárban csak az elsőrendű pólusok esetével foglalkozunk.

A reziduumtétellel kapott eredményre támaszkodva számítsuk ki az alábbi függvények inverz transzformáltját!

Gyakorló feladatok

1. $F(s) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} s}$

F meromorf függvény, melynek végtelen sok elsőrendű pólusa van, ezek az $s_k = 2k\pi i$ imaginárius számok, $k = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Ugyanis $\operatorname{sh}(2k\pi i) = \operatorname{sh}0 = 0$ a periodicitás miatt.

De $\operatorname{sh}'(s_k) = \operatorname{ch}(2k\pi i) = \operatorname{ch}(0) = 1 \neq 0$.

Minden pontban kiszámítjuk a reziduumot.

Mivel $P(s) = 1$, $Q(s) = \operatorname{sh} s$, ezért

$$\operatorname{Res}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}, s_k\right) = \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=s_k} = \frac{1}{\operatorname{ch}(s_k)} = \frac{1}{1} = 1,$$

ami azt jelenti, hogy F generátorfüggvénye az alábbi mindkét irányban végtelen sorral adható meg: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k \cdot (2\pi i t)}$. Ha itt figyelembe vesszük a cos függvény és az exponenciális függvény kapcsolatát:

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{k \cdot (2\pi i t)} + e^{-k \cdot (2\pi i t)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos k2\pi t$$

A megoldást tehát Fourier-sor alakjában kaptuk meg.

2. Legyen $F(s) = \dfrac{\operatorname{th} s}{s} = \dfrac{\operatorname{sh} s}{s \cdot \operatorname{ch} s}$!

F szintén meromorf függvény. A nevező zérushelyei az $s = 0$ pont, valamint a $\operatorname{ch} s$ függvény zérushelyei. Ezeket szolgáltatja az $e^s + e^{-s} = 0$ egyenlet. Átrendezéssel $e^{2s} = -1$, $2s = \ln(-1)$ összefüggést kapjuk. Ha felhasználjuk az ln reláció végtelen sok értékűségét, akkor adódik, hogy:

$$s_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i = \frac{2k+1}{2} \cdot \pi i \qquad k = -\infty \ldots \infty$$

Az $s = 0$ pont nem pólus, hanem megszüntethető szingularitás, az s_k, $k \in \mathbb{Z}$ pontok viszont elsőrendű pólusok, hiszen $Q(s) = s \cdot \text{ch}s$ jelöléssel $Q'(s) = \text{ch}s + s \cdot \text{sh}s$-ből következően $Q'(s_k) = 0 + s_k \cdot \text{sh}sk \neq 0$, ha $k \in \mathbb{Z}$. Ezért alkalmazhatjuk a kifejtési tételt az elsőrendű pólusokkal rendelkező függvény esetére:

$$\text{Res}\left(F, s_k\right) = \left.\frac{\text{sh}s}{\text{ch}s + s \cdot \text{sh}s}\right|_{s=s_k} = \frac{\text{sh}s_k}{\text{ch}s_k + s_k \cdot \text{sh}s_k} =$$

$$= \frac{1}{s_k} = \frac{2}{(2k+1)\pi i}$$

Ezért F generátorfüggvénye:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s_k} \cdot e^{s_k t} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)i} \cdot e^{\frac{2k+1}{2}\pi i}$$

A szummajel mögött álló tagok párosíthatók, vegyük észre, hogy $k = 0$ és -1, $k = 1$ és -2, $k = 2$ és $-3, \ldots$ értékpárok esetén a tagok együtthatói és az exponenciális függvény kitevői abszolút értékben egyenlők, csak ellentétes előjelűek, így f az alábbi egyszerűbb alakban írható:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)i} \cdot \left(e^{\frac{2k+1}{2}\pi i} - e^{-\frac{2k+1}{2}\pi i}\right)$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben a $\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)$ függvény $2i$-szerese áll. Ha ezt írjuk a helyébe, az f generátorfüggvényt ismét Fourier-sorba fejtve kapjuk: $f(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)$.

3. Legyen $F(s) = \frac{s^2}{1 - e^s}$!

Ebben az esetben $P(s) = s^2$, $Q(s) = 1 - e^s$. Ez utóbbinak a zérushelyei: $1 - e^s = 0$, $e^s = 1$, $s_k = k \cdot 2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ alakban adódnak. Mivel $Q'(s) = -e^s$, $Q'(s_k) = -1 \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, a zérushelyek mind egyszeres multiplicitásúak, tehát az s_k imaginárius számok mindannyian elsőrendű pólusok. Ezekben a pontokban a reziduum:

$$\text{Res}\left(F, s_k\right) = \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=s_k} = \frac{s_k^2}{-e^{s_k}} = -s_k^2 = 4\pi^2 k^2$$

Ezért a generátorfüggvény kifejtési tétellel felírható alakja:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4\pi^2 k^2 \cdot e^{k \cdot 2\pi i t} = 4\pi^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \cdot e^{k \cdot 2\pi i t}$$

Az összeg $k = 0$-ra adódó tagja eltűnik, és könnyen ellenőrizhető, hogy a többi tag $k = \pm 1$, $k = \pm 2, \ldots$ esetén ismét párosítható, az együttható ugyanaz, az exponenciális kitevője pedig ellentett, tehát:

$$f(t) = 4\pi^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \left(e^{k \cdot 2\pi i t} + e^{-k \cdot 2\pi i t}\right)$$

Ahonnan a szokásos koszinuszos helyettesítéssel adódik a generátorfüggvény Fourier-sora $f(t) = 8\pi^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot t)$.

9.15 Taylor-sorok

Nagy fokszámú polinomok esetén nehézségekbe ütközhet a gyökök meghatározása, a szorzattá alakítás. Ilyenkor hasznos lehet, ha a függvénynek a Taylor-sorát meg tudjuk határozni, amely a hatványsor középpontjától nem túl nagy távolságokra viszonylag jó közelítést biztosít. Konkrétabban fejtsük sorba az F transzformáltat $\frac{1}{s}$ hatványai szerint. $F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s^3} + \ldots$ A sort tagonként visszatranszformálva – felhasználva az $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ összefüggést – az alábbi hatványsort kapjuk:

$$f(t) = c_1 + c_2 t + \frac{c_3}{2!}t^2 + \frac{c_4}{3!}t^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k+1}}{k!} \cdot t^k$$

Ha ez a hatványsor konvergens, akkor a konvergenciatartományon az $L^{-1}\left[F(s)\right]$ Taylor-sorát kaptuk meg. A probléma itt nyilván abban áll, hogy a linearitásból adódó tagonkénti transzformálhatóság alkalmazható-e végtelen sok tag esetére. A gyakorlatban előforduló esetekben az eljárás helyes eredményre vezet. Ha f és F Taylor-sorára tekintünk, világos, hogy teljesülnie kell a

$$\lim_{t\to 0+0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) = c_1$$

feltételnek. Igazolható, hogy az eljárás alkalmazható, ha létezik az f függvény 0 pontbeli jobb oldali $\lim_{t\to 0+0} f(t)$ határértéke, ez azonban F-ből nem olvasható le. Sőt előfordulhat, hogy $s\cdot F(s)$ határértéke a ∞-ben létezik, de f 0-beli jobb oldali határértéke nem.

Az ismertetett eljárással határozzuk meg az alábbi függvények inverz transzformáltját!

Gyakorló feladatok

1. Először egy ismert függvénypárt vizsgálunk meg.

Legyen $F(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, ekkor tudjuk, hogy $f(t) = \mathrm{sh}\,at$. Teljesül a határértékekre vonatkozó feltétel is, ugyanis:

$$\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{as}{s^2-a^2} = 0 \qquad \lim_{t\to 0+0} f(t) = \lim_{t\to 0+0}\mathrm{sh}\,at = 0$$

Fejtsük Taylor-sorba F-et a közismert mértani sor felhasználásával:

$$F(s) = \frac{a}{s^2-a^2} = \frac{a}{s^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{a}{s}\right)^2} = \frac{a}{s^2}\left(1+\frac{a^2}{s^2}+\frac{a^4}{s^4}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{a}{s^2}+\frac{a^3}{s^4}+\frac{a^5}{s^6}+\ldots+\frac{a^{2n-1}}{s^{2n}}+\ldots$$

Tagonként elvégezve a visszatranszformálást az

$$L^{-1}\left[\frac{a^{2n-1}}{s^{2n}}\right] = a^{2n-1}\cdot\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} = \frac{(at)^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

összefüggés felhasználásával megkapjuk a generátorfüggvény Taylor-sorát:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(at)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \mathrm{sh}\,at$$

Valóban a $t \mapsto \mathrm{sh}(at)$ függvény mindenütt konvergens Taylor-sora.

2. Következő illusztráló példaként legyen F ismét racionális törtfüggvény: $F(s) = \dfrac{s}{s^4-1}$.

F-et Taylor-sorba fejthetjük, ha ismét felhasználjuk a mértani sort. Eszerint:

$$F(s) = \frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{s^4}} = \frac{1}{s^3}\left(1+\frac{1}{s^4}+\frac{1}{s^8}+\frac{1}{s^{12}}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^7}+\frac{1}{s^{11}}+\ldots+\frac{1}{s^{4n+3}}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{s^{4n+3}}$$

Ennek generátorfüggvénye tagonkénti visszatranszformálással:

$$f(t) = \frac{t^2}{2!}+\frac{t^6}{6!}+\frac{t^{10}}{10!}+\ldots+\frac{t^{4n+2}}{(4n+2)!}+\ldots,$$

amely Taylor-sor a 0-hoz közeli t értékekre jó közelítést ad. Ellenőrzésképpen megoldjuk a feladatot egy korábbi módszerrel is. Felbontjuk F-et parciális törtek összegére. A célnak megfelelő felbontás most például az alábbi:

$$F(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

A táblázat 26. és 11. sorának figyelembevételével az eredeti függvény a következő:

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{ch}\,t - \frac{1}{2}\cdot\cos t$$

A két eredmény összehasonlításához írjuk fel ezek 0 körüli Taylor-sorát, majd vonjunk össze:

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\cdot\frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Ennek a sornak a tagjai páros n esetén eltűnnek, páratlan n esetén pedig $n = 2k+1$ jelölés alkalmazásával az

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot\frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{4k+2}}{(4k+2)!}$$

sort kapjuk, ami pontosan megegyezik a korábbi eredménnyel. Utólag ellenőrizhetjük a határértékekre vonatkozó feltétel teljesülését is:

$$\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^4-1} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{ch}t - \cos t}{2} = 0$$

Tehát ez a dolog is rendben van.

3. Állítsuk elő hatványsor alakban az $F(s) = \frac{1}{s^2}\sin\frac{1}{s}$ függvény inverz transzformáltját!

Használjuk fel a sin függvény Taylor-sorát, ahonnan $z \to \frac{1}{s}$ helyettesítéssel megszületik F Laurent-sora:

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{s}\right)^{2n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{s^{2n+3}} = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{s^5} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{s^7} - \dots$$

Ahonnan az inverz transzformált Taylor-sora:

$$f(t) = \frac{t^2}{2!} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{t^6}{6!} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{t^8}{8!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot t^{2n}}{(2n)!(2n-1)!}$$

4. Állítsuk elő az $F(s) = \frac{1}{s}\cdot e^{\frac{1}{s}}$ függvény inverz transzformáltjának Taylor-sorát!

Támaszkodjunk a szokásos módon az exponenciális függvény Taylor-sorára, majd abban végezzük el a $z \to \frac{1}{s}$ helyettesítést!

$$F(s) = \frac{1}{s}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{s^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{s^{n+1}}$$

Innen a generátorfüggvény Taylor-sora:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(n!)^2} = 1 + t + \frac{t^2}{(2!)^2} + \frac{t^3}{(3!)^2} + \dots$$

9.16 Numerikus sorok összegzése

A Laplace-transzformáció segítségével bizonyos típusú végtelen sorok összege könnyen meghatározható.

Induljunk ki az $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ numerikus sorból. Tekintsük a sor a_n tagjait úgy, mint egy folytonos függvény egész n helyeken felvett értékeit. Legyen ez a függvény az f generátorfüggvény F Laplace-transzformáltja, tehát:

$$a_n = F(n) \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Másképpen: $a_n = \left[F(s)\right]_{s=n} = \left[\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt\right]_{s=n}$.

Az F Laplace-transzformált ismeretében az f generátorfüggvény meghatározható. Ha a sor egyenletesen konvergens, akkor az összegzés és az integrálás sorrendje felcserélhető, így a következőt kapjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt\right]_{s=n} = \int_0^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(e^{-t}\right)^s\cdot f(t)\right)dt$$

Mivel $t > 0$, ezért $e^{-t} < 1$, tehát egy $q = e^{-t}$ hányadosú mértani sor adódott, amely konvergens. Feladat tehát a mértani sor összegzése, majd az összeg és f szorzatának integrálása a kijelölt határok között.

Megjegyezzük, hogy az alábbiakban kidolgozott feladatok az analízis más – egyes esetekben elemi – módszereivel is megoldhatók. Igaz ez a numerikus sorok összegzésére, a differenciálegyenletek megoldására, valós integrálok kiszámítására, a Fourier-sorfejtésekre stb. A bemutatott eljárások mindössze a Laplace-transzformáció sokrétű alkalmazási lehetőségeiből kívánnak ízelítőt adni.

Az ismertetett módszerrel számítsuk ki az alábbi numerikus sorok összegét!

Gyakorló feladatok

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} + \dots$

Először is írjunk n helyére s-et, így előáll a Laplace-transzformált:

$$F(s) = \frac{1}{2s\cdot(2s+1)}$$

Az inverz transzformáltat parciális törtekre bontás és kiemelés (vagy a kifejtési tétel) után kapjuk. Mivel:

$$F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}}\right),$$

ezért a generátorfüggvény:

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

Megjegyezzük, hogy a hasonlósági tételt is alkalmazhattuk volna az inverz transzformált előállítására.

Kiszámítandó ezek után először a mértani sor összege. Mivel a kvóciens $q = e^{-t}$, ezért:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-t}\right)^n = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

Innen az alábbi integrál adja a keresett sorösszeget:

$$S = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)dt$$

Először egyszerűsítjük az integrandust:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{1+e^{-\frac{1}{2}t}}dt$$

Ez az integrál például az $u = e^{-\frac{1}{2}t}$ helyettesítéssel kiszámítható. Az eredmény:

$$S = \left[\ln\left|1 + e^{-\frac{1}{2}t}\right| - e^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^{\infty} = -\ln 2 + 1$$

Tehát a numerikus sor összege $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 1 - \ln 2$.

2. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n\left(n^2-4\right)} = \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{4\cdot 12} + \dots$

Helyettesítsük n-et s-sel, amivel megkapjuk a Laplace-transzformáltat:

$$F(s) = \frac{2}{s\left(s^2-4\right)}$$

A táblázat 29. sora alapján a generátorfüggvény:

$$f(t) = \mathrm{sh}^2 t = \frac{\left(e^t - e^{-t}\right)^2}{4}$$

Először kiszámítandó a mértani sor összege: $\sum_{s=3}^{\infty}\left(e^{-t}\right)^s = \frac{e^{-3t}}{1-e^{-t}}$.

Ennek felhasználásával a sor összegét az alábbi integrál adja:

$$S = \int_0^{\infty}\frac{e^{-3t}}{1-e^{-t}}\cdot\frac{\left(e^t-e^{-t}\right)^2}{4}dt$$

Az integrandust alkalmas módon átrendezve, majd egyszerűsítve kapjuk az alábbi egyszerűbb alakot:

$$S = \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\infty}\left(1+e^{-t}\right)\cdot\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\infty}\left(e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}-e^{-4t}\right)dt$$

Ez az integrál már könnyen kiszámítható:

$$S = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{e^{-t}}{-1} + \frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{e^{-3t}}{3} + \frac{e^{-4t}}{4}\right]_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{-12-6+4+3}{12} = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{11}{48}$$

Tehát a sor összege $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n\left(n^2-4\right)} = \frac{11}{48}$.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{\left(n^2-1\right)^2} = \frac{4}{9} + \frac{6}{64} + \frac{8}{225} + \dots$

Az $n \longrightarrow s$ helyettesítéssel kapjuk a Laplace-transzformáltat:

$$F(s) = \frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2}$$

A táblázat 34. sora alapján a generátorfüggvény:

$$f(t) = t \cdot \operatorname{sh} t = t \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Elsőként ismét a mértani sor összegét számítjuk ki:

$$\sum_{s=2}^{\infty} \left(e^{-t}\right)^s = \frac{e^{-2t}}{1-e^{-t}}$$

Végül a sor összegét az alábbi integrál szolgáltatja:

$$S = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2t}}{1-e^{-t}} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot t\,dt$$

Az integrandust átrendezve, szorzattá alakítva, majd egyszerűsítve kapjuk:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} \left(1 + e^{-t}\right) \cdot e^{-t} \cdot t\,dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} \left(e^{-t} + e^{-2t}\right) \cdot t\,dt$$

Ez kiszámítható parciális integrálással:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{e^{-t}}{-1} + \frac{e^{-2t}}{-2}\right) \cdot t\right]_0^{\infty} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{-1} + \frac{e^{-2t}}{-2}\right) dt =$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \cdot \left[e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{4}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}\left(0 - 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}$$

A kiintegrált rész például L'Hospital-szabállyal számítható. Tehát a sor összege $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{\left(n^2-1\right)^2} = \frac{5}{8}$.

9.17 Integrálok kiszámítása

Bizonyos esetekben a Laplace-transzformáció felhasználható határozott integrálok kiszámítására. Tegyük fel, hogy az integrandus az x változón kívül valamilyen t paraméternek is függvénye. Ekkor a határozott integrál értéke függ a t paramétertől:

$$f(t) = \int_a^b g(x, t)dx$$

Vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját. Korábban már említettük, hogy a gyakorlatban előforduló esetekben legtöbbször felcserélhető a transzformáció és a paraméter szerinti integrálás sorrendje. Vegyük azonban észre, hogy az integrálás szempontjából a t a paraméter, a Laplace-transzformálás során viszont az x integrációs változó tekinthető paraméternek. Ezzel:

$$F(s) = L\left[f(t)\right] = L\left[\int_a^b g(x, t)dx\right] = \int_a^b L\left[g(x, t)\right]dx$$

A módszer akkor előnyös, ha $L\left[g(x, t)\right]$ integrálja egyszerűbben számítható, mint az $x \mapsto g(x, t)$ függvény integrálja. Ekkor először kiszámítjuk a transzformált integrálját az s paraméter függvényeként, majd a kapott eredményt visszatranszformáljuk. Ez szolgáltatja f-et. Lássunk erre néhány példát!

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin tx}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$ integrált!

Képezzük mindkét oldal Laplace-transzformáltját. A műveleti sorrend felcserélésével kapjuk:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + s^2} dx$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk, és tagonként végezzük el az integrálást.

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - a^2} \int_0^\infty \left(\frac{s^2}{x^2 + s^2} - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{s^2 - a^2} \cdot \left[s \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{s} \right) - a \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{s^2 - a^2} \cdot \left(\frac{s \cdot \pi}{2} - \frac{a \cdot \pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2(s + a)}$$

Ennek inverz transzformáltja szolgáltatja a keresett integrált:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-at}, \ t \geq 0, \ a > 0.$$

Javasoljuk a Tisztelt Olvasónak, hogy vesse össze ezt az eljárást azzal a módszerrel, ahogyan a reziduumtétellel számítottunk ki valós integrálokat. Látszik, hogy itt jóval egyszerűbben célhoz értünk, azonban a reziduumelmélet ebben a problémakörben sokkal széleskörűbben alkalmazható.

2. Számítsuk ki az $f(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2} dx$ integrált!

Laplace-transzformálva mindkét oldalon:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty L\left[e^{-tx^2}\right] dx = \int_0^\infty \frac{1}{s + x^2} dx$$

Számítsuk ki ezt az integrált:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{s}} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

Az utolsó azonos átalakítás azért volt hasznos, mert így azonnal látszik – a táblázat 4. sora alapján –, hogy az inverz transzformált:

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Tehát a keresett integrál értéke $\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$.

Innen például $t = 1$ helyettesítéssel adódik ez a közismert eredmény:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. Legyen $f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2} dx$!

A szokásos módon először mindkét oldalt transzformáljuk. A táblázat 18. sora szerint $F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2x^2}{s(s^2 + 4x^2)} dx$. Az integrálást elvégezve:

$$F(s) = \frac{2}{s} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{s^2 + 4x^2} dx = \frac{2}{s^3} \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{2x}{s} \right]_0^\infty \cdot \frac{s}{2} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

A visszatranszformáláshoz használhatjuk a táblázat első sorát, így ezt kapjuk: $f(t) = \frac{\pi}{2} \cdot t$.

Tehát a keresett integrál értéke $\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot t$.

Speciálisan $t = 1$ esetén $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ összhangban a reziduumtétellel kapott korábbi eredményünkkel.

9.18 Fourier-sorfejtés

Tudvalevő, hogy ha f periodikus függvény T periódussal és $\omega = \frac{2\pi}{T}$ körfrekvenciával, akkor f valós Fourier-sora:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t \right),$$

illetve ugyanennek a sornak a komplex alakja:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{ik\omega t}$$

A valós és a komplex együtthatók kapcsolata:

$$C_k = \frac{A_k - iB_k}{2}, \quad C_0 = A_0,$$

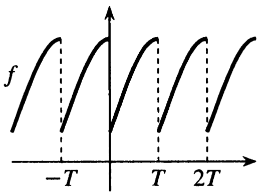
illetve az inverz kapcsolat:

$$A_0 = C_0, \quad A_k = 2 \cdot \mathrm{Re} C_k, \quad B_k = -2 \cdot \mathrm{Im} C_k.$$

Mi az utóbbi áttérési formulákat fogjuk használni. Ugyanis a Laplace-transzformáció segítségével a Fourier-sor komplex alakja adódik természetes módon, hiszen az együtthatókra az alábbi integrálformula ismeretes:

$$C_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$

Ez nagyon hasonlít f Laplace-transzformáltjára. Ezek kiszámítása után A_k és B_k már viszonylag egyszerűen adódik. A módszer lényeges eleme, hogy a C_k együtthatókat *integrálás nélkül*, egy Laplace-transzformációs táblázat segítségével tudjuk előállítani. Legyen ennek érdekében f periodikus függvény T periódussal (9.12 ábra).



9.12 ábra

Ekkor f-hez a 9.1. 12. példában megismert módon rendelhetünk egy impulzusfüggvényt az alábbi formával:

$$f_T(t) = \big(1(t) - 1(t-T)\big) \cdot f(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ha } 0 < t < T, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ennek Laplace-transzformáltja:

$$F_T(s) = \int_0^T f_T(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^T f(t) \cdot e^{-st} dt$$

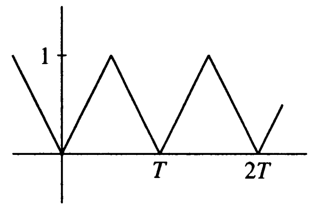
Ha összehasonlítjuk ezt a formulát a C_k együtthatókra vonatkozó integrálformulával, azonnal adódik, hogy a komplex Fourier-együttható kiszámítható egy Laplace-transzformációval, ha a transzformáltban egyszerűen elvégezzük az $s \longrightarrow ik\omega$ helyettesítést:

$$C_k = \frac{1}{T} \cdot \big[F_T(s)\big]_{s=ik\omega} = \frac{\omega}{2\pi} \cdot F_T(ik\omega)$$

Gyakorló feladatok

1. Fejtsük Fourier-sorba a fenti módszerrel az alábbi háromszögrezgést (9.13 ábra).

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{T}, & \text{ha } 0 < t < \dfrac{T}{2}, \\ \dfrac{2T-2t}{T}, & \text{ha } \dfrac{T}{2} < t < T, \\ f(t+T) & \text{különben.} \end{cases}$$



9.13 ábra

Ez a periodikus f függvény impulzusfüggvények kombinációjával az alábbi módon adható meg:

$$f_T(t) = \left(1(t) - 1\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \cdot \frac{2t}{T} + \left(1\left(t - \frac{T}{2}\right) - 1(t-T)\right) \cdot \frac{2T-2t}{T}$$

Átrendezéssel közvetlenül Laplace-transzformálható alakra hozzuk:

$$f_T(t) = 1(t) \cdot \frac{2}{T} \cdot t - 1\left(t - \frac{T}{2}\right) \cdot \frac{4}{T} \cdot \left(t - \frac{T}{2}\right) + 1(t-T) \cdot \frac{2}{T} \cdot (t-T)$$

Ebből felírható a Laplace-transzformált:

$$F_T(s) = \frac{2}{Ts^2} \cdot \left(1 - 2 \cdot e^{-\frac{T}{2}s} + e^{-Ts}\right) = \frac{2}{Ts^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2$$

Innen $s \longrightarrow i\omega k$ helyettesítéssel azonnal megkapjuk a komplex Fourier-együtthatókat:

$$C_k = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{-2}{T \cdot k^2\omega^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{2} \cdot ik\omega}\right)^2$$

Helyettesítve a $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ kifejezést, egyszerűsítés után az alábbi formulát kapjuk:

$$C_k = -\frac{\left(1-(-1)^k\right)^2}{2\pi^2 \cdot k^2} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Egyrészt látszik, hogy C_k valós szám minden k-ra, tehát $B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, másrészt:

$$A_k = 2 \cdot \mathrm{Re} C_k = 2C_k = -\frac{\left(1-(-1)^k\right)^2}{\pi^2 \cdot k^2}$$

Innen leolvasható, hogy páros k indexek esetén $A_k = 0$, ha k páratlan, tehát $k = 2n + 1$ alakú, akkor viszont:

$$A_k = A_{2n+1} = \frac{-4}{\pi^2 \cdot k^2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$k = 0$ esetén a formula közvetlenül nem ad értéket. Ha azonban a C_k eredeti kifejezésére kétszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt, kapjuk A_0, illetve C_0 értékét:

$$A_0 = C_0 = \lim_{k \to 0} -\frac{\left(1 - e^{-ik\pi}\right)^2}{2\pi^2 \cdot k^2} = \frac{1}{2}$$

Így a Fourier-sor valós alakja:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$$

2. Fejtsük Fourier-sorba az alábbi periodikus függvényt (fűrészfogrezgést, 9.14 ábra).

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{T}, & \text{ha } 0 < t < \dfrac{T}{2}, \\[2mm] \dfrac{2t - 2T}{T}, & \text{ha } \dfrac{T}{2} < t < T, \\[2mm] f(t+T) & \text{különben.} \end{cases}$$

Az f periodikus függvény impulzusfüggvényekkel megadott alakja:

$$f_T(t) = \left(1(t) - 1\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \cdot \frac{2t}{T} + \left(1\left(t - \frac{T}{2}\right) - 1(t - T)\right) \cdot \frac{2t - 2T}{T}$$

Kissé átrendezve annak érdekében, hogy közvetlenül fel lehessen írni a Laplace-transzformáltat:

$$f_T(t) = 1(t) \cdot \frac{2t}{T} - 1\left(t - \frac{T}{2}\right) \cdot 2 - 1(t - T) \cdot \frac{2}{T} \cdot (t - T)$$

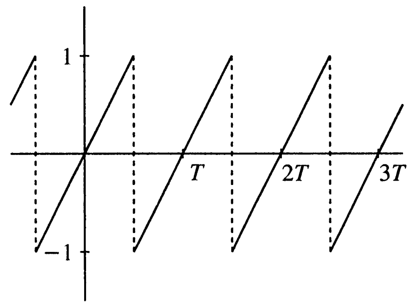
Ahonnan a Laplace-transzformált:

$$F_T(s) = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-\frac{T}{2}s} - \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-Ts}$$

Elvégezve az $s \to i\omega k$ és a $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ helyettesítést és az összevonást, kapjuk a komplex C_k együtthatókat:

$$C_k = \frac{\omega}{2\pi} \cdot F_T(ik\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - 2Tse^{-\frac{T}{2}s} - e^{-Ts}}{s^2} =$$

$$= \frac{2\omega^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1 - \frac{2\pi}{\omega} \cdot ik\omega e^{-ik\pi} - e^{-ik2\pi}}{-k^2\omega^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{ie^{-ik\pi}}{k} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{i \cdot (-1)^k}{k}$$



9.14 ábra

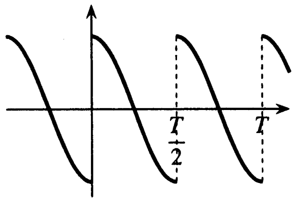
Amint látható, C_k tisztán képzetes, ami azt jelenti, hogy $A_k = 2 \cdot \mathrm{Re} C_k = 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, másrészt $B_k = -2 \cdot \mathrm{Im} C_k = -\dfrac{4}{\pi k} \cdot (-1)^k$. Tehát f Fourier-sorának valós alakja:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi k} \cdot (-1)^k \cdot \sin k\omega t =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \ldots\right)$$

3. Határozzuk meg az alábbi periodikus függvény Fourier-sorát (9.15 ábra).

$$f(t)=\begin{cases}\cos\omega t, & \text{ha } 0<t<\dfrac{T}{2},\\ -\cos\omega t, & \text{ha } \dfrac{T}{2}<t<T,\\ f(t+T) & \text{különben.}\end{cases}$$



9.15 ábra

Impulzusfüggvényekkel kifejezett formában:

$$f_T(t)=\left(1(t)-1\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\cdot\cos\omega t-\left(1\left(t-\frac{T}{2}\right)-1(t-T)\right)\cos\omega t$$

Ha felhasználjuk azt, hogy a cos függvény periódusa 2π, továbbá alkalmazzuk az $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ összefüggést és a $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ azonosságot, akkor a következő transzformálásra alkalmas alakot kapjuk:

$$\begin{aligned}f_T(t)&=1(t)\cdot\cos\omega t-2\cdot 1\left(t-\frac{T}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)+\pi\right)+\\&+1(t-T)\cdot\cos(\omega(t-T)+2\pi)=\\&=1(t)\cdot\cos\omega t+2\cdot 1\left(t-\frac{T}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)+\\&+1(t-T)\cdot\cos(\omega(t-T))\end{aligned}$$

Ennek Laplace-transzformáltja:

$$F_T(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2}\cdot\left(1+2\cdot e^{-\frac{T}{2}s}+e^{-Ts}\right)=\frac{s}{s^2+\omega^2}\cdot\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2$$

Ahonnan adódnak a komplex Fourier-együtthatók $s\to i\omega k$ helyettesítéssel:

$$C_k=\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{ik\omega}{-k^2\omega^2+\omega^2}\cdot\left(1+e^{-\frac{T}{2}\cdot ik\frac{2\pi}{T}}\right)^2=$$

$$=\frac{ik}{2\pi\left(1-k^2\right)}\cdot\left(1+e^{-ik\pi}\right)^2=\frac{ik}{2\pi\left(1-k^2\right)}\cdot\left(1+(-1)^k\right)^2$$

Mivel C_k tisztán képzetes, ezért $A_k=2\cdot\mathrm{Re}C_k=0$, $k=0,1,2,3,\ldots$

A B_k együtthatók is eltűnnek páratlan k esetére. Egyetlen nem magától értetődő a $k=1$ eset. Erre alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\pm1}\frac{k\left(1+e^{-ik\pi}\right)^2}{1-k^2}=\\&=\lim_{k\to\pm1}\frac{\left(1+e^{-ik\pi}\right)^2+k\cdot2\left(1+e^{-ik\pi}\right)e^{-ik\pi}(-i\pi)}{-2k}=0\end{aligned}$$

De mint látható ez is zérus. A páros indexű együtthatók $k=2n$ jelölés bevezetésével:

$$\begin{aligned}B_{2n}&=-2\cdot\mathrm{Im}C_{2n}=\frac{-2\cdot2n}{2\pi\left(1-4n^2\right)}\cdot\left(1+(-1)^{2n}\right)^2=\\&=\frac{8n}{\pi\left(4n^2-1\right)}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2n}{4n^2-1}\end{aligned}$$

Tehát a függvény Fourier-sora:

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2n}{4n^2-1}\cdot\sin(2n\cdot\omega t)=\\&=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{1\cdot3}\cdot\sin2\omega t+\frac{4}{3\cdot5}\cdot\sin4\omega t+\ldots\right)\end{aligned}$$

9.19 Differenciálegyenletek és differenciálegyenlet-rendszerek

A Laplace-transzformáció egyik legfontosabb alkalmazása az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek és differenciálegyenlet-rendszerek megoldása. Ehhez tekintünk egy – a gyakorlat számára legfontosabb típusú – másodrendű differenciálegyenletet:

$$ay''+by'+cy=f(t),$$

ahol a, b, c adott konstansok, $y=y(t)$ az ismeretlen függvény, f (a „jobb oldal") szintén adott függvény.

A megoldási módszer lényege abban áll, hogy képezzük az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját. Ha bevezetjük az ismeretlen $t \mapsto y(t)$ függvény transzformáltjának jelölésére az $s \mapsto Y(s)$ jelet, és felhasználjuk a korábban bizonyított

$$L[y'(t)] = s \cdot Y(s) - y(0)$$

$$L[y''(t)] = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)$$

összefüggéseket, akkor a transzformáció eredménye az

$$a\left(s^2 Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)\right) + b\left(s \cdot Y(s) - y(0)\right) + c \cdot Y(0) = F(s)$$

algebrai egyenlet.

A transzformáció elvégzése után tehát az ismeretlen y függvény transzformáltjára egy közönséges *algebrai*, tehát nem differenciálegyenletet kaptunk. Ezt meg kell oldani az Y transzformáltra, majd előállítani az inverz transzformáltat, ami az egyenlet y megoldása lesz. Differenciálegyenlet-rendszer esetén egy algebrai lineáris egyenletrendszer adódik az ismeretlen függvények transzformáltjára vonatkozólag. Az egyenletrendszer megoldása után ismét a visszatranszformálás a feladat. Mindezt részletesen a kidolgozott példákban mutatjuk meg.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a módszer lényeges eleme a kezdeti feltételek megadása. Ugyanis ezek ismerete nélkül a Laplace-transzformáltak nem állíthatók elő. Ezzel az eljárással tehát lineáris differenciálegyenletekre és egyenletrendszerekre vonatkozó kezdetiérték-problémák oldhatók meg.

Gyakorló feladatok

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket és egyenletrendszereket!

1. $y'' + y = 4 \cdot e^t, \ y(0) = 4, \ y'(0) = -3.$

Képezzük a Laplace-transzformáltat:

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + Y(s) = 4 \cdot \frac{1}{s-1}$$

Figyelembe véve a kezdeti feltételeket:

$$s^2 \cdot Y(s) - 4s + 3 + Y(s) = \frac{4}{s-1}$$

Rendezve az egyenletet az ismeretlen függvény Y transzformáltjára:

$$Y(s) = \frac{4}{(s-1)\left(s^2+1\right)} + \frac{4s-3}{s^2+1}$$

Parciális törtekre bontva, összevonva a jobb oldalt, majd az inverz transzformáláshoz célszerű alakra hozva, a következőt kapjuk:

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{5}{s^2+1} + \frac{2}{s-1}$$

Táblázat alapján az inverz transzformált:

$$y(t) = 2\cos t - 5\sin t + 2 \cdot e^t$$

Ami a kitűzött kezdetiérték-probléma megoldása.

2. $y'' - 2y' + y = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = -2.$

Elvégezve a transzformálást, az

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) + Y(s) = 0$$

egyenlet adódik, melyben ha figyelembe vesszük a kitűzött kezdeti feltételeket, az alábbi konkrétabb egyenlet születik:

$$s^2 \cdot Y(s) - s + 2 - 2sY(s) + 2 + Y(s) = 0$$

Kifejezve az ismeretlen függvény transzformáltját:

$$Y(s) = \frac{s-4}{(s-1)^2}$$

Felbontva elemi résztörtek összegére:

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{3}{(s-1)^2}$$

A korábbiak alapján ennek inverz transzformáltja:

$$y(t) = e^t - 3 \cdot t \cdot e^t,$$

ami a kitűzött kezdetiérték-probléma megoldása.

3. A módszer természetesen alkalmas magasabbrendű lineáris egyenletekre vonatkozó kezdetiérték-problémák megoldására is:

$$y''' - 4y'' + 3y' = t \cdot e^{2t}, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 2.$$

A transzformáció során felhasználjuk a deriváltakra vonatkozó formula általánosítását harmadrendű deriváltra:

$$L\left[y'''(t)\right] = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

Így a transzformálás eredménye:

$$s^3 \cdot Y(s) - 2 - 4\left(s^2 \cdot Y(s) - 1\right) + 3\left(s \cdot Y(s)\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

Rendezzük az egyenletet az ismeretlen y függvény transzformáltjára:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s-3)(s-2)^2} + \frac{s-2}{s(s-1)(s-3)} =$$

$$= \frac{(s-2)^3+1}{s(s-1)(s-3)(s-2)^2}$$

A résztörtekre bontáshoz alkalmazhatjuk a klasszikus módszert, de most gyorsabban érünk célhoz a kifejtési tétellel. Mindkét törtet felbontva, majd összevonva az egynemű tagokat, kapjuk:

$$Y(s) = -\frac{7}{12s} + \frac{1}{3(s-3)} - \frac{1}{2(s-2)^2} + \frac{1}{4(s-2)}$$

A kezdetiérték-probléma megoldása ennek inverz transzformáltja:

$$y(t) = -\frac{7}{12} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Helyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy ez a függvény valóban kielégíti az egyenletet és a kezdeti feltételeket is.

4. Oldja meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszert!

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 3x + 4y \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

Az ismeretlen függvények x és y, ezek Laplace-transzformáltjai rendre X és Y. Írjuk fel mindkét egyenlet transzformáltját a kezdeti feltételek figyelembevételével:

$$\left.\begin{aligned} s \cdot X(s) - 1 &= 2X(s) + Y(s) \\ s \cdot Y(s) - 2 &= 3X(s) + 4Y(s) \end{aligned}\right\}$$

Előállt egy algebrai inhomogén lineáris egyenletrendszer az X és Y transzformáltakra vonatkozólag. Rendezve:

$$\left.\begin{aligned} (s-2) \cdot X(s) - Y(s) &= 1 \\ -3X(s) + (s-4) \cdot Y(s) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Megoldva az egyenletrendszert, és egyben elvégezve a parciális törtekre bontást is, a következő eredményt kapjuk:

$$X(s) = \frac{1}{4(s-1)} + \frac{3}{4(s-5)}$$

$$Y(s) = -\frac{1}{4(s-1)} + \frac{9}{4(s-5)}$$

Inverz transzformálással kapjuk az egyenletrendszer kezdeti feltételeket kielégítő megoldását:

$$x(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{9}{4}e^{5t}$$

5. A módszerrel természetesen magasabb rendű egyenletrendszerek is kezelhetők. Példaként oldjuk meg az alábbi másodrendű homogén lineáris rendszert:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} + 2x &= 0 \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1.$$

Képezzük a Laplace-transzformáltakat a szokásos jelölésekkel, figyelembe véve a kezdeti feltételeket:

$$\left.\begin{aligned} s^2 \cdot X(s) - 1 - 2\left(sY(s) - 1\right) + 2X(s) &= 0 \\ 3s \cdot X(s) + s^2 \cdot Y(s) - s + 1 - 8Y(s) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Rendezve az egyenletrendszert, a következőt kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \left(s^2+2\right) \cdot X(s) - 2s \cdot Y(s) &= -1 \\ 3s \cdot X(s) + \left(s^2-8\right) \cdot Y(s) &= s - 1 \end{aligned}\right\}$$

Ennek a lineáris rendszernek a megoldása invertálható formában:

$$X(s) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{s-6}{s^2-4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{s-2}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{8} \cdot \frac{9s-6}{s^2-4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{s+2}{s^2+4}$$

A táblázat 11., 12., 26. és 27. sorának a felhasználásával a visszatranszformálás innen már elvégezhető. Az eredmény:

$$x(t) = \frac{1}{4}\mathrm{ch}2t + \frac{3}{4}\mathrm{sh}2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t$$

$$y(t) = \frac{9}{8}\mathrm{ch}2t - \frac{3}{8}\mathrm{sh}2t - \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t$$

6. Az előzőek mintájára inhomogén lineáris rendszerek megoldása is előállítható a vázolt módszerrel. Példaként oldja meg az alábbi elsőrendű rendszert:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y + 5t \\ \dot{y} &= 3x + 2y + 8e^t\end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$$

Képezzük a transzformáltakat:

$$\left.\begin{aligned}s \cdot X(s) - 2 &= 2X(s) + 3Y(s) + \frac{5}{s^2} \\ s \cdot Y(s) - 3 &= 3X(s) + 2Y(s) + \frac{8}{s-1}\end{aligned}\right\}$$

Rendezzük a kapott lineáris egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}(s-2) \cdot X(s) - 3Y(s) &= 2 + \frac{5}{s^2} \\ -3X(s) + (s-2) \cdot Y(s) &= 3 + \frac{8}{s-1}\end{aligned}\right\}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása résztörtekre bontott alakban:

$$X(s) = \frac{18}{5(s-5)} + \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s^2} - \frac{13}{5s}$$

$$Y(s) = \frac{18}{5(s-5)} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s-1} - \frac{3}{s^2} + \frac{12}{5s}$$

Ahonnan az inhomogén lineáris rendszer kezdeti feltételeket kielégítő megoldása:

$$x(t) = \frac{18}{5}e^{5t} + 4e^{-t} - 3e^t + 2t - \frac{13}{5}$$

$$y(t) = \frac{18}{5}e^{5t} - 4e^{-t} + e^t - 3t + \frac{12}{5}$$

9.20 Laplace-transzformációs táblázat

sorszám	$f(t)$	$F(s)$
1.	t	$\frac{1}{s^2}$
2.	t^2	$\frac{2}{s^3}$
3.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot s^{\frac{3}{2}}}$
6.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
7.	$\frac{1-e^{-at}}{t}$	$\ln\left(1 + \frac{a}{s}\right)$
8.	$\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-at}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+a}}$
9.	$\ln t$	$-\frac{1}{s}(C + \ln s)$
10.	$\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \ln t$	$-\sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot (C \ln 4 + \ln s)$
11.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

sorszám	$f(t)$	$F(s)$
12.	$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
13.	$\cos\left(at+\varphi_0\right)$	$\dfrac{s\cos\varphi_0 - a\sin\varphi_0}{s^2+a^2}$
14.	$e^{-bt}\cos\left(at+\varphi_0\right)$	$\dfrac{(s+b)\cos\varphi_0 + a\sin\varphi_0}{(s+b)^2+a^2}$
15.	$\sin\left(at+\varphi_0\right)$	$\dfrac{s\sin\varphi_0 + a\cos\varphi_0}{s^2+a^2}$
16.	$e^{-bt}\sin\left(at+\varphi_0\right)$	$\dfrac{a\cos\varphi_0 + (s+b)\sin\varphi_0}{(s+b)^2+a^2}$
17.	$\cos^2 at$	$\dfrac{s^2+2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$
18.	$\sin^2 at$	$\dfrac{2a^2}{s\left(s^2+4a^2\right)}$
19.	$t\cdot\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
20.	$t\cdot\sin at$	$\dfrac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}$
21.	$t^2\cdot\cos at$	$\dfrac{2s\left(s^2-3a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^3}$
22.	$t^2\cdot\sin at$	$\dfrac{2a\left(3s^2-a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^3}$
23.	$\dfrac{\sin at}{t}$	$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{a}{s}\right)$

sorszám	$f(t)$	$F(s)$
24.	$\dfrac{1-\cos at}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{a^2}{s^2}\right)$
25.	$\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$
26.	$\mathrm{ch}\,at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
27.	$\mathrm{sh}\,at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
28.	$\mathrm{ch}^2 at$	$\dfrac{s^2-2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$
29.	$\mathrm{sh}^2 at$	$\dfrac{2a^2}{s\left(s^2-4a^2\right)}$
30.	$\dfrac{\mathrm{sh}\,at}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)$
31.	$\dfrac{1-\mathrm{ch}\,at}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(1-\dfrac{a^2}{s^2}\right)$
32.	$\dfrac{\mathrm{ch}\,at - \mathrm{ch}\,bt}{t}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s^2+b^2}{s^2-a^2}\right)$
33.	$t\cdot\mathrm{ch}\,at$	$\dfrac{s^2+a^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$
34.	$t\cdot\mathrm{sh}\,at$	$\dfrac{2as}{\left(s^2-a^2\right)^2}$
35.	$t^2\cdot\mathrm{ch}\,at$	$\dfrac{2s\left(s^2+3a^2\right)}{\left(s^2-a^2\right)^3}$

sorszám	$f(t)$	$F(s)$
36.	$t^2 \cdot \mathrm{sh}at$	$\dfrac{2a\left(3s^2 + a^2\right)}{\left(s^2 - a^2\right)^3}$
37.	$e^{-bt} \cdot \mathrm{sh}at$	$\dfrac{a}{(s+b)^2 - a^2}$
38.	$e^{-bt} \cdot \mathrm{ch}at$	$\dfrac{s+b}{(s+b)^2 - a^2}$
39.	1	$\dfrac{1}{s}$
40.	$1(t)$	$\dfrac{1}{s}$
41.	$d(t, T)$	$\dfrac{1 - e^{-st}}{s}$
42.	$\delta(t, T)$	$\dfrac{1 - e^{-st}}{sT}$
43.	$\delta(t)$	1