BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A csaknem 40 éve indult, igen sikeres Bolyai-könyvek példatársorozat két kötete, Bárczy Barnabás: Integrálszámítás és Solt György: Valószínűségszámítás című könyve nemrég jelent meg új kiadásban. Most a Differenciálszámítás c. kötetet ajánljuk az Olvasónak, megújult formában, immár a 7. kiadásban. A sorozat könyveiben a szerzők középiskolai tanulóknak, főiskolai és egyetemi hallgatóknak adnak példákat, ismertetnek kidolgozott feladatokat.

A mű szerzője a fejezetek elején röviden összefoglalja azokat az alapvető elméleti ismereteket, amelyek a feladatok megoldásához szükségesek. Ezután részletesen kidolgozott gyakorló feladatok következnek.

Olvassuk el először a fejezet elején levő összefoglaló részt! Ha az elméleti anyagot már felelevenítettük, kezdhetjük önállóan megoldani a gyakorló feladatokat. A kapott eredményt és a megoldás menetét összevethetjük a könyvben közölttel.

A könyvet elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak ajánljuk, valamint olyan középiskolás diákoknak, akik a reáltudományok területén szeretnék folytatni tanulmányaikat.

290 Ft (ÁFA-val)

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

BOLYAI-KÖNYVEK

BÁRCZY BARNABÁS

DIFFERENCIÁL-SZÁMÍTÁS

$$y=(\sin xy)^x;$$

$$y'=?$$

BÁRCZY BARNABÁS

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

$y = cf(x);$	$y' = cf'(x)$
$y = u(x) \pm v(x);$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$
$y = u(x)v(x);$	$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$y = u(x)v(x)z(x);$	$y' = u'(x)v(x)z(x) + u(x)v'(x)z(x) + u(x)v(x)z'(x)$
$y = \dfrac{u(x)}{v(x)};$	$y' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$y = f[u(x)];$	$y' = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
$y = y(x);$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$
$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\};$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$
$r = r(\varphi);$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}$
$y = x^n \quad (n \text{ rac.});$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x;$	$y' = \cos x$
$y = \cos x;$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x;$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x;$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = a^x;$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x;$	$y' = e^x$

BÁRCZY BARNABÁS

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

PÉLDATÁR

7. kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Lektorálta:

Scharnitzky Viktor
tanszékvezető tanár

ETO: 517.2 022.33
517.9 022.33
ISBN 963 10 4399 1
ISBN 963 16 0477 2

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Szűcs Péter ügyvezető igazgató

Borsodi Nyomda Kft.
Felelős vezető: Ducsai György ügyvezető igazgató

Felelős szerkesztő: Dr. Podhorányi Gyula okl. vegyészmérnök
Műszaki vezető: Dornizs László
Műszaki szerkesztő: Bán Ferenc
A borítót tervezte: Kováts Tibor
A könyv formátuma: Fr/5
Ívterjedelme: 12,375/A5
Azonossági szám: 10251/120
Készült az MSZ 5601 és 5602 szerint
A könyv az 1968. évi kiadás változatlan utánnyomása

TARTALOM

Előszó 7

I. Függvénytani alapfogalmak 9

1. A függvény megadási módjai 9
2. Függvények speciális tulajdonságai 10
3. Inverz függvénykapcsolat és inverz függvény 12
4. Összetett függvények 14
5. Elemi függvények 17

II. A határérték elmélete 44

1. Számsorozat határértéke 44
2. Függvény határértéke 51

III. A differenciálszámítás alapfogalmai 65

1. A differenciahányados értelmezése 65
2. A differenciálhányados értelmezése 68

IV. Differenciálási szabályok és elemi függvénytípusok differenciálhányadosai 71

1. Alapvető differenciálási szabályok 71
2. Hatványfüggvény differenciálása 73
3. Trigonometrikus függvények deriváltja 89
4. Exponenciális függvény deriváltja 94
5. Hiperbolikus függvények deriváltja 96
6. Logaritmusfüggvények differenciálása 99
7. Logaritmikus differenciálás 102
8. Inverz függvények differenciálhányadosa 110

9. Implicit függvények differenciálhányadosa 124
10. Paraméteres alakban adott függvény deriválása 134
11. Polárkoordinátákkal adott függvény deriváltja 142

V. Magasabbrendű deriváltak 152

1. Magasabbrendű deriváltak fogalma 152
2. Racionális és egész kitevőjű hatványok magasabbrendű deriváltja 153
3. Exponenciális függvények magasabbrendű deriváltja 154
4. Logaritmusfüggvények magasabbrendű deriváltja 155
5. A szinusz, koszinusz, hiperbolikus szinusz és hiperbolikus koszinusz magasabbrendű deriváltja 156
6. Implicit függvények magasabbrendű deriváltja 158
7. Szorzatfüggvények magasabbrendű deriváltjai 161

VI. A differenciálszámítás alkalmazásai 166

1. Szöveges szélsőérték-feladatok 166
2. L'Hospital-szabály alkalmazása 192
3. Elemi függvények Taylor-sorba fejtése 204
4. Egyenletek közelítő megoldása Newton-módszerrel 218
5. Függvényvizsgálat 235

Előszó

Bármely könyv megírásakor igen fontos feladat, hogy figyelembe vegyük a könyv célját és olvasóinak előképzettségét; ezek a szempontok ui. lényegesen befolyásolják a tárgyalásmódot. Ez a könyv azok számára készült, akik a differenciálszámítás alapfogalmait egyénileg vagy eddigi tanulmányaik során már elsajátították; célja, hogy az Olvasó különböző példákon elsajátítsa a differenciálási eljárás biztos kezelését és alkalmazását.

A fejezetek elején röviden — ismétlésnek, emlékeztetőnek szánt jelleggel — összefoglaljuk azokat az alapvető elméleti tudnivalókat, amelyek nélkül a feladatok nem oldhatók meg. Ezután következnek a részletesen kidolgozott gyakorló feladatok.

E felépítésből következik a könyv célszerű olvasási módja. Először olvassuk el a fejezet elején az összefoglaló részt. Ha az ott ismertetett elméleti anyagot már felelevenítettük, a gyakorló feladatokat önállóan kezdjük megoldani. A kapott eredményt és a megoldás menetét hasonlítsuk össze a könyvben közölttel. Ha rossz eredményre jutottunk, akkor ajánlatos a hibát megkeresni, és szükség esetén a tisztázatlannak tűnő elméleti anyagot a megfelelő szakkönyvből áttanulmányozni (mielőtt még újabb feladat megoldásával próbálkoznánk). Ha jó eredményt kaptunk, de más utat követtünk, mint a könyvbeli megoldás menete, akkor értékeljük ki, melyik az egyszerűbb. Ez a további példák megoldása során hasznunkra lehet.

A könyv írása közben nagyon sok segítséget kaptam a lektortól, Scharnitzky Viktortól. Ezúton is köszönöm közreműködését, ami nagyban hozzájárult a könyv színvonalának emeléséhez.

Az Olvasónak sok sikert kívánok a példák megoldásához. Ha sikerül elérnem, hogy meglássák a differenciálszámítás érdekességét és hasznosságát, akkor nem dolgoztam hiába.

Budapest, 1967. szeptember

Bárczy Barnabás

I. FÜGGVÉNYTANI ALAPFOGALMAK

1. A függvény megadási módjai

A differenciálszámítás egyik legfontosabb alkalmazási területe a függvények vizsgálata. Ezért fontos a függvénytan alapfogalmainak rövid átismétlése.

E könyvben egyváltozós, valós függvényekkel foglalkozunk; tehát mind az egyetlen független változó, mind pedig a függvényérték csak valós szám lehet.

A *függvénykapcsolat* definíciója: Az y mennyiség — *a függő változó* — az x mennyiség — a *független változó* — függvénye, ha x bármely szóbajövő értékéhez y-nak egy vagy több meghatározott értéke tartozik. Valamely függvény *értelmezési tartománya* azon értékek összessége, amelyeket x felvehet. Az értelmezési tartomány lehet pl. a valós számok összessége, egy vagy több számintervallum, az összes egész szám stb. Az y értékek összességét, halmazát *értékkészletnek* nevezzük.

A függvénykapcsolatot legtöbbször értéktáblázattal, grafikonnal vagy formulával adjuk meg. Egy más megadási mód az utasítás: jelentse pl. $P(x)$ az x-nél kisebb prímszámok számát, amit csak összeszámolással tudunk meghatározni. Pl. $P(20{,}5)=8$, mert a 20,5-nél kisebb prímszámok a következők: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

E könyvben általában formulával megadott függvényekkel foglalkozunk, és bevezetésként ezek főbb típusait tárgyaljuk.

Formulával adott függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyekre a formulában kijelölt műveletek értelmezve vannak. Pl. $y=\lg x$ függvény esetében a kapcsolat csak $x>0$-ra van értelmezve.

A formulával adott függvény alakja lehet *explicit;* ilyenkor y mint x függvénye adott, vagyis az egyenlőségjel egyik oldalán y áll, míg a másik oldalon csak x-et tartalmazó kifejezés van. Jelölése: $y=f(x)$. A függvénykapcsolat akkor *implicit* alakú, ha abból y-t nem fejeztük ki. Általános alakja: $F(x, y)=0$.

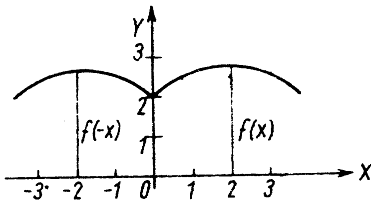
Pl. explicit $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; implicit $x^2 + y^2 = r^2$. Mindkét alak ugyanazt a kapcsolatot írja le, az origó középpontú és r sugarú kört határozza meg.

Megemlítjük még az ún. *paraméteres alakot* is. Ilyenkor x és y összetartozó értékei valamilyen harmadik mennyiség (paraméter) segítségével adottak. Jelölése: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Az ugyanazon t érték által meghatározott x és y értékek tartoznak össze. Ilyen típusú függvénymegadást alkalmaznak pl. sík-, ill. térbeli mozgások leírására a fizikában, ilyenkor a t paraméter az időt jelenti.

2. Függvények speciális tulajdonságai

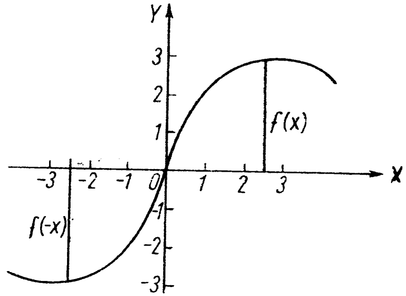
Valamely függvény vizsgálatát és ábrázolását nagyon megkönnyítheti, ha ismerjük néhány jellemző tulajdonságát. Ilyen szempontból a következő tulajdonságokat említjük meg:

a) *Páros függvények.* Valamely $y = f(x)$ függvény akkor páros, ha értelmezési tartománya bármely x értékére igaz, hogy $f(x) = f(-x)$. Ez az egyenlőség geometriailag azt jelenti, hogy a függvény görbéje szimmetrikus az Y-tengelyre (1. ábra). Ilyen függvény pl. $y = x^2$, $y = \cos x$.



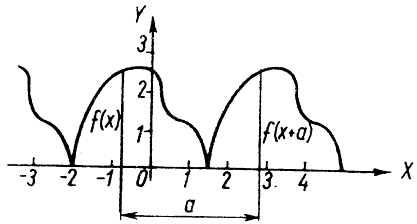
1. ábra

b) *Páratlan függvények.* Valamely $y = f(x)$ függvény akkor páratlan, ha értelmezési tartománya bármely x értékére igaz, hogy $f(x) = -f(-x)$. Ez az egyenlőség geometriailag azt jelenti, hogy a függvény görbéje szimmetrikus az origóra (2. ábra). Ilyen függvény pl. $y = x^3$, $y = \sin x$.



2. ábra

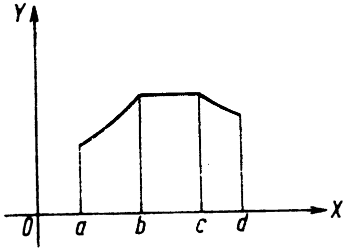
c) *Periodikus függvények.* Valamely $y = f(x)$ függvény akkor periodikus, ha megadható egy olyan $a > 0$ szám, hogy az értelmezési tartomány bármely x értékére és bármely egész k értékre igaz az $f(x) = f(x + ka)$ egyenlőség. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a függvény olyan görbe vagy egyenesdarabokkal ábrázolható, amelyek „a" szakaszonként ismétlődnek (3. ábra). Az „a" szakaszt a függvény *periódusának* nevezzük. Ilyen függvények pl. a szögfüggvények.



3. ábra

d) *Korlátos függvények.* Valamely $y = f(x)$ függvény *alulról korlátos,* ha megadható egy olyan M szám, hogy bármely x értékre $f(x) > M$. Az $y = f(x)$ függvény *felülről korlátos,* ha megadható egy olyan M szám, hogy bármely x értékre $f(x) < M$. Ha egy függvény alulról is és felülről is korlátos, akkor *korlátosnak* mondjuk. Ekkor megadható egy olyan $M > 0$ szám, hogy a következő egyenlőtlenség igaz: $|f(x)| < M$. Alulról korlátos pl. $y = x^2$, felülről korlátos $y = -x^2$. Korlátos függvény pl. $y = \sin x$.

e) *Monoton függvények.* Legyen az (a, b) számköz két tetszőleges helye x_1 és x_2, továbbá $x_1 < x_2$. Az $y = f(x)$ függvényt (a, b)-ben *monoton növekedőnek* nevezzük, ha bármilyen x_1-re és x_2-re $f(x_1) \leqq f(x_2)$; *szigorúan monoton növekedőnek,* ha $f(x_1) < f(x_2)$; *monoton csökkenőnek,* ha $f(x_1) \geqq f(x_2)$; *szigorúan monoton csökkenőnek,* ha $f(x_1) > f(x_2)$. Ha a függvény teljes értelmezési tartományában monoton növekedő stb., akkor az intervallum megadása nélkül *monoton növekedőnek* stb. nevezzük. Szigorúan monoton növekedő pl. $y = x^3$; szigorúan monoton csökkenő pl. $y = -x^3$. A 4. ábrán látható függvény



4. ábra

az (a, b) számközben szigorúan monoton növekedő, az (a, c) számközben monoton növekedő, a (b, d) számközben monoton csökkenő, a (c, d) számközben szigorúan monoton csökkenő.

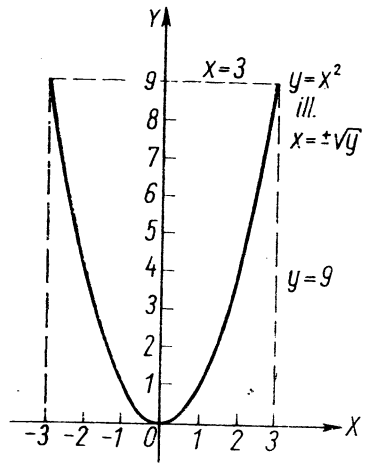
Az (a, b) intervallum lehet a függvény teljes értelmezési tartománya vagy annak egy része.

3. Inverz függvénykapcsolat és inverz függvény

Az $y = f(x)$ függvény kapcsolatot állapít meg az értelmezési tartomány x értékei és az értékkészlet y értékei között, vagyis megadja, hogy adott x értékhez melyik — egy vagy több — y érték tartozik. A hozzárendelés azonban meg is fordítható, vagyis kérdezhetjük, hogy adott y értékhez mely — egy vagy több — x érték tartozik; ilyenkor az $y = f(x)$ függvény *inverz függvénykapcsolatáról* beszélünk, szokásos jelölése: $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$. Az inverz kapcsolatot kifejező függvény

független változója az eredeti függvény függő változója, értelmezési tartománya az eredeti függvény értékkészlete és fordítva.

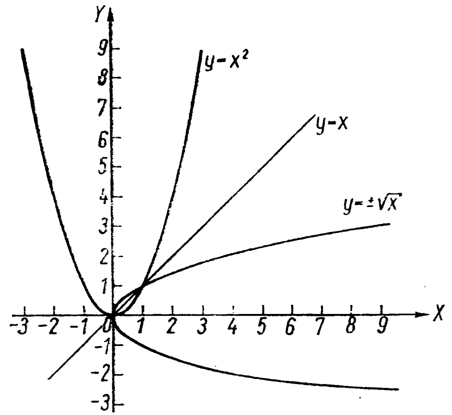
Az eddigieket példán foglaljuk össze: legyen $y = x^2$ az eredeti — ún. direkt — függvénykapcsolat; ekkor $x = \pm\sqrt{y}$ az inverz függvénykapcsolat. Ha az összetartozó számpárokat az X, Y koordinátarendszerben ábrázoljuk, ekkor mindkét esetben ugyanazt a görbét kapjuk (5. ábra). Ha $x = 3$ vagy $x = -3$, akkor $y = 9$; fordítva ha $y = 9$, akkor $x = \pm 3$.



5. ábra

Ha az inverz kapcsolatban a változókat felcseréljük, tehát az új független változót szokás szerint újra x-szel, az új függő változót pedig y-nal jelöljük, akkor az így kapott függvényt az eredeti függvény *inverz függvényének* nevezzük. A változók felcserélése a koordinátatengelyek felcserélését jelenti, s ekkor az eredeti és az inverz függvény görbéje az $y = x$ szögfelező egyenesre szimmetrikus.

Például az $y = x^2$ függvény inverz függvényét megkapjuk, ha az $x = \pm\sqrt{y}$ inverz kapcsolatban a változók jelölését felcseréljük: $y = \pm\sqrt{x}$ (6. ábra).



6. ábra

Az előzőkben úgy határoztuk meg az inverz függvényt, hogy az eredeti függvényből kifejeztük az x-et, majd felcseréltük a változókat. Fordítva is eljárhatunk: előbb cseréljük meg a változókat és azután fejezzük ki y-t. Az előző példa tehát úgy is megoldható, hogy $y=x^2$-ben a változókat felcseréljük: $x=y^2$, amiből $y=\pm\sqrt{x}$.

Az inverz kapcsolat fogalma azért fontos, mert előfordulhat, hogy segítségével az összetartozó számpárok könnyebben határozhatók meg, mint az eredeti függvénykapcsolattal. Egyéb alkalmazásait a differenciálszámításban látjuk majd.

4. Összetett függvények

Összetett függvénynek nevezzük az olyan függvényt, amelynek független változója egy másik függvény függvényértéke. Az összetett függvényt *közvetett függvénynek* is szokás nevezni.

Az $y=\sin x^2$ függvény összetett, mert x megadása után először x^2 értékét kell meghatároznunk, és csak ezután lehet a kapott szög szinuszát kiszámítani. Az összetett függvényt új változó bevezetésével (az új változóra nézve) nem összetett

függvénnyé tudjuk átalakítani. Most ezt az $u=x^2$ helyettesítéssel érjük el, ugyanis

$$y=\sin x^2; \quad u=x^2$$

helyettesítéssel

$$y=\sin u,$$

ez u-ra nézve már nem összetett függvény. Ezt a következőképpen jelölhetjük:

$$y=f\{u(x)\}.$$

Többszörösen összetett függvényekkel is találkozhatunk. Tekintsük pl. az $y=\sin^2 3x$ függvényt.

Határozzuk meg a függvényértéket valamely x_0 helyen!

Először kiszámítjuk $3x_0$ értékét, ezután meghatározzuk $\sin 3x_0$ értékét; majd ezt négyzetre emeljük. Mint az eljárásból is látható, a $3x$ az x-nek függvénye, de a $\sin 3x$-nek a független változója. A $\sin 3x$ pedig a $\sin^2 3x$ független változója.

Az előbbieket a következő módon írhatjuk:

$$y=\sin^2 3x; \quad u=\sin 3x; \quad v=3x.$$

$$y=u^2, \quad \text{ahol} \quad u=\sin v \quad \text{és} \quad v=3x.$$

Az y tehát u-nak „közvetlen" függvénye; v-nek már („kétszeresen") összetett függvénye, míg x-nek „háromszorosan" összetett függvénye. Ezt a következőképpen jelölhetjük:

$$y=f\{u[v(x)]\}.$$

Gyakorló feladatok

1. $y=\sin^2 3x$. Határozzuk meg az $x_0=\frac{\pi}{18}$-hoz tartozó függvényértéket!

Az $u=\sin 3x$ és $v=3x$ helyettesítést alkalmazva:

$$v=3\cdot\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{6}; \quad u=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}; \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

2. $y=\sqrt{x^2+5}$. Határozzuk meg a függvény helyettesítési értékét az $x_0=2$ helyen!

$$y=\sqrt{u}, \quad \text{ahol} \quad u=x^2+5; \quad u(x_0)=u_0=4+5=9;$$

$$y(u_0)=\sqrt{u_0}=\sqrt{9}=3.$$

3. $y=\lg\sqrt{\dfrac{23x-15}{x-4}}$. Határozzuk meg a függvény $x_0=5$ helyen vett függvényértékét!

$$y=\lg u, \quad \text{ahol} \quad u=\sqrt{v} \quad \text{és} \quad v=\frac{23x-15}{x-4};$$

$$v(x_0)=v_0=\frac{23\cdot 5-15}{5-4}=115-15=100;$$

$$u(v_0)=u_0=\sqrt{100}=10; \quad y(u_0)=\lg 10=1.$$

Tehát $y(x_0)=1$.

4. $y=\lg\sin(\cos 3x)$ (Az adott függvény négyszeresen összetett.) Határozzuk meg az $x_0=\dfrac{\pi}{9}$ helyhez tartozó függvényértéket!

$$y=\lg u; \quad u=\sin v; \quad v=\cos z; \quad z=3x;$$

$$z(x_0)=z_0=3\cdot\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3};$$

$$v(z_0)=v_0=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

$$u(v_0)=u_0=\sin\frac{1}{2}.$$

A $\sin\dfrac{1}{2}$ — mint tudjuk — azt jelenti, hogy a 0,5 radián nagyságú szög szinuszát kell meghatároznunk. Mivel 1 radián $\approx 57{,}3°$, ezért 0,5 radián $\approx$ $\approx 28{,}65°$.

$$u_0=\sin\frac{1}{2}=\sin 28{,}65°=0{,}4795.$$

$$y(u_0)=\lg 0{,}4795\approx 0{,}6808-1=-0{,}3192.$$

Tehát $y(x_0)=-0{,}3192$.

5. Elemi függvények

A függvényeket feloszthatjuk algebrai és transzcendens függvényekre. Az algebrai függvények közé tartoznak a racionális egész, racionális törtfüggvények, valamint az algebrai irracionális függvények. A nem algebrai függvényeket transzcendens függvényeknek nevezzük.

A következőkben néhány fontos elemi algebrai, ill. transzcendens függvényt adunk meg.

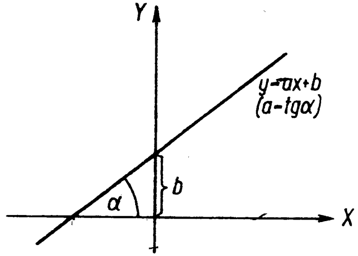
a) *Racionális egész függvények.* A racionális egész függvény explicit alakjában a független változó csak összeadásban, kivonásban, egész kitevőjű hatványozásban szerepel. Általános alakja:

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

$a_0, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok. Ha $a_n\neq 0$, akkor a függvényt n-edfokú egész függvénynek (jobb oldalát n-edfokú polinomnak) nevezzük.

Néhány racionális egész függvény:

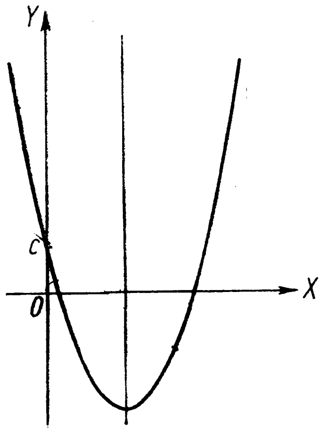
Elsőfokú függvény (lineáris függvény): $y=ax+b$. Itt $a\neq 0$ és b valós számok. A függvény képe egyenes (7. ábra). (Ha $a=0$ — amikoris *nulladfokú* a függvény —, akkor az egyenes



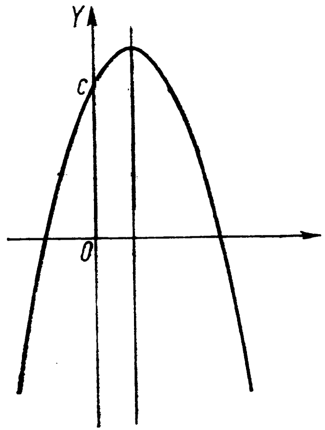
7. ábra

az X-tengellyel párhuzamos, és az Y-tengelyt b ordinátájú pontjában metszi.) Ha $b=0$, akkor az egyenes az origón megy át; ez a kapcsolat fejezi ki az *egyenes arányosságot.*

Másodfokú függvény: $y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$. A másodfokú függvény képe *parabola.* Ha $a>0$ (8. ábra), akkor szárai felfelé irányulnak; ha $a<0$ (9. ábra), akkor lefele. Mindkét esetben a parabola szimmetrikus egy, az Y-tengellyel párhuzamos szimmetriatengelyre.



8. ábra



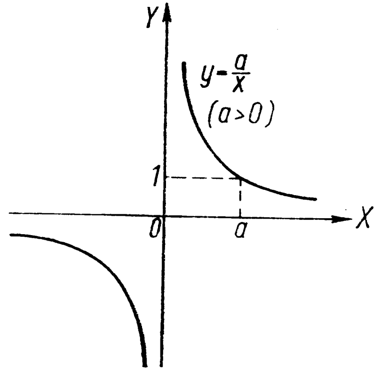
9. ábra

A magasabbfokú racionális egész függvényekkel csak a feladatok megoldása során foglalkozunk.

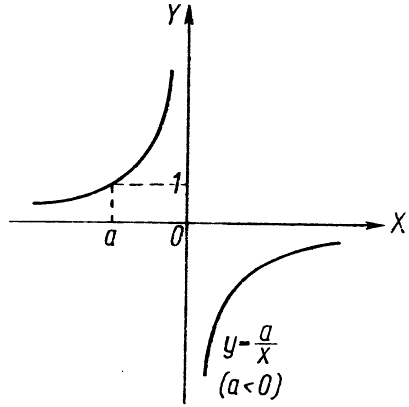
b) *Racionális törtfüggvények.* Azokat a függvényeket, amelyek explicit alakjában az előbbieken kívül a független változó osztóként is szerepel, racionális törtfüggvényeknek nevezzük.

A racionális törtfüggvények mindig felírhatók két racionális egész függvény hányadosaként, így általános alakjuk:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}.$$



10. ábra



11. ábra

Általában feltételezzük, hogy ebben az alakban már egyszerűsíteni nem lehet. A legegyszerűbb racionális törtfüggvény:

$$y = \frac{a}{x}.$$

A függvény képe hiperbola, amelynek tengelyei a koordinátarendszer szögfelezői. (L. a 10. ábrát $a > 0$, ill. a 11. ábrát $a < 0$ esetén.) Ez a függvénykapcsolat fejezi ki a *fordított arányosságot*.

Speciális racionális törtfüggvény:

Lineáris törtfüggvény: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0;\ c \neq 0)$.

A lineáris törtfüggvény két elsőfokú függvény hányadosa.

Más törtfüggvények vizsgálatával csak a gyakorló feladatok során foglalkozunk.

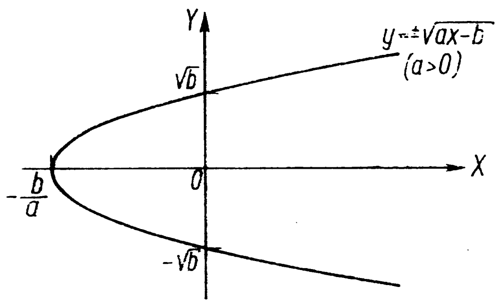
c) *Algebrai irracionális függvények.* Azokat a függvényeket, amelyek explicit egyszerűsített alakjában a független változó az előzőkön kívül gyökvonásban is előfordul, irracionális függvénynek nevezzük.

Néhány irracionális függvény:

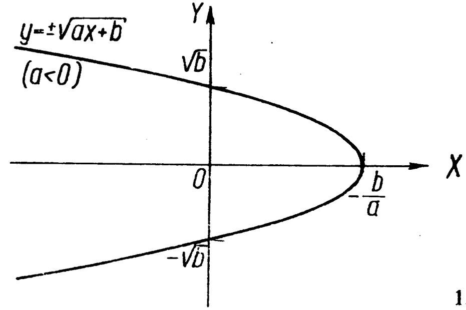
$$y = \pm\sqrt{ax+b} \qquad (a \neq 0).$$

A függvény képe az X-tengelyre szimmetrikus parabola. (L. a 12. ábrát $a > 0$, ill. a 13. ábrát $a < 0$ esetén.)

$$y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (a \neq 0).$$



12. ábra

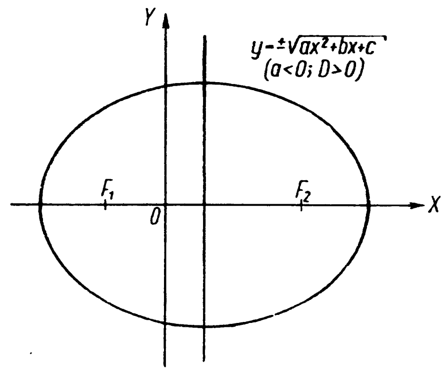


13. ábra

A függvény görbéjét „a" előjele, valamint a gyökjel alatti kifejezésből felírható

$$ax^2+bx+c = 0$$

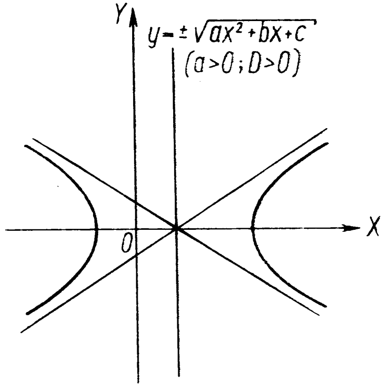
másodfokú egyenlet diszkriminánsának előjele dönti el. Ha $a < 0$ és $D = b^2-4ac > 0$, akkor a görbe ellipszis (14. ábra).



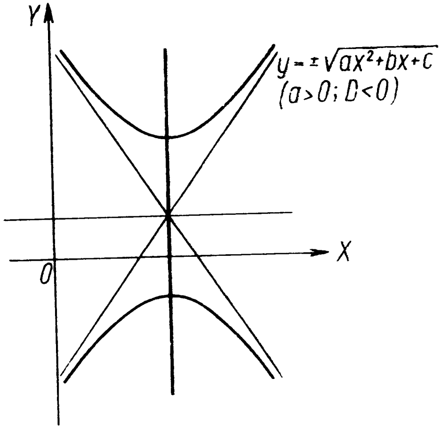
14. ábra

Ha $a > 0$ és $D > 0$, akkor olyan hiperbola, amelynek valós tengelye az X-tengely (15. ábra). Ha $a > 0$ és $D < 0$, akkor a hiperbola valós tengelye párhuzamos az Y-tengellyel (16. ábra).

Az $y = \sqrt[3]{ax^2+bx+c}$; $y = \sqrt[10]{x^3}$ stb. függvények is irracionálisak, de ezekkel most nem foglalkozunk.



15. ábra

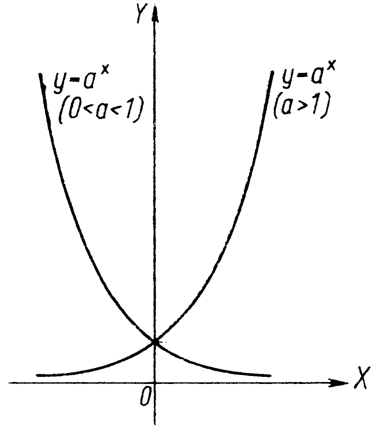


16. ábra

d) *Transzcendens függvények.* Most csak a legegyszerűbb transzcendens függvényeket ismertetjük.

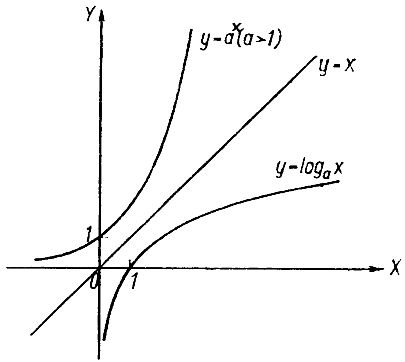
Exponenciális függvény. Általános alakja: $y=a^x$, ahol $a>0$ és $a\neq 1$.

A függvény görbéje a 17. ábrán látható mind $a<1$, mind $a>1$ esetre.



17. ábra

Az exponenciális függvények közül kitüntetett szerepe van az $y=e^x$ függvénynek, mert minden olyan jelenség leírására használható, amelynek során valamely mennyiség megváltozása mindenkor arányos a mennyiség pillanatnyi értékével. Pl. a baktériumok számának növekedése arányos a baktériumok számával (feltételezve, hogy a szaporodást semmi sem gátolja); a radioaktív anyagokból elbomló atomok száma



18. ábra

arányos a bomlásra képes atomok számával stb. Itt e az Euler-féle szám, értéke négy tizedesjegy pontossággal: 2,7182.

Logaritmusfüggvény. A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverz függvénye; $y=a^x$ inverz kapcsolata $x=\log_a y$, ebből a változók felcserélésével kapjuk az „a" alapú logaritmusfüggvényt: $y=\log_a x$.

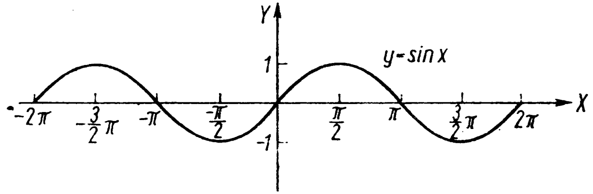
Az $y=e^x$ függvény inverz függvénye az előbbiek alapján $y=\log_e x$, amit így írunk: $y=\ln x$.

Az exponenciális és a megfelelő logaritmusfüggvény képe ($a>1$ esetben) a 18. ábrán látható.

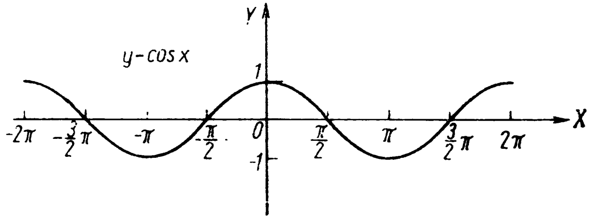
Trigonometrikus függvények. A trigonometrikus függvényekben a független változó valamely szögfüggvénye szerepel. A szögfüggvények $y=\sin x$ (19. ábra); $y=\cos x$ (20. ábra); $y=\operatorname{tg} x$ (21. ábra); $y=\operatorname{ctg} x$ (22. ábra).

A szögfüggvények periodikusak, mert mindegyikre igaz, hogy $y(x) = y(x+k\cdot 2\pi)$. A tangensre és kotangensre már $y(x) = y(x+k\pi)$ is fennáll.

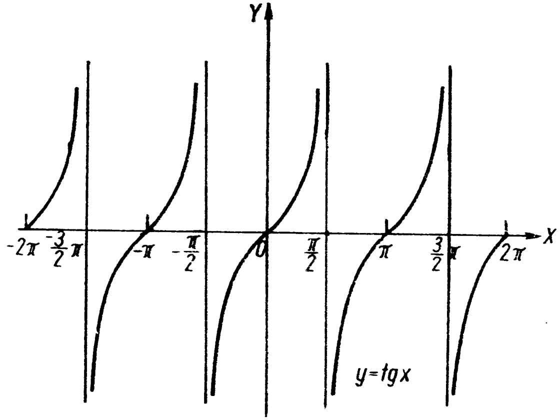
A szögfüggvények független változója a radiánban mért szög.



19. ábra

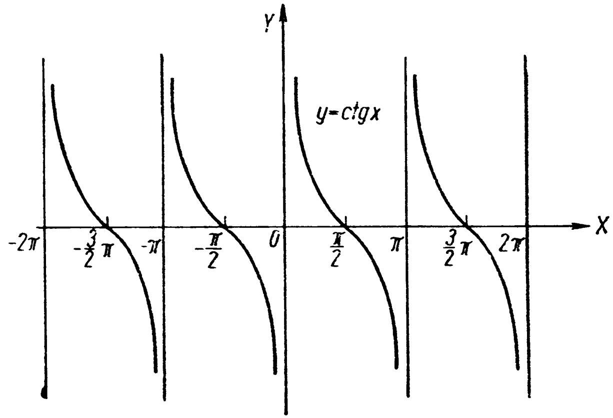


20. ábra



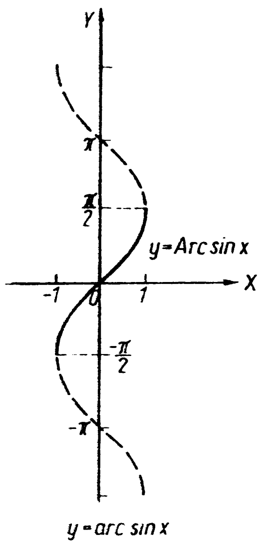
21. ábra

Trigonometrikus függvények felhasználhatók egyszerűbb mechanikai és elektromos rezgések leírására. Például a csillapítatlan rezgőmozgást végző rugó t időpontbeli kitérését megadó függvény $y=A\sin\omega t$ alakú. A váltakozó áramot, mint az idő függvényét, $i=I_0 \sin\omega t$ alakú függvény írja le.

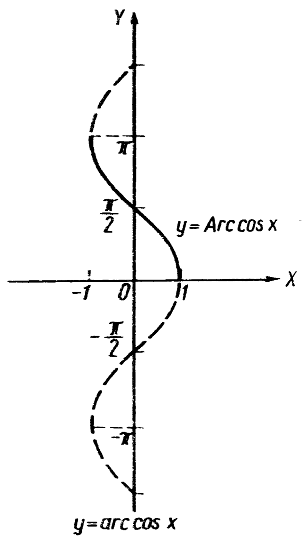


22. ábra

Árkusz függvények. Az árkusz függvények a trigonometrikus függvények inverz függvényei. Érdemes megjegyezni, hogy a szinusz- és koszinuszfüggvények folytonosak, de nem szigorúan monoton függvények, a tangens és kotangens viszont szigorúan monoton függvények, de nem folytonosak; mindnyájuk inverz függvénye többértékű. Az $y=\sin x$ függvény inverz kapcsolata $x=\arcsin y$; a változókat felcserélve, az $y=\sin x$ inverz függvénye $y=\arcsin x$ (23. ábra).



23. ábra

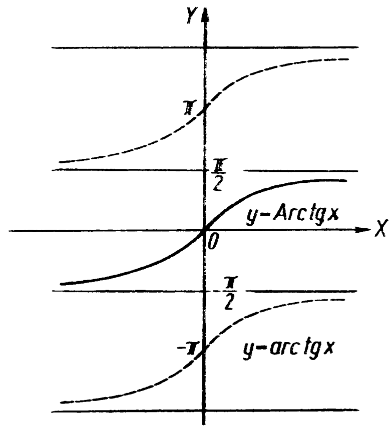


24. ábra

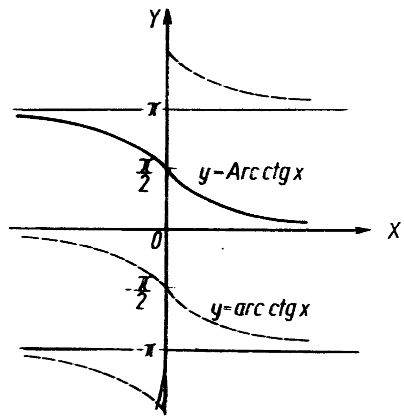
A szinuszfüggvény főértéke egy periódusának inverz függvénye, amely már szigorúan monoton (l. a 23. ábrán vastag vonallal jelölve). A főérték jele: $y=\mathrm{Arc}\sin x$.

Tehát pl. Arc sin 0,5 azt a $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közé eső szöget jelenti (radiánban), amelynek szinusza 0,5, ez pedig a $\frac{\pi}{6}$ radián.

Hasonló módon kapjuk a többi trigonometrikus függvény inverz függvényét (csak a főértéket írva): $y=\mathrm{Arc}\cos x$ (24. ábra); $y=\mathrm{Arc\,tg}\,x$ (25. ábra); $y=\mathrm{Arc\,ctg}\,x$ (26. ábra).



25. ábra

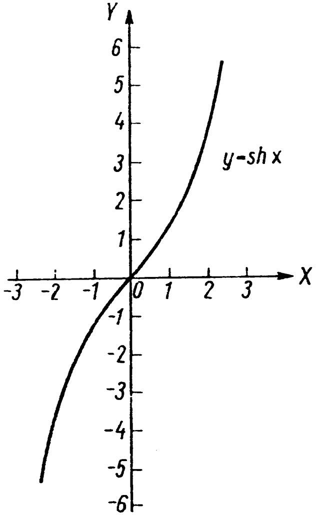


26. ábra

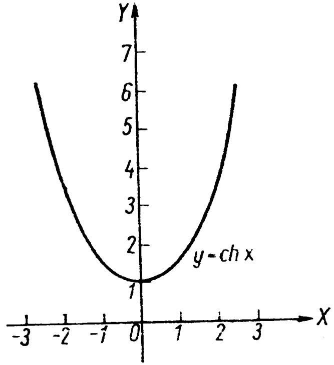
Hiperbolikus függvények. A hiperbolikus függvények:

$$y = \mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (27. ábra)}; \quad y = \mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (28. ábra)};$$

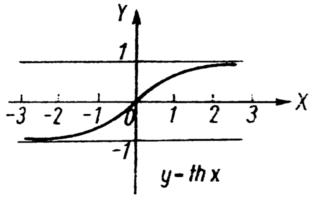
$$y = \mathrm{th}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ (29. ábra)}; \quad y = \mathrm{cth}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ (30. ábra)}.$$



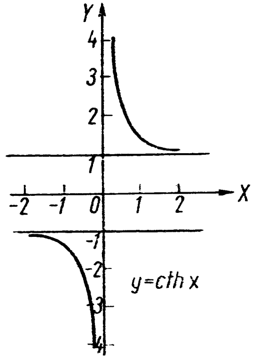
27. ábra



28. ábra



29. ábra

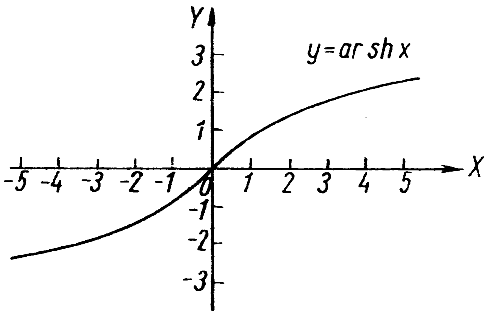


30. ábra

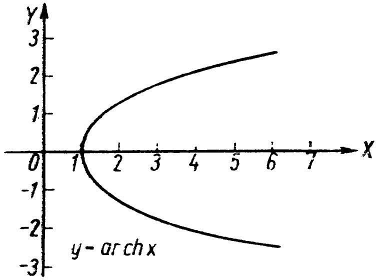
Az egyes jelölések olvasása: „szinusz hiperbolikusz x” stb.

A ch x függvény görbéje az ún. „*láncgörbe*”. Elnevezését azért kapta, mert ilyen alakot vesz fel a két végén felfüggesztett lánc vagy kötél.

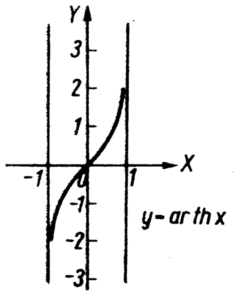
Areafüggvények. Az areafüggvények a hiperbolikus függvények inverzei. Az $y = \mathrm{sh}\,x$ inverz kapcsolata $x = \mathrm{ar\,sh}\,y$; az inverz függvény $y = \mathrm{ar\,sh}\,x$. Ugyanígy adódik $y = \mathrm{ar\,ch}\,x$; $y = \mathrm{ar\,th}\,x$; $y = \mathrm{ar\,cth}\,x$.



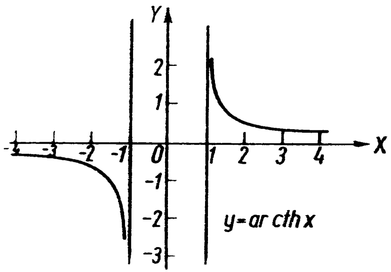
31. ábra



32. ábra



33. ábra



34. ábra

Az areafüggvények alábbi logaritmikus alakjait a gyakorló feladatok során határozzuk meg: $y = \text{ar sh } x = \ln |x + \sqrt{x^2+1}|$ (31. ábra); $y = \text{ar ch } x = \ln (x \pm \sqrt{x^2-1})$ (32. ábra); $y = \text{ar th } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (33. ábra); $y = \text{ar cth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ (34. ábra).

Gyakorló feladatok

1. $y = 6x^2 - 3x + 2$. Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát (Ét.) és értékkészletét (Ék.)!

Ét.: $-\infty < x < +\infty$, hiszen x nyilvánvalóan tetszőleges valós szám lehet. Mivel x^2 együtthatója pozitív, ezért elég nagy abszolút értékű x esetén y tetszőlegesen nagy pozitív értéket felvehet (vagyis a parabola szárai felfelé mutatnak); az értékkészlet legkisebb értékét úgy határozzuk meg, hogy a parabola csúcsának y koordinátáját kiszámítjuk. Ehhez az adott másodfokú függvényt *teljes négyzetté* alakítjuk át:

$$y = 6x^2 - 3x + 2 = 6\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 2 =$$

$$= 6\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) + 2 - \frac{6}{16} = 6\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 1\frac{10}{16} = 6\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 1\frac{5}{8}.$$

A függvényérték akkor a legkisebb, ha $x = \frac{1}{4}$, mert ekkor az első tag 0, bármely más x értéket helyettesítve pedig pozitív. Tehát a csúcs koordinátái: $x = \frac{1}{4}$; $y = 1\frac{5}{8}$.

Ék.: $1\frac{5}{8} \leq y < +\infty$.

2. $y = -3x^2 + 6x - 4$. Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

Ét.: $-\infty < x < +\infty$.

Az értékkészletet az előbbi módon határozzuk meg:

$$y = -3(x^2 - 2x) - 4 = -3(x^2 - 2x + 1) - 4 + 3 = -3(x-1)^2 - 1.$$

A függvény tehát egy olyan parabola, amelynek tengelye párhuzamos az Y-tengellyel és szárai lefelé mutatnak. A függvénynek ott van maximuma, ahol az első tag nulla; minden ennél kisebb függvényértéket felvesz. A csúcspont koordinátái: $x = 1$; $y = -1$.

Ék.: $-\infty < y \leq -1$.

3. Határozzuk meg az $y = \frac{5}{x-4}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

A függvény képe hiperbola. Minden olyan x értékre értelmezett, amelyre a nevező nem nulla, tehát a 4 kivételével minden valós értéket felvehet; tehát

Ét.: $x \neq 4$, vagy más módon felírva $-\infty < x < 4$, és $4 < x < +\infty$.

Az értékkészletbe minden pozitív és negatív szám beletartozik; ui. y helyébe bármelyiket helyettesítve, a kapott egyenletből x hozzátartozó értéke meghatározható. Viszont semmilyen véges x értékre sem lehet y értéke nulla, hiszen a jobb oldalon ekkor egy nullától különböző számlálójú és véges nevezőjű tört áll. Tehát

Ék.: $y \neq 0$.

4. Határozzuk meg az $y = \dfrac{7}{x^2+4x-21}$ függvény értelmezési tartományát!

A függvény értelmezési tartományához mindazok az x értékek tartoznak, amelyekre a nevező nem nulla. A nevező nullahelyeit megkapjuk, ha az $x^2+4x-21 = 0$ egyenlet gyökeit meghatározzuk.

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2};$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -7.$$

Tehát az értelmezési tartomány

Ét.: $x \neq 3$; $x \neq -7$.

5. $y = \pm\sqrt{x+5}$. Határozzuk meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet!

A függvény irracionális és kétértékű. Azon x értékekre van értelmezve, amelyekre az $x+5 \geqq 0$, ebből $x \geqq -5$.

Ét.: $-5 \leqq x < +\infty$.

Az értékkészlet könnyen meghatározható, mert $x \to \infty$ esetén $|y| \to \infty$, és a két ugyanazon x értékhez tartozó y érték mindig azonos nagyságú és ellenkező előjelű.

Ék.: $-\infty < y < +\infty$.

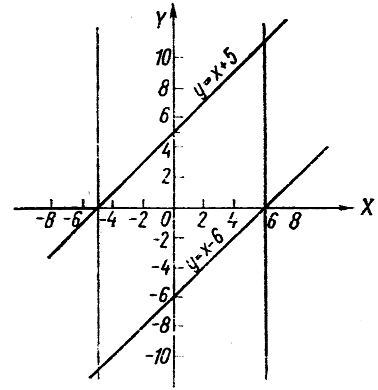
6. $y = \pm\sqrt{(x-6)(x+5)}$. Ét. = ? Ék. = ? A függvény ismét irracionális, a gyökjel alatt két elsőfokú függvény szorzata van. Az értelmezési tartomány azon x értékekből áll, amelyekre a szorzat mindkét tényezője egyenlő előjelű, ill. legalább az egyik tényező nulla, mert ilyenkor áll a gyökjel alatt nemnegatív szám!

Az értelmezési tartományt grafikusan határozzuk meg.

Megoldás:

Ábrázoljuk az $y = x-6$ és $y = x+5$ függvényeket, majd megállapítjuk az X-tengelyen azokat a számközöket, amelyekre az előbbiekben megállapított feltétel teljesül (35. ábra). Mint az ábrából látható:

Ét.: $-\infty < x \leqq -5$ és $6 \leqq x < +\infty$.

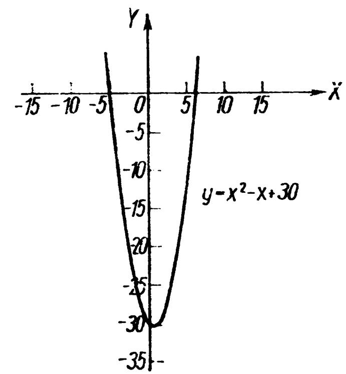


35. ábra

A gyökjel alatti műveletet elvégezve, $y = \pm\sqrt{x^2-x+30}$ adódik. A gyökjel alatti kifejezés minden nemnegatív értéket felvehet (a negatív értéknek megfelelő x értékek nem tartoznak az értelmezési tartományba), tehát az értékkészlet — a gyök $\pm$ előjelét figyelembe véve — az összes valós szám.

Ék.: $-\infty < y < +\infty$.

II. Megoldás: Ábrázoljuk az összeszorzással kapott $y = x^2-x+30$ másodfokú függvényt (36. ábra). Ez nemnegatív, ha $x \leqq -5$, és $x \geqq 6$. Az értékkészlet most is az előbbi meggondolással adódik.



36. ábra

7. $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$. Ét. $=$? Ék. $=$? A feladatot úgy oldjuk meg, hogy meghatározzuk $\sqrt{x-3}$, ill. $\sqrt{3-x}$ értelmezési tartományát; a kettő közös része lesz a függvény értelmezési tartománya.

$$y_1=\sqrt{x-3}. \quad \text{Ét.: } 3 \leqq x < +\infty.$$

$$y_2=\sqrt{3-x}. \quad \text{Ét.: } -\infty < x \leqq 3.$$

A két értelmezési tartománynak csak egy közös pontja van, így Ét.: $x=3$, és behelyettesítve ezt az értéket, Ék.: $y=0$.

8. $y=\lg(3+2x)$. Ét. $=$? Ék. $=$? A logaritmus csak pozitív számokra van értelmezve, így csak a $3+2x>0$ értékekre értelmezett a függvény:

$$3+2x>0; \quad \text{az egyenlőtlenség átrendezésével } x>-\frac{3}{2}.$$

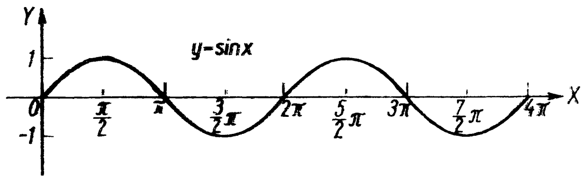
$$\text{Ét.: } -\frac{3}{2}<x<+\infty.$$

Mivel az argumentum az értelmezési tartomány x értékeire minden pozitív számot felvesz, eközben a logaritmus értéke minden valós számot felvesz. Tehát

$$\text{Ék.: } -\infty<y<+\infty.$$

9. $y=\sin x$. Ét. $=$? Ék. $=$? A függvény periodikus. Periódusa: 2π. A 37. ábráról leolvashatóan

$$\text{Ét.: } -\infty<x<+\infty. \quad \text{Ék.: } -1 \leqq y \leqq +1.$$



37. ábra

10. $y=\lg\sin x$. Ét. $=$? Ék. $=$? A függvény periodikus, mivel a $\sin x$ függvény is az, de csak azokra az x értékekre van értelmezve, amelyekre $\sin x>0$. Tehát

$$\text{Ét.: } k2\pi<x<(2k+1)\pi \qquad (k \text{ egész szám}).$$

Mivel $\sin x$ ezekben a tartományokban minden nullánál nagyobb, de egynél nem nagyobb értéket felvesz, és a 0 és 1 közötti számok logaritmusai $-\infty$ és 0 között változnak, valamint $\ln 1=0$, tehát

$$\text{Ék.: } -\infty<y \leqq 0.$$

11. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$. Ét. $=$? Ék. $=$? A függvény periodikus (mert a $\cos x$ az), de csak azon x értékekre van értelmezve, amelyekre $\cos x>0$.

$$\text{Ét.: } -\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Mivel $\cos x$ ezekben a tartományokban 1-ig minden pozitív számot felvesz, és a gyök ekkor szintén ilyen értékű, tehát a gyöknek csupán a pozitív előjelét figyelembe véve

$$\text{Ék.: } 1 \leqq y<+\infty.$$

12. $y=\sqrt{2-x}+\ln x$. Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát!

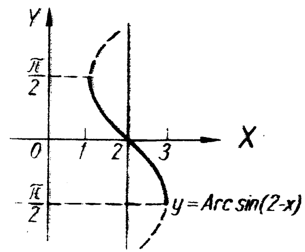
Legyen $y_{\text{I}}=\sqrt{2-x}$ és $y_{\text{II}}=\ln x$; ezen függvények értelmezési tartományának közös része lesz az eredeti függvény értelmezési tartománya.

$$\text{Ét}_{\text{I}}\text{.: } x \leqq 2; \quad \text{Ét}_{\text{II}}\text{.: } 0<x.$$

A közös rész az X-tengelyen (vagyis az eredeti függvény értelmezési tartománya):

$$\text{Ét.: } 0<x \leqq 2.$$

13. $y=\text{Arc}\sin(2-x)$. Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! [A függvény főérték (38. ábra)]!



38. ábra

A feladatot inverz alakba írással könnyen megoldhatjuk.

$$2-x=\sin y; \qquad x=2-\sin y.$$

Most y-t tekintjük független változónak és meghatározzuk x maximális és minimális értékét. A $\sin y$ $+1$ és -1 között változhat, így $x_{max} = 2+1 = 3$ (ha $\sin y = -1$), és $x_{min} = 2-1 = 1$ (ha $\sin y = 1$), vagyis a függvény értelmezési tartománya

Ét.: $1 \leqq x \leqq 3$.

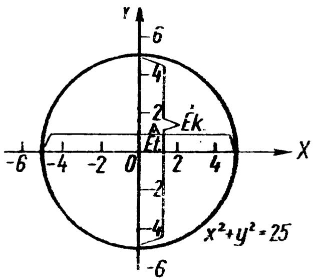
Az értékkészlet pl. az ábráról leolvasva:

Ék.: $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$.

Más esetben is előfordulhat, hogy az előbb vázolt módon — az inverz értékkészletének meghatározása útján — állapíthatjuk meg az eredeti függvény értelmezési tartományát. Egyes esetekben — az analitikus geometria ismeretében — grafikusan is meghatározhatjuk a függvény értelmezési tartományát.

14. $x^2+y^2=25$. Ét. $=?$ Ék. $=?$ A függvény összetartozó pontjai egy origó középpontú és 5 egység sugarú körön helyezkednek el. A kör X-tengelyre bocsátott vetülete a függvény értelmezési tartományát adja meg, az Y-tengelyre bocsátott vetület pedig az értékkészletet (39. ábra).

Ét.: $-5 \leqq x \leqq 5$; Ék.: $-5 \leqq y \leqq 5$.



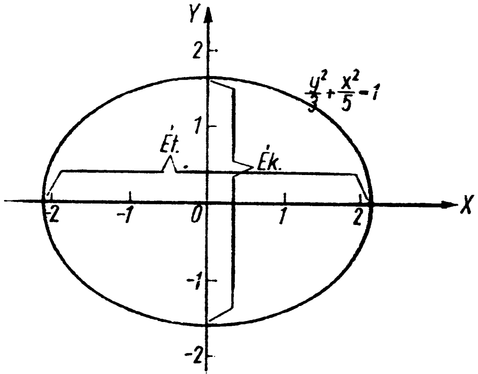
39. ábra

15. $5y^2+3x^2=15$. Ét. $=?$ Ék. $=?$

Átrendezve az eredeti függvényt:

$$\frac{5y^2}{15}+\frac{3x^2}{15}=1; \quad \frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{5}=1.$$

A függvénykapcsolat egy olyan (origó középpontú) ellipszist határoz meg, amelynek tengelyei a koordinátatengelyekkel egybeesnek; ennek az ellipszisnek a kis- és nagytengelye adja az értelmezési tartományt, ill. értékkészletet.



40. ábra

Mivel az ellipszis egyenletének általános alakja $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, ahol a a nagytengely fele, és b a kistengely fele (40. ábra), kapjuk:

$$a=\sqrt{5}; \quad b=\sqrt{3},$$

ezért

Ét.: $-\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5}$. Ék.: $-\sqrt{3} \leqq y \leqq \sqrt{3}$.

16. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$ Ét. = ? Ék. = ?

I. Megoldás:

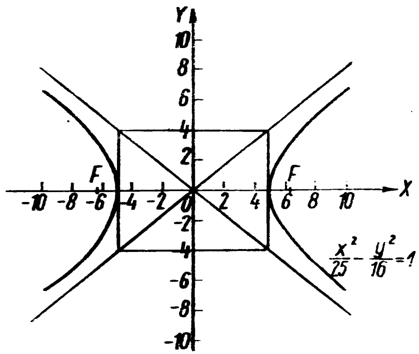
A függvénykapcsolat hiperbolát határoz meg (41. ábra), amelynek tengelyei a koordinátatengelyekkel egybeesnek és valós tengelye 10 egység. képzetes tengelye 8 egység. Mivel

$a=5$; $b=4$, ezért

Ét.: $-\infty<x\leqq-5$, és $5\leqq x<+\infty$, vagyis

Ét.: $|x|\geqq 5$.

Ék.: $-\infty<y<+\infty$.



41. ábra

II. Megoldás:

A feladatot úgy is megoldjuk, hogy a függvényt explicit alakra hozzuk, majd meghatározzuk értelmezési tartományát és értékkészletét.

$$\frac{y^2}{16}=\frac{x^2-25}{25};\quad y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{x^2-25}.$$

A felírt irracionális függvény értelmezési tartománya

Ét.: $|x|\geqq 5$,

mivel ez esetben áll a gyökjel alatt nemnegatív érték. Mivel a gyök minden valós értéket felvehet (a $\pm$ előjelek figyelembevételével), tehát

Ék.: $-\infty<y<+\infty$.

17. Határozzuk meg az $y=5\sqrt[3]{x}$ függvény inverz függvényét!

Írjuk fel az eredeti függvényt inverz kapcsolatban, azaz fejezzük ki x-et y-nal:

$$y=5\sqrt[3]{x};\quad y^3=125x;\quad x=\frac{y^3}{125}.$$

Most felcseréljük a változókat, és így megkapjuk $y=5\sqrt[3]{x}$ inverz függvényét:

$$y=\frac{x^3}{125}.$$

18. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{x-5}$ függvény inverz függvényét!

Most — a változatosság kedvéért — előbb cseréljük fel a változókat (így megkapjuk az adott függvény inverz függvényét implicit alakban), majd utána hozzuk explicit alakra. Az $y=\frac{1}{x-5}$ függvény inverz függvénye: $x=\frac{1}{y-5}$; ezt átalakítva:

$$y-5=\frac{1}{x},\quad \text{vagyis}\quad y=\frac{1}{x}+5.$$

19. Határozzuk meg az $y=\operatorname{sh}x$ függvény inverz függvényét!

$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ az eredeti függvény. Ha ebben a változókat felcseréljük, akkor megkapjuk az $y=\operatorname{sh}x$ függvény inverz függvényének implicit alakját; ez tehát

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

Ezt kell explicit alakra hoznunk:

$$2x=e^y-e^{-y}|\cdot e^y;$$

$$2xe^y=e^{2y}-1;$$

$$e^{2y}-2xe^y-1=0;$$

ez másodfokú függvény e^y-ban. Tehát megoldása

$$e^y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+1};$$

$$e_1^y=x+\sqrt{x^2+1};\quad e_2^y=x-\sqrt{x^2+1}.$$

Az így kapott exponenciális egyenletekből kell y-t kifejeznünk:

$$y_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad \text{ill.} \quad y_2 = \ln\left(x-\sqrt{x^2+1}\right).$$

Az y_2 semmilyen x-re sincs értelmezve, hiszen $\sqrt{x^2+1} > x$ minden x-re, és ezért az ln után álló kifejezés (argumentum) szintén minden x-re negatív, így logaritmusa nincs értelmezve.

A feladat egyetlen megoldása tehát:

$$y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);$$

$$y = \operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

20. Határozzuk meg az ar ch x függvényt a ch x függvényből!

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2},$$ ebből az ar ch x inverz függvény implicit alakja:

$$x = \frac{e^y+e^{-y}}{2}.$$

Ezt kell explicit alakra hoznunk:

$$2x = e^y+e^{-y} \,|\cdot e^y;$$

$$2xe^y = e^{2y}+1;$$

$$e^{2y}-2xe^y+1 = 0;$$

ez e^y-ban másodfokú függvény, melynek megoldása

$$e^y = \frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2} = x\pm\sqrt{x^2-1};$$

$$e^{y_1} = x+\sqrt{x^2-1}; \quad e^{y_2} = x-\sqrt{x^2-1}.$$

Ezekből y-t kifejezve:

$$y_1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad \text{és} \quad y_2 = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).$$

Az y_1 függvény értelmezési tartománya $x \geqq 1$, ui. ekkor a gyökjel alatt nemnegatív szám áll, és így $x+\sqrt{x^2-1} \geqq 1$. Az y_2 függvény értelmezési tartománya $x>1$, ui. ekkor $x-\sqrt{x^2-1} > 0$. Viszont $x=1$ esetben a logaritmus argumentuma nulla, és erre a logaritmust nem értelmeztük.

Igazoljuk még, hogy $y = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ helyett $y = -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ is írható. Alakítsuk át az $y_2 = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ függvényt:

$$y_2 = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \ln\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \ln\frac{x^2-x^2+1}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$

tehát az inverz függvény

$$y = \operatorname{ar\,ch} x = \ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right) = \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

alakban is írható.

21. Határozzuk meg a th x függvény inverz függvényét és értelmezési tartományát!

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

A függvény inverz függvénye implicit alakban:

$$x = \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}} \,\Big|\cdot(e^y+e^{-y});$$

$$xe^y+xe^{-y} = e^y-e^{-y} \,|\cdot e^y;$$

$$xe^{2y}+x = e^{2y}-1;$$

$$e^{2y}(1-x) = 1+x;$$

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}; \quad 2y = \ln\frac{1+x}{1-x};$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}; \quad y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Vagyis az inverz függvény

$$y = \operatorname{ar\,th} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

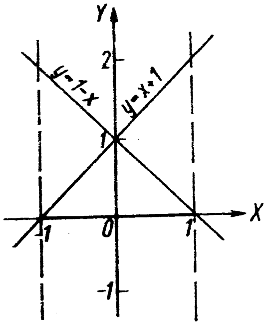
Ezen függvény értelmezési tartományát a következő egyenlőtlenségből kapjuk:

$$\frac{1+x}{1-x} > 0.$$

A feladatot grafikusan oldjuk meg (42. ábra). Felrajzoljuk az $y = 1+x$, és az $y = 1-x$ egyenest. Mint az ábrából leolvasható, az értelmezési tartomány:

$$\text{Ét.: } -1 < x < 1,$$

ui. itt mindkét egyenes előjele egyező, ezen a tartományon kívül pedig az egyik pozitív, a másik negatív.



42. ábra

Az értelmezési tartomány tehát a -1 és $+1$ közé eső szakasz. A -1 pontra az ln jel mögött 0 áll, a $+1$ pontban a tört nevezője 0, tehát ezek nem tartoznak az értelmezési tartományhoz.

22. Határozzuk meg az $y = \operatorname{cth} x$ függvény inverz függvényét!

$$y = \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Az inverz függvény implicit alakban:

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \bigg| \cdot (e^y - e^{-y});$$

$$xe^y - xe^{-y} = e^y + e^{-y} | \cdot e^y;$$

$$xe^{2y} - x = e^{2y} + 1;$$

$$e^{2y}(x-1) = x+1;$$

$$e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve:

$$2y = \ln \frac{x+1}{x-1},$$

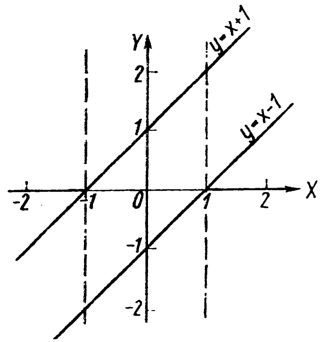
ebből

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

tehát

$$y = \operatorname{ar\,cth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

A függvény értelmezési tartományát grafikusan határozzuk meg (43. ábra). Mint az az ábrából látható, a gyökjel alatti kifejezés akkor pozitív,



43. ábra

ha $|x| > 1$. Ha $x = +1$, akkor a tört nevezője 0; ha $x = -1$, akkor a számláló, ezzel együtt a logaritmus argumentuma 0, ezért a ± 1 pontok már nem tartoznak az értelmezési tartományhoz. Vagyis az értelmezési tartomány az 1-nél nagyobb abszolút értékű számok halmaza.

II. A HATÁRÉRTÉK ELMÉLETE

1. Számsorozat határértéke

Számsorozat úgy keletkezik, hogy minden természetes számhoz — növekvő sorrendben — egy-egy számot rendelünk. Az egyes számokat a sorozat tagjainak nevezzük, és $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ betűkkel jelöljük. Az index azt mutatja, hogy a tagot melyik egész számhoz rendeltük; pl. a_5 az 5 számhoz rendelt tag. A sorozat minden tagjának megfelel a számegyenes egy pontja, így minden számsorozathoz tartozik egy pontsorozat a számegyenesen.

Néhány számsorozat:

$1, 3, 5, 7, \ldots$, általánosan $a_n = 2n-1$;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, általánosan $a_n = \dfrac{1}{n}$;

$1, 4, 9, 16, \ldots$, általánosan $a_n = n^2$.

A sorozatokat megadhatjuk a következő módon:

a) *Általános taggal.* Az előbbi sorozatok képzési szabálya egy-egy olyan formula, amelyből az n szám ismeretében a sorozat n-edik tagja, a_n kiszámítható.

b) *Rekurzióval.* Rekurzióval úgy adunk meg egy sorozatot, hogy előírjuk, hogyan kell a sorozat bármely tagját az előzőek ismeretében kiszámítani. Például megadhatjuk, hogy $a_1 = 8$; $a_2 = 12$ és $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$; vagyis a sorozat első néhány tagja $8, 12, 10, 11, 10{,}5, \ldots$.

c) *Utasítással.* Utasítással úgy adunk meg egy sorozatot, hogy szóban előírjuk a sorozat n-edik tagjának meghatározási módját. Pl.: „Legyen a sorozat n-edik tagja az $\dfrac{1}{7}$ végtelen szakaszos tizedestört n tizedesjegyig számított értéke." Más példa „A sorozat n-edik tagja a $\sqrt{3}$ irracionális szám n tizedesjegyig számított értéke".

Valamely sorozatot akkor nevezünk *szigorúan monoton növekedőnek,* ha bármely tagja az előzőnél nagyobb. Jelölés: $a_{n+1} > a_n$. Valamely sorozat akkor *szigorúan monoton csökkenő,* ha bármely tagja az előzőnél kisebb. Jelölés: $a_{n+1} < a_n$.

Pl.: $1, 2, 3, \ldots$, a természetes számok sorozata, szigorúan monoton növekedő. Ezzel szemben $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, a természetes számok reciprokából képezett sorozat, szigorúan monoton csökkenő. Ha az egyenlőséget is megengedjük, akkor a sorozat *monoton növekvő,* ill. *monoton csökkenő.* Pl.: monoton növekedő az $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$ sorozat.

Valamely sorozatot akkor nevezünk *korlátosnak,* ha van olyan $M > 0$ szám, amelyre igaz, hogy a sorozat bármely tagjának abszolút értéke kisebb, mint a M szám. Jelölés: $|a_n| < M$ bármely n-re.

Torlódási pontnak nevezzük a számegyenes azon pontját, amelynek tetszőlegesen kis környezetében a sorozatnak végtelen sok tagja van. Egy sorozatnak lehet egy vagy több torlódási pontja, esetleg nincs torlódási pontja. Például

a) $\sqrt{2}$ tizedestört alakjából képezzük az alábbi sorozatot: $1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, \ldots$. A sorozatnak csak egy torlódási pontja van, mégpedig éppen $\sqrt{2}$ értéke.

b) $1, \dfrac{1}{1}, 2, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{3}, \ldots$. A sorozatnak egy torlódási pontja van (ez a zérus), de a sorozat nem korlátos.

c) $0{,}9, -0{,}99, 0{,}999, -0{,}9999, \ldots$. A sorozatnak két torlódási pontja van, ezek $+1$ és -1.

d) $1, 2, 3, 4, \ldots$. A természetes számokból alkotott sorozatnak nincs a végesben torlódási pontja.

Valamely sorozat akkor *konvergens,* ha korlátos és csak egyetlen torlódási pontja van, melyet ekkor a sorozat *határértékének* nevezünk. Ezt így is megfogalmazhatjuk: Valamely sorozat akkor konvergens, mégpedig az A véges határértékhez konvergál, ha bármely adott $\varepsilon > 0$-hoz (ε tetszőlegesen kicsiny pozitív szám lehet) mindig található egy olyan — ε-tól függő

— $N=N(\varepsilon)$ szám, hogy $n>N$ esetén $|A-a_n|<\varepsilon$. Ezt az alábbi módon jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Valamely sorozat *divergens*, ha több torlódási pontja van, ha nincs torlódási pontja, vagy ha egy torlódási pontja van ugyan, de nem korlátos. Ilyenek voltak a *b), c)* és *d)* alatti sorozatok.

Ha $n\to\infty$ esetben $a_n\to\infty$, akkor azt szokás mondani, hogy határértéke $+\infty$.

Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Ha $n\to\infty$ esetben $a_n\to-\infty$, akkor azt szokás mondani, hogy határértéke $-\infty$.

Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Az egyes típusokat a gyakorló feladatok megoldásakor tárgyaljuk.

Először olyan sorozatok határértékét számítjuk majd ki, amelyek általános tagja racionális törtkifejezés. Az ilyen típusú sorozat határértékét a következő módon határozzuk meg: Megállapítjuk a számláló és nevező fokszámát. Osztjuk a számlálót és a nevezőt a kisebb fokszámú taggal, így határozhatjuk meg, hogy a számlálóban, ill. nevezőben mely tagok hanyagolhatók el. Eredményül azt kapjuk, hogy ha a számláló magasabb fokú, mint a nevező, akkor a sorozat divergens. Ha a két fokszám megegyezik, akkor konvergens és határértéke a legmagasabb fokú tagok együtthatóinak hányadosával egyenlő. Ha a nevező fokszáma nagyobb, mint a számlálóé, akkor konvergens és határértéke nulla. (Ezeket az állításokat a gyakorló feladatok számítása során belátjuk.)

Számításaink során a következő — sorozatok határértékére vonatkozó — tételeket használjuk fel:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{n}=0$. Ha a sorozat számlálója állandó, nevezője pedig n növelésével végtelenhez tart, akkor a sorozat határértéke nulla.

b) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,

vagyis az egyik sorozat az A véges számhoz, a másik sorozat pedig a B véges számhoz tart, akkor

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B;\qquad \lim_{n\to\infty}a_nb_n=AB;$$

ha $B\neq 0$, akkor ezen kívül

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B};\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k=\left(\frac{A}{B}\right)^k;\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{\frac{a_n}{b_n}}=\sqrt[k]{\frac{A}{B}}.$$

Gyakorló feladatok

1. $a_n=\dfrac{3n-2}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ A számláló és nevező egyaránt elsőfokú, tehát a sorozat konvergens. Osszuk el a számlálót és nevezőt n-nel!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)=3,\quad\text{mert}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0.$$

2. $a_n=\dfrac{2n^3-4}{5n^3-2n^2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4}{5n^3-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(5-\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{n^3}}{5-\frac{2}{n}}.$$

Látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^3}$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}$ egyaránt 0, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{4}{n^3}}{5-\frac{2}{n}}=\dfrac{2}{5}$.

3. $a_n=\dfrac{5n^2-2}{3n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ A számláló fokszáma eggyel nagyobb, mint a nevezőé! Osszuk végig a számlálót is és a nevezőt is n-nel!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}.$$

Látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, így

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{3}=\infty.$$

4. $a_n=\frac{-4n^2+5}{5n^3-2n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ A nevező fokszáma a nagyobb, kiemelhető az n^2, amellyel a számlálót és a nevezőt is végigoszthatjuk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2+5}{5n^3-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(-4+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(5n-\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{5}{n^2}}{5n-\frac{2}{n}}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0$, és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{5}{n^2}}{5n-\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{5n}=0.$$

Most olyan törtekkel foglalkozunk, amelyekben az n irracionális kifejezése fordul elő.

5. $a_n=\frac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ Kiemelünk a számlálóból és nevezőből n-et, majd egyszerűsítünk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{0}{1}=0.$$

Ebben a példában ugyanis a számláló fokszáma $\frac{2}{3}$, a nevezőé 1, tehát az utóbbi a magasabb.

6. $a_n=\frac{\sqrt{n^3+5n^2}}{\sqrt[3]{n^3-4n^2}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ Kiemelünk a számlálóban és a nevezőben n-et, majd egyszerűsítünk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n+5}}{n\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}}}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+5}=\infty.$$

Itt ui. a számláló fokszáma $\frac{3}{2}$, a nevezőé $\frac{3}{3}=1$, és így a számláló fokszáma a nevezőénél nagyobb, ezért a határérték valóban csak ∞ lehet.

7. $a_n=\frac{\sqrt[3]{4n^2+2n}}{\sqrt[3]{5n^2-6n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ A számláló és nevező fokszáma megegyezik.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4n^2+2n}}{\sqrt[3]{5n^2-6n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{4n^2+2n}{5n^2-6n}}.$$

A gyökjel alatti kifejezés határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+2n}{5n^2-6n}=\frac{4}{5}$, így az eredeti sorozat határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{4n^2+2n}{5n^2-6n}}=\sqrt[3]{\frac{4}{5}}.$$

8. $a_n=\dfrac{\sqrt{3n^2+2}+\sqrt{2n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ A számlálóból és nevezőből ki emelünk n-et, majd egyszerűsítünk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+2}+\sqrt{2n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}+n\sqrt{\frac{2}{n}}}{n\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-1}.$$

A képletben levő törtek határértékei:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}=0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0,$$

és így

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-1}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}.$$

Ebben a példában ui. a számláló és nevező egyaránt elsőfokú, a megfelelő együtthatók pedig $\sqrt{3}$, ill. -1.

9. $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$ A sorozat n-edik tagját megadó képlet mindkét tagja végtelenhez tart és így formálisan a $\infty-\infty$ határozatlan értékét kellene kiszámítanunk, de ezt közvetlenül nem tudjuk, mert ez egyaránt lehet nulla, véges nemnulla és végtelen. A feladatot úgy oldjuk meg, hogy az $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ismert összefüggés felhasználásával a számlálóban a gyökös tagot kiküszöböljük. E célból a kifejezést szorozzuk és osztjuk $(\sqrt{n^2+1}+n)$-nel.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0,$$

ui. a számláló 1, a nevező pedig n növekedtével végtelenhez tart.

10. $a_n=\sqrt{5n^2+1}-n$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$

Most a számlálót és a nevezőt $(\sqrt{5n^2+1}+n)$-nel szorozzuk:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{5n^2+1}-n)(\sqrt{5n^2+1}+n)}{\sqrt{5n^2+1}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1-n^2}{\sqrt{5n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{\sqrt{5n^2+1}+n};$$

n-et kiemelve, majd egyszerűsítve:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(4n+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{5+\frac{1}{n^2}}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+\frac{1}{n}}{\sqrt{5+\frac{1}{n^2}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{5}+1}=\infty.$$

11. $a_n=\sqrt{9n^2+2n-1}-3n$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=?$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+2n-1}-3n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+2n-1}-3n)(\sqrt{9n^2+2n-1}+3n)}{\sqrt{9n^2+2n-1}+3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+2n-1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n-1}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{9n^2+2n-1}+3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

2. Függvény határértéke

Az eddig vizsgált sorozatok olyan függvényekként értelmezhetők, amelyek argumentuma (független változója) csak egész értékeket vehet fel; a függvénykapcsolat ekkor $f(n)=a_n$. Azt vizsgáltuk, hogy mihez tart a függvényértékek sorozata, midőn

4*

a független változó a pozitív egész számokon át tart a végtelenhez.

Most folytonosan változó argumentumú függvényekkel foglalkozunk, amelyek értelmezési tartománya vagy a teljes számegyenes, vagy annak egy része.

Függvény határértéke. Valamely $y=f(x)$ *függvény határértéke* az $x=a$ helyen az A szám, ha bármely az $x=a$ helyhez konvergáló $x_1, x_2, x_3, \ldots$ abszcisszasorozatot választva, a megfelelő függvényértékek sorozata az A számhoz konvergál. Az előbbieket így is mondhatjuk: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, akkor a függvénynek az $x=a$ helyen van határértéke, és ez az A szám. Ennek rövid jelölése: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Megjegyzés: A függvénynek nem kell értelmezve lennie az $x=a$ helyen ahhoz, hogy itt határértéke legyen. Az A szám lehet véges, ill. végtelen.

Véges határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele: Az $y=f(x)$ függvény határértéke az $x=a$ helyen a véges A szám, ha bármely kis $\varepsilon>0$ számhoz megadható az „a" hely egy olyan δ sugarú környezete, hogy $|f(x_n)-A| < \varepsilon$, valahányszor $|x_n-a| < \delta$. (Nem használtuk fel azt, hogy az „a" hely az $y=f(x)$ függvény értelmezési tartományához tartozik!)

Baloldali határérték. Tartozzék az $y=f(x)$ függvény értelmezési tartományához valamilyen $a-\varepsilon \leqq x < a$ intervallum. A függvény baloldali határértéke az a helyen az az A szám, amelyhez a függvényértékek sorozata tart, midőn a független változó a-nál kisebb számokon keresztül bárhogyan is tart az „a"-hoz, vagyis részletesen kiírva, ha $n\to\infty$ esetén $x_n\to a-0$, és $f(x_n)\to A$, akkor az A szám az $y=f(x)$ függvény $x=a$ helyhez tartozó baloldali határértéke. Ennek szokásos rövid jelölése:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

Hasonló a *jobboldali határérték* definíciója is.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A.$

Megjegyzés: A két határértéknek nem kell megegyeznie! Ha azonban megegyeznek, akkor értékük egyúttal a függvény határértéke is.

Végtelen határérték. Valamely $y=f(x)$ függvény határértéke az $x=a$ helyen $+\infty$, ha bármely „a" helyhez tartó abszcisszasorozatra igaz, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty.$

Hasonló módon definiáljuk a $-\infty$ határértéket is.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty.$

Megjegyzés: A bal- és jobboldali határérték ugyancsak lehet $+\infty$ vagy $-\infty$, és nem kell megegyezniök.

Függvény határértéke a végtelenben. Valamely $y=f(x)$ függvény határértéke a $+\infty$-ben az A szám, ha bármely végtelenhez tartó abszcisszasorozat esetén az ordináták sorozata A-hoz tart. Vagyis ha $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, akkor a függvény határértéke a $+\infty$-ben az A szám.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A.$

Hasonló a definíció, ha a függvény határértékét a $-\infty$-ben akarjuk meghatározni, csak ilyenkor az abszcisszák sorozatát úgy kell megválasztanunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ legyen.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$

Függvény folytonossága. Valamely $y=f(x)$ függvény az $x=a$ *helyen folytonos*, ha az „a" hely a függvény értelmezési tartományához tartozik és $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, vagyis, ha az „$a$" helyen a függvénynek van határértéke, és ez megegyezik a helyettesítési értékével. Bármely más esetben a függvény nem folytonos.

Egy függvény akkor *folytonos* valamely a-tól b-ig terjedő *intervallumban*, ha annak minden pontjában folytonos. Az olyan függvényt, amely a számegyenes minden pontjában folytonos, mindenütt folytonos függvénynek nevezzük. Ilyenek pl. a racionális egész függvények, az exponenciális függvények, a szinusz- és koszinuszfüggvény stb.

Az $y=f(x)$ függvénynek *pólusa* van az $y=a$ helyen, ha bal- vagy jobboldali határértéke, vagy mindkettő $+\infty$ vagy $-\infty$.

Megszüntethető szakadása van az $y=f(x)$ függvénynek az $x=a$ helyen, ha a-ban létezik véges határértéke, de az vagy nem egyezik meg az $f(a)$ függvényértékkel, vagy az a helyen a függvény nincs is értelmezve.

Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ olyan függvények, amelyeknek az $x=a$ helyen van határértékük és az véges szám, vagyis

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{és} \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

A két függvény összegének és különbségének határértéke az $x=a$ helyen:

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

A két függvény szorzatának határértéke az $x=a$ helyen:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = AB.$$

A két függvény hányadosának határértéke (feltételezve, hogy az osztó határértéke nem nulla):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0).$$

A gyakorló feladatok megoldása során sokszor felhasználjuk azt, hogy ha egy tört számlálója és nevezője azonos kifejezés, akkor értékük az értelmezési tartományban azonosan egy, tehát határértékük minden pontban szintén 1.

Pl.: $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = 1$, bármely „$a$" értékre.

A következőkben olyan feladatokkal foglalkozunk, amelyekben egy törtkifejezés valamely x helyen nincs értelmezve, mert behelyettesítéssel határozatlan értéket ad. Ilyenkor az eredeti függvényt olyan függvénnyé alakítjuk át, amely e hely

kivételével mindenütt megegyezik az eredetivel, de amelynek ezen a helyen már van helyettesítési értéke, és ez egyenlő az eredeti függvény határértékével.

Gyakorló feladatok

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^4+2x^2}{x^5+3x^3+2x^2} = ?$ A felírt racionális törtfüggvénynek az $x=0$ helyen nincs helyettesítési értéke, mert nevezője nulla.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^4+2x^2}{x^5+3x^3+2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3x^2+2)}{x^2(x^3+3x+2)}.$$

Kiemeltük a számláló és nevező legnagyobb közös osztóját, így két törtfüggvény szorzata határértékének kiszámítása lesz a feladat.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{x^3+3x+2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+2}{x^3+3x+2} = 1.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$, ezért a szorzat határértékét a második tényező határértéke határozza meg. A második tényező eleget tesz azoknak a követelményeknek is, amelyeket a keresett függvénnyel szemben felállítottunk. Ezt az elvet alkalmazzuk a további példák megoldásakor is.

A feladat megoldása során sehol sem kellett felhasználnunk, hogy x balról vagy jobbról tart-e nullához; ezért közvetlenül a határértéket kaptuk.

2. $\lim\limits_{x\to +0} \frac{6x^4+3x^2+5x}{4x^3+7x^2} = ?$ Az $x=0$ helyen behelyettesítéssel a $\frac{0}{0}$ határozatlan kifejezés adódik. Ezért a határértéket keressük ezen a helyen;

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^4+3x^2+5x}{4x^3+7x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(6x^3+3x+5)}{x(4x^2+7x)}.$$

Mivel $\frac{x}{x}$ minden x-re 1, tehát határértéke is az;

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^3+3x+5}{4x^2+7x} = \infty, \quad \text{mivel} \quad \lim_{x\to 0} (6x^3+3x+5) = 5,$$

$$\text{és} \quad \lim_{x\to 0} (4x^2+7x) = 0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=?$ A helyettesítési érték az $x=2$ helyen a $\dfrac{0}{0}$ határozatlan kifejezés. A számláló és nevező egyaránt másodfokú, így szorzattá alakítható:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3),\quad \text{ill.}$$

$$x^2+3x-10=(x-2)(x+5).$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+5}=1\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{1}{7}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{6x+4}-\sqrt{7x+2}}=?$ Először a helyettesítési értékeket határozzuk meg.

A számláló: $\sqrt{7+2}-\sqrt{10-1}=3-3=0.$

A nevező: $\sqrt{12+4}-\sqrt{14+2}=4-4=0.$

Bővítjük a törtet a $(\sqrt{7+x}+\sqrt{5x-1})(\sqrt{6x+4}+\sqrt{7x+2})$ kifejezéssel:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{7+x}-\sqrt{5x-1})(\sqrt{7+x}+\sqrt{5x-1})(\sqrt{6x+4}+\sqrt{7x+2})}{(\sqrt{6x+4}-\sqrt{7x+2})(\sqrt{6x+4}+\sqrt{7x+2})(\sqrt{7+x}+\sqrt{5x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{7+x-5x+1}{6x+4-7x-2}\cdot\frac{\sqrt{6x+4}+\sqrt{7x+2}}{\sqrt{7+x}+\sqrt{5x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-4x+8}{-x+2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6x+4}+\sqrt{7x+2}}{\sqrt{7+x}+\sqrt{5x-1}}.$$

Felhasználtuk, hogy a szorzat határértéke a tényezők határértékének szorzatával egyenlő:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-4(x-2)}{-1(x-2)}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6x+4}+\sqrt{7x+2}}{\sqrt{7+x}+\sqrt{5x-1}}=4\cdot\frac{4+4}{3+3}=\frac{32}{6}=5\frac{1}{3}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x+x^2}}{x}=?$ A helyettesítési érték az $x=0$ helyen a $\dfrac{0}{0}$ határozatlan kifejezés.

Gyöktelenítjük a számlálót:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x+x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{5-x+x^2})(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2})}{x(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5-5+x-x^2}{x(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{x(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{x(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x}{\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}.$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=?$ A helyettesítési érték e helyen $\dfrac{0}{0}$ eredményt ad. A törtet bővítjük $\sqrt{1+\cos x}$-szel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\cos x}=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Itt felhasználtuk azt az ismert összefüggést, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Tehát

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\sqrt{2}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=?$ Behelyettesítéssel a $\dfrac{0}{0}$ határozatlan kifejezést kapjuk.

Bővítjük a törtet $(1+\cos x)$-szel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\cdot 0=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0.$$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = ?$ Az $x=0$ helyen mind a számláló, mind a nevező értéke 0.

Bővítjük a törtet $(1+\cos x)$-szel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{3x^2} = ?$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Az eredeti törtet átalakítva, felhasználva a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ és a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ összefüggéseket,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^{10}}-\sqrt[3]{x^2}}{8\sqrt[3]{x^{10}}+\sqrt[3]{x}} = ?$ Ha $x\to\infty$, akkor mind a számláló, mind a nevező végtelenné válik, tehát a $\dfrac{\infty}{\infty}$ határozatlan kifejezést kapjuk.

A gyökös kifejezéseket először törtkitevőjű hatványokká alakítjuk át:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{10}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{8x^{\frac{10}{3}}+x^{\frac{1}{3}}} = ?$$

Osztjuk a számlálót és nevezőt $x^{\frac{10}{3}}$-mal:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^{\frac{2}{3}-\frac{10}{3}}}{8+x^{\frac{1}{3}-\frac{10}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^{\frac{8}{3}}}}{8+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{1}{8}.$$

Ugyanis $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{8}{3}}} = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0.$

11. Határozzuk meg az $\dfrac{5^{\frac{1}{x}}-2\cdot 5^{\frac{2}{x}}}{5^{\frac{2-x}{x}}}$ törtkifejezés jobb-, ill. baloldali határértékét az $x=0$ helyen. A helyettesítés az első esetben a $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$, a másodikban a $\dfrac{0-0}{0}$ határozatlan kifejezést adja.

$$\lim_{x\to+0} \frac{5^{\frac{1}{x}}-2\cdot 5^{\frac{2}{x}}}{5^{\frac{2-x}{x}}} = ?$$

Kiemelünk a számlálóból és a nevezőből $5^{\frac{2}{x}}$-et:

$$\lim_{x\to+0} \frac{5^{\frac{1}{x}}-2\cdot 5^{\frac{2}{x}}}{5^{\frac{2-x}{x}}} = \lim_{x\to+0} \frac{5^{\frac{2}{x}}\left(5^{-\frac{1}{x}}-2\right)}{5^{\frac{2}{x}}\cdot 5^{-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{5^{-\frac{1}{x}}-2}{5^{-1}} = \lim_{x\to+0} 5\left(5^{-\frac{1}{x}}-2\right).$$

Az átalakítások során eddig nem kellett figyelembe vennünk, hogy x pozitív vagy negatív értékeken át közelíti-e meg a nullát. Most azonban a két esetet külön kell választanunk. Ha x jobbról (pozitív értékeken át) tart nullához, akkor

$$\lim_{x\to+0} 5^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{5^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

mivel a nevező kitevője ez esetben $+\infty$-hez, a nevező értéke tehát szintén $+\infty$-hez tart.

Ha ezzel szemben x balról (negatív értékeken át) tart nullához, akkor

$$\lim_{x\to-0} 5^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} 5^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

Tehát

$$\lim_{x\to+0} 5\left(5^{-\frac{1}{x}}-2\right) = -10;$$

és

$$\lim_{x\to -0} 5\left(5^{\frac{1}{x}}-2\right)=+\infty.$$

A törtfüggvénynek tehát az $x=0$ helyen nem egyezik meg a bal- és a jobboldali határértéke, vagyis nem megszüntethető szakadása van.

12. $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^3}\right)=?$ Először a feladat típusát határozzuk meg. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$, mert az x az 1-nél nagyobb számokon keresztül tart az 1-hez, amelyekre a nevező, tehát a tört is negatív. Viszont

$$\lim_{x\to 1+0}-\frac{4}{1-x^3}=\lim_{x\to 1+0}\frac{4}{x^3-1}=\infty,$$

mivel $x>1$ esetén a nevező, tehát a tört is pozitív.

A típus tehát: $-\infty+\infty$.

Hozzunk közös nevezőre:

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{4}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1+x+x^2-4}{1-x^3}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+x-3}{1-x^3}.$$

A számláló helyettesítési értéke az $x=1$ helyen: $1+1-3=-1$. A nevező helyettesítési értéke: $1-1=0$.

Ha 1-nél nagyobb számokon keresztül közelítjük meg az 1-et, akkor a nevező negatív számokon keresztül tart nullához, így a tört előjele pozitív és határértéke az $x=1+0$ helyen $+\infty$:

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{4}{1-x^3}\right)=+\infty.$$

Ha a tört baloldali határértékét akarjuk meghatározni, akkor figyelembe kell vennünk, hogy egynél kisebb x-ekre a nevező pozitív, míg a számláló változatlanul negatív, és így

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{4}{1-x^3}\right)=-\infty.$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)=?$ $(\infty-\infty)$ Az egész kifejezést törtté alakítjuk úgy, hogy megszorozzuk és elosztjuk a $\left(\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}\right)$

kifejezéssel:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)\left(\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}\right)}{\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-(2x^2-5x)}{\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}}=$$

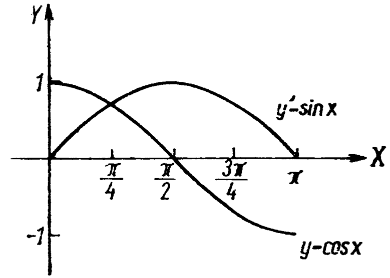
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{2+\frac{4}{x}}+\sqrt{2-\frac{5}{x}}}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}=0$, és $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=0$, így

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)=\frac{9}{2\sqrt{2}}.$$

14. $\lim\limits_{x\to\pi+0}\dfrac{\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{2}}=?$ A számláló a pozitív számokon, a nevező a negatív számokon keresztül tart a nullához, amit így jelölünk: $\dfrac{0}{-0}$.

Ui. $\dfrac{\pi}{4}$-nél kevéssel nagyobb szögértékekre a szinusz függvény értéke nagyobb a koszinusz függvényénél; $\dfrac{\pi}{2}$-nél kevéssel nagyobb szögekre pedig a koszinusz negatív (l. a 44. ábrát).



44. ábra

Bővítjük a törtet $\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)$-gyel:

$$\lim_{x\to\pi+0}\frac{\left(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}\right)\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi+0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi+0}\frac{-\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi+0}\frac{-1}{\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ha a baloldali határértéket számítjuk, akkor ugyan $\frac{0}{0}$ alakú lesz a kifejezés, de a fentivel egyező átalakítások után szintén az adódik, hogy

$$\lim_{x\to\pi-0}\frac{\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

és így a bal- és jobboldali határérték megegyezik, vagyis

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

15. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sqrt{2+\operatorname{tg}x}-\sqrt{2-\operatorname{tg}x}}{\sin x}=?\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

Először a számlálót gyöktelenítjük:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{2+\operatorname{tg}x}-\sqrt{2-\operatorname{tg}x}}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}-\sqrt{2-\operatorname{tg}x}\right)\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}+\sqrt{2-\operatorname{tg}x}\right)}{\sin x\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}+\sqrt{2-\operatorname{tg}x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2+\operatorname{tg}x-2+\operatorname{tg}x}{\sin x\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}+\sqrt{2-\operatorname{tg}x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sin x\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}+\sqrt{2-\operatorname{tg}x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}+\sqrt{2-\operatorname{tg}x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2}{\cos x\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}x}+\sqrt{2-\operatorname{tg}x}\right)}=\frac{2}{1\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ha a baloldali határértéket keressük, akkor a tört $\frac{-0}{-0}$ alakú, de a határérték az előbbivel megegyezik, tehát

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+\operatorname{tg}x}-\sqrt{2-\operatorname{tg}x}}{\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

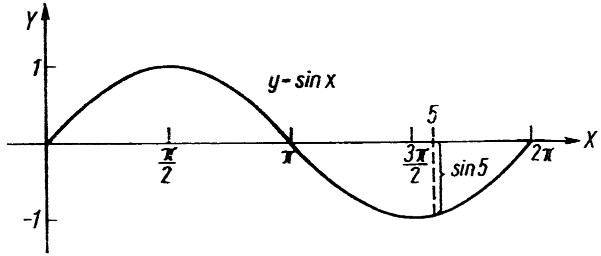
16. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin(5+x)-\sin(5-x)}{x}=?\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

Megjegyzés: Az 5 és az x egyaránt radiánban kifejezett értékeket jelentenek. A számláló és nevező kis pozitív x értékekre pozitív, ui. ekkor mind $\sin(5+x)$, mind $\sin(5-x)$ negatív, de az utóbbi abszolút értéke a nagyobb (l. 45. ábrát), és így a különbségük — a számláló — pozitív.

Felhasználjuk a szögfüggvények különbségének szorzattá alakítására vonatkozó $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$ azonosságot; így

$$\lim_{x\to+0}\frac{2\cos5\cdot\sin x}{x}=\lim_{x\to+0}2\cos5\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=$$

$$=2\cos5\cdot1=2\cos5.$$



45. ábra

A feladat megoldása akkor teljes, ha meghatározzuk az 5 radián nagyságú szög koszinuszát.

$\cos 5 \approx \cos(5\cdot 57{,}3°) = \cos 286{,}5° = \cos(360° - 286{,}5°) = \cos 73{,}5° = 0{,}2840.$

A keresett határérték tehát

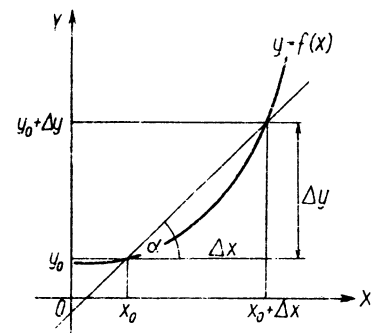
$$\lim_{x\to+0} \frac{\sin(5+x)-\sin(5-x)}{x} = 2\cdot 0{,}2840 = 0{,}5680.$$

Ha x kis abszolút értékű negatív értékeket vesz fel, akkor mind a számláló, mind a nevező negatív, a hányados tehát $\frac{-0}{-0}$ meghatározatlan alakú. A fenti átalakítások elvégzésével ugyanarra az eredményre jutunk, tehát a bal- és jobboldali határértékek megegyeznek, vagyis az $x=0$ pontban a függvény szakadása megszüntethető, ha függvényértékként 0,5680-at választunk.

III. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALAPFOGALMAI

1. A differenciahányados értelmezése

A függvénykapcsolat összefüggést ad meg a független változó és a függvényérték között. Így az értelmezési tartomány bármely értékére mint független változó értékre kiszámítható a hozzá tartozó függvényérték. A függvény menetének vizsgálata szükségessé teszi, hogy azt is megállapítsuk, a független változó valamilyen megváltozása (növekménye) a hozzá tartozó függvényérték milyen megváltozását (növekményét) eredményezi. Ennek jellemzésére a két változás viszonyszámát, hányadosát használják (mégpedig a számláló a függő változó növekménye, a nevező pedig a független változóé).



46. ábra

A 46. ábrán látható, hogy ha a független változót x_0-ról $(x_0+\Delta x)$-re növeljük, ami a függő változó y_0-ról $(y_0+\Delta y)$-ra való változását eredményezi, akkor az előbb bevezetett hányados, vagyis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, éppen a görbe x_0 abszcisszájú pontjából az $x_0+\Delta x$ abszcisszájú pontjába húzott szelő iránytangense.

Ennek értéke (adott függvény, és így adott görbe esetén) függ a két metszéspont helyétől, vagyis x_0-tól és Δx-től. E hányadost a függvény *differenciahányadosának* nevezzük. Általánosan azt mondjuk, hogy az $y=f(x)$ függvény differenciahányadosa a függvény növekménye (Δy), osztva a független változó növekményével (Δx).

A differenciahányados jelölése:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény differenciahányadosának értékét az $x_0=3$ helyen, ha *a)* $\Delta x_1=1$; *b)* $\Delta x_2=0,1$; *c)* $\Delta x_3=0,01$. Három részfeladatunk van, hiszen a differenciahányados értéke nemcsak x_0 értékétől, hanem Δx értékétől is függ.

A szelő egyik pontja mindhárom esetben rögzített, ez a $P_0(x_0; y_0)$ pont. Mivel $y_0=x_0^2=9$, tehát P_0 (3; 9).

a) $\Delta x_1=1$, ekkor $\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)_{x_0}=\frac{(3+1)^2-3^2}{1}=\frac{16-9}{1}=7.$

Az eredmény azt jelenti, hogy ha az $y=x^2$ függvény (3; 9) pontján keresztül egy szelőt húzunk, amely a függvényt az $x_1=4$ abszcisszájú pontjában is metszi, akkor a kapott egyenes X-tengellyel bezárt szögének tangense 7.

b) $\Delta x_2=0,1$; ekkor

$$\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)_{x_0}=\frac{(3+0,1)^2-3^2}{0,1}=\frac{3,1^2-3^2}{0,1}=\frac{9,61-9}{0,1}=6,1.$$

c) $\Delta x_3=0,01$; ekkor

$$\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}\right)_{x_0}=\frac{(3+0,01)^2-3^2}{0,01}=\frac{9,0601-9}{0,01}=6,01.$$

Annyit megfigyelhetünk az eddigiekből, hogy a differenciahányados értéke egyre közelebb van a 6-hoz. (Ez nem bizonyítás, csak megjegyzés!)

2. Oldjuk meg az előbbi feladatot általánosan! Írjuk fel az $y=x^2$ függvény differenciahányadosát olyan alakban, amelyből bármely adott

x és Δx értékre a differenciahányados számértéke közvetlenül kiszámítható.

$$f(x)=x^2;\quad f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$$

$$=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

A differenciahányados tehát jelen esetben egy kéttagú kifejezés, amelynek egyik tagja csak x-től, másik tagja csak Δx-től függ. Adott x érték esetén az első tag állandó, és a differenciahányados értéke csak Δx-től függ.

3. Határozzuk meg az előbbi kifejezés segítségével az $y=x^2$ függvény $x_0=12$ abszcisszájú pontján át húzott szelőjének egyenletét, ha $\Delta x=0,2$!

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}=2x_0+\Delta x=2\cdot 12+0,2=24,2.$$

Az egyenes iránytangense tehát 24,2, és az egyenes átmegy a parabola $x_0=12$ abszcisszájú pontján. Mivel $y_0=x_0^2=144$, ezért P_0 (12; 144). Az adott $(x_0; y_0)$ ponton átmenő, adott m iránytangensű egyenes egyenlete, mint ismeretes, $y-y_0=m(x-x_0)$.

Így a szelő egyenlete:

$$y-144=24,2(x-12);$$

$$y=24,2(x-12)+144.$$

4. Legyen az adott függvény $y=4x^2+5$ és $x_0=3$, továbbá *a)* $\Delta x_1=1$; *b)* $\Delta x_2=0,5$; *c)* $\Delta x_3=0,01$. Határozzuk meg a három differenciahányados értékét!

$$y_0=4x_0^2+5=4\cdot 9+5=41,\quad \text{tehát}\quad P_0(3; 41).$$

a) $\Delta x_1=1;\quad \Delta y_1=y_1-y_0;$

$$\Delta y_1=4(x_0+\Delta x_1)^2+5-y_0=4(3+1)^2+5-41=4\cdot 16+5-41=28;$$

$$\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)_{x_0}=\frac{28}{1}=28.$$

b) $\Delta x_2=0,5;\quad \Delta y_2=y_2-y_0;$

$$\Delta y_2=4(x_0+\Delta x_2)^2+5-y_0=4(3+0,5)^2+5-41=$$

$$=4\cdot 12,25-36=49-36=13.$$

$$\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)_{x_0}=\frac{13}{0,5}=26.$$

c) $\Delta x_3 = 0{,}01$; $\Delta y_2 = y_3 - y_0$;

$$\Delta y_3 = 4(x_0 + \Delta x_3)^2 + 5 - y_0 = 4(3+0{,}01)^2 + 5 - 41 =$$
$$= 4 \cdot 9{,}0601 - 36 = 0{,}2404;$$

$$\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}\right)_{x_0} = \frac{0{,}2404}{0{,}01} = 24{,}04.$$

A feladatot azért oldottuk meg ilyen részletesen, hogy lássuk az egyszerűsítési lehetőségeket.

5. Az előző feladatot oldjuk meg általánosan is!

$$y = 4x^2 + 5;\ f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^2 + 5;\ f(x) = 4x^2 + 5,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(x+\Delta x)^2 + 5 - (4x^2+5)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 5 - 4x^2 - 5}{\Delta x} = \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x.$$

Az előbbi eredmények ebből könnyen számíthatók:

$$\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)_{x_0} = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 24 + 4 = 28;$$

$$\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)_{x_0} = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 0{,}5 = 24 + 2 = 26;$$

$$\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}\right)_{x_0} = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 0{,}01 = 24 + 0{,}04 = 24{,}04.$$

2. A differenciálhányados értelmezése

Ha az $y = f(x)$ függvény differenciahányadosának az $x = a$ helyen van határértéke $\Delta x \to 0$ esetén, akkor ezt a határértéket a függvény „a" helyhez tartozó *differenciálhányadosának (deriváltjának)* nevezzük.

Jelölések: $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = f'(a) = y'(a).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ függvény az $x = a$ *pontban differenciálható.* Ha a függvény egy intervallum minden pontjában differenciálható, akkor az *intervallumban differenciálhatónak* mondjuk; ha értelmezési tartományában mindenütt differenciálható, akkor — röviden — *differenciálhatónak* nevezzük. A differenciálhányados értéke csak x-től függ, ezért egy függvény differenciálhányadosa szintén egy függvény. Az $y = f(x)$ függvény deriváltja tehát az a függvény, amelynek bármely x helyen számított helyettesítési értéke egyenlő az $y = f(x)$ függvény x helyen számított differenciahányadosának határértékével.

A differenciálhányados geometriai jelentése: Ha $\Delta x \to 0$, akkor a szelő a határesetben az érintőbe megy át, vagyis a differenciálhányados értéke az $x = a$ helyen egyenlő a függvénygörbe „a" abszcisszájú pontjában húzott érintő iránytangensével.

Az alábbiakban néhány függvény differenciálhányadosát határozzuk meg.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény $x_0 = 3$ abszcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét! (A feladatot előbb általánosan oldjuk meg, és csak ezután helyettesítünk be.) Először a differenciálhányadost számítjuk ki:

$y = x^2$; Az előző pont **2.** példájának eredménye alapján

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x;$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Megkaptuk tehát az $y = x^2$ függvény deriváltját mint x függvényét. Az $x_0 = 3$ pontban $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Az érintési pont koordinátái: $P_0(3; 9)$.

Az érintő iránytangense: $m = 6$.

A keresett érintő egyenlete tehát

$$y - 9 = 6(x - 3);\quad y = 6x - 9.$$

2. Határozzuk meg az $y = 4x^2 + 5$ függvény $x = 3$ abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét! $y = 4x^2 + 5$; Az előző pont **4.** példájának eredménye alapján $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x;$$

$$y'(3) = 8 \cdot 3 = 24.$$

Az érintési pont y_0 ordinátája: $y_0 = 4\cdot 9+5 = 41$.

$P_0(3;41)$; $m=24$.

Az érintő egyenlete tehát:

$$y-41 = 24(x-3) = 24x-72;$$

$$y = 24x-31.$$

3. Határozzuk meg az $y = \dfrac{3}{x-7}$ függvény deriváltját!

A függvény növekménye:

$$\Delta y = \frac{3}{x+\Delta x-7} - \frac{3}{x-7} = \frac{3(x-7)-3(x+\Delta x-7)}{(x+\Delta x-7)(x-7)} =$$

$$= \frac{3x-21-3x-3\Delta x+21}{(x+\Delta x-7)(x-7)} = \frac{-3\Delta x}{(x+\Delta x-7)(x-7)};$$

a differenciálhányados:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-7)(x-7)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-3}{(x+\Delta x-7)(x-7)} = -\frac{3}{(x-7)^2}.$$

4. Határozzuk meg az $y=\sqrt{x}$ függvény deriváltját!

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tehát az $y=\sqrt{x}$ függvény deriváltja $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

IV. DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK ÉS ELEMI FÜGGVÉNYTÍPUSOK DIFFERENCIÁLHÁNYADOSAI

Az előző fejezetben egy-egy konkrét példán láttuk, hogyan lehet egy függvény derivált függvényét a differenciahányados határértékének kiszámítása útján meghatározni. Hasonlóképpen kaphatók meg az egyes elemi függvénytípusok differenciálhányadosai is, melyek ismeretében a következőkben tárgyalt differenciálási szabályok segítségével bonyolultabb függvények differenciálhányadosa is meghatározható. A gyakorlatban általában így számítják ki adott függvények differenciálhányadosát.

1. Alapvető differenciálási szabályok

a) *Konstans differenciálhányadosa.* Ha $y=a$ ($a=$állandó), akkor $y'=0$. Vagyis a konstans differenciálhányadosa nulla.

b) *Állandóval szorzott függvény differenciálhányadosa.* Ha $y=cf(x)$ alakú ($c=$állandó), akkor $y'=cf'(x)$. Vagyis a differenciálhányadost úgy számítjuk ki, hogy a függvény deriváltját szorozzuk az állandóval.

c) *Összegfüggvény differenciálhányadosa.* Ha $y = u(x)+v(x)$, akkor $y' = u'(x)+v'(x)$. Vagyis összegfüggvény differenciálhányadosa a tagok differenciálhányadosának összegével egyenlő. A szabály akárhány tag differenciálására is igaz.

d) *Két függvény különbségének differenciálhányadosa.* Ha $y = u(x)-v(x)$, akkor $y' = u'(x)-v'(x)$. Vagyis különbséget tagonként differenciálunk.

e) *Két függvény szorzatának differenciálhányadosa.* Ha $y=u(x)v(x)$ alakú, akkor $y' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$; rövidebb jelöléssel: $y' = u'v+uv'$. Vagyis két függvény szorzatának differenciálhányadosát úgy számítjuk ki, hogy az első tényező deriváltját szorozzuk a változatlan második tényezővel, majd ehhez hozzáadjuk a változatlan első tényező és a második tényező deriváltjának szorzatát. Hasonlóképpen kell differenciálni a többtényezős szorzat függvényeket is; pl. három tényező esetén a szabály: ha

$$y = u(x)v(x)z(x), \quad \text{akkor}$$

$$y' = u'(x)v(x)z(x) + u(x)v'(x)z(x) + u(x)v(x)z'(x);$$

f) *Két függvény hányadosának differenciálhányadosa.* Ha

$y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ alakú, akkor $y' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$; röviden:

$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Vagyis két függvény hányadosának deriváltját úgy számítjuk ki, hogy a számláló deriváltját szorozzuk a nevezővel, ebből kivonjuk a számlálónak és a nevező deriváltjának szorzatát, a különbséget osztjuk a nevező négyzetével.

g) *Összetett közvetett függvény deriváltja.* Ha $y = f[\varphi(x)]$ vagyis $y = f(u)$, ahol $u = \varphi(x)$, akkor $y' = f'(u) \cdot u'$. Tehát a függvényt úgy deriváljuk, mintha független változója az u függvény lenne (azonban u helyébe itt is $\varphi(x)$-et helyettesítünk), majd az így számított deriváltat szorozzuk u-nak x szerinti deriváltjával. Más jelöléssel: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Hasonlóképpen kell differenciálni a többszörösen összetett függvényeket is. Például háromszorosan összetett függvényre a szabály: ha

$$y = f\{g[h(x)]\} = f(u), \quad \text{ahol} \quad u = g[h(x)] = g(v),$$

és $v = h(x)$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Ezt az eljárást az ún. *láncszabálynak* nevezzük.

2. Hatványfüggvény differenciálása

$y = x^n$; $y' = nx^{n-1}$, ahol n racionális szám.

Tehát bármely racionális kitevőjű hatványfüggvény differenciálhányadosát úgy számítjuk ki, hogy az eredeti kitevővel szorozzuk az alap eggyel kisebb hatványát. Az alábbi gyakorló feladatok megoldása során a hatványfüggvényeken gyakoroljuk az alapvető differenciálási szabályokat. (Természetesen a további elemi függvénytípusok tárgyalása kapcsán szintén felhasználjuk majd ezeket a szabályokat.)

Gyakorló feladatok

1. $y = x^7$; $y' = 7x^6$.

2. $y = x^{-4}$; $y = -4x^{-5}$.

3. $y = \dfrac{1}{x^6}$; $y' = ?$

A törtfüggvényt célszerű negatív kitevőjű hatvány alakjában írni, mert így könnyebben kiszámítható a derivált:

$$y = \frac{1}{x^6} = x^{-6}; \quad y' = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}.$$

4. $y = \sqrt[3]{x}$; $y' = ?$ A kifejezést törtkitevős alakba írjuk át, majd deriválunk:

$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}; \quad y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

5. $y = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$; $y' = ?$

$$y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} = 2x^{-\frac{3}{4}}; \quad y' = 2\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{7}{4}} =$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt[4]{x^7}} = -\frac{3}{2x\sqrt[4]{x^3}}.$$

6. $y = x^4\sqrt{x}$; $y' = ?$ Az egyenlő alapú hatványok szorzását elvégezve, kapjuk:

$$y = x^4\sqrt{x} = x^4 x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{9}{2}};$$

$$y' = \frac{9}{2}x^{\frac{9}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7} = \frac{9}{2}x^3\sqrt{x}.$$

7. $y = \dfrac{x^4}{\sqrt[3]{x}}$; $y' = ?$

$$y = \frac{x^4}{\sqrt[3]{x}} = x^4 x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{12}{3}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{11}{3}};$$

$$y' = \frac{11}{3}x^{\frac{11}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{11}{3}x^{\frac{8}{3}} = \frac{11}{3}\sqrt[3]{x^8} = \frac{11}{3}x^2\sqrt[3]{x^2}.$$

8. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; $y' = ?$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}; \quad y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$$

9. $y = \sqrt{x\sqrt[3]{x}}$; $y' = ?$

$$y = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}; \quad y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

10. $y = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}$; $y' = ?$

$$y = \sqrt[36]{x} = x^{\frac{1}{36}}; \quad y' = \frac{1}{36}x^{-\frac{35}{36}} = \frac{1}{36\sqrt[36]{x^{35}}}.$$

11. $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$; $y' = ?$

$$y = \frac{1}{x\cdot x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{4}{3}}; \quad y' = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^7}} = -\frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x}}.$$

12. $y = \dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$; $y' = ?$

$$y = \frac{3x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}} = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}} = 3x^{\frac{15}{10}-\frac{2}{10}} = 3x^{\frac{13}{10}};$$

$$y' = \frac{39}{10}x^{\frac{3}{10}} = \frac{39}{10}\sqrt[10]{x^3} = 3{,}9\sqrt[10]{x^3}.$$

Az eddig derivált függvények egytagúak voltak. Most többtagú kifejezéseket fogunk deriválni.

13. $y = 5x^6 + 4x^4 - 3x^3$; $y' = 30x^5 + 16x^3 - 9x^2$.

14. $y = 4x^7 + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$; $y' = ?$

Célszerű először hatvány alakba írnunk minden tagot:

$$y = 4x^7 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 4x^7 + x^{-3} - 2x^{-\frac{1}{2}};$$

$$y' = 28x^6 - 3x^{-4} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = 28x^6 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

15. $y = 3x\sqrt{x} - \dfrac{5}{\sqrt[6]{x}} + 2$; $y' = ?$

$$y = 3x\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[6]{x}} + 2 = 3x^{\frac{3}{2}} - 5x^{-\frac{1}{6}} + 2;$$

$$y' = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{6}x^{-\frac{7}{6}} = \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{6\sqrt[6]{x^7}} = \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{6x\sqrt[6]{x}}.$$

16. $y = \dfrac{3x^2 + 2x^3}{\sqrt{x}}$; $y' = ?$

A függvény törtfüggvény és a nevező egytagú. Előbb elvégezzük a tagonkénti osztást és ezután fogunk csak deriválni.

$$y=\frac{3x^2+2x^3}{\sqrt{x}}=\frac{3x^2+2x^3}{x^{\frac{1}{2}}}=3x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{5}{2}};$$

$$y'=\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}+5x^{\frac{3}{2}}=\frac{9\sqrt{x}}{2}+5x\sqrt{x}.$$

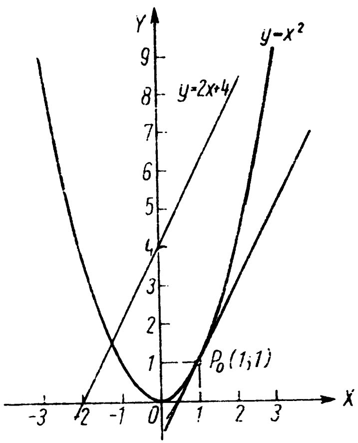
17. $y=\dfrac{5\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}}{x^2}$; $y'=?$

A feladatot az előbbi módon oldjuk meg:

$$y=\frac{5\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}}{x^2}=\frac{5x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{3}}}{x^2}=5x^{-\frac{3}{2}}-6x^{-\frac{5}{3}};$$

$$y'=-\frac{15}{2}x^{-\frac{5}{2}}+10x^{-\frac{8}{3}}=-\frac{15}{2\sqrt{x^5}}+\frac{10}{\sqrt[3]{x^8}}=-\frac{15}{2x^2\sqrt{x}}+\frac{10}{x^2\sqrt[3]{x^2}}.$$

18. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény görbéjének azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az $y=2x+4$ egyenessel (47. ábra)!



47. ábra

Az adott egyenes iránytangense: 2.

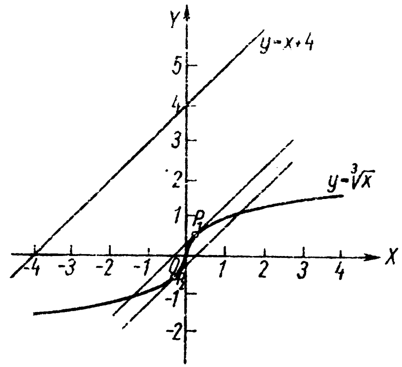
Keressük a görbe azon pontját, amelyhez húzott érintő iránytangense szintén 2. Az érintő iránytangense $y'=2x$; mivel $y'=2$ kell, hogy legyen, tehát $2=2x$, azaz $x=1$, vagyis a görbe $x=1$ abszcisszájú pontjához húzott érintő iránytangense 2.

A feladatnak tehát csak egy megoldása van.

A keresett pont ordinátája: $y=1^2=1$.

A pont tehát: $P_0(1;1)$.

19. Határozzuk meg az $y=\sqrt[3]{x}$ függvény azon pontjait, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az $y=x+4$ egyenessel (48. ábra)! Írjuk fel az érintők egyenletét!



48. ábra

A függvény és deriváltja:

$$y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}};\quad y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Mivel $m=1$, tehát $1=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; ebből — harmadik hatványra emelve mindkét oldalt —

$$27=\frac{1}{x^2};\quad x^2=\frac{1}{27};\quad x=\frac{1}{\pm\sqrt{27}}=\frac{1}{\pm3\sqrt{3}}=\frac{\pm\sqrt{3}}{9}.$$

A keresett pontok abszcisszái tehát

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{9};\quad x_2=\frac{-\sqrt{3}}{9}.$$

Az ordináták $\left(\text{itt az } x = \frac{1}{\pm\sqrt{27}} \text{ alakot célszerűbb behelyettesíteni}\right)$:

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{27}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{3^3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad y_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{-\sqrt{27}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{-3^3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Az érintési pontok tehát

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{és} \quad P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A keresett egyenesek egyenleteinek meghatározása ($m=1$):
A P_1 ponthoz húzott érintő egyenlete:

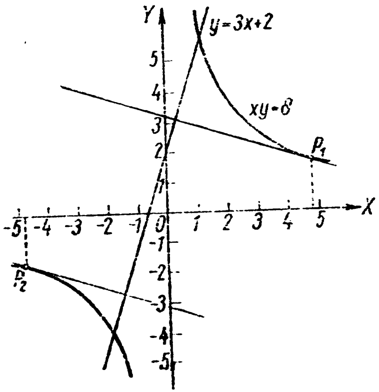
$$y - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1\left(x - \frac{\sqrt{3}}{9}\right).$$

A P_2 ponthoz húzott érintő egyenlete:

$$y + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1\left(x + \frac{\sqrt{3}}{9}\right).$$

20. Határozzuk meg az $xy=8$ görbe azon pontjait, amelyekhez húzott érintők merőlegesek az $y=3x+2$ egyenesre (49. ábra)! Írjuk fel az egyenesek egyenletét!

$$xy = 8; \quad y = \frac{8}{x} = 8x^{-1}; \quad y' = -8x^{-2} = -\frac{8}{x^2}.$$



49. ábra

Az egyenes iránytangense: $m_1=3$.
Az adott egyenesre merőleges egyenes iránytangense a merőlegesség feltétele alapján: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$.

Kiszámítjuk — a derivált ismeretében — a függvény azon pontjainak abszcisszáit, amelyekhez húzott érintők iránytangense $-\frac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{3} = -\frac{8}{x^2}; \quad x^2 = 24; \quad x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}.$$

$$x_1 = 2\sqrt{6}; \quad x_2 = -2\sqrt{6}.$$

A keresett pontok ordinátái:

$$y_1 = \frac{8}{2\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}; \quad y_2 = \frac{8}{-2\sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Az érintési pontok tehát:

$$P_1\left(2\sqrt{6}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \quad \text{és} \quad P_2\left(-2\sqrt{6}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$$

Az egyenesek egyenlete:

$$y - \frac{2\sqrt{6}}{3} = -\frac{1}{3}(x - 2\sqrt{6}), \quad \text{ill.} \quad y + \frac{2\sqrt{6}}{3} = -\frac{1}{3}(x + 2\sqrt{6}).$$

21. Az $xy^2=25$ görbe valamely pontjához húzott érintő az X-tengely pozitív irányával 60°-os szöget zár be. Határozzuk meg ezt a pontot (50. ábra)!

$$xy^2 = 25; \quad y = \pm\frac{5}{\sqrt{x}}.$$

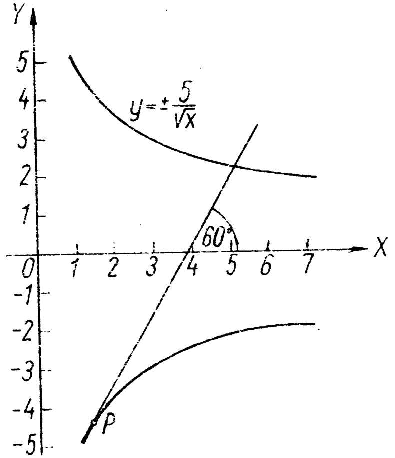
A függvény, amint ez az ábrából is látható, kétértékű, szimmetrikus az X-tengelyre, és értelmezési tartománya a pozitív X-tengely. Mivel az X-tengely feletti pontokban húzott érintők az X-tengellyel tompa szöget zárnak be, ezért a feladat feltételének megfelelő pont csak az X-tengely alatt lehet. A függvény megfelelő szárának explicit egyenlete: $y = -\frac{5}{\sqrt{x}}$.

$$y = -\frac{5}{\sqrt{x}} = -5x^{-\frac{1}{2}}; \quad y' = \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{x^3}} = \frac{5}{2x\sqrt{x}}.$$

Az érintő iránytangense tg $60° = \sqrt{3}$.

A keresett pont abszcisszájának meghatározása:

$$\sqrt{3}=\frac{5}{2x\sqrt{x}};\quad 3=\frac{25}{4x^3};\quad x^3=\frac{25}{12};\quad x=\sqrt[3]{\frac{25}{12}}.$$



50. ábra

A pont ordinátájának meghatározása:

$$y=-5\sqrt[6]{\frac{12}{25}}=-5\frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[3]{5}},$$

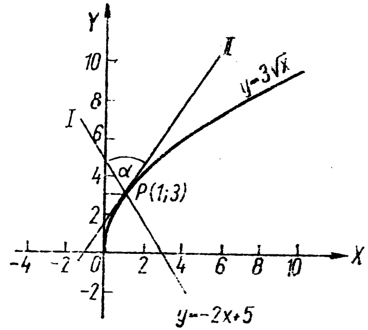
és így az érintési pont

$$P\left(\sqrt[3]{\frac{25}{12}};\ -\frac{5\sqrt[6]{12}}{\sqrt[3]{5}}\right).$$

22. Mekkora szög alatt metszi az $y=-2x+5$ egyenes az $y=3\sqrt{x}$ görbét (51. ábra)?

Egy görbét metsző egyenesnek a görbével bezárt szögén azt a szöget értjük, amelyet az egyenes a metszéspontban húzott érintővel zár be.

Az előbbi kérdés megválaszolása tehát a következőket jelenti: *1.* Meg kell határozni az egyenes és a görbe metszéspontjait. *2.* Ki kell számítani



51. ábra

a metszéspontokbeli érintők iránytangensét. *3.* Az egyenes és az érintők iránytangense ismeretében meg kell határozni a bezárt szögeket.

1. A metszéspontok kiszámítása:

$$y=3\sqrt{x}$$

$$\underline{y=-2x+5}$$

$$-2x+5=3\sqrt{x};$$

$$2x+3\sqrt{x}-5=0.$$

Az egyenlet $\sqrt{x}$-ben másodfokú, így alkalmazhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét.

$$\sqrt{x_{1,2}}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm7}{4};$$

$$\sqrt{x_1}=1;\quad \sqrt{x_2}=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}.$$

Megjegyzés: A felvett görbe egyértékű, mert nem az $y=\pm3\sqrt{x}$ függvényt adtuk meg, hanem csak az $y=3\sqrt{x}$ függvényt, amelynek az $x=0$ pont kivételével minden pontja az X-tengely felett van, így negatív ordinátája nincs. Tehát a két gyök közül csak $\sqrt{x_1}=1$, vagyis $x_1=1$ megoldása a feladatnak.

$$x_1=1;\quad y_1=3\sqrt{x_1}=3.$$

A metszéspont: $P_1(1;3)$.

2. Az adott I. egyenes iránytangense: $m_1=-2$. Az $y=3\sqrt{x}=3x^{\frac{1}{2}}$ függvény deriváltja:

$$y'=\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

A derivált helyettesítési értéke az $x_1=1$ helyen:

$$y'(1)=\frac{3}{2},$$

ez az $x_1=1$ abszcisszájú ponthoz húzott érintő — II. egyenes — iránytangense, vagyis $m_2=\frac{3}{2}$.

A I. és a II. egyenes által bezárt szög tangense az ismert képlet szerint:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-2-\frac{3}{2}}{1-2\cdot\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{7}{2}}{-2}=\frac{7}{4}=1{,}75.$$

A bezárt szög $\alpha=60{,}3°$.

23. $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$; $y'=?$

$$y'=\frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}.$$

24. $y=\dfrac{2x^2+3x}{4x-6}$; $y'=?$

$$y'=\frac{(4x+3)(4x-6)-(2x^2+3x)\cdot 4}{(4x-6)^2}=$$

$$=\frac{16x^2+12x-24x-18-8x^2-12x}{(4x-6)^2}=$$

$$=\frac{8x^2-24x-18}{(4x-6)^2}=\frac{2(4x^2-12x-9)}{4(2x-3)^2}=\frac{4x^2-12x-9}{2(2x-3)^2}.$$

25. $y=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+2}$; $y'=?$ A törtben levő gyökös kifejezéseket törtkitevőjű hatvány alakjában írjuk:

$$y=\frac{x^{\frac{1}{2}}+2}{x^{\frac{1}{3}}+2};$$

$$y'=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}+2)-(x^{\frac{1}{2}}+2)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}}+2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{6}}(x^{\frac{2}{6}}+2)-(x^{\frac{3}{6}}+2)\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{6}}}{(x^{\frac{1}{3}}+2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{3}{6}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{6}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{6}}}{(x^{\frac{1}{3}}+2)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(x^{\frac{1}{3}}+2)^2}=\frac{\frac{1}{6\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(\sqrt[3]{x}+2)^2}.$$

A most következő szorzatok nemcsak szorzatként deriválhatók, hanem a deriválás előtt a szorzás elvégzésével hatványfüggvények deriválására is visszavezethetők. Ezért a feladatokat mindkét módon megoldjuk; így meggyőződünk arról is, hogy mindkét úton azonos eredményt kapunk.

26. $y=\sqrt{x}(5x-x^3)$; $y'=?$

I. Megoldás:

$$y=x^{\frac{1}{2}}(5x-x^3);$$

6*

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(5x-x^3)+x^{\frac{1}{2}}(5-3x^2) =$$

$$= \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{7}{2}\sqrt{x^5} = \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}.$$

II. Megoldás: Most előbb végezzük el a szorzást, majd azután differenciálunk:

$$y = x^{\frac{1}{2}}(5x-x^3) = 5x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{7}{2}};$$

$$y' = \frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{7}{2}\sqrt{x^5} = \frac{15}{2}\sqrt{x} - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}.$$

A két eredmény tehát valóban megegyezik.

27. $y = \sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right); \quad y' = ?$

I. Megoldás:

$$y = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right);$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right) + x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{6}}\left(x^{\frac{3}{6}} - x^{-\frac{3}{6}}\right) + x^{\frac{2}{6}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{6}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{9}{6}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{6}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{7}{6}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{7}{6}} =$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x^7}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{6x\sqrt[6]{x}}.$$

II. Megoldás:

A feladat megoldása, a kijelölt szorzás elvégzése után differenciálva:

$$y = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right) = x^{\frac{2}{6}}\left(x^{\frac{3}{6}} - x^{-\frac{3}{6}}\right) = x^{\frac{5}{6}} - x^{-\frac{1}{6}};$$

$$y' = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^7}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{6x\sqrt[6]{x}}.$$

28. $y = (1-2x+x^{-3})\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right); \quad y' = ?$

I. Megoldás:

$$y = (1-2x+x^{-3})\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right);$$

$$y' = (-2-3x^{-4})\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right) + (1-2x+x^{-3})\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{11}{3}} + 4x^{-\frac{1}{2}} + 6x^{-\frac{9}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} +$$

$$+ \frac{1}{3}x^{-\frac{11}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{9}{2}} = -2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^{11}}} +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x^9}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^{11}}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^9}} =$$

$$= -\frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x^{11}}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt{x^9}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} =$$

$$= -\frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{8}{3x^3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^4\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

II. Megoldás:

Most előbb elvégezzük a kijelölt szorzást, és azután differenciálunk:

$$y = (1-2x+x^{-3})\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{8}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{7}{2}};$$

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{11}{3}} + x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + 7x^{-\frac{9}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{8\sqrt[3]{x}}{3} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x^{11}}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt{x^9}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{8}{3x^3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^4\sqrt{x}}.$$

A két eredmény tehát megegyezik.

29. $y = \frac{3x}{4x-2} \cdot \frac{6\sqrt{x}}{5x^2-3}$; $y' = ?$

$$y = \frac{18x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{(4x-2)(5x^2-3)} = \frac{18x^{\frac{3}{2}}}{20x^3 - 10x^2 - 12x + 6};$$

$$y' = \frac{27x^{\frac{1}{2}}(20x^3 - 10x^2 - 12x + 6) - 18x^{\frac{3}{2}}(60x^2 - 20x - 12)}{(20x^3 - 10x^2 - 12x + 6)^2}.$$

A kijelölt műveleteket már nem végezzük el.

Most az összetett függvényekre oldunk meg egyszerűbb feladatokat.

30. $y = (3x+7)^2$; $u = 3x+7$; $y = u^2$. Egy elsőfokú függvény (u) hatványfüggvényét kell tehát differenciálnunk.

A feladatot úgy oldjuk meg, hogy y-nak u szerinti deriváltját szorozzuk u-nak x szerinti deriváltjával (u helyébe behelyettesítve x-et tartalmazó kifejezését):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \quad \frac{dy}{du} = 2u = 2(3x+7);$$

$$\frac{du}{dx} = 3, \quad \text{és így} \quad \frac{dy}{dx} = 6(3x+7) = 18x + 42.$$

31. $y = (5x^3 + 4x^2 + 1)^{-3}$; $u = 5x^3 + 4x^2 + 1$; $y = u^{-3}$.

$$\frac{dy}{du} = -3u^{-4} = -3(5x^3 + 4x^2 + 1)^{-4}; \quad \frac{du}{dx} = 15x^2 + 8x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-3(15x^2 + 8x)}{(5x^3 + 4x^2 + 1)^4} = -\frac{45x^2 + 24x}{(5x^3 + 4x^2 + 1)^4}.$$

32. $y = \sqrt{\frac{6}{x^2} + 2x} = \sqrt{6x^{-2} + 2x}$; $u = 6x^{-2} + 2x$; $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(6x^{-2} + 2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6x^{-2} + 2x}};$$

$$\frac{du}{dx} = -12x^{-3} + 2;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{6x^{-2} + 2x}} \cdot (-12x^{-3} + 2) = \frac{2 - 12x^{-3}}{2\sqrt{6x^{-2} + 2x}} = \frac{1 - 6x^{-3}}{\sqrt{6x^{-2} + 2x}}.$$

33. $y = (5x^2 - 3)^4\sqrt{4x+6}$. A szorzatfüggvény mindkét tényezője összetett függvény. Előbb az egyes tényezők deriváltját külön-külön meghatározzuk, és csak ezután deriváljuk az eredeti szorzatfüggvényt. A feladatot már a láncszabály közvetlen alkalmazásával oldjuk meg, mert a sok jelölés csak zavarna.

$$y = f(x)g(x), \quad \text{ahol} \quad f(x) = (5x^2 - 3)^4 \quad \text{és} \quad g(x) = \sqrt{4x+6}.$$

$$f'(x) = 4(5x^2 - 3)^3 \cdot 10x = 40x(5x^2 - 3)^3;$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(4x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x+6}}.$$

A tényezők deriváltjait ismerve, a szorzat deriváltja:

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) =$$

$$= 40x(5x^2 - 3)^3\sqrt{4x+6} + (5x^2 - 3)^4 \cdot \frac{2}{\sqrt{4x+6}} =$$

$$= (5x^2 - 3)^3\left[40x\sqrt{4x+6} + \frac{2(5x^2 - 3)}{\sqrt{4x+6}}\right].$$

34. $y = \frac{2x}{\sqrt{6x^2 + 2x}}$; $y' = ?$

I. Megoldás:

A törtnek csak a nevezője összetett függvény, így először annak a deriváltját határozzuk meg.

Legyen $g(x)=\sqrt{6x^2+2x}=(6x^2+2x)^{\frac12}$; akkor

$$g'(x)=\frac12(6x^2+2x)^{-\frac12}(12x+2)=\frac{6x+1}{\sqrt{6x^2+2x}}.$$

Az eredeti függvény deriváltja:

$$y'=\frac{2\sqrt{6x^2+2x}-2x\dfrac{6x+1}{\sqrt{6x^2+2x}}}{6x^2+2x}=\frac{2(6x^2+2x)-2x(6x+1)}{(6x^2+2x)\sqrt{6x^2+2x}}=$$

$$=\frac{12x^2+4x-12x^2-2x}{(6x^2+2x)^{\frac32}}=\frac{2x}{\sqrt{(6x^2+2x)^3}}.$$

II. Megoldás:

A feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy a nevezőben levő kifejezést felvisszük a számlálóba, és a kapott szorzatfüggvényt deriváljuk. Oldjuk meg a feladatot így is!

$$y=\frac{2x}{\sqrt{6x^2+2x}}=2x(6x^2+2x)^{-\frac12}.$$

Legyen $h(x)=(6x^2+2x)^{-\frac12}$; akkor

$$h'(x)=-\frac12(6x^2+2x)^{-\frac32}(12x+2)=-\frac{6x+1}{\sqrt{(6x^2+2x)^3}}.$$

Az eredeti szorzatfüggvény deriváltja tehát:

$$y'=2(6x^2+2x)^{-\frac12}+2x\left[-\frac{6x+1}{\sqrt{(6x^2+2x)^3}}\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6x^2+2x}}\ \frac{12x^2+2x}{\sqrt{(6x^2+2x)^3}}=\frac{12x^2+4x-12x^2-2x}{\sqrt{(6x^2+2x)^3}}=$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{(6x^2+2x)^3}}.$$

Az eredmény az előbbivel megegyezik!

35. $y=\sqrt[3]{(3x^2+2x)^2}=(3x^2+2x)^{\frac23}$; $y'=?$

$$y'=\frac23(3x^2+2x)^{-\frac13}(6x+2)=\frac{12x+4}{3\sqrt[3]{3x^2+2x}}.$$

36. $y=\dfrac{\sqrt[3]{6x^5+4x^{-4}}}{\sqrt[5]{4x^7+3x^3}}$; $y'=?$ Legyen $u(x)=\sqrt[3]{6x^5+4x^{-4}}=(6x^5+4x^{-4})^{\frac13}$, és $v(x)=\sqrt[5]{4x^7+3x^3}=(4x^7+3x^3)^{\frac15}$; akkor a számláló ill. nevező deriváltja:

$$u'=\frac13(6x^5+4x^{-4})^{-\frac23}(30x^4-16x^{-5})=\frac{30x^4-16x^{-5}}{3\sqrt[3]{(6x^5+4x^{-4})^2}},$$

és

$$v'=\frac15(4x^7+3x^3)^{-\frac45}(28x^6+9x^2)=\frac{28x^6+9x^2}{5\sqrt[5]{(4x^7+3x^3)^4}}.$$

A törtfüggvény deriváltja:

$$y=\frac{\dfrac{30x^4-16x^{-5}}{3\sqrt[3]{(6x^5+4x^{-4})^2}}\sqrt[5]{4x^7+3x^3}-\sqrt[3]{6x^5+4x^{-4}}\,\dfrac{28x^6+9x^2}{5\sqrt[5]{(4x^7+3x^3)^4}}}{\sqrt[5]{(4x^7+3x^3)^2}}=$$

$$=\frac{5(30x^4-16x^{-5})\sqrt[5]{(4x^7+3x^3)^5}-3\sqrt[3]{(6x^5+4x^{-4})^3}(28x^6+9x^2)}{15\sqrt[5]{(4x^7+3x^3)^6}\sqrt[3]{(6x^5+4x^{-4})^2}}=$$

$$=\frac{10(15x^4-8x^{-5})(4x^7+3x^3)-3(6x^5+4x^{-4})(28x^6-9x^2)}{15(4x^7+3x^3)\sqrt[5]{4x^7+3x^3}\sqrt[3]{(6x^5+4x^{-4})^2}}.$$

3. Trigonometrikus függvények deriváltja

Az egyes szögfüggvények deriváltjai a következők:

$$y=\sin x;\quad y'=\cos x.\qquad y=\cos x;\quad y'=-\sin x.$$

$$y=\operatorname{tg} x;\quad y'=\frac{1}{\cos^2 x}.\qquad y=\operatorname{ctg} x;\quad y'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Gyakorló feladatok

1. $y = 2\sin x - 3\cos x$; $y' = ?$

$$y' = 2\cos x + 3\sin x.$$

2. $y = 5\,\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x$; $y' = ?$

$$y' = \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}.$$

3. $y = \sqrt{x}\sin x$; $y' = ?$

$$y = x^{\frac{1}{2}}\sin x;$$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x + x^{\frac{1}{2}}\cos x = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x.$$

4. $y = 5\sin x\cos x$; $y' = ?$

I. Megoldás:

$$y' = 5\cos x\cos x + 5\sin x(-\sin x) = 5\cos^2 x - 5\sin^2 x.$$

Az eredmény a kétszeres szögek szögfüggvényeire vonatkozó azonosság alapján átalakítható:

$$y' = 5(\cos^2 x - \sin^2 x) = 5\cos 2x.$$

II. Megoldás:

A feladatot úgy is meg lehet oldani, hogy a deriválandó függvényt alakítjuk át:

$$y = 5\sin x\cos x = \frac{5}{2}\cdot 2\sin x\cos x = \frac{5}{2}\sin 2x.$$

A kapott függvény összetett.

$$y' = \frac{5}{2}(\cos 2x)\cdot 2 = 5\cos 2x.$$

Az eredmény tehát az előbbivel megegyezik.

5. $y = \sin\sqrt{5x}$; $y' = ?$

$$y = \sin(5x)^{\frac{1}{2}}.$$

A függvény háromszorosan összetett, mert egy elsőfokú függvény $(5x)$ irracionális függvényének $(\sqrt{5x})$ trigonometrikus függvénye. Alkalmazzuk a láncszabályt:

$$y' = \left[\cos(5x)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\frac{1}{2}(5x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5 = \frac{5\cos\sqrt{5x}}{2\sqrt{5x}} = \frac{\sqrt{5}\cos\sqrt{5x}}{2\sqrt{x}}.$$

6. $y = \cos\frac{1}{x^2}$; $y' = ?$ A függvény egy hatványfüggvény trigonometrikus függvénye alakját ölti, ha a következőképpen írjuk:

$$y = \cos(x^{-2}).$$

$$y' = [-\sin(x^{-2})](-2x^{-3}) = \frac{2\sin x^{-2}}{x^3} = \frac{2\sin\frac{1}{x^2}}{x^3}.$$

7. $y = \cos x + \cos 2x + \cos^2 x + \cos x^2 + \cos^2 x^2 + \cos\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x^2}$; $y' = ?$

$$y = \cos x + \cos 2x + \cos^2 x + \cos x^2 + \cos^2 x^2 + \cos x^{-1} + \cos x^{-2}.$$

A függvények a felírás sorrendjében: trigonometrikus függvény; lineáris függvény trigonometrikus függvénye; trigonometrikus függvény hatványfüggvénye; hatványfüggvény trigonometrikus függvénye; hatványfüggvény trigonometrikus függvényének hatványfüggvénye; törtfüggvény trigonometrikus függvénye és ismét az előző típus.

$$y' = -\sin x - (\sin 2x)\cdot 2 + 2\cos x(-\sin x) - (\sin x^2)\cdot 2x +$$

$$+ 2\cos x^2(-\sin x^2)\cdot 2x - (\sin x^{-1})\cdot(-1x^{-2}) - (\sin x^{-2})\cdot(-2x^{-3}) =$$

$$= -\sin x - 2\sin 2x - 2\sin x\cos x - 2x\sin x^2 - 4x\sin x^2\cos x^2 +$$

$$+ \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}.$$

8. $y = \mathrm{tg}(\sin 5x)$; $y' = ?$

Az adott függvény háromszorosan összetett, mert egy lineáris függvény $(5x)$ trigonometrikus függvényének $(\sin 5x)$ trigonometrikus függvénye.

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\sin 5x)}(\cos 5x)\cdot 5 = \frac{5\cos 5x}{\cos^2(\sin 5x)}.$$

9. $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} 8x} = (\operatorname{ctg} 8x)^{-1}; \quad y' = ?$

$$y' = -1\,(\operatorname{ctg}\, 8x)^{-2} \cdot \frac{-1}{\sin^2 8x} \cdot 8 = \frac{8}{(\sin^2 8x)(\operatorname{ctg}^2 8x)} = \frac{8}{\cos^2 8x}.$$

10. $y = \sin 3x \cos 5x = g(x)h(x); \quad y' = ?$

$g'(x) = 3\cos 3x; \quad h'(x) = -5\sin 5x,$ és így

$$y' = 3\cos 3x \cos 5x + \sin 3x\,(-5\sin 5x) =$$

$$= 3\cos 3x \cos 5x - 5\sin 3x \sin 5x.$$

11. $y = \sqrt{x^2-3}\,\cos^2 6x; \quad y' = ?$

Legyen $g(x) = \sqrt{x^2-3} = (x^2-3)^{\frac{1}{2}}$, és $h(x) = \cos^2 6x$; akkor

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$$

$$h'(x) = 2\cos 6x\,(-\sin 6x) \cdot 6 = -12\sin 6x \cos 6x;$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}\cos^2 6x + \sqrt{x^2-3}\,(-12\sin 6x\cos 6x) =$$

$$= \frac{x\cos^2 6x}{\sqrt{x^2-3}} - 6\sqrt{x^2-3}\,\sin 12x.$$

(Ennél az utolsó átalakításnál felhasználtuk a $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ összefüggést.)

12. $y = \sin(6x^2-3x+2); \quad y' = ?$

$$y' = [\cos(6x^2-3x+2)](12x-3) = (12x-3)\cos(6x^2-3x+2).$$

13. $y = \frac{1}{\sqrt{\cos 6x}} = (\cos 6x)^{-\frac{1}{2}}; \quad y' = ?$

$$y' = -\frac{1}{2}(\cos 6x)^{-\frac{3}{2}}(-\sin 6x) \cdot 6 = \frac{3\sin 6x}{\sqrt{\cos^3 6x}} =$$

$$= \frac{3\sin 6x}{(\cos 6x)\sqrt{\cos 6x}} = \frac{3\operatorname{tg} 6x}{\sqrt{\cos 6x}}.$$

14. $y = \cos^{-4}\sqrt{2x} = \left[\cos(2x)^{\frac{1}{2}}\right]^{-4}; \quad y' = ?$

$$y' = -4\left[\cos(2x)^{\frac{1}{2}}\right]^{-5}\left[-\sin(2x)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 =$$

$$\frac{4\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\,[\cos\sqrt{2x}]^5}.$$

15. $y = \sin\frac{x}{x^2-1}; \quad y' = ?$

$$y' = \left(\cos\frac{x}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x^2-1-x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\cos\frac{x}{x^2-1}.$$

16. $y = \operatorname{tg}^2\frac{3x}{\sqrt{6x^2-4}}; \quad y' = ?$ Először a tört deriváltját határozzuk meg. Legyen

$$g(x) = \frac{3x}{\sqrt{6x^2-4}} = 3x(6x^2-4)^{-\frac{1}{2}};$$

$$g'(x) = 3(6x^2-4)^{-\frac{1}{2}} + 3x\left(-\frac{1}{2}\right)(6x^2-4)^{-\frac{3}{2}}\,12x =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6x^2-4}} - \frac{18x^2}{\sqrt{(6x^2-4)^3}} = \frac{18x^2-12-18x^2}{\sqrt{(6x^2-4)^3}} = \frac{-12}{\sqrt{(6x^2-4)^3}}.$$

$$y' = 2\left(\operatorname{tg}\frac{3x}{\sqrt{6x^2-4}}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\frac{3x}{\sqrt{6x^2-4}}}\right) \cdot \frac{-12}{\sqrt{(6x^2-4)^3}}.$$

17. $y = \sqrt{\cos\sin 6x^2}; \quad y' = ?$

$$y = [\cos\sin 6x^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$y' = \frac{1}{2}[\cos\sin 6x^2]^{-\frac{1}{2}}(-\sin\sin 6x^2)(\cos 6x^2) \cdot 12x =$$

$$\frac{-6x\,[\sin\sin 6x^2]\cos 6x^2}{\sqrt{\cos\sin 6x^2}}.$$

18. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} 5x)$; $y' = ?$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{ctg} 5x)} \cdot \frac{-1}{\sin^2 5x} \cdot 5 = \frac{-5}{(\sin^2 5x)\cos^2(\operatorname{ctg} 5x)}.$$

4. Exponenciális függvény deriváltja

Az exponenciális függvény deriválási szabálya a következő:

$y = a^x$ deriváltja $y' = a^x \ln a$.

Ha az alap e, vagyis a természetes logaritmus alapszáma, azaz

$y = e^x$, akkor a derivált $y' = e^x \ln e$, de mivel $\ln e = 1$,

emiatt $y' = e^x$.

Ha a kitevő nem x, hanem x-nek valamilyen függvénye, akkor az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk. Pl.:

$$y = a^{u(x)}; \quad y' = a^{u(x)} u'(x) \ln a,$$

ill. $a = e$ esetben

$$y = e^{u(x)}; \quad y' = e^{u(x)} u'(x).$$

Gyakorló feladatok

1. $y = 5e^x - 3e^{2x}$; $y' = 5e^x - 6e^{2x}$.

2. $y = 5e^{-x} + 3e^{5x} + 2e^{x^2}$; $y' = -5e^{-x} + 15e^{5x} + 4xe^{x^2}$.

3. $y = e^{x^2} + e^{\cos x} - e^{2x+3}$; $y' = ?$

$$y' = 2xe^{x^2} - (\sin x)e^{\cos x} - 2e^{2x+3}.$$

4. $y = a^x + \frac{1}{2}a^{-x} + a^{2x}$; $y' = ?$

$$y' = a^x \ln a - \frac{1}{2}a^{-x}\ln a + 2a^{2x}\ln a = \left(a^x - \frac{1}{2}a^{-x} + 2a^{2x}\right)\ln a.$$

5. $y = 12^{2x^2} + 3^{-x^2} + 2 \cdot 5^{\sin x}$; $y' = ?$

$$y' = 12^{2x^2} \cdot 4x \ln 12 + 3^{-x^2}(-2x)\ln 3 + 2 \cdot 5^{\sin x}\cos x \ln 5,$$

$$y' = 2[12^{2x^2} \cdot 2x \ln 12 - 3^{-x^2} x \ln 3 + 5^{\sin x}\cos x \ln 5].$$

6. $y = 3^{\frac{1}{x+1}}$; $y' = ?$ Legyen $u(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$; akkor $u'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$, és

$$y' = 3^{\frac{1}{x+1}}\left[-\frac{1}{(x+1)^2}\right]\ln 3 = -\frac{3^{\frac{1}{x+1}}\ln 3}{(x+1)^2}.$$

7. $y = 5^{\sin^2 x + \cos^3 x}$; $y' = ?$ Legyen $u(x) = \sin^2 x + \cos^3 x$; akkor $u'(x) = 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x(-\sin x) = (2 - 3\cos x)\sin x \cos x$;

$$y' = 5^{\sin^2 x + \cos^3 x}[(2 - 3\cos x)\sin x \cos x]\ln 5.$$

8. $y = 6^{6x + \sqrt{x}}$; $y' = ?$

$$u(x) = 6x + x^{\frac{1}{2}}; \quad u'(x) = 6 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y' = 6^{6x+\sqrt{x}}\left(6 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ln 6.$$

9. $y = 6^{\frac{x^2}{\cos x}}$; $y' = ?$

$$y' = \left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' 6^{\frac{x^2}{\cos x}} \ln 6 = \frac{2x\cos x - x^2(-\sin x)}{\cos^2 x} \cdot 6^{\frac{x^2}{\cos x}} \ln 6 =$$

$$= \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x} 6^{\frac{x^2}{\cos x}} \ln 6.$$

10. $y = e^{e^{2x}}$; $y' = ?$

$$y' = (e^{2x})' e^{e^{2x}} = 2e^{2x} e^{e^{2x}}.$$

11. $y = \frac{e^{2x} + e^{-3x}}{e^{5x} - e^{7x}}$; $y' = ?$

$$y' = \frac{(2e^{2x} - 3e^{-3x})(e^{5x} - e^{7x}) - (e^{2x} + e^{-3x})(5e^{5x} - 7e^{7x})}{(e^{5x} - e^{7x})^2} =$$

$$= \frac{2e^{7x} - 3e^{2x} - 2e^{9x} + 3e^{4x} - 5e^{7x} - 5e^{2x} + 7e^{9x} + 7e^{4x}}{(e^{5x} - e^{7x})^2} =$$

$$= \frac{-3e^{7x} - 8e^{2x} + 5e^{9x} + 10e^{4x}}{(e^{5x} - e^{7x})^2} = \frac{e^{2x}(5e^{7x} - 3e^{5x} + 10e^{2x} - 8)}{e^{10x}(1 - e^{2x})^2} =$$

$$= \frac{5e^{7x} - 3e^{5x} + 10e^{2x} - 8}{e^{8x}(1 - e^{2x})^2}.$$

12. $y=\frac{e^{\cos x}}{e^{-x^2}}=e^{\cos x}e^{x^2}=e^{\cos x+x^2}$; $y'=?$

$y'=(\cos x+x^2)'\,e^{\cos x+x^2}=(-\sin x+2x)e^{\cos x+x^2}$.

13. $y=e^{5x}\cos x$; $y'=?$

$y'=5e^{5x}\cos x+e^{5x}(-\sin x)=e^{5x}(5\cos x-\sin x)$.

14. $y=6^{\operatorname{tg} x}\cos x$; $y'=?$ Legyen $u(x)=6^{\operatorname{tg} x}$; akkor

$$u'(x)=6^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln 6=\frac{6^{\operatorname{tg} x}\ln 6}{\cos^2 x}.$$

$$y'=\frac{6^{\operatorname{tg} x}\ln 6}{\cos^2 x}\cdot\cos x+6^{\operatorname{tg} x}(-\sin x)=6^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln 6}{\cos x}-\sin x\right).$$

15. $y=\sin e^{x^2}$; $y'=?$ Legyen $u(x)=e^{x^2}$; akkor $u'(x)=e^{x^2}\cdot 2x=$ $=2xe^{x^2}$.

$y'=2xe^{x^2}\cos e^{x^2}$.

16. $y=\cos 3^{5x}$; $y'=?$

Legyen $u(x)=3^{5x}$, akkor $u'(x)=3^{5x}\cdot 5\ln 3$.

$y'=(-\sin 3^{5x})\cdot 3^{5x}\cdot 5\ln 3=-5\cdot 3^{5x}(\sin 3^{5x})\ln 3$.

17. $y=\frac{1}{\operatorname{tg}^2 5^{6x}}=\operatorname{tg}^{-2}5^{6x}$. Legyen $u(x)=5^{6x}$, akkor $u'(x)=5^{6x}\cdot 6\ln 5$.

$$y'=(-2\operatorname{tg}^{-3}5^{6x})\cdot\frac{1}{\cos^2 5^{6x}}\cdot 5^{6x}\cdot 6\ln 5=\frac{-12\cdot 5^{6x}\ln 5}{\operatorname{tg}^3 5^{6x}\cos^2 5^{6x}}.$$

5. Hiperbolikus függvények deriváltja

Az egyes deriváltak a következők:

$$y=\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\qquad y'=\operatorname{ch} x.$$

$$y=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};\qquad y'=\operatorname{sh} x.$$

$$y=\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};\qquad y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$y=\operatorname{cth} x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}};\qquad y'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Gyakorló feladatok

1. $y=5\operatorname{sh} x-4\operatorname{ch} x+3\operatorname{th} x$;

$$y'=5\operatorname{ch} x-4\operatorname{sh} x+\frac{3}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

2. $y=\operatorname{sh} 5x$; $y'=?$

$y'=5\operatorname{ch} 5x$.

3. $y=4\operatorname{sh} 3x+5\operatorname{ch} x^2-\operatorname{cth} x$; $y'=?$

$$y'=4\cdot 3\operatorname{ch} 3x+5\cdot 2x\operatorname{sh} x^2+\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}=12\operatorname{ch} 3x+10x\operatorname{sh} x^2+\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4. $y=\operatorname{ch}^2 6x$; $y'=?$

$y'=2\operatorname{ch} 6x\cdot\operatorname{sh} 6x\cdot 6=12\operatorname{sh} 6x\operatorname{ch} 6x=6\operatorname{sh} 12x$.

Az utolsó átalakítást a $\operatorname{sh} 2\alpha=2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha$ összefüggés alapján végeztük.

5. $y=\operatorname{th}^2 5x^2$; $y'=?$

$$y'=2\operatorname{th} 5x^2\frac{1}{\operatorname{ch}^2 5x^2}\cdot 10x=\frac{20x\operatorname{th} 5x^2}{\operatorname{ch}^2 5x^2}.$$

6. $y=\operatorname{sh}(2x^3-3x-4)$; $y'=?$

$y'=(6x^2-3)\operatorname{ch}(2x^3-3x-4)$.

7. $y=\operatorname{sh}(\cos x)$; $y'=?$

$y'=\operatorname{ch}(\cos x)\cdot(-\sin x)=-\sin x\operatorname{ch}(\cos x)$.

8. $y=\sin x\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x\operatorname{tg} x$;

$$y'=\cos x\operatorname{sh} x+\sin x\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x\operatorname{tg} x+\operatorname{ch} x\frac{1}{\cos^2 x}.$$

9. $y=\dfrac{2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}{\operatorname{th}^2 x}$,

$$y'=\frac{(2\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x)\operatorname{th}^2 x-(2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x)\cdot 2\operatorname{th}x\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{\operatorname{th}^4 x}=$$

$$=\frac{2\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x}{\operatorname{th}^2 x}-\frac{2(2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x)\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh}^3 x}=$$

$$=\frac{2\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^2 x}+\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}x}-\frac{4\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}-\frac{2\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x}.$$

10. $y=\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{2^{3x}-4\operatorname{th}2x}$,

$$y'=\frac{\left(\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\cos x\right)(2^{3x}-4\operatorname{th}2x)-(\sqrt{x}+\sin x)\left(3\cdot 2^{3x}\ln 2-\dfrac{8}{\operatorname{ch}^2 2x}\right)}{(2^{3x}-4\operatorname{th}2x)^2}.$$

A további átalakításokat nem végezzük el.

11. $y=\dfrac{x^2}{\operatorname{ch}x}$; $y'=?$

$$y'=\frac{2x\operatorname{ch}x-x^2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

12. $y=\operatorname{sh}(e^{2x}+e^{x^2})$; $y'=?$

$y'=[\operatorname{ch}(e^{2x}+e^{x^2})](2e^{2x}+2xe^{x^2})$.

13. $y=\operatorname{ch}(5^{3x}+4^{2x^2}-6^{x^3})$; $y'=?$

$y'=[\operatorname{sh}(5^{3x}+4^{2x^2}-6^{x^3})](3\cdot 5^{3x}\ln 5+4x\cdot 4^{2x^2}\ln 4-3x^2\cdot 6^{x^3}\ln 6)$.

14. $y=\operatorname{sh}\sqrt{6x^2+1}\cdot\operatorname{ch}(5x^2-3)$; $y'=?$

$$y'=\left(\operatorname{ch}\sqrt{6x^2+1}\right)\frac{1}{2}(6x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 12x\cdot\operatorname{ch}(5x^2-3)+$$

$$+\operatorname{sh}\sqrt{6x^2+1}\cdot[\operatorname{sh}(5x^2-3)]\cdot 10x=$$

$$=\frac{6x\operatorname{ch}\sqrt{6x^2+1}\operatorname{ch}(5x^2-3)}{\sqrt{6x^2+1}}+10x\operatorname{sh}\sqrt{6x^2+1}\operatorname{sh}(5x^2-3).$$

6. Logaritmusfüggvények differenciálása

A differenciálási szabály: $y=\log_a x$; $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

Ha a logaritmus alapja e, azaz $y=\ln x$, akkor $y'=\dfrac{1}{x\ln e}=\dfrac{1}{x}$, mivel $\ln e=1$.

Megjegyzés: Ha $y=\ln ax$, akkor $y'=\dfrac{1}{ax}\cdot a=\dfrac{1}{x}$, tehát a bármely valós értékére az $\ln ax$ függvény deriváltja $\dfrac{1}{x}$. (Ha $a>0$, akkor csak pozitív, ha $a<0$, akkor csak negatív x-ekre értelmezett az $\ln ax$ függvény!)

Gyakorló feladatok

1. $y=5\ln x+3\ln 2x$; $y'=?$

$$y'=\frac{5}{x}+3\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{5}{x}+\frac{3}{x}=\frac{8}{x}.$$

2. $y=\ln(3x+4)$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{3x+4}\cdot 3=\frac{3}{3x+4}.$$

3. $y=\ln(3x^2+2x-6)$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{3x^2+2x-6}(6x+2)=\frac{6x+2}{3x^2+2x-6}.$$

4. $y=\ln\sin^2 x$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x=\frac{2\cos x}{\sin x}=2\operatorname{ctg}x.$$

5. $y=\ln\dfrac{5x}{4x-3}$; $y'=?$

$$y'=\frac{4x-3}{5x}\cdot\frac{5(4x-3)-5x\cdot 4}{(4x-3)^2}=\frac{20x-15-20x}{5x(4x-3)}=\frac{-3}{x(4x-3)}.$$

6. $y=\ln \dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sin x}$; $y'=?$

$$y=\ln \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\sin x};$$

$$y'=\frac{\sin x}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\sin x-(2x+1)^{\frac{1}{2}}\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x+1}}-\sqrt{2x+1}\cos x}{\sqrt{2x+1}\sin x}=\frac{\sin x-(2x+1)\cos x}{(2x+1)\sin x}=\frac{1}{2x+1}-\operatorname{ctg} x.$$

7. $y=\ln(\cos x\sin^2 2x)$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{\cos x\sin^2 2x}\cdot(-\sin x\sin^2 2x+\cos x\cdot 2\sin 2x\cos 2x\cdot 2)=$$

$$=\frac{4\sin 2x\cos 2x\cos x-\sin x\sin^2 2x}{\cos x\sin^2 2x}=$$

$$=\frac{4\cos 2x\cos x-\sin x\sin 2x}{\cos x\sin 2x}=\frac{4\cos 2x\cos x-2\sin^2 x\cos x}{\cos x\sin 2x}=$$

$$=2\,\frac{2\cos 2x-\sin^2 x}{\sin 2x}=4\operatorname{ctg} 2x-\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=4\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{tg} x.$$

8. $y=\ln\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\sin^2 x}$; $y'=?$

$$y'=\frac{\sin^2 x}{\operatorname{sh} 2x}\cdot\frac{2\operatorname{ch} 2x\sin^2 x-\operatorname{sh} 2x\cdot 2(\sin x)(\cos x)}{\sin^4 x}=$$

$$=\frac{2(\operatorname{ch} 2x)(\sin x)-2(\operatorname{sh} 2x)(\cos x)}{(\operatorname{sh} 2x)(\sin x)}=2\operatorname{cth} 2x-2\operatorname{ctg} x.$$

9. $y=\lg(2x+3)$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{2x+3}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot 2=\frac{2}{(2x+3)\ln 10}.$$

10. $y=\lg(6x^3-10x^2+5)$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{6x^3-10x^2+5}\cdot\frac{1}{\ln 10}(18x^2-20x)=\frac{x(18x-20)}{(6x^3-10x^2+5)\ln 10}.$$

11. $y=\lg\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3}}{\cos x}$; $y'=?$

$$y=\lg\frac{(2x^2-3)^{\frac{1}{3}}}{\cos x}.$$

$$y'=\frac{\cos x}{(2x^2-3)^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{\frac{1}{3}(2x^2-3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x\cos x-(2x^2-3)^{\frac{1}{3}}(-\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\dfrac{4x\cos x}{3\sqrt[3]{(2x^2-3)^2}}+\sqrt[3]{2x^2-3}\sin x}{\sqrt[3]{2x^2-3}\,(\cos x)\ln 10}=$$

$$=\frac{4x\cos x+3(2x^2-3)\sin x}{3(2x^2-3)(\ln 10)\cos x}=\frac{4x}{3(2x^2-3)\ln 10}+\frac{\operatorname{tg} x}{\ln 10}.$$

Az utolsó előtti lépésben a törtet bővítettük $3\sqrt[3]{(2x^2-3)^2}$-nel, és ezzel az emeletes törtet eltüntettük.

12. $y=e^{2x}\ln 2x$; $y'=?$

$$y'=2e^{2x}\ln 2x+e^{2x}\cdot\frac{2}{2x}=e^{2x}\left(2\ln 2x+\frac{1}{x}\right).$$

13. $y=(\cos^2 2x)(\ln^3 5x^2)$; $y'=?$

$$y'=2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\ln^3 5x^2+\cos^2 2x\cdot 3\ln^2 5x^2\cdot\frac{1}{5x^2}\cdot 10x=$$

$$=-4\cos 2x\sin 2x\ln^3 5x^2+\frac{6\cos^2 2x\ln^2 5x^2}{x}.$$

14. $y=\ln(\cos x \operatorname{sh} x)$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{\cos x \operatorname{sh} x}\cdot(-\sin x \operatorname{sh} x+\cos x \operatorname{ch} x)=$$

$$=\frac{\cos x \operatorname{ch} x-\sin x \operatorname{sh} x}{\cos x \operatorname{sh} x}=\operatorname{cth} x-\operatorname{tg} x.$$

15. $y=\sin \ln 12x$; $y'=?$

$$y'=\cos \ln 12x\cdot\frac{1}{12x}\cdot 12=\frac{\cos \ln 12x}{x}.$$

16. $y=\operatorname{sh} \ln^2 x^2$; $y'=?$

$$y'=\operatorname{ch} \ln^2 x^2\cdot 2\ln x^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{4(\operatorname{ch}\ln^2 x^2)(\ln x^2)}{x}.$$

17. $y=e^{2x+\ln 2x}$; $y'=?$ Mivel $e^{\ln x}=x$, így $y=e^{2x+\ln 2x}=e^{2x}e^{\ln 2x}=$
$=e^{2x}\cdot 2x$;

$$y'=2e^{2x}\cdot 2x+e^{2x}\cdot 2=2e^{2x}(2x+1).$$

18. $y=e^{\ln^2 5x}$; $y'=?$

$$y'=e^{\ln^2 5x}\cdot 2\ln 5x\cdot\frac{1}{5x}\cdot 5=\frac{2e^{\ln^2 5x}\ln 5x}{x}.$$

19. $y=\log_5(6x^2-4)$; $y'=?$

$$y'=\frac{1}{6x^2-4}\cdot\frac{1}{\ln 5}\cdot 12x=\frac{12x}{(6x^2-4)\ln 5}=\frac{6x}{(3x^2-2)\ln 5}.$$

7. Logaritmikus differenciálás

A logaritmikus differenciálás módszerét akkor alkalmazzuk, ha a differenciálandó függvény hatvány alakú és mind az alap, mind a kitevő x függvénye. Ezt a függvénytípust *exponenciális hatványfüggvénynek* is nevezik.

A logaritmikus deriválás módszere a következő:

Legyen $y=f(x)^{g(x)}$ alakú; először mindkét oldal e alapú logaritmusát vesszük: $\ln y=\ln f(x)^{g(x)}=g(x)\ln f(x)$; majd mindkét oldalt deriváljuk x szerint (mégpedig a bal oldalt összetett függvényként, a jobb oldalt pedig szorzatként): $\frac{1}{y}y'=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$; végül y'-t explicit alakra hozzuk (és y helyett $f(x)^{g(x)}$-et helyettesítünk vissza):

$$y'=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

A gyakorlatban nem a végképletet alkalmazzuk, hanem az eljárás szerint számolunk, mivel ez könnyebben megjegyezhető. Tehát minden alkalommal a következő lépéseket hajtjuk végre: 1. Az explicit alak természetes logaritmusát vesszük. 2. Differenciálunk. 3. Rendezünk. 4. A jobb oldalon visszahelyettesítjük y-t.

Gyakorló feladatok

1. $y=e^{x^2}$; $y'=?$

Megoldjuk a feladatot az exponenciális függvény deriválási szabályának felhasználásával és logaritmikus deriválással is, mert a feladat mindkét módszerrel megoldható (ugyanis az alap nem függ x-től), majd összehasonlítjuk a deriváltakat.

I. Megoldás:

$$y=e^{x^2};\quad y'=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}.$$

II. Megoldás:

Logaritmikus deriválással:

$$\ln y=x^2\ln e=x^2;$$

$$\frac{y'}{y}=2x,\quad \text{ebből}\quad y'=2xy=2xe^{x^2}.$$

Tehát a két eredmény megegyezik.

A többi feladat már mind $y=f(x)^{g(x)}$ alakú, vagyis az alap és a kitevő egyaránt x függvénye, tehát exponenciális függvényként közvetlenül nem differenciálható.

2. $y=(5-2x)^x; \quad y'=?$

$\ln y = x \ln(5-2x);$

$$\frac{y'}{y}=\ln(5-2x)+x\frac{1}{5-2x}\cdot(-2);$$

$$y'=y\left[\ln(5-2x)-\frac{2x}{5-2x}\right]=(5-2x)^x\left[\ln(5-2x)-\frac{2x}{5-2x}\right].$$

3. $y=(6-x^2)^{x^2}; \quad y'=? \quad \ln y = x^2\ln(6-x^2);$

$$\frac{y'}{y}=2x\ln(6-x^2)+x^2\frac{1}{6-x^2}\cdot(-2x);$$

$$y'=(6-x^2)^{x^2}\left[2x\ln(6-x^2)-\frac{2x^3}{6-x^2}\right].$$

Ebben a példában — és az összes következőben — már nem jelöltük az y tényezőt, hanem a bal oldalon nevezőben álló y átvitelekor a másik oldalra rögtön behelyettesítettük az eredeti függvényt.

4. $y=x^{\cos x}; \quad y'=?$

$$\ln y=(\cos x)\ln x; \quad \frac{y'}{y}=(-\sin x)\ln x+\frac{\cos x}{x};$$

$$y'=x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x}-(\sin x)\ln x\right].$$

5. $y=x^{x^2+2x-3}; \quad y'=? \quad \ln y=(x^2+2x-3)\ln x;$

$$\frac{y'}{y}=(2x+2)\ln x+(x^2+2x-3)\cdot\frac{1}{x};$$

$$y'=x^{x^2+2x-3}\left[2(x+1)\ln x+\frac{x^2+2x-3}{x}\right].$$

6. $y=x^{\sqrt{5-x^2}}; \quad y'=?$

$y=x^{(5-x^2)^{\frac{1}{2}}};$

$\ln y=(5-x^2)^{\frac{1}{2}}\ln x;$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}(5-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\ln x+(5-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}=$$

$$=-\frac{x\ln x}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{\sqrt{5-x^2}}{x};$$

$$y'=x^{\sqrt{5-x^2}}\left(\frac{\sqrt{5-x^2}}{x}-\frac{x\ln x}{\sqrt{5-x^2}}\right).$$

7. $y=(\ln 2x)^{3x^2}; \quad y'=?$

$\ln y=3x^2\cdot\ln(\ln 2x).$

Megjegyzés: $\ln(\ln 2x)$ azt jelenti, hogy a $2x$ logaritmusának a logaritmusát kell kiszámítanunk. Az $\ln(\ln 2x)$ függvény értelmezési tartománya azon x értékek összessége, amelyekre az $\ln 2x>0$, vagyis $2x>1$.

$$\frac{y'}{y}=6x\ln(\ln 2x)+3x^2\frac{1}{\ln 2x}\cdot\frac{1}{2x}\cdot 2=6x\ln(\ln 2x)+\frac{3x}{\ln 2x};$$

$$y'=(\ln 2x)^{3x^2}\left[6x\ln(\ln 2x)+\frac{3x}{\ln 2x}\right].$$

8. $y=(\ln 5x)^{\sin 5x}; \quad y'=?$

$\ln y=(\sin 5x)\ln(\ln 5x);$

$$\frac{y'}{y}=5(\cos 5x)\ln(\ln 5x)+\sin 5x\frac{1}{\ln 5x}\cdot\frac{1}{5x}\cdot 5;$$

$$y'=(\ln 5x)^{\sin 5x}\left[5(\cos 5x)[\ln(\ln 5x)]+\frac{\sin 5x}{x\ln 5x}\right].$$

9. $y=(\ln x^2)^{x^2}; \quad y'=? \quad \ln y=x^2\ln(\ln x^2);$

$$\frac{y'}{y}=2x\ln(\ln x^2)+x^2\frac{1}{\ln x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x;$$

$$y'=(\ln x^2)^{x^2}\left[2x\ln(\ln x^2)+\frac{2x}{\ln x^2}\right]=2x(\ln x^2)^{x^2}\left[\ln(\ln x^2)+\frac{1}{\ln x^2}\right].$$

10. $y=(4x)^{\cos x+\sin x}; \quad y'=? \quad \ln y=(\cos x+\sin x)\ln 4x;$

$$\frac{y'}{y}=(-\sin x+\cos x)\ln 4x+(\cos x+\sin x)\frac{1}{4x}4;$$

$$y'=(4x)^{\cos x+\sin x}\left[(\cos x-\sin x)\ln 4x+\frac{\cos x+\sin x}{x}\right].$$

11. $y=(6x)^{\frac{2x-3}{5x+2}}$; $\quad y'=?\quad \ln y=\frac{2x-3}{5x+2}\ln 6x$;

$$\frac{y'}{y}=\frac{2(5x+2)-(2x-3)\cdot 5}{(5x+2)^2}\ln 6x+\frac{2x-3}{5x+2}\,\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{10x+4-10x+15}{(5x+2)^2}\ln 6x+\frac{2x-3}{x(5x+2)}=$$

$$=\frac{19}{(5x+2)^2}\ln 6x+\frac{2x-3}{x(5x+2)};$$

$$y'=(6x)^{\frac{2x-3}{5x+2}}\left[\frac{19}{(5x+2)^2}\ln 6x+\frac{2x-3}{x(5x+2)}\right]=$$

$$=\frac{(6x)^{\frac{2x-3}{5x+2}}}{5x+2}\left(\frac{19\ln 6x}{5x+2}+\frac{2x-3}{x}\right).$$

12. $y=(3x^2)^{\sqrt[3]{x-4}}$; $\quad y'=?$

$$\ln y=\sqrt[3]{x-4}\,\ln 3x^2=(x-4)^{\frac{1}{3}}\ln 3x^2;$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}\ln 3x^2+(x-4)^{\frac{1}{3}}\,\frac{1}{3x^2}\cdot 6x=$$

$$=\frac{\ln 3x^2}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}+\frac{2\sqrt[3]{x-4}}{x};$$

$$y'=(3x^2)^{\sqrt[3]{x-4}}\left[\frac{\ln 3x^2}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}}+\frac{2\sqrt[3]{x-4}}{x}\right].$$

13. $y=\left(\sqrt[3]{x^4+2x}\right)^{x^2}$; $\quad y'=?$

$$\ln y=x^2\ln\sqrt[3]{x^4+2x}=\frac{x^2}{3}\ln(x^4+2x);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2x}{3}\ln(x^4+2x)+\frac{x^2}{3}\cdot\frac{1}{x^4+2x}\cdot(4x^3+2)=$$

$$=\frac{2x\ln(x^4+2x)}{3}+\frac{x(4x^3+2)}{3(x^3+2)};$$

$$y'=\left(\sqrt[3]{x^4+2x}\right)^{x^2}\left[\frac{2x\ln(x^4+2x)}{3}+\frac{x(4x^3+2)}{3(x^3+2)}\right].$$

14. $y=(2x)^{e^{2x}+5^x}$; $\quad y'=?\quad \ln y=(e^{2x}+5^x)\ln 2x$;

$$\frac{y'}{y}=(2e^{2x}+5^x\ln 5)\ln 2x+(e^{2x}+5^x)\,\frac{1}{2x}\,2;$$

$$y'=(2x)^{e^{2x}+5^x}\left[(2e^{2x}+5^x\ln 5)\ln 2x+\frac{e^{2x}+5^x}{x}\right].$$

15. $y=(x^2)^{\sin 2x}$; $\quad y'=?\quad y=x^{2\sin 2x}$; $\quad \ln y=2(\sin 2x)\ln x$;

$$\frac{y'}{y}=2(\cos 2x)\cdot 2\ln x+2\sin 2x\cdot\frac{1}{x};$$

$$y'=x^{2\sin 2x}\left[4(\cos 2x)\ln x+\frac{2\sin 2x}{x}\right].$$

16. $y=\sqrt[x]{2x+3}=(2x+3)^{\frac{1}{x}}$; $\quad y'=?\quad \ln y=\frac{1}{x}\ln(2x+3)$;

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln(2x+3)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2x+3}\cdot 2=$$

$$=\frac{-\ln(2x+3)}{x^2}+\frac{2}{2x^2+3x};$$

$$y'=\sqrt[x]{2x+3}\left[\frac{2}{2x^2+3x}-\frac{\ln(2x+3)}{x^2}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt[x]{2x+3}}{x}\left[\frac{2}{2x+3}-\frac{\ln(2x+3)}{x}\right].$$

17. $y=\sqrt[2x]{\sin 7x+e^{2x}}=(\sin 7x+e^{2x})^{\frac{1}{2x}}$; $\quad y'=?$

$$\ln y=\frac{1}{2x}\ln(\sin 7x+e^{2x});$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{2x^2}\ln(\sin 7x+e^{2x})+\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{\sin 7x+e^{2x}}\cdot(7\cos 7x+2e^{2x})=$$

$$=\frac{-\ln(\sin 7x+e^{2x})}{2x^2}+\frac{7\cos 7x+2e^{2x}}{2x(\sin 7x+e^{2x})};$$

$$y'=\sqrt[2x]{\sin 7x+e^{2x}}\left[\frac{7\cos 7x+2e^{2x}}{2x(\sin 7x+e^{2x})}-\frac{\ln(\sin 7x+e^{2x})}{2x^2}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt[2x]{\sin 7x+e^{2x}}}{2x}\left[\frac{7\cos 7x+2e^{2x}}{\sin 7x+e^{2x}}-\frac{\ln(\sin 7x+e^{2x})}{x}\right].$$

18. $y=\sqrt[3x^2]{\sin^2 x}=(\sin x)^{\frac{2}{3x^2}}$; $y'=?$ $\ln y=\frac{2}{3x^2}\ln\sin x$;

$$\frac{y'}{y}=-\frac{4}{3x^3}\ln\sin x+\frac{2}{3x^2}\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x=\frac{-4\ln\sin x}{3x^3}+\frac{2\operatorname{ctg} x}{3x^2};$$

$$y'=\sqrt[3x^2]{\sin^2 x}\,\frac{2x\operatorname{ctg} x-4\ln\sin x}{3x^3}.$$

Most olyan feladatokat oldunk meg, amelyekben a differenciálandó függvény többtagú, és az egyes tagok exponenciális hatványfüggvények, ill. esetleg azok függvényei. Ilyenkor a logaritmikus deriválást minden tagra külön-külön kell alkalmaznunk.

19. $y=x^x+(\sin x)^{\sin x}$; $y'=?$ Legyen $y_1=x^x$ és $y_2=(\sin x)^{\sin x}$; akkor

$$\ln y_1=x\ln x;\quad \frac{y_1'}{y_1}=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1;\quad y_1'=x^x(\ln x+1);$$

továbbá

$$\ln y_2=(\sin x)\ln\sin x;$$

$$\frac{y_2'}{y_2}=(\cos x)\ln\sin x+\sin x\,\frac{1}{\sin x}\cos x=(\cos x)(\ln\sin x+1);$$

$$y_2'=(\sin x)^{\sin x}(\cos x)(\ln\sin x+1).$$

Tehát

$$y'=y_1'+y_2'=x^x(\ln x+1)+(\sin x)^{\sin x}(\cos x)(\ln\sin x+1).$$

20. $y=\sqrt[x]{x}+\sin x^{\sin x}$; $y'=?$ Vigyázzunk! A második tag csak hasonlít az előző feladat második tagjára, de nem egyenlő vele; ugyanis ebben a példában az $x^{\sin x}$ szinuszát kell meghatározni. A második tag tehát olyan összetett függvény, amelynek belső függvényét csak logaritmikus differenciálással tudjuk meghatározni.

Legyen $y_1=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}}$ és $y_2=\sin u$, ahol $u=x^{\sin x}$ exponenciális hatványfüggvény.

Most deriváljuk az y_1 és y_2 függvényeket:

$$\ln y_1=\frac{1}{x}\ln x;\quad \frac{y_1'}{y_1}=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$=-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x);$$

$$y_1'=\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$y_2'=(\cos u)\cdot u'$; u'-t logaritmikus deriválással számítjuk ki:

$$\ln u=(\sin x)\ln x;\quad \frac{u'}{u}=(\cos x)\ln x+(\sin x)\frac{1}{x};$$

$$u'=x^{\sin x}\left[(\cos x)\ln x+\frac{\sin x}{x}\right].$$

Tehát

$$y_2'=(\cos x^{\sin x})\,x^{\sin x}\left[(\cos x)\ln x+\frac{\sin x}{x}\right].$$

$$y'=y_1'+y_2'=\frac{\sqrt[x]{x}(1-\ln x)}{x^2}+x^{\sin x}(\cos x^{\sin x})\left[(\cos x)\ln x+\frac{\sin x}{x}\right].$$

A logaritmikus deriválást az esetben is érdemes lehet alkalmazni, ha többtényezős szorzatfüggvényt, ill. törtfüggvényt kell deriválnunk. Erre vonatkozó feladatot oldunk most meg.

21. $y=(x+2)(x-3)(x+5)$; $y'=?$

$$\ln y=\ln(x+2)+\ln(x-3)+\ln(x+5);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+5};$$

$$y'=(x+2)(x-3)(x+5)\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+5}\right)=$$

$$=(x-3)(x+5)+(x+2)(x+5)+(x+2)(x-3).$$

22. $y=\dfrac{(x+4)(x-3)(x+2)}{(x-6)(x-4)(x-2)}$; $y'=?$

$$\ln y=\ln(x+4)+\ln(x-3)+\ln(x+2)-\ln(x-6)-$$
$$-\ln(x-4)-\ln(x-2);$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2};$$

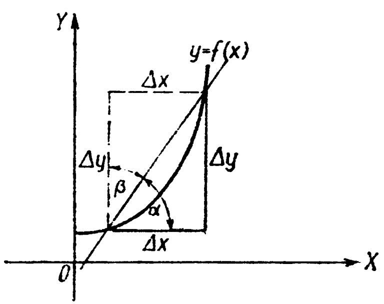
$$y'=\frac{(x+4)(x-3)(x+2)}{(x-6)(x-4)(x-2)}\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}\right).$$

Eredményünket nem alakítjuk tovább.

8. Inverz függvények differenciálhányadosa

Ha az eredeti függvénykapcsolat explicit alakja $y=f(x)$, akkor ebből a független változót — mint y függvényét — kifejezve, megkapjuk az inverz kapcsolatot, amelynek jelölése: $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$.

Legyen az $y=f(x)$ függvény képe az 52. ábrán látható görbe. Az ábrából leolvasható, hogy az $x=\varphi(y)$ kapcsolat differenciálhányadosa, $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$, megadja az Y-tengely pozitív iránya és a függvény szelője közötti szög (β) tangensét. Ennek reciproka,



52. ábra

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, viszont éppen az x-tengely pozitív irányával bezárt szög tangense. Ebből — a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

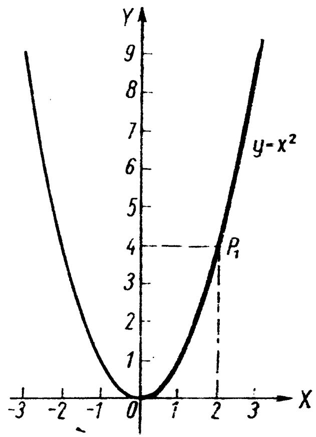
reláció mindkét oldalának határértékét képezve — adódik

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

A módszert először olyan függvényen mutatjuk meg, amely eredeti-explicit alakjában is és inverz alakban felírva is könnyen differenciálható, és így eljárásunk helyességét ellenőrizni tudjuk.

Legyen az $y=f(x)$ függvénykapcsolat $y=x^2$. Az inverz kapcsolat $x=\pm\sqrt{y}$ (53. ábra), de csak a parabola $x=\sqrt{y}$ ágát vizsgáljuk, azaz pozitív x értékekre szorítkozunk.

Az összetartozó számpárok továbbra is ugyanazok; ugyanis ha pl. $x_1=2$, akkor $y=x^2$ alapján $y_1=4$, vagyis a számpár által meghatározott pont $P(2;4)$. Ha viszont az $x=\sqrt{y}$ függ-



53. ábra

vénykapcsolatba helyettesítjük az $y_1=4$ értéket, akkor $x_1=2$ adódik és a számpárhoz tartozó pont ismét $P_1(2;4)$. Tehát a függvény görbéje az X, Y koordinátarendszerben változatlan marad.

Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény deriváltját az $x_0=4$ abszcisszájú pontban!

I. Módszer: Deriváljuk az $y=x^2$ függvényt, és behelyettesítjük a deriváltba az $x_0=4$ értéket.

$$y=x^2; \quad \frac{dy}{dx}=2x; \quad y'(4)=2\cdot 4=8.$$

A derivált értéke az $x_0=4$ abszcisszájú pontban 8, vagyis ehhez a ponthoz húzott érintő az X-tengely pozitív irányával akkora szöget zár be, amelynek tangense 8.

II. Módszer: Deriváljuk most az $x=\sqrt{y}=y^{\frac{1}{2}}$ inverz kapcsolatot y szerint: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$. Így megkapjuk az Y-tengely és a tetszőleges y ordinátájú pontban húzható érintő által bezárt szög tangensét mint y függvényét. Ennek reciprokát véve, megkapjuk az $y=f(x)$ függvény bármely y ordinátájú pontjához húzott érintőnek az X-tengely pozitív irányával bezárt szögének a tangensét mint y függvényét: $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$. Ha ebbe visszahelyettesítjük y-t, mint az x függvényét, akkor megkapjuk az eredeti $y=f(x)$ függvény x szerinti deriváltját:

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{x^2}=2x.$$

Valóban ugyanazt az eredményt kaptuk, mint előbb.

Megjegyzés: Az inverz függvényre vonatkozó deriválási szabályt akkor alkalmazzuk, ha az inverz függvénykapcsolat deriváltját ismerjük, míg az eredetiét nem, ill. ha az inverz függvénykapcsolat deriváltja egyszerűbben határozható meg, mint az eredetié.

Gyakorlásul meghatározzuk néhány függvény deriváltját az inverz kapcsolat segítségével.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=\sqrt[3]{x}$ függvény deriváltját.

I. Megoldás

$y=\sqrt[3]{x}$ inverz kapcsolata: $x=y^3$.

Mivel $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}$, ezzel megkaptuk $y=\sqrt[3]{x}$ deriváltját mint y függvényét; $y=\sqrt[3]{x}$ behelyettesítésével a feladatot megoldottuk:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

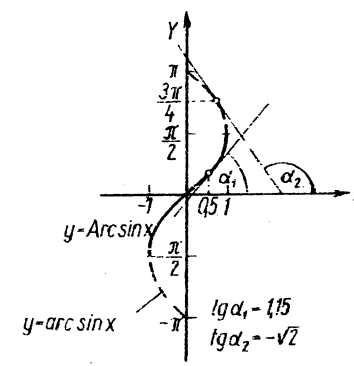
II. Megoldás:

Most alkalmazzuk a törtkitevőjű hatványfüggvények deriválási szabályát:

$$y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}; \quad y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

A két derivált tehát valóban megegyezik.

A szögfüggvények inverz függvényei az árkuszfüggvények. Mivel a szögfüggvények nem monotonok, ezért inverzük többértékű. Mi csak a főérték deriváltját határozzuk meg, de meg-



54. ábra

adjuk a módszert, ahogy tetszőleges pontban meghatározhatjuk az érintő iránytangensét. Az arc sin x főértékét, Arc sin x-et az 54. ábrán vastag kihúzással jelöltük.

2. Határozzuk meg az $y=\operatorname{Arc}\sin x$ függvény deriváltját!
A függvény inverz kapcsolata: $x=\sin y$.

$$\frac{dx}{dy}=\cos y; \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}.$$

Megkaptuk az $y=\operatorname{Arc}\sin x$ függvény deriváltját mint az y változó függvényét. Mivel a főérték értékkészlete: $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$, és ebben az intervallumban a koszinusz nemnegatív, ezért a $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ trigonometrikus azonosságból $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$.

Így $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, vagy $(\operatorname{Arc}\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Határozzuk meg az $y=\operatorname{Arc}\sin x$ függvény deriváltját az $x_0=0{,}5$ abszcisszájú pontban (54. ábra).

$$y'(0{,}5)=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}25}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}75}}\approx\frac{1}{0{,}865}\approx 1{,}15.$$

4. Határozzuk meg az $y=\arcsin x$ függvény $y_0=\frac{3}{4}\pi$ ordinátájú pontjához húzható érintő egyenletét!

A szög $\frac{3}{4}\pi$, ennek szinusza $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mivel az $y=\arcsin x$ függvény deriváltját ismerjük mint y függvényét, ui. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}$, ezért behelyettesíthetjük y_0 értékét, és ezzel megkapjuk az érintő iránytangensét:

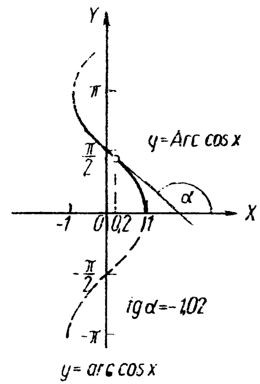
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y_0=\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{\cos y_0}=\frac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}.$$

Az 54. ábrán valóban látszik, hogy eredményünknek megfelelően, az érintő tompaszöget zár be az X-tengely pozitív irányával.

Az érintési pont: $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{3}{4}\pi\right)$; az érintő iránytangense $m=-\sqrt{2}$, és így az érintő egyenlete:

$$y-\frac{3}{4}\pi=-\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

5. Határozzuk meg az $y=\operatorname{Arc}\cos x$ (főérték) függvény deriváltját (55. ábra)!



55. ábra

Az $y=\operatorname{Arc}\cos x$ inverz kapcsolata: $x=\cos y$.

$\frac{dx}{dy}=-\sin y$, ebből az $y=\operatorname{Arc}\cos x$ függvény deriváltja mint y függvénye:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}.$$

A főérték értékkészlete $0\leqq y\leqq\pi$, ezen tartományban a $\sin y\geqq 0$, ezért a szögfüggvények négyzetes összefüggéséből

$$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2},$$

és így

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{vagyis} \quad (\operatorname{Arc}\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vegyük észre, hogy az Arc cos x függvény értelmezési tartománya a $[-1;\ +1]$ zárt intervallum, ennek végpontjaiban viszont deriváltja nincs értelmezve, tehát $y=\text{Arc}\cos x$ csak a $(-1;\ +1)$ nyílt intervallumban differenciálható.

6. Mekkora szöget zár be az X-tengely pozitív irányával az $y=\text{Arc}\cos x$ függvény $x_0=0{,}2$ abszcisszájú pontjához húzott érintő (47. ábra)?

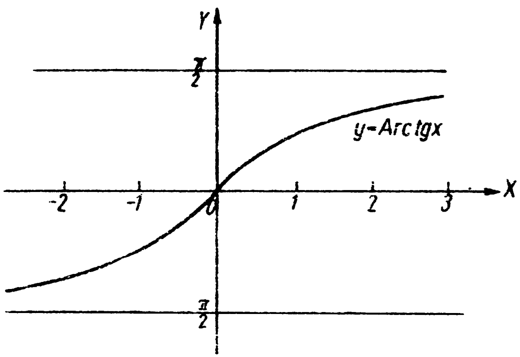
Mivel $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ezért

$$y'(0{,}2) = -\frac{1}{\sqrt{1-0{,}04}} = -\frac{1}{\sqrt{0{,}96}} \approx -\frac{1}{0{,}98} \approx -1{,}02.$$

$\operatorname{tg}\alpha = -1{,}02;\quad 180° - \alpha = 45{,}5°$, tehát

$$\alpha = 180° - 45{,}5° = 134{,}5°.$$

7. Határozzuk meg $y=\text{Arc tg}\, x$ deriváltját (56. ábra)! Az ábrán csak a főértéket tüntettük fel.



56. ábra

Mivel az $y=\text{Arc tg}\, x$ függvény inverz kapcsolata: $x=\operatorname{tg} y$, ezért

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 y+1.$$

Az $y=\text{Arc tg}\, x$ függvény deriváltja mint y függvénye:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y+1}$$

Mivel $y=\text{Arc tg}\, x$, tehát behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(\text{Arc tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

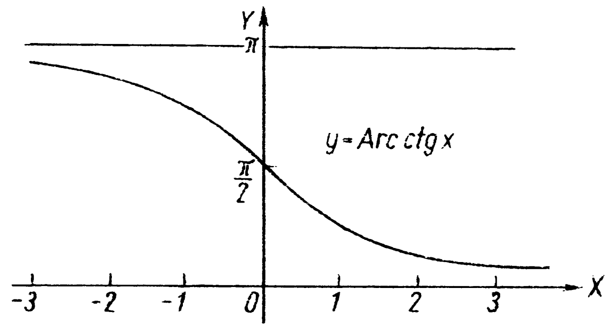
Látható, hogy a derivált bármely x értékre pozitív, vagyis az Arc tg x függvény szigorúan monoton növekedő.

8. Határozzuk meg az $y=\text{Arc ctg}\, x$ függvény deriváltját (57. ábra)! Az $y=\text{Arc ctg}\, x$ függvény inverz kapcsolata $x=\operatorname{ctg} y$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sin^2 y} = \frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\sin^2 y} = -(1+\operatorname{ctg}^2 y),$$

ebből

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}.$$



57. ábra

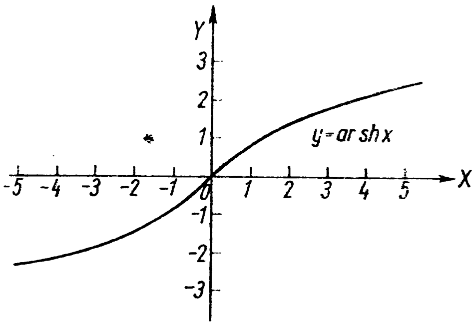
Ezzel megkapjuk az $y=\text{Arc ctg}\, x$ függvény deriváltját mint y függvényét; behelyettesítjük a ctg $y=x$ kapcsolatot, és így megkapjuk a keresett deriváltat mint x függvényét:

$$\frac{dy}{dx} = (\text{Arc ctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Mint látható, a derivált értéke bármely x-re negatív, tehát az Arc ctg x függvény szigorúan monoton csökkenő.

A hiperbolikus függvények inverzei az area-függvények. Ezek értelmezését már megadtuk, így csak a deriváltakat határozzuk meg.

9. $y = \text{ar sh}\, x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Határozzuk meg a függvény deriváltját egyszer az inverz kapcsolat felhasználásával, egyszer pedig logaritmikus alak közvetlen deriválásával (58. ábra)!



58. ábra

I. Megoldás:

Az $y=\text{ar sh}\, x$ függvény inverz kapcsolata $x=\text{sh}\, y$; mivel $\dfrac{dx}{dy} = \text{ch}\, y$, ebből az $y=\text{ar sh}\, x$ függvény deriváltja mint y függvénye:

$$\frac{dy}{dx} = (\text{ar sh}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}\, y}.$$

A deriváltat x függvényeként keressük, ezért felhasználjuk, hogy $\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y = 1$, amiből

$$\text{ch}\, y = \sqrt{1+\text{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}.$$

(A gyökjel előjele azért pozitív, mert ch y csak pozitív szám lehet!) Így

$$(\text{ar sh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

II. Megoldás:

A feladatot az explicit alak deriválásával is megoldhatjuk:

$$y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);$$

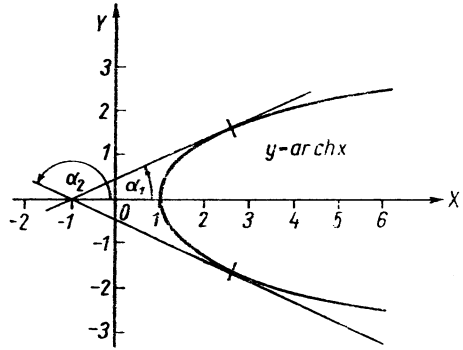
$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

A két eredmény tehát megegyezik.

10. Határozzuk meg az $y=\text{ar ch}\, x$ függvény deriváltját (59. ábra)! A függvény görbéje az X-tengelyre szimmetrikus, kétértékű.



59. ábra

I. Megoldás:

$$y = \text{ar ch}\, x = \ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right); \quad x = \text{ch}\, y.$$

Most már az inverz kapcsolat felírása után közvetlenül felírjuk a $\dfrac{dy}{dx}$ differenciálhányadost!

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\text{sh}\, y}.$$

Felhasználva $\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y = 1$ azonosságot: $\mathrm{sh}\, y = \pm\sqrt{\mathrm{ch}^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$, így

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

tehát

$$(\mathrm{ar\,ch}\, x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

A plusz, ill. mínusz előjelet aszerint kell figyelembe venni, hogy a derivált értékét a görbe X-tengely feletti (plusz), vagy X-tengely alatti (mínusz) ágára vonatkozóan akarjuk-e megkapni.

II. Megoldás:

Az $\mathrm{ar\,ch}\, x$ függvény logaritmikus alakja:

$$y = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right).$$

Vegyük először is észre, hogy az $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ és $y = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ függvények az X-tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el.

Ugyanis

$$y = \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \ln\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \ln\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),$$

és ezért az előbbi alak így is írható:

$$y = \ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right) = \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Deriváljuk először csak az $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ alakot, és a $\pm$ jelet majd a végén vegyük figyelembe.

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left[1+\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right] =$$

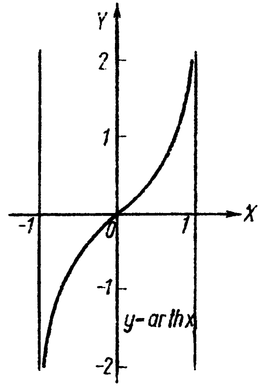
$$= \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Tehát az $y = \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ függvény deriváltja:

$$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Így minden x értékhez két derivált tartozik, az $y = \mathrm{ar\,ch}\, x$ X-tengely feletti, ill. alatti ágainak megfelelően.

11. Határozzuk meg az $y = \mathrm{ar\,th}\, x$ függvény differenciálhányadosát (60. ábra)!



60. ábra

I. Megoldás:

$$y = \mathrm{ar\,th}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad \text{ahol} \quad |x|<1; \quad x = \mathrm{th}\, y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 y}}.$$

Mivel

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 y} = \frac{\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y}{\mathrm{ch}^2 y} = 1-\mathrm{th}^2 y = 1-x^2,$$

ezért

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{és így} \quad (\mathrm{ar\,th}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

II. Megoldás:

A deriváltat az

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

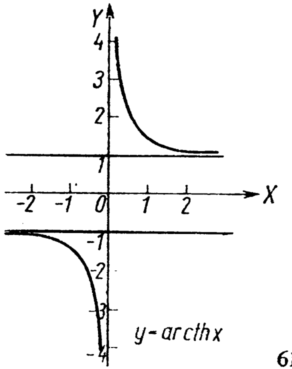
alakból számítva kapjuk:

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}\frac{2}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Tehát a két módon kapott derivált megegyezik.

12. Határozzuk meg az $y=\operatorname{ar\,cth} x$ függvény deriváltját (61. ábra)!



61. ábra

I. Megoldás:

$$y=\operatorname{ar\,cth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\quad |x|>1;\quad x=\operatorname{cth} v.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}}.$$

Mivel

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y}=-\frac{\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y}{\operatorname{sh}^2 y}=-\operatorname{cth}^2 y+1=1-x^2,$$

ezért $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x^2}$, vagyis $(\operatorname{ar\,cth} x)'=\frac{1}{1-x^2}$.

II. Megoldás:

Deriváljuk az $y=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ alakot!

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{2(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2}{2(x^2-1)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

Tehát a két eredmény megegyezik.

Megjegyzés: Az $\operatorname{ar\,th} x$, ill. $\operatorname{ar\,cth} x$ függvények deriváltjának alakja megegyezik ugyan, de a két deriváltfüggvény értelmezési tartományának nincs közös pontja.

13. Határozzuk meg az $y=\ln x$ függvény deriváltját az inverz függvények deriválási szabálya alapján!

$$y=\ln x;\quad x=e^y.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x};$$

vagyis az $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ már ismert deriváltat kapjuk.

14. $y=\arccos 5x$; $y'=?$ A differenciálás kétféle módon is elvégezhető.

I. Megoldás:

Mivel az arkusz függvények inverzét és annak deriváltját ismerjük, differenciáljunk először az inverz kapcsolat felhasználásával.

Az inverz kapcsolat: $5x=\cos y$; $x=\frac{\cos y}{5}$.

A derivált:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-\frac{\sin y}{5}}=-\frac{5}{\sin y}=-\frac{5}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}.$$

II. Megoldás:

A megadott függvény azonban összetett függvényként is deriválható, ugyanis

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot 5=-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}.$$

15. Határozzuk meg az $y = \operatorname{ar\,sh} x^2$ függvény deriváltját!

I. Megoldás:

Az inverz kapcsolat deriválása alapján:

$$y = \operatorname{ar\,sh} x^2; \quad x^2 = \operatorname{sh} y; \quad x = \sqrt{\operatorname{sh} y};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(\operatorname{sh} y)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} y} = \frac{2\sqrt{\operatorname{sh} y}}{\operatorname{ch} y} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\operatorname{sh} y}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}.$$

II. Megoldás:

Az összetett függvény deriválási szabálya alapján pedig:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2)^2+1}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}.$$

A két derivált tehát megegyezik.

9. Implicit függvények differenciálhányadosa

Az implicit alakban adott $F(x; y) = 0$ függvény $y'(x)$ differenciálhányadosa a függvény explicit alakra hozása nélkül úgy számítható ki, hogy az x szerinti deriválást az ismert differenciálási szabályok alapján elvégezzük, figyelembe véve eközben, hogy az y változó az x-nek függvénye (tehát, hogy az y-t tartalmazó tagokat összetett függvényekként kell differenciálni).

A deriválás után kapott összefüggésből az y' differenciálhányadost kifejezve, a kapott kifejezésben változóként általában x mellett y is fellép, tehát y explicit alakjának ismerete nélkül nem tudjuk meghatározni a derivált függvény explicit alakját.

Ha azonban a differenciálhányados értékére csak a függvény egyes pontjaiban van szükségünk, akkor e pontok koordinátáinak behelyettesítésével az explicit alak nélkül is megkaphatjuk a keresett eredményt.

Gyakorló feladatok

1. $y^2x - yx^2 - 6 = 0$. Határozzuk meg az implicit alakból a függvény x szerinti deriváltját, majd számítsuk ki a deriváltat az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban!

Meghatározzuk a deriváltat:

$$2yy'x + y^2 - y'x^2 - y \cdot 2x = 0;$$

$$y'(2yx - x^2) = 2yx - y^2;$$

$$y' = \frac{2yx - y^2}{2yx - x^2}.$$

Ez a derivált implicit alakja. Mivel a derivált számértéke egy pontban csak e pont koordinátái ismeretében számítható, ezért először ezt kell meghatároznunk.

Behelyettesítjük a függvény implicit alakjába x_0 adott értékét, és meghatározzuk y_0-t.

$$y^2 \cdot 1 - y \cdot 1^2 - 6 = 0;$$

$$y^2 - y - 6 = 0;$$

$$y_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};$$

$$y_{0,1} = 3; \quad y_{0,2} = -2.$$

$$P_{0,1}(1; 3), \quad P_{0,2}(1; -2).$$

A derivált értékét a $P_{0,1}$, ill. $P_{0,2}$ pontban úgy számítjuk ki, hogy koordinátáit behelyettesítjük a derivált függvény implicit alakjába.

$$y'(P_{0,1}) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 - 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 1 - 1} = \frac{-3}{5}.$$

$$y'(P_{0,2}) = \frac{2(-2) \cdot 1 - (-2)^2}{2(-2) \cdot 1 - 1} = \frac{-4-4}{-4-1} = \frac{8}{5}.$$

2. $5x^3y-2x+5y=0$. Határozzuk meg az implicit alakból a függvény deriváltját! Mivel a függvény könnyen explicit alakra hozható, így a feladatot mindkét módszerrel megoldjuk.

I. Megoldás:

Az implicit alak differenciálása:

$$15x^2y+5x^3y'-2+5y'=0;$$

$$y'(5x^3+5)=2-15x^2y;$$

$$y'=\frac{2-15x^2y}{5x^3+5}=\frac{2-15x^2y}{5(x^3+1)}.$$

Így megkaptuk a deriváltat implicit alakban.

II. Megoldás:

A deriválandó függvényt most előbb explicit alakra hozzuk:

$$y(5x^3+5)=2x;\quad y=\frac{2x}{5(x^3+1)}.$$

A derivált tehát

$$y'=\frac{2(5x^3+5)-2x\cdot 15x^2}{5^2(x^3+1)^2}=\frac{10x^3+10-30x^3}{5^2(x^3+1)^2}=\frac{2-4x^3}{5(x^3+1)^2}.$$

Így megkaptuk a függvény deriváltját explicit alakban.
Ellenőrizzük a két derivált egyenlőségét!

A derivált implicit alakjában y helyébe a függvény $y=\dfrac{2x}{5(x^3+1)}$ explicit alakját írva:

$$y'=\frac{2-15x^2\dfrac{2x}{5(x^3+1)}}{5(x^3+1)}=\frac{\dfrac{10x^3+10-30x^3}{5(x^3+1)}}{5(x^3+1)}=\frac{2-4x^3}{5(x^3+1)^2}.$$

A kétféle módon kapott deriváltfüggvény megegyezik.

3. Határozzuk meg az $x^4y+5y^2x-4=0$ függvény deriváltját az implicit alakból, és a derivált értékét $x_0=1$-re!

$$4x^3y+x^4y'+10yy'x+5y^2=0;$$

$$y'(x^4+10xy)=-(5y^2+4x^3y)=-y(5y+4x^3);$$

$$y'=-\frac{y(5y+4x^3)}{x(x^3+10y)}.$$

Az $x_0=1$ értéket behelyettesítjük a függvény implicit alakjába, így y_0-ra egy másodfokú egyenletet kapunk, ennek gyökei lesznek az y_0 értékek.

$$y_0+5y_0^2-4=0,\quad \text{rendezve:}\quad 5y_0^2+y_0-4=0,$$

$$y_0=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{10}=\frac{-1\pm 9}{10};$$

Ebből $y_{0,1}=\dfrac{4}{5}$; $y_{0,2}=-1$, tehát a szóban forgó pontok

$$P_1\left(1;\frac{4}{5}\right),\quad P_2(1;-1).$$

Az adott x_0-hoz tehát két függvényérték és így két derivált tartozik.

$$y'(P_1)=-\frac{\dfrac{4}{5}\left(5\cdot\dfrac{4}{5}+4\right)}{1\left(1+10\cdot\dfrac{4}{5}\right)}=-\frac{4\cdot 8}{5\cdot 9}=-\frac{32}{45}.$$

$$y'(P_2)=-\frac{-1[5(-1)+4]}{1[1+10(-1)]}=\frac{1}{9}.$$

4. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=18$. Határozzuk meg a függvény deriváltját! A függvény könnyen explicit alakra hozható, és így mindkét módszerrel megoldható a feladat.

I. Megoldás:

Az $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=18$ implicit alakot deriválva:

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=0;$$

átírva gyökös alakba

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0,$$

ebből

$$y'=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Ha az eredeti implicit alakból $\sqrt{y}$ értékét kifejezzük és behelyettesítjük y' kifejezésébe, akkor megkapjuk a derivált explicit alakját is:

$$\sqrt{y}=18-\sqrt{x};$$

$$y'=-\frac{18-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-18}{\sqrt{x}}.$$

II. Megoldás:

A differenciálhányadost most úgy számítjuk ki, hogy a differenciálandó függvényt előbb explicit alakra hozzuk, majd differenciálunk.

Mivel $\sqrt{y}=18-\sqrt{x}$; így $y=18^2-36\sqrt{x}+x$, ezért

$$y'=-36\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{18}{\sqrt{x}}+1=\frac{-18+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-18}{\sqrt{x}}.$$

A kétféle módszerrel kapott deriváltakat összehasonlítva látjuk, hogy azok valóban megegyeznek.

A továbbiakban már olyan implicit függvényekkel foglalkozunk, amelyek explicit alakúra csak nehezen, vagy egyáltalában nem alakíthatók át.

5. $e^{2x+3y}-e^{2x-4y}=y;\quad y'=?$

$$e^{2x+3y}(2+3y')-e^{2x-4y}(2-4y')=y';$$

$$2e^{2x+3y}+3y'e^{2x+3y}-2e^{2x-4y}+4y'e^{2x-4y}=y';$$

$$y'(3e^{2x+3y}+4e^{2x-4y}-1)=2(e^{2x-4y}-e^{2x+3y});$$

$$y'=\frac{2(e^{2x-4y}-e^{2x+3y})}{3e^{2x+3y}+4e^{2x-4y}-1}.$$

6. $x^3=y^3\ln(x^2y^3);\quad y'=?$

$$3x^2=3y^2y'\ln(x^2y^3)+y^3\frac{1}{x^2y^3}\cdot(2xy^3+x^2\cdot 3y^2y');$$

elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$3x^2=3y^2y'\ln(x^2y^3)+\frac{2y^3}{x}+3y^2y';$$

rendezünk:

$$\frac{3x^3-2y^3}{x}=y'[3y^2\ln(x^2y^3)+3y^2];$$

$$y'=\frac{3x^3-2y^3}{3xy^2[\ln(x^2y^3)+1]}.$$

7. $2^x-3^y=\sin x;\quad y'=?$

$$2^x\ln 2-3^y(\ln 3)\,y'=\cos x;$$

ezt rendezve

$$y'3^y\ln 3=2^x\ln 2-\cos x;$$

ebből

$$y'=\frac{2^x\ln 2-\cos x}{3^y\ln 3}.$$

8. $e^{4x-y}+\cos(2y-x)=0;\quad y'=?$

$$e^{4x-y}(4-y')-\sin(2y-x)\cdot(2y'-1)=0;$$

$$4e^{4x-y}-y'e^{4x-y}-2y'\sin(2y-x)+\sin(2y-x)=0;$$

$$4e^{4x-y}+\sin(2y-x)=y'[e^{4x-y}+2\sin(2y-x)];$$

$$y'=\frac{4e^{4x-y}+\sin(2y-x)}{e^{4x-y}+2\sin(2y-x)}.$$

9. $\sqrt[3]{x^2+y^3}+\sin xy=14;\quad y'=?$

$$(x^2+y^3)^{\frac{1}{3}}+\sin xy=14;$$

$$\frac{1}{3}(x^2+y^3)^{-\frac{2}{3}}(2x+3y^2y')+(\cos xy)(y+xy')=0;$$

$$\frac{2x}{3}(x^2+y^3)^{-\frac{2}{3}}+y^2y'(x^2+y^3)^{-\frac{2}{3}}+y\cos xy+xy'\cos xy=0;$$

$$y'[y^2(x^2+y^3)^{-\frac{2}{3}}+x\cos xy]=-\left[\frac{2x}{3}(x^2+y^3)^{-\frac{2}{3}}+y\cos xy\right];$$

$$y'=-\frac{\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}}+y\cos xy}{\dfrac{y^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}}+x\cos xy}=\frac{2x+3y\cos xy\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}}{3y^2+3x\cos xy\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}}.$$

10. $5^{\sin xy}+3y^2=5xy; \quad y'=?$

$$5^{\sin xy}(\ln 5)(\cos xy)(y+xy')+6yy'=5(y+xy');$$

$$5^{\sin xy}(\ln 5)y\cos xy+5^{\sin xy}(\ln 5)xy'\cos xy+6yy'=5y+5xy',$$

ezt rendezve és y'-t kiemelve:

$$y'[x5^{\sin xy}(\ln 5)\cos xy+6y-5x]=5y-5^{\sin xy}(\ln 5)y\cos xy,$$

ebből

$$y'=\frac{y[5-5^{\sin xy}(\ln 5)\cos xy]}{x5^{\sin xy}(\ln 5)\cos xy+6y-5x}.$$

11. $e^{\operatorname{sh} x}+e^{\operatorname{sh} y}+y^2=6; \quad y'=?$

$$e^{\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x+e^{\operatorname{sh} y}(\operatorname{ch} y)y'+2yy'=0;$$

ezt rendezzük:

$$y'(e^{\operatorname{sh} y}\operatorname{ch} y+2y)=-e^{\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x;$$

$$y'=-\frac{e^{\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x}{e^{\operatorname{sh} y}\operatorname{ch} y+2y}.$$

12. $\sin x\cos y=0{,}5; \quad y'=?$

$$\cos x\cos y+\sin x(-\sin y)y'=0;$$

ebből

$$y'=\frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}=\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y.$$

13. $\sin x^{\cos y}+\ln x^2y=3x; \quad y'=?$ A kifejezést átalakítjuk, mert szorzat logaritmusa helyett logaritmusok összegét könnyebb differenciálnunk.

$$\sin x^{\cos y}+2\ln x+\ln y=3x.$$

Az első tag belső függvénye logaritmikusan deriválható: először ezt a deriváltat határozzuk meg:

Legyen $z=x^{\cos y}$; ekkor $\ln z=\cos y\ln x$, és így $\frac{z'}{z}=(-\sin y)y'\ln x+$ $+(\cos y)\frac{1}{x}$; ebből

$$z'=x^{\cos y}\left(\frac{\cos y}{x}-y'\sin y\ln x\right).$$

Most deriváljuk az eredeti függvényt:

$$\cos x^{\cos y}(x^{\cos y})'+\frac{2}{x}+\frac{y'}{y}=3;$$

behelyettesítve az $(x^{\cos y})'$-re kapott kifejezést:

$$\cos x^{\cos y}(x^{\cos y})\left[\frac{\cos y}{x}-y'\sin y\ln x\right]+\frac{2}{x}+\frac{y'}{y}=3;$$

rendezve:

$$y'\left[(-\cos x^{\cos y})x^{\cos y}(\sin y)\ln x+\frac{1}{y}\right]=$$

$$=3-\frac{2}{x}-\frac{(\cos x^{\cos y})x^{\cos y}\cos y}{x};$$

ebből

$$y'=\frac{\dfrac{3x-2-(\cos x^{\cos y})x^{\cos y}\cos y}{x}}{\dfrac{-y(\cos x^{\cos y})x^{\cos y}(\sin y)\ln x+1}{y}}=$$

$$=\frac{y[3x-2-(\cos x^{\cos y})x^{\cos y}\cos y]}{x[-y(\cos x^{\cos y})x^{\cos y}(\sin y)\ln x+1]}.$$

14. $\sqrt{2x+y^2}=\ln\sqrt{y^2-x^2}; \quad y'=?$

A gyököt törtkitevőként írva:

$$(2x+y^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln(y^2-x^2);$$

ezt deriváljuk:

$$\frac{1}{2}(2x+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2+2yy')=\frac{1}{2}\frac{1}{y^2-x^2}(2yy'-2x);$$

$$\frac{1+yy'}{\sqrt{2x+y^2}}=\frac{yy'-x}{y^2-x^2}\Bigg|\cdot\sqrt{2x+y^2}(y^2-x^2);$$

$$(1+yy')(y^2-x^2)=(yy'-x)\sqrt{2x+y^2};$$

$$y^2-x^2+y^3y'-x^2yy'=yy'\sqrt{2x+y^2}-x\sqrt{2x+y^2};$$

9*

rendezve:

$$y^2-x^2+x\sqrt{2x+y^2}=y'\left(y\sqrt{2x+y^2}+x^2y-y^3\right);$$

$$y'=\frac{y^2-x^2+x\sqrt{2x+y^2}}{y\sqrt{2x+y^2}+x^2y-y^3}.$$

15. $\sqrt[x]{x^2+y^2}+3y^2=6x^4;\quad y'=?$

Mivel az első tagot csak logaritmikusan lehet deriválni, ezzel külön foglalkozunk.

Legyen $z=\sqrt[x]{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{x}}$; ekkor $\ln z=\frac{1}{x}\ln(x^2+y^2)$; ezt differenciálva: $\frac{z'}{z}=-\frac{1}{x^2}\ln(x^2+y^2)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy')$; ebből

$$z'=\sqrt[x]{x^2+y^2}\left[\frac{2x+2yy'}{x(x^2+y^2)}-\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2}\right].$$

Most differenciáljuk az eredeti implicit függvényt, rögtön behelyettesítve a kapott eredményt:

$$\sqrt[x]{x^2+y^2}\,\frac{2x^2+2xyy'-(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}{x^2(x^2+y^2)}+6yy'=24x^3.$$

Mindkét oldalt szorozzuk a tört nevezőjével és elkülönítjük az y'-t tartalmazó tagokat.

$$2x^2\sqrt[x]{x^2+y^2}+2xyy'\sqrt[x]{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\sqrt[x]{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)+$$
$$+6yy'x^2(x^2+y^2)=24x^5(x^2+y^2);$$

$$y'\left[2xy\sqrt[x]{x^2+y^2}+6yx^2(x^2+y^2)\right]=$$

$$=24x^5(x^2+y^2)+(x^2+y^2)\sqrt[x]{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)-2x^2\sqrt[x]{x^2+y^2};$$

$$y'=\frac{(x^2+y^2)\left[24x^5+\sqrt[x]{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)\right]-2x^2\sqrt[x]{x^2+y^2}}{2xy\left[\sqrt[x]{x^2+y^2}+3x(x^2+y^2)\right]}.$$

16. $y=(\sin xy)^x;\quad y'=?\quad \ln y=x\ln\sin xy;$

$$\frac{1}{y}y'=\ln\sin xy+x\frac{1}{\sin xy}\cdot(\cos xy)(y+xy');$$

$$\frac{y'}{y}=\ln\sin xy+xy\operatorname{ctg}xy+x^2y'\operatorname{ctg}xy;$$

$$y'=y\ln\sin xy+xy^2\operatorname{ctg}xy+x^2y'y\operatorname{ctg}xy;$$

$$y'(1-x^2y\operatorname{ctg}xy)=y(\ln\sin xy+xy\operatorname{ctg}xy);$$

$$y'=\frac{y(\ln\sin xy+xy\operatorname{ctg}xy)}{1-x^2y\operatorname{ctg}xy}.$$

17. $4y^x+x^y=5;\quad y'=?$

A feladatot logaritmikus deriválással oldjuk meg. Bevezetjük a $z=4y^x$ és $u=x^y$ jelölést.

Ekkor egyrészt

$$\ln z=\ln 4+x\ln y;$$

$$\frac{z'}{z}=\ln y+x\frac{y'}{y};$$

$$z'=(4y^x)'=4y^x\left(\ln y+x\frac{y'}{y}\right).$$

Másrészt

$$\ln u=y\ln x;$$

$$\frac{u'}{u}=y'\ln x+y\cdot\frac{1}{x};$$

$$u'=(x^y)'=x^y\left(y'\ln x+\frac{y}{x}\right).$$

Így az eredeti függvény differenciálhányadosa:

$$4y^x\left(\ln y+\frac{xy'}{y}\right)+x^y\left(y'\ln x+\frac{y}{x}\right)=0;$$

$$4y^x\ln y+4y^{x-1}xy'+x^yy'\ln x+x^{y-1}y=0;$$

$$y'(4y^{x-1}x+x^y\ln x)=-(x^{y-1}y+4y^x\ln y);$$

$$y'=-\frac{x^{y-1}y+4y^x\ln y}{4y^{x-1}x+x^y\ln x}.$$

Határozzuk meg a kör érintőjének egyenletét általános alakban, az érintési pont paraméterét t_0-val jelölve. Ezután írjuk fel az érintő egyenletét, ha $t_0 = \frac{\pi}{6}$ és $r=5$.

I. Megoldás:

Az érintő iránytangensének meghatározása:

$$\dot{x} = -r\sin t; \quad \dot{y} = r\cos t.$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Az érintési pont koordinátái:

$$x_0 = r\cos t_0; \quad y_0 = r\sin t_0, \quad \text{vagyis} \quad P_0(r\cos t_0;\ r\sin t_0).$$

Az érintő egyenlete:

$$y - r\sin t_0 = -\operatorname{ctg} t_0(x - r\cos t_0).$$

Felírjuk az érintő egyenletét, ha $t_0 = \frac{\pi}{6}$ és $r=5$:

$$y - 5\sin\frac{\pi}{6} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\left(x - 5\cos\frac{\pi}{6}\right);$$

$$y - \frac{5}{2} = -\sqrt{3}\left(x - 5\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

rendezve:

$$y = -\sqrt{3}x + 10.$$

Ellenőrizzük a feladat eredményének helyességét!

II. Megoldás:

Ellenőrzésképpen a feladatot most úgy oldjuk meg, hogy a t paramétert kiküszöböljük, és az így kapott $y=f(x)$ függvény deriváltját számítjuk ki. Az adott $x=5\cos t$ és $y=5\sin t$ egyenleteket négyzetre emelve, majd összeadva

$$x^2 + y^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) = 25,$$

amiből

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}; \quad x_0 = 5\cos\frac{\pi}{6} = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Mivel a $t_0 = \frac{\pi}{6}$ szöghöz tartozó pont az első síknegyedben van, ezért $y_0 > 0$, és így $y = \sqrt{25 - x^2}$-et kell deriválnunk.

$$y' = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}};$$

$$y'\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{-\frac{5}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{25 - \frac{75}{4}}} = -\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{100-75}{4}}} = -\frac{5\sqrt{3}}{2\cdot\frac{5}{2}} = -\sqrt{3}.$$

$$y_0 = \sqrt{25 - \frac{75}{4}} = \frac{5}{2},$$

és így az érintő egyenlete:

$$y - \frac{5}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{5}{2}\sqrt{3}\right).$$

Az utóbbi módszerrel kapott eredmény az előbbiével megegyezik.

9. Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere, ha nagytengelye az X-tengelyen, kistengelye pedig az Y-tengelyen van,

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t,$$

ahol a az ellipszis nagytengelyének, b pedig a kistengelyének a fele. Legyen most $a=5$, $b=4$, és így az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 5\cos t; \quad y = 4\sin t; \quad \frac{dx}{dt} = -5\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = 4\cos t.$$

Határozzuk meg a $t_0 = \frac{\pi}{4}$ argumentumú ponthoz húzható érintő egyenletét!

I. Megoldás:

Az érintési pont koordinátái:

$$x_0 = 5\cos\frac{\pi}{4} = 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2};$$

$$y_0 = 4\sin\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

és így az érintési pont

$$P_0\left(\frac{5}{2}\sqrt{2};\quad 2\sqrt{2}\right).$$

Meghatározzuk a deriváltat:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4\cos t}{-5\sin t} = -\frac{4}{5}\operatorname{ctg} t.$$

A keresett érintő iránytangense:

$$y'\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{5}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -\frac{4}{5}.$$

Így az érintő egyenlete:

$$y - 2\sqrt{2} = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right),$$

ezt rendezve

$$y = -\frac{4}{5}x + 4\sqrt{2}.$$

II. Megoldás:

A feladatot megoldjuk az ellipszis implicit egyenlete segítségével is:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad y = \pm 4\sqrt{\frac{25 - x^2}{25}} = \pm\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}.$$

Feladatunk megoldásakor az ellipszis X-tengely feletti íve kerül csak szóba, ezért csak a + jelet vesszük figyelembe a gyökjel előtt:

$$y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}.$$

Az érintési pont abszcisszája az előbbiekből $x_0 = \frac{5}{2}\sqrt{2}$. Határozzuk meg az érintési pont koordinátáit, valamint az érintő egyenletét!

Az érintési pont ordinátája:

$$y_0 = \frac{4}{5}\sqrt{25 - \frac{50}{4}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

tehát a pont

$$P_0\left(\frac{5}{2}\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right).$$

A függvény deriváltja:

$$y' = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{4x}{5\sqrt{25 - x^2}}.$$

Az érintő iránytangense a P_0 pontban:

$$y'\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{4\cdot\frac{5}{2}\sqrt{2}}{5\sqrt{25 - \frac{50}{4}}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{50}{4}}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\frac{5}{\sqrt{2}}} = -\frac{4}{5}.$$

Az érintő egyenlete:

$$y - 2\sqrt{2} = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right),$$

tehát a két eredmény megegyezik!

10. $x = 3(\cos t + t\sin t)$; $y = 5(\sin t + t\cos t)$; $y' = ?$

$$\dot{x} = 3(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 3t\cos t;$$

$$\dot{y} = 5(\cos t + \cos t - t\sin t) = 5(2\cos t - t\sin t).$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5(2\cos t - t\sin t)}{3t\cos t} = \frac{5}{3}\left(\frac{2}{t} - \operatorname{tg} t\right).$$

11. $x = 6e^{2t}$; $y = 4e^{-2t}$; $y' = ?$

$$\dot{x} = 12e^{2t}; \quad \dot{y} = -8e^{-2t}.$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-8e^{-2t}}{12e^{2t}} = -\frac{2}{3e^{4t}}.$$

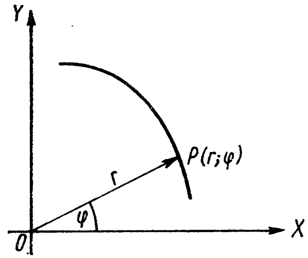
12. $x = e^{5t}$; $y = \cos 3t$; $y' = ?$

$$\dot{x} = 5e^{5t}; \quad \dot{y} = -3\sin 3t.$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-3\sin 3t}{5e^{5t}}.$$

11. Polárkoordinátákkal adott függvény deriváltja

Ha a függvény az $r=r(\varphi)$ polárkoordinátás alakban adott, ahol a φ polárszög a független változó és a rádiuszvektor r hossza a függvényérték (l. a 62. ábrát), akkor bebizonyítható,



62. ábra

hogy differenciálhányadosa — vagyis a görbe valamely pontjában húzott érintő iránytangense — a következő alakban fejezhető ki:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi}.$$

Tehát y-nak x szerinti deriváltját ily módon a φ szög függvényeként kapjuk meg!

Gyakorló feladatok

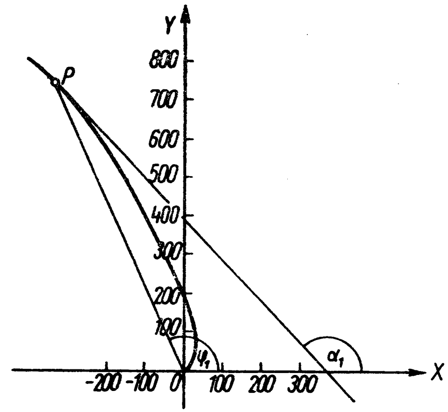
1. Adott az $r=2e^{3\varphi}$ ún. *logaritmikus spirális* (63. ábra). Határozzuk meg a $\varphi_1=2$ (radián) szöghöz tartozó pont rádiuszvektorát, majd a kapott pontban húzható érintő egyenletét!

Először a rádiuszvektort kell meghatároznunk:

$$r_1=2e^{3\cdot 2}=2e^6\approx 2\cdot 403{,}4=806{,}8\approx 807.$$

φ_1 átszámítása fokba:

$$\varphi_1=2\approx 2\cdot 57{,}3^\circ=114{,}6^\circ.$$



63. ábra

Az érintési pont derékszögű koordinátáinak meghatározása:

$$x_1=r_1\cos\varphi_1=807\cos 114{,}6^\circ=807(-0{,}4163)\approx -335.$$

$$y_1=r_1\sin\varphi_1=807\sin 114{,}6^\circ=807\cdot 0{,}9092\approx 732.$$

A derékszögű koordináták: $P(-335;\ 732)$.

A derivált és az iránytangens kiszámítása:

$$r=2e^{3\varphi};\quad r'=6e^{3\varphi};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{6e^{3\varphi}\sin\varphi+2e^{3\varphi}\cos\varphi}{6e^{3\varphi}\cos\varphi-2e^{3\varphi}\sin\varphi}=$$

$$=\frac{3\sin\varphi+\cos\varphi}{3\cos\varphi-\sin\varphi}=\frac{3\operatorname{tg}\varphi+1}{3-\operatorname{tg}\varphi}.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi_1}=\frac{3\operatorname{tg}\varphi_1+1}{3-\operatorname{tg}\varphi_1}\approx\frac{3\operatorname{tg}114{,}6^\circ+1}{3-\operatorname{tg}114{,}6^\circ}\approx\frac{3(-2{,}18)+1}{3+2{,}18}=$$

$$=\frac{-5{,}54}{5{,}18}\approx -1{,}07,\quad \text{vagyis}\quad \operatorname{tg}\alpha=-1{,}07.$$

Az érintő egyenlete:

$$y-732=-1{,}07(x+335).$$

2. Határozzuk meg az $r=3e^{2\varphi}$ egyenletű logaritmikus spirális azon pontját, amelyhez húzott érintő az X-tengely pozitív irányával 45°-os szöget zár be.

Írjuk fel a $\frac{dy}{dx}$ deriváltat!

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{6e^{2\varphi}\sin\varphi+3e^{2\varphi}\cos\varphi}{6e^{2\varphi}\cos\varphi-3e^{2\varphi}\sin\varphi}=$$

$$=\frac{2\sin\varphi+\cos\varphi}{2\cos\varphi-\sin\varphi}=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi+1}{2-\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Nem írtuk fel, de ne felejtsük el, hogy $r=r(\varphi)$!

Ismerjük az érintő iránytangensét (hiszen $\mathrm{tg}\,45°=1$), és ki akarjuk számítani az érintési ponthoz tartozó φ_1 polárszöget, valamint az érintési pont $P_0(x_0;\ y_0)$ koordinátáit. $\frac{dy}{dx}=1$-et helyettesítünk, majd $\mathrm{tg}\,\varphi_1$-et kifejezzük:

$$1=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi_1+1}{2-\mathrm{tg}\,\varphi_1};$$

$$2-\mathrm{tg}\,\varphi_1=2\,\mathrm{tg}\,\varphi_1+1;$$

$$3\,\mathrm{tg}\,\varphi_1=1;\quad \mathrm{tg}\,\varphi_1=\frac{1}{3}\approx 0{,}3333;\quad \varphi_1\approx 18{,}4°.$$

A keresett pont rádiuszvektorának meghatározásához φ_1-et radiánba kell átszámítanunk:

$$\varphi_1\approx 18{,}4°\approx\frac{18{,}4°}{57{,}3°}\approx 0{,}32 \text{ radián}.$$

Ezt az $r(\varphi)$ függvénybe helyettesítve:

$$r_1=3e^{2\varphi_1}=3e^{2\cdot 0{,}32}=3e^{0{,}64}\approx 3\cdot 1{,}9=5{,}7.$$

A keresett pont derékszögű koordinátái:

$$x_1=r_1\cos\varphi_1=5{,}7\cos 18{,}4°=5{,}7\cdot 0{,}9489\approx 5{,}41;$$

$$y_1=r_1\sin\varphi_1=5{,}7\sin 18{,}4°=5{,}7\cdot 0{,}3156\approx 1{,}79.$$

Tehát $P_1(5{,}41;\ 1{,}79)$.

3. Az *archimedesi spirális* általános egyenlete: $r=a\varphi$, ahol $a>0$. Határozzuk meg az $r=3\varphi$ archimedesi spirális $\varphi_1=1$ polárszögű pontjához húzott érintő egyenletét! $r=a\varphi$; $r'=a$, és $\varphi_1=1\approx 57{,}3°$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{a\sin\varphi+a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi-a\varphi\sin\varphi}=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi+\varphi}{1-\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Az érintő iránytangense:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi_1}\approx\frac{\mathrm{tg}\,57{,}3°+1}{1-1\,\mathrm{tg}\,57{,}3°}=\frac{1{,}56+1}{1-1\cdot 1{,}56}=\frac{2{,}56}{-0{,}56}\approx -4{,}57\,.$$

Az érintési pont koordinátáinak meghatározása:

$$x_1=r_1\cos\varphi_1=3\cos 57{,}3°=3\cdot 0{,}5402\approx 1{,}62;$$

$$y_1=r_1\sin\varphi_1=3\sin 57{,}3°=3\cdot 0{,}8415\approx 2{,}52.$$

Tehát az érintési pont: P_1 (1,62; 2,52).

Az érintő egyenlete pedig:

$$y-2{,}52=-4{,}57\ (x-1{,}62).$$

4. A *hiperbolikus spirális* általános egyenlete $r=\frac{a}{\varphi}$ alakú, ahol $a>0$.

Adott az $r=\frac{5}{\varphi}$ hiperbolikus spirális. Határozzuk meg a görbe $\varphi_1=0{,}5$ radián polárszögű pontjában a görbére merőleges egyenes egyenletét!

Valamely görbe adott P_1 pontjában úgy emelünk a görbére merőlegest, hogy a ponthoz húzott érintőre merőleges egyenest határozzuk meg.

A pont rádiuszvektorának nagysága:

$$r_1=\frac{5}{\varphi_1}=\frac{5}{0{,}5}=10.$$

A függvény és deriváltja:

$$r=\frac{5}{\varphi};\quad r'=-\frac{5}{\varphi^2}.$$

A polárszög átszámítása fokba:

$$\varphi_1=0{,}5\approx 0{,}5\cdot 57{,}3°=28{,}65°\approx 28{,}7°.$$

A derivált függvény:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{-\frac{5}{\varphi^2}\sin\varphi+\frac{5}{\varphi}\cos\varphi}{-\frac{5}{\varphi^2}\cos\varphi-\frac{5}{\varphi}\sin\varphi}=$$

$$=\frac{-\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{-\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi-\varphi}{1+\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi_1}=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\varphi_1}{1+\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_1}=\frac{\operatorname{tg}28{,}7^\circ-0{,}5}{1+0{,}5\operatorname{tg}28{,}7^\circ}=$$

$$=\frac{0{,}5475-0{,}5}{1+0{,}5\cdot 0{,}5475}=\frac{0{,}0475}{1{,}2738}\approx 0{,}0374,$$

vagyis $\operatorname{tg}\alpha_1\approx 0{,}0374$.

Az adott pontban a görbére merőleges egyenes iránytangense ($\operatorname{tg}\varphi_2$), mint ismert, az adott pontban a görbéhez húzott érintő iránytangensének negatív reciproka:

$$\operatorname{tg}\alpha_2=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}=-\frac{1}{0{,}0374}\approx -26{,}7.$$

A P_1 pont koordinátái:

$$x_1=r_1\cos\varphi_1=\frac{5}{0{,}5}\cos 28{,}7^\circ\approx 10\cdot 0{,}8771\approx 8{,}8;$$

$$y_1=r_1\sin\varphi_1=\frac{5}{0{,}5}\sin 28{,}7^\circ\approx 10\cdot 0{,}4802\approx 4{,}8.$$

A P_1 pont tehát: $P_1(8{,}8;\,4{,}8)$.
A keresett egyenes egyenlete:

$$y-4{,}8=-26{,}7(x-8{,}8);\quad \text{rendezve}\quad y=-26{,}7x+239{,}8.$$

5. Határozzuk meg az alábbi görbék metszési szögét: $r_1=3\cos\varphi$; $r_2=5\sin\varphi$.

Két görbe metszési szögén a metszésponthoz húzott érintők által bezárt szöget értjük.

Először a két görbe metszéspontjának a polárkoordinátáit kell meghatároznunk, majd az érintők iránytangensét.
A két görbe metszéspontjának meghatározása:

$$3\cos\varphi=5\sin\varphi;\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{5}=0{,}6;\quad \varphi\approx 31^\circ.$$

A metszéspont polárszöge tehát: $\varphi_0=31^\circ\approx 0{,}541$ radián.
A metszéspont rádiuszvektora:

$$r_0=3\cos 31^\circ\approx 3\cdot 0{,}8572\approx 2{,}57.$$

Az első görbe jellemző adatait 1-es, a másodikét 2-es indexszel jelöljük.

$$r_1=3\cos\varphi;\quad r_1'=-3\sin\varphi.$$

$$r_2=5\sin\varphi;\quad r_2'=5\cos\varphi.$$

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{r_1'\sin\varphi+r_1\cos\varphi}{r_1'\cos\varphi-r_1\sin\varphi}=\frac{-3\sin^2\varphi+3\cos^2\varphi}{-3\sin\varphi\cos\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\varphi-1}{2\operatorname{tg}\varphi};$$

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{\varphi_0}=\frac{\operatorname{tg}^2\varphi_0-1}{2\operatorname{tg}\varphi_0}=\frac{\operatorname{tg}^2 31^\circ-1}{2\operatorname{tg}31^\circ}.$$

A másik görbe φ_0 polárszögű pontjához húzható érintő iránytangense:

$$\frac{dy_2}{dx}=\frac{r_2'\sin\varphi+r_2\cos\varphi}{r_2'\cos\varphi-r_2\sin\varphi}=\frac{5\cos\varphi\sin\varphi+5\sin\varphi\cos\varphi}{5\cos^2\varphi-5\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi};$$

$$\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{\varphi_0}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi_0}{1-\operatorname{tg}^2\varphi_0}=\frac{2\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 31^\circ}.$$

A két érintő által bezárt szöget meghatározhatnánk képlettel is, de látjuk, hogy az egyik érintő iránytangense a másik negatív reciproka, tehát a két görbe derékszögben metszi egymást.

6. Legyen $r=\dfrac{1}{e^{5\varphi}}=e^{-5\varphi}$. Határozzuk meg a $\varphi_1=\dfrac{1}{5}$ radián polárszögű pontbeli érintő iránytangensét!

$$r=e^{-5\varphi};\quad r'=-5e^{-5\varphi};$$

$$r_1=\frac{1}{e}\approx 0{,}368;$$

$$\varphi_1=\frac{1}{5}\approx\frac{57{,}3^\circ}{5}\approx 11{,}5^\circ.$$

A derivált mint a φ polárszög függvénye:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{-5e^{-5\varphi}\sin\varphi+e^{-5\varphi}\cos\varphi}{-5e^{-5\varphi}\cos\varphi-e^{-5\varphi}\sin\varphi}=$$

$$=\frac{-5\sin\varphi+\cos\varphi}{-5\cos\varphi-\sin\varphi}=\frac{5\operatorname{tg}\varphi-1}{5+\operatorname{tg}\varphi}.$$

Az érintő iránytangense:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi_1}=\frac{5\operatorname{tg}\varphi_1-1}{5+\operatorname{tg}\varphi_1}=\frac{5\operatorname{tg}11{,}5^\circ-1}{5+\operatorname{tg}11{,}5^\circ}=\frac{5\cdot 0{,}2035-1}{5+0{,}2035}=$$

$$=\frac{1{,}0175-1}{5{,}2035}=\frac{0{,}0175}{5{,}2035}\approx 0{,}003\,36.$$

7. Legyen $r=6(5-3\cos\varphi)$. Határozzuk meg a görbe $\varphi_1=1$ pontjában húzható érintő iránytangensét! (Most a szögfüggvényeket két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)

$$\varphi_1=1\approx 57{,}3^\circ;\quad r=6(5-3\cos\varphi);\quad r'=18\sin\varphi.$$

A derivált mint φ függvénye:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{18\sin^2\varphi+6(5-3\cos\varphi)\cos\varphi}{18\sin\varphi\cos\varphi-6(5-3\cos\varphi)\sin\varphi}=$$

$$=\frac{18\sin^2\varphi+30\cos\varphi-18\cos^2\varphi}{18\sin\varphi\cos\varphi-30\sin\varphi+18\sin\varphi\cos\varphi}=$$

$$=\frac{3\sin^2\varphi+5\cos\varphi-3\cos^2\varphi}{6\sin\varphi\cos\varphi-5\sin\varphi}=\frac{-3(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+5\cos\varphi}{3\sin 2\varphi-5\sin\varphi}=$$

$$=\frac{-3\cos 2\varphi+5\cos\varphi}{3\sin 2\varphi-5\sin\varphi}.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi_1}=\frac{-3\cos 114{,}6^\circ+5\cos 57{,}3^\circ}{3\sin 114{,}6^\circ-5\sin 57{,}3^\circ}=\frac{3\cos 65{,}4^\circ+5\cos 57{,}3^\circ}{3\sin 65{,}4^\circ-5\sin 57{,}3^\circ}=$$

$$=\frac{3\cdot 0{,}4163+5\cdot 0{,}5402}{3\cdot 0{,}9092-5\cdot 0{,}8415}=\frac{1{,}2489+2{,}7010}{2{,}7276-4{,}2075}=$$

$$=-\frac{3{,}9499}{1{,}4799}\approx -2{,}68.$$

Síkban mozgó pont polárkoordinátáit megadhatjuk paraméteres alakban az idő mint paraméter függvényében:

$$r=r(t);\quad \varphi=\varphi(t).$$

A sebesség rádiuszvektor irányú, ill. arra merőleges összetevői:

$$v_r=\dot r;\quad v_\varphi=r\dot\varphi.$$

A pont helyének x és y derékszögű koordinátái — a polárkoordináták és derékszögű koordináták közötti általános összefüggés értelmében:

$$x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi.$$

A sebesség x és y irányú összetevői pedig

$$v_x=\dot x=\dot r\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\dot\varphi;$$

$$v_y=\dot y=\dot r\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\dot\varphi.$$

Mindkét esetben a szorzatfüggvény deriválásának szabályát alkalmaztuk.

A sebesség derékszögű összetevőit ismerve, az eredő sebesség nagysága a Pythagoras-tétellel számítható ki:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}.$$

Mivel

$$\dot x^2=(\dot r\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\dot\varphi)^2=$$

$$=\dot r^2\cos^2\varphi-2r\dot r\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot\varphi+r^2\sin^2\varphi\cdot\dot\varphi^2;$$

$$\dot y^2=(\dot r\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\dot\varphi)^2=$$

$$=\dot r^2\sin^2\varphi+2r\dot r\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot\varphi+r^2\cos^2\varphi\cdot\dot\varphi^2,$$

ezért — a két kifejezést összeadva —

$$\dot x^2+\dot y^2=\dot r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+r^2\dot\varphi^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=$$
$$=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2.$$

Így

$$v=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}=\sqrt{\dot r^2+r^2\dot\varphi^2}.$$

8. Az R sugarú kör paraméteres, polárkoordinátás egyenletrendszere:

$$r=R;\quad \varphi=\omega t.$$

Határozzuk meg a következő egyenletű körmozgást végző pont helyzetét és sebességét adott t_1 időpillanatban:

$$r=10;\ \varphi=3t;\ t_1=0{,}1.$$

Ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy φ értéke radiánban mérendő. Először a pont helyzetét határozzuk meg:

$$r=10;\quad \varphi = 3\cdot 0{,}1 \text{ rad} \approx 3\cdot 5{,}73° \approx 17{,}2°.$$

A pont polárkoordinátáinak ismeretében a derékszögű koordináták is meghatározhatók:

$$x = r\cos\varphi = 10\cos 17{,}2° = 10\cdot 0{,}9553 = 9{,}553;$$

$$y = r\sin\varphi = 10\sin 17{,}2° = 10\cdot 0{,}2957 = 2{,}957.$$

Tehát a pont derékszögű koordinátái: $P(9{,}553;\, 2{,}957)$.

Meghatározzuk a mozgás $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$ sebességét. Mivel $r=10$ állandó, tehát $\dot{r}=0$; $\varphi=3t$; $\dot{\varphi}=3$, ezért

$$v = \sqrt{r^2\dot{\varphi}^2} = r\dot{\varphi} = 10\cdot 3 = 30.$$

Ha $\dot{r}=0$, azaz nincs a pontnak radiális (sugár irányú) sebessége, akkor a fizikából ismert $v=\omega r$ képlet alapján számolhatunk, mert ekkor $\dot{\varphi}=\omega$.

9. Az archimedesi spirális polárkoordinátás, paraméteres egyenletrendszere a következő:

$$r=at;\quad \varphi=\omega t, \text{ ahol } a>0 \text{ és } \omega>0 \text{ állandók.}$$

A mozgó pont rádiuszvektora, ill. polárszöge az idővel arányosan növekszik. A mozgást úgy lehet elképzelni, hogy az origóból kiinduló és egyenletes forgómozgást végző félegyenesen egy pont sugárirányú egyenletes mozgást végez.

Határozzuk meg a spirálisan mozgó pont derékszögű koordinátáit, valamint sebességének abszolút értékét a $t_1=2$ s időpillanatban, ha $r=5t$; $\varphi=6t$.

Itt az együtthatók 5 cm/s, ill. 6 1/s (az utóbbi a szögsebességet adja meg radián per szekundumban).

A $t_1=2$ értékre $r_1 = 5\cdot 2 = 10$ cm; $\varphi_1 = 6\cdot 2 = 12$ radián, vagyis $\varphi_1 \approx 12\cdot 57{,}3° \approx 690°$.

A polárszög tehát 690°, de a szögfüggvények periodikus voltából következik, hogy a szögfüggvényértékek ugyanazok, ha $690°-360° = 330°$-os szög szögfüggvényeivel számolunk.

$$x_1 = r_1\cos\varphi_1 = 10\cos 690° = 10\cos 330° = 10\cdot 0{,}8660 = 8{,}66 \text{ cm};$$

$$y_1 = r_1\sin\varphi_1 = 10\sin 690° = 10\sin 330° = 10\cdot(-0{,}5) = -5 \text{ cm}.$$

A pont derékszögű koordinátái tehát a második másodperc végén

$$P_1(8{,}66 \text{ cm};\ -5 \text{ cm}).$$

Az y koordináta negatív előjele azt fejezi ki, hogy a pont az X-tengely alatt van.

A pont sebességének kiszámítása:

$$r = 5t;\quad \dot{r} = 5;\quad \varphi = 6t;\quad \dot{\varphi} = 6;\quad r_1 = 10 \text{ cm}.$$

$$v_1 = \sqrt{\dot{r}^2 + r_1^2\dot{\varphi}^2} = \sqrt{25+100\cdot 36} = \sqrt{3625} \approx 60\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

A mozgó pont sebessége tehát a mozgás kezdetétől számított második másodperc végén 60 cm/s.

10. A hiperbolikus spirális polárkoordinátás paraméteres egyenletrendszere r $= a/t$; $\varphi=bt$, ahol az a és b állandók pozitív számokat jelentenek.

Határozzuk meg a hiperbolikus spirálison mozgó pont derékszögű koordinátáit a $t_1=5$ időpontban, valamint a pont sebességének nagyságát, ha a mozgás paraméteres egyenletrendszere a következő: $r = \dfrac{100}{t}$; $\varphi=0{,}6\,t$. Legyen $t_1=5$.

Az egységeket most nem írjuk ki.

$$r_1 = \frac{100}{t_1} = \frac{100}{5} = 20;$$

$$\varphi_1 = 0{,}6t_1 = 0{,}6\cdot 5 = 3 \text{ radián} \approx 3\cdot 57{,}3° = 171{,}9° \approx 172°.$$

A megfelelő derékszögű koordináták:

$$x_1 = r\cos\varphi_1 = 20\cos 172° = 20(-\cos 8°) = -20\cdot 0{,}9903 \approx -19{,}8.$$

$$y_1 = r_1\sin\varphi_1 = 20\sin 172° = 20\sin 8° = 20\cdot 0{,}1392 \approx 2{,}8.$$

Tehát a pont derékszögű koordinátái: $P_1(-19{,}8;\, 2{,}8)$.

A mozgó pont sebességének meghatározása:

$$r_1 = \frac{100}{t_1} = \frac{100}{5} = 20;\quad \dot{r}_1 = -\frac{100}{t_1^2} = -\frac{100}{25} = -4;$$

$$\varphi = 0{,}6t;\quad \dot{\varphi} = 0{,}6;\quad \dot{\varphi}_1 = 0{,}6;$$

$$v_1 = \sqrt{\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\varphi}_1^2} = \sqrt{(-4)^2 + 20^2\cdot 0{,}6^2} = \sqrt{16+12^2} = \sqrt{160} \approx 12{,}6.$$

A pont eredő sebességének nagysága 5 másodperc múltán tehát 12,6 sebességegység.

V. MAGASABBRENDŰ DERIVÁLTAK

1. Magasabbrendű deriváltak fogalma

Ha egy függvény deriváltját ismét deriváljuk, akkor megkapjuk az eredeti függvény második, harmadik, negyedik stb. n-edik deriváltját.

Ezeket az alábbi módon jelölhetjük:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2};$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3};$$

$$y^{\mathrm{IV}} = y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^4 f(x)}{dx^4};$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Megjegyezzük, hogy a másodiknál magasabbrendű deriváltakat ritkán használjuk.

Ha valamely függvény független változója a t idő, akkor a magasabbrendű deriválást — az elsőrendűhöz hasonlóan — szintén ponttal szokás jelölni:

$$\ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad \dddot{y} = \frac{d^3 y}{dt^3} \text{ stb.}$$

Például a fizikából ismeretes, hogy valamely mozgó tömegpont mozgását (helyzetét különböző időpontokban) leíró időfüggvények első deriváltja a sebesség, második a gyorsulás.

2. Racionális és egész kitevőjű hatványok magasabbrendű deriváltja

Közvetlenül belátható az

$$y = x^n$$

függvényre vonatkozóan, hogy *racionális* n esetén a k-adik deriváltja

$$y^{(k)} = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k};$$

pozitív egész n esetén

$$y^{(n)} = n!, \quad \text{ahol} \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n,$$

és

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \ldots = 0.$$

Utóbbiból következik, hogy bármely *n-edfokú polinom minden n-nél magasabbrendű deriváltja zérus.*

Gyakorló feladatok

1. $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 14$; $y' = ?$ $y'' = ?$ $y''' = ?$ $y^{(4)} = ?$ $y^{(5)} = ?$

$$y' = 12x^3 + 15x^2 - 4x;$$
$$y'' = 36x^2 + 30x - 4;$$
$$y''' = 72x + 30;$$
$$y^{(4)} = 72;$$
$$y^{(5)} = 0.$$

2. $y = 5x^3 - 4x^2 + 2x + 200$; $y' = ?$ $y'' = ?$ $y''' = ?$ $y^{(4)} = ?$

$$y' = 15x^2 - 8x + 2;$$
$$y'' = 30x - 8;$$
$$y''' = 30;$$
$$y^{(4)} = 0.$$

3. **Határozzuk meg az $y = x^{10}$ függvény ötödik deriváltját!**

$$y^{(5)} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6x^5 = 720\cdot 42x^5 = 30\,240x^5.$$

4. $y=\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}; \quad y^{(4)}=?$

$$y^{(4)}=\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}-1\right)\left(\frac{2}{5}-2\right)\left(\frac{2}{5}-3\right)x^{\frac{2}{5}-4}=$$

$$=\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{8}{5}\right)\left(-\frac{13}{5}\right)x^{-\frac{18}{5}}=$$

$$=-\frac{2\cdot3\cdot8\cdot13}{5^4}x^{-\frac{18}{5}}=-\frac{624}{625}\frac{1}{\sqrt[5]{x^{18}}}=-\frac{624}{625}\frac{1}{x^3\sqrt[5]{x^3}}.$$

5. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=x^{-\frac{1}{4}}; \quad y^{(5)}=?$

$$y^{(5)}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)\left(-\frac{1}{4}-3\right)\left(-\frac{1}{4}-4\right)x^{-\frac{1}{4}-5}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{9}{4}\right)\left(-\frac{13}{4}\right)\left(-\frac{17}{4}\right)x^{-\frac{21}{4}}=$$

$$=-\frac{5\cdot9\cdot13\cdot17}{4^5}x^{-\frac{21}{4}}=-\frac{9945}{1024}\frac{1}{x^5\sqrt[4]{x}}=-9\frac{729}{1024}\frac{1}{x^5\sqrt[4]{x}}.$$

Megjegyzés: Törtkitevőjű hatványok akárhányadik deriváltja sem lehet azonosan nulla. Ennek oka, hogy a felírt szorzatban levő számtényezők egyike sem nulla.

3. Exponencális függvények magasabbrendű deriváltja

$$y=a^x; \quad y'=a^x\ln a;\ldots; \quad y^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$$

Ha az alap e, és így az $y=e^x$ függvényt deriváljuk, akkor $\ln e=1$ miatt

$$y=e^x \quad \text{és} \quad y'=y''=\ldots=y^{(n)}=e^x.$$

Ha az alap kitevője nem x, hanem x-nek valamilyen számszorosa, akkor

$$y=a^{bx}; \quad y'=a^{bx}(b\ln a);\ldots; \quad y^{(n)}=a^{bx}(b\ln a)^n,$$

és így $a=e$ esetén

$$y=e^{bx}; \quad y'=be^{bx};\ldots; \quad y^{(n)}=b^ne^{bx}.$$

Gyakorló feladatok

1. $y=5e^{4x}; \quad y^{(4)}=?$

$$y^{(4)}=5\cdot4^4e^{4x}=5\cdot256e^{4x}=1280e^{4x}.$$

2. $y=\frac{2}{e^{2x}}=2e^{-2x}; \quad y^{(5)}=?$

$$y^{(5)}=2(-2)^5e^{-2x}=2(-32)e^{-2x}=-\frac{64}{e^{2x}}.$$

3. $y=2^x; \quad y^{(4)}=?$

$$y^{(4)}=2^x(\ln 2)^4.$$

4. $y=5\cdot7^x; \quad y^{(5)}=?$

$$y^{(5)}=5\cdot7^x(\ln 7)^5.$$

5. $y=2^{5x}; \quad y^{(5)}=?$

$$y^{(5)}=5^5\cdot2^{5x}(\ln 5)^5.$$

6. $y=3^{-2x}; \quad y'''=?$

$$y'''=(-2)^3\cdot3^{-2x}(\ln 3)^3=-8\cdot3^{-2x}(\ln 3)^3.$$

4. Logaritmusfüggvények magasabbrendű deriváltja

Az e alapú logaritmusfüggvény magasabbrendű deriváltjai:

$$y=\ln x; \quad y'=\frac{1}{x}=x^{-1}; \quad y''=-1x^{-2};$$

$$y'''=2x^{-3};\ldots; \quad y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,x^{-n}.$$

Ha az x-nek 1-től különböző számegyütthatója van, akkor

$$y=\ln ax; \quad y'=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x},$$

és így a többi derivált is megegyezik az $y=\ln x$ függvény megfelelő deriváltjaival, így

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

Az $a>0$ alapú logaritmusfüggvény és deriváltjai:

$$y=\log_a x;\quad y'=\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{\ln a}x^{-1};$$

$$y''=\frac{1}{\ln a}(-x^{-2})=-\frac{x^{-2}}{\ln a};\dots;$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{\ln a}(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}.$$

Gyakorló feladatok

1. $y=12\ln x;\quad y^{(4)}=?$

$$y^{(4)}=12(-1)^3 3!\,x^{-4}=-\frac{72}{x^4}.$$

2. $y=5\ln x;\quad y^{(7)}=?$

$$y^{(7)}=5(-1)^6\cdot 6!\,x^{-7}=5\cdot 720x^{-7}=3600x^{-7}=\frac{3600}{x^7}.$$

3. $y=2\ln 7x;\quad y^{(4)}=?$

$$y^{(4)}=2(-1)^3\cdot 3!\,x^{-4}=-2\cdot 6x^{-4}=-\frac{12}{x^4}.$$

5. A szinusz, koszinusz, hiperbolikus szinusz és hiperbolikus koszinusz magasabbrendű deriváltja

Érdemes megfigyelni, hogy bizonyos függvények deriváltjai periodikusan ismétlődnek.

Így pl. $y=\sin x$; $y'=\cos x$; $y''=-\sin x$; $y'''=-\cos x$; $y^{(4)}=\sin x$; $y^{(5)}=\cos x$ stb.

Mivel a negyedik derivált megegyezik az eredeti függvénnyel, így az n-edik derivált a következő módon számítható ki: n-et

néggyel osztjuk, majd a maradéknak megfelelő deriváltat vesszük.

Legyen pl. $y=\sin x$, akkor $y^{(1967)}=y'''=-\cos x$, mert 1967 néggyel osztva maradékul hármat ad, és $(\sin x)'''=-\cos x$.

Hasonló az eljárás az $y=\cos x$ függvény n-edik deriváltja meghatározásakor is:

Mivel $y=\cos x$; $y'=-\sin x$; $y''=-\cos x$; $y'''=\sin x$ és $y^{(4)}=\cos x$, ezért pl. ha $y=\cos x$, akkor $y^{(1967)}=y'''=+\sin x$, mert 1967 4-gyel osztva 3-at ad maradékul.

A hiperbolikus függvények közül az $y=\operatorname{sh} x$ és $y=\operatorname{ch} x$ függvények magasabbrendű deriváltjait is hasonló módszerrel határozzuk meg. Ui. ha $y=\operatorname{sh} x$, akkor $y'=\operatorname{ch} x$; $y''=\operatorname{sh} x$ stb., vagyis minden párosrendű derivált $\operatorname{sh} x$, minden páratlanrendű pedig $\operatorname{ch} x$; ha viszont $y=\operatorname{ch} x$, akkor $y'=\operatorname{sh} x$; $y''=\operatorname{ch} x$; stb., vagyis minden párosrendű derivált $\operatorname{ch} x$, minden páratlanrendű pedig $\operatorname{sh} x$.

Gyakorló feladatok

1. $y=\sin x$; $y^{(12)}=?$ $y^{(15)}=?$ $y^{(18)}=?$
   $y^{(12)}=\sin x$, mert 12 maradék nélkül osztható 4-gyel.
   $y^{(15)}=y'''=-\cos x$, mert 15-öt 4-gyel osztva a maradék 3.
   $y^{(18)}=y''=-\sin x$, mert 18-at 4-gyel osztva, a maradék 2.
2. $y=\cos x$; $y^{(20)}=?$ $y^{(23)}=?$ $y^{(1002)}=?$
   $y^{(20)}=y=\cos x$, mert 20 osztható 4-gyel.
   $y^{(23)}=y'''=\sin x$, mert 23-at 4-gyel osztva, a maradék 3.
   $y^{(1002)}=y''=-\cos x$, mert 1002-t 4-gyel osztva, a maradék 2.
3. $y=\sin 4x$; $y^{(4)}=?$ $y^{(6)}=?$ Itt a közvetett függvény deriválási szabályát is alkalmazzuk:
   $y^{(4)}=4^4\sin 4x$;
   $y^{(6)}=-4^6\sin 4x$.
4. $y=\cos 3x$; $y^{(4)}=?$ $y^{(6)}=?$
   $y^{(4)}=3^4\cos 3x$; $y^{(6)}=-3^6\cos 3x$.
5. $y=\operatorname{sh} x$; $y^{(41)}=?$ $y^{(92)}=?$
   $y^{(41)}=y'=\operatorname{ch} x$, mert a 41 páratlan szám;
   $y^{(92)}=y=\operatorname{sh} x$, mert 92 páros szám.
6. $y=\operatorname{sh} 2x$; $y^{(8)}=?$ $y^{(11)}=?$
   $y^{(8)}=2^8\operatorname{sh} 2x$; $y^{(11)}=2^{11}\operatorname{ch} 2x$.
7. $y=\operatorname{ch} x$; $y^{(9)}=?$ $y^{(20)}=?$
   $y^{(9)}=\operatorname{sh} x$, mert 9 páratlan szám;
   $y^{(20)}=\operatorname{ch} x$, mert 20 páros szám.
8. $y=\operatorname{ch} 3x$; $y'''=?$ $y^{(15)}=?$
   $y'''=3^3\operatorname{sh} 3x$, ill. $y^{(15)}=3^{15}\operatorname{sh} 3x$.

6. Implicit függvények magasabbrendű deriváltja

Ha implicit alakú függvénykapcsolatot deriválunk, akkor az első és a magasabbrendű deriváltakat is implicit alakban kapjuk. Az első deriváltat kifejezhetjük x-szel és y-nal; a második derivált a változókon kívül az első deriváltat is tartalmazza stb. Amennyiben valamely derivált helyettesítési értékét akarjuk kiszámítani egy P_0 pontban, akkor ismernünk kell a P_0 pont x_0, y_0 koordinátáin kívül a keresett deriváltnál alacsonyabbrendű deriváltak értékét is ebben a pontban.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi implicit alakban megadott függvény harmadik deriváltját, valamint a harmadik derivált helyettesítési értékét a $P_0(3; 4)$ pontban!

$$x^2+y^2=25; \quad y'''=? \quad 2x+2yy'=0; \quad 2yy'=-2x; \quad y'=\frac{-x}{y}.$$

$$y''=\frac{-1y+xy'}{y^2};$$

$$y'''=\frac{(-y'+y'+xy'')y^2-(-y+xy')\cdot 2yy'}{y^4}=$$

$$=\frac{xy''y^2+2y^2y'-2xy(y')^2}{y^4}=\frac{xyy''+2yy'-2x(y')^2}{y^3}.$$

Behelyettesítéssel meggyőződünk arról, hogy a P_0 pont rajta van a görbén:

$$3^2+4^2=25,$$

tehát rajta van.

Amennyiben a harmadik derivált helyettesítési értékét akarjuk meghatározni a $P_0(3; 4)$ pontban, akkor ismernünk kell e pontban az első és második derivált értékét!

$$y'(P_0)=\frac{-3}{4}; \quad y''(P_0)=\frac{-4+3\left(-\frac{3}{4}\right)}{16}=\frac{-\frac{16}{4}-\frac{9}{4}}{16}=-\frac{25}{64};$$

$$y'''(P_0)=\frac{3\cdot 4\left(-\frac{25}{64}\right)+2\cdot 4\left(-\frac{3}{4}\right)-2\cdot 3\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{64}=$$

$$=\frac{-\frac{75}{16}-\frac{24}{4}-\frac{54}{16}}{64}=\frac{-\frac{75}{16}-\frac{96}{16}-\frac{54}{16}}{64}=\frac{-225}{1024}.$$

2. $x^3-4xy+y^2=0; \quad y'(1)=? \quad y''(1)=?$

A függvény implicit alakú, és ha nem akarjuk explicit alakban kifejezni, akkor a derivált helyettesítési értékét csak akkor határozhatjuk meg, ha ismerjük az $x=1$ abszcisszához tartozó ordinátát is.

$$1-4\cdot 1y+y^2=0;$$

$$y^2-4y+1=0;$$

$$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2};$$

$$y_1=2+\sqrt{3}; \quad y_2=2-\sqrt{3}.$$

Az első és második deriváltat tehát a $P_1(1; 2+\sqrt{3})$, ill. $P_2(1; 2-\sqrt{3})$ pontokban fogjuk meghatározni. Először a függvény első deriváltját számítjuk ki.

$$3x^2-4(y+xy')+2yy'=0;$$

$$3x^2-4y-4xy'+2yy'=0;$$

$$3x^2-4y=4xy'-2yy';$$

$$3x^2-4y=y'(4x-2y);$$

$$y'=\frac{3x^2-4y}{4x-2y}.$$

P_1 és P_2 koordinátáit ismerjük, így az első derivált helyettesítési értékét meg tudjuk határozni.

$$y'(P_1)=\frac{3\cdot 1^2-4(2+\sqrt{3})}{4\cdot 1-2(2+\sqrt{3})}=\frac{3-8-4\sqrt{3}}{4-4-2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-5-4\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}=\frac{5+4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},$$

ebből a nevező gyöktelenítésével kapjuk:

$$y'(P_1)=\frac{12+5\sqrt{3}}{6}=2+\frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

Ugyanígy adódik — a gyökjel negatív előjelére —

$$y'(P_2)=2-\frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

A második deriváltat az implicit alakú első deriváltból kapjuk:

$$y''=\frac{(6x-4y')(4x-2y)-(3x^2-4y)(4-2y')}{(4x-2y)^2};$$

a műveleteket elvégezve és összevonva:

$$y''=\frac{12x^2-16xy'-12xy+16y+6x^2y'}{(4x-2y)^2}=$$

$$=\frac{6x^2-8xy'-6xy+8y+3x^2y'}{2(2x-y)^2}.$$

A második derivált helyettesítési értéke a P_1 helyen:

$$y''(P_1)=$$

$$=\frac{6\cdot1-8\cdot1\left(2+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)-6\cdot1(2+\sqrt{3})+8(2+\sqrt{3})+3\cdot1\cdot\left(2+\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)}{2(2\cdot1-2-\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{6-16-\frac{20}{3}\sqrt{3}-12-6\sqrt{3}+16+8\sqrt{3}+6+\frac{5}{2}\sqrt{3}}{6}=-\frac{13\sqrt{3}}{36}.$$

Hasonlóan

$$y''(P_2)=\frac{13\sqrt{3}}{36}.$$

3. $x^2+4y^2=37;\quad y'(-1)=?\quad y''(-1)=?$ Először a pont koordinátáit határozzuk meg.

$$(-1)^2+4y^2=37;\quad 4y^2=36;\quad y^2=9;\quad y=\pm3.$$

$$P_1(-1;3),\quad P_2(-1;-3).$$

Meghatározzuk a függvény deriváltjait:

$$2x+8yy'=0;\quad 8yy'=-2x;\quad y'=-\frac{x}{4y};$$

$$y'(P_1)=-\frac{-1}{12}=\frac{1}{12};\quad y'(P_2)=-\frac{-1}{-12}=-\frac{1}{12};$$

$$y''=\frac{-1\cdot4y+x\cdot4y'}{16y^2}=\frac{xy'-y}{4y^2};$$

$$y''(P_1)=\frac{-1\cdot\frac{1}{12}-3}{4\cdot9}=\frac{-\frac{37}{12}}{36}=-\frac{37}{432};$$

$$y''(P_2)=\frac{-1\left(-\frac{1}{12}\right)+3}{4\cdot9}=\frac{\frac{37}{12}}{36}=\frac{37}{432}.$$

7. Szorzatfüggvények magasabbrendű deriváltjai

Legyen $u=u(x)$ és $v=v(x)$ két differenciálható függvény; ekkor szorzatuk első deriváltja:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Második deriváltja:

$$(uv)''=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv''.$$

Harmadik deriváltja:

$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+v'''.$$

A differenciálást tovább folytatva, és a megfelelő tagokat összevonva, az n-edik deriváltra az ún. *Leibniz*-szabály adódik:

$$(uv)^{(n)}=uv^{(n)}+\binom{n}{1}u'v^{(n-1)}+\binom{n}{2}u''v^{(n-2)}+\ldots+$$

$$+\binom{n}{n-1}u^{(n-1)}v'+u^{(n)}v.$$

Itt az általánosan $\binom{n}{k}$ -val jelölt mennyiségek az ún. binomiális együtthatók:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}.$$

Jegyezzük meg, hogy

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \text{és} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

A Leibniz-szabályt használhatjuk törtfüggvények magasabbrendű deriváltjainak kiszámítására is. Ekkor a nevezőt — mint negatív kitevőjű hatványt — a számlálóba visszük és a függvényt szorzatként deriváljuk.

Gyakorló feladatok

1. $y = x^4 e^x; \quad y''' = ?$

$$y''' = uv''' + \binom{3}{1} u'v'' + \binom{3}{2} u''v' + u'''v;$$

$$u = x^4; \quad u' = 4x^3; \quad u'' = 12x^2; \quad u''' = 24x;$$

$$v = v' = v'' = v''' = e^x.$$

$$y''' = x^4e^x + 3\cdot 4x^3e^x + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot 12x^2e^x + 24xe^x =$$

$$= e^x(x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 24x).$$

2. $y = x^5 \cos 2x; \quad y''' = ? \quad y^{(5)} = ?$

A Leibniz-szabály értelmében:

$$y''' = uv''' + \binom{3}{1} u'v'' + \binom{3}{2} u''v' + u'''v;$$

$$y^{(5)} = uv^{(5)} + \binom{5}{1} u'v^{(4)} + \binom{5}{2} u''v''' + \binom{5}{3} u'''v'' + \binom{5}{4} u^{(4)}v' + u^{(5)}v.$$

A szükséges deriváltak:

$$u = x^5; \; u' = 5x^4; \; u'' = 20x^3; \; u''' = 60x^2; \; u^{(4)} = 120x; \; u^{(5)} = 120;$$

$$v = \cos 2x; \; v' = -2\sin 2x; \; v'' = -4\cos 2x; \; v''' = 8\sin 2x;$$

$$v^{(4)} = 16\cos 2x; \; v^{(5)} = -32\sin 2x.$$

Ezekkel

$$y''' = x^5\cdot 8\sin 2x + 3\cdot 5x^4(-4\cos 2x) + 3\cdot 20x^3(-2\sin 2x) +$$

$$+ 60x^2\cos 2x = 8x^5\sin 2x - 60x^4\cos 2x - 120x^3\sin 2x +$$

$$+ 60x^2\cos 2x = (8x^5 - 120x^3)\sin 2x + (-60x^4 + 60x^2)\cos 2x.$$

$$y^{(5)} = x^5(-32\sin 2x) + 5\cdot 5x^4\cdot 16\cos 2x + 10\cdot 20x^3\cdot 8\sin 2x +$$

$$+ 10\cdot 60x^2\cdot(-4\cos 2x) + 5\cdot 120x(-2\sin 2x) + 120\cos 2x =$$

$$= -32x^5\sin 2x + 400x^4\cos 2x + 1600x^3\sin 2x -$$

$$- 2400x^2\cos 2x - 1200x\sin 2x + 120\cos 2x =$$

$$= (-32x^5 + 1600x^3 - 1200x)\sin 2x + (400x^4 - 2400x^2 + 120)\cos 2x.$$

3. $y = x^5 \operatorname{ch} 4x; \quad y^{(4)} = ?$

$$y^{(4)} = uv^{(4)} + \binom{4}{1} u'v''' + \binom{4}{2} u''v'' + \binom{4}{3} u'''v' + u^{(4)}v.$$

$$u = x^5; \; u' = 5x^4; \; u'' = 20x^3; \; u''' = 60x^2; \; u^{(4)} = 120x;$$

$$v = \operatorname{ch} 4x; \; v' = 4\operatorname{sh} 4x; \; v'' = 16\operatorname{ch} 4x; \; v''' = 64\operatorname{sh} 4x; \; v^{(4)} = 256\operatorname{ch} 4x.$$

$$y^{(4)} = x^5\cdot 256\operatorname{ch} 4x + 4\cdot 5x^4\cdot 64\operatorname{sh} 4x + 6\cdot 20x^3\cdot 16\operatorname{ch} 4x +$$

$$+ 4\cdot 60x^2\cdot 4\operatorname{sh} 4x + 120x\cdot\operatorname{ch} 4x =$$

$$= (256x^5 + 1920x^3 + 120x)\operatorname{ch} 4x + (1280x^4 + 960x^2)\operatorname{sh} 4x.$$

4. $y = e^x \sin x; \quad y^{(7)} = ?$

$$y^{(7)} = uv^{(7)} + \binom{7}{1} u'v^{(6)} + \binom{7}{2} u''v^{(5)} + \binom{7}{3} u'''v^{(4)} +$$

$$+ \binom{7}{4} u^{(4)}v''' + \binom{7}{5} u^{(5)}v'' + \binom{7}{6} u^{(6)}v' + u^{(7)}v.$$

$u = e^x$, ennek minden deriváltja e^x.

$$v = \sin x; \quad v' = \cos x; \quad v'' = -\sin x; \quad v''' = -\cos x;$$

$$v^{(4)} = \sin x; \quad v^{(5)} = \cos x; \quad v^{(6)} = -\sin x; \quad v^{(7)} = -\cos x.$$

A binomiális együtthatókat számítjuk még ki:

$$\binom{7}{1} = \binom{7}{6} = 7; \quad \binom{7}{2} = \binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21; \quad \binom{7}{3} = \binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

$$y^{(7)} = e^x[-\cos x + 7(-\sin x) + 21\cos x + 35\sin x + 35(-\cos x) +$$
$$+21(-\sin x) + 7\cos x + \sin x] = e^x(8\sin x - 8\cos x) =$$
$$= 8e^x(\sin x - \cos x).$$

5. $y = e^{2x}\ln x; \quad y^{(4)} = ?$

$$y^{(4)} = uv^{(4)} + \binom{4}{1}u'v''' + \binom{4}{2}u''v'' + \binom{4}{3}u'''v' + u^{(4)}v.$$

$$u = e^{2x}; \quad u' = 2e^{2x}; \quad u'' = 4e^{2x}; \quad u''' = 8e^{2x}; \quad u^{(4)} = 16e^{2x};$$

$$v = \ln x; \quad v' = \frac{1}{x}; \quad v'' = -\frac{1}{x^2}; \quad v''' = \frac{2}{x^3}; \quad v^{(4)} = -\frac{6}{x^4}.$$

$$\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4; \quad \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6.$$

$$y^{(4)} = e^{2x}\left(-\frac{6}{x^4}\right) + 4\cdot 2e^{2x}\cdot\frac{2}{x^3} + 6\cdot 4e^{2x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) +$$
$$+4\cdot 8e^{2x}\frac{1}{x} + 16e^{2x}\ln x =$$
$$= e^{2x}\left(-\frac{6}{x^4} + \frac{16}{x^3} - \frac{24}{x^2} + \frac{32}{x} + 16\ln x\right) =$$
$$= \frac{2e^{2x}}{x^4}(-3 + 8x - 12x^2 + 16x^3 + 8x^4\ln x).$$

6. $y = \sin 2x \ln x; \quad y^{(5)} = ?$

$$y^{(5)} = uv^{(5)} + \binom{5}{1}u'v^{(4)} + \binom{5}{2}u''v''' + \binom{5}{3}u'''v'' + \binom{5}{4}u^{(4)}v' + u^{(5)}v.$$

$$u = \sin 2x; \quad u' = 2\cos 2x; \quad u'' = -4\sin 2x;$$
$$u''' = -8\cos 2x; \quad u^{(4)} = 16\sin 2x; \quad u^{(5)} = 32\cos 2x.$$

$$v = \ln x; \quad v' = \frac{1}{x}; \quad v'' = -\frac{1}{x^2}; \quad v''' = \frac{2}{x^3};$$

$$v^{(4)} = -\frac{6}{x^4}; \quad v^{(5)} = \frac{24}{x^5}.$$

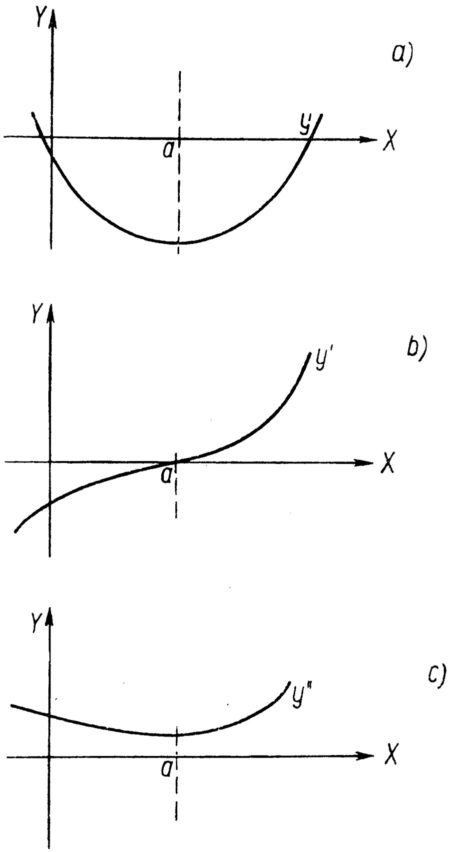
$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5; \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10.$$

$$y^{(5)} = (\sin 2x)\frac{24}{x^5} + 5\cdot 2(\cos 2x)\left(-\frac{6}{x^4}\right) +$$
$$+10(-4\sin 2x)\cdot\frac{2}{x^3} + 10(-8\cos 2x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) +$$
$$+5\cdot 16(\sin 2x)\cdot\frac{1}{x} + 32(\cos 2x)\ln x =$$
$$= \frac{24\sin 2x}{x^5} - \frac{60\cos 2x}{x^4} - \frac{80\sin 2x}{x^3} +$$
$$+\frac{80\cos 2x}{x^2} + \frac{80\sin 2x}{x} + 32\cos 2x\cdot\ln x =$$
$$= \left(\frac{24}{x^5} - \frac{80}{x^3} + \frac{80}{x}\right)\sin 2x + \left(-\frac{60}{x^4} + \frac{80}{x^2} + 32\ln x\right)\cos 2x.$$

VI. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI

1. Szöveges szélsőérték-feladatok

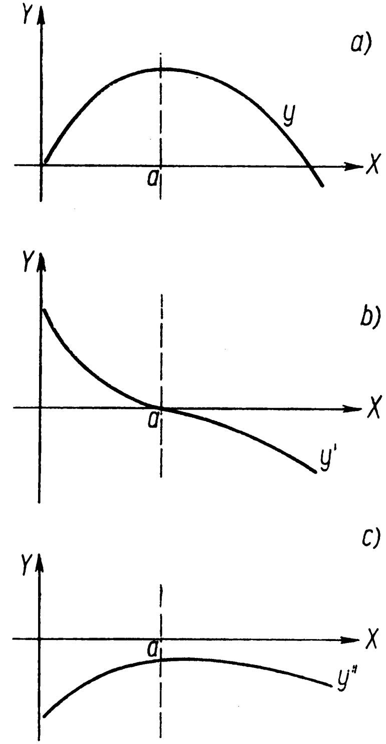
Egy — legalább kétszer differenciálható — $y=f(x)$-nek csak olyan a helyen lehet lokális szélsőértéke, ahol $y'(a)=0$. Annak



64. ábra

eldöntésére, hogy van-e tényleg szélsőértéke, és az maximum vagy minimum-e, kétféle feltételt ismertetünk.

1. Ha $y'(a)=0$ és $y''(a)>0$, akkor minimum (64. ábra), ha $y'(a)=0$ és $y''(a)<0$, akkor maximum van (65. ábra).

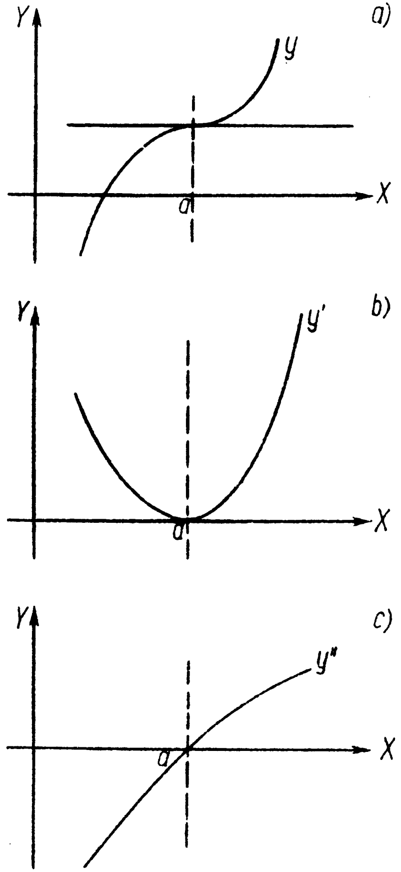


65. ábra

Ha $y''(a)=0$, akkor még nem tudjuk eldönteni, hogy van-e egyáltalán szélsőérték és az milyen. A 66. ábrán látható esetben pl. a függvénynek az a helyen nincs szélsőértéke annak ellenére, hogy első deriváltja nulla (itt második deriváltja is nulla). Ha viszont $y'(a)=y''(a)=\dots=y^{(n-1)}(a)=0$, de $y^{(n)}(a)\neq 0$, vagyis az a helyen $y^{(n)}$ az első el nem tűnő derivált, akkor páros

n és $y^{(n)}(a)>0$ esetén minimum, $y^{(n)}(a)<0$ esetén maximum van; ha viszont n páratlan, akkor az a helyen nincs szélsőérték.

2. Ha $y'(a)=0$ és $y'(x)$ az a helyen előjelet vált, akkor szélsőérték van, mégpedig ha egy megfelelő — a-nál kisebb — c pontban $y'(c)>0$ és egy megfelelő — a-nál nagyobb — d pontban $y'(d)<0$, akkor a függvénynek az a helyen maxi-



66. ábra

muma van; ellenkező esetben, vagyis ha $y'(c)<0$ és $y'(d)>0$, akkor minimuma.

Megfelelő az olyan pont, amelyről biztosan tudjuk, hogy közte és az a hely között y' nem változtatja előjelét.

Adott esetben a két feltétel közül azt alkalmazzuk, amelyik egyszerűbbnek látszik.

Most olyan feladatokat oldunk meg, amelyekben először a mennyiségek közötti kapcsolatot matematikailag meg kell fogalmazni, vagyis a függvényt fel kell írni; ezután kerülhet sor az így kapott függvény szélsőértékének meghatározására. A feladatokat részletesen oldjuk meg, hogy az Olvasó könnyen áttekinthesse az egyes megoldások módszerét és lépéseit.

Gyakorló feladatok

1. Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez 2 m² területű lemezt használhatunk fel, Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy térfogata a legnagyobb legyen, és mekkora ez a legnagyobb térfogat?

Adott a doboz F felülete, mely csak 2 m² lehet; változtathatjuk az alapélt és a magasságot.

Ha az alapélt x-szel, és a magasságot y-nal jelöljük, akkor a térfogat

$$V=x^2y.$$

Az x és y között azonban még egy összefüggés áll fenn, mely a felületre vonatkozó kikötésből adódik:

$$x^2+4xy=2.$$

Tehát két egyenletünk van két ismeretlennel. Ha azonban az utóbb egyenletből y-t kifejezzük és a térfogat képletébe helyettesítjük, akkor a térfogat már csak egy mennyiségtől, az alapél x hosszúságától függ:

$$y=\frac{2-x^2}{4x};\quad V=x^2\frac{2-x^2}{4x}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^3.$$

A térfogatnak azon x értékre lehet szélsőértéke, amelyre első deriváltja nulla. Differenciáljuk a V-t x szerint:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x^2.$$

Az első deriváltat nullával tesszük egyenlővé, és kifejezzük x-et.

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x^2=0;\quad \text{ebből}\quad x^2=\frac{2}{3},\quad \text{és}\quad x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}};$$

vagyis

$$x_1=\sqrt{\frac{2}{3}};\quad x_2=-\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Mivel egy test alapéle pozitív, ezért csak az x_1 gyököt vizsgáljuk.
A szélsőértékre a második deriváltból következtethetünk:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-\frac{6x}{4};$$

ennek helyettesítési értéke az $x_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$ helyen: $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_1}=-\frac{6}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}<0$,

tehát a függvénynek maximuma van.

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=?$$

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}272\ \mathrm{m}^3.$$

Az adott lemezből készíthető négyzet alapú doboz legnagyobb térfogata tehát 0,272 m^3.

2. Egy felül nyitott, henger alakú, 1/2 l térfogatú mérőedényt akarunk készíteni. Hogyan válasszuk az edény alapsugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk fel, és mennyi lesz ez a felhasznált lemezmennyiség?

A térfogat adott, az alapkör sugara és a magasság változtatható. Az alapkör sugarát r-rel, a magasságot m-mel jelölve, a V térfogatra felírhatjuk:

$$V=r^2\pi m=0{,}5.$$

A felhasznált anyag területe, vagyis a mérőedény felszíne:

$$F=r^2\pi+2r\pi m.$$

Mivel a felszínt megadó képlet m-re nézve elsőfokú, ezért m-et fejezzük ki a térfogat képletéből és helyettesítjük a felszín képletébe, így a felszín már csak egy mennyiségtől — az alapkör sugarától — függ.

$$m=\frac{0{,}5}{r^2\pi};\quad F=r^2\pi+\frac{2r\pi\cdot 0{,}5}{r^2\pi}=r^2\pi+\frac{1}{r}.$$

A felszínt megadó függvény tehát minden pozitív r-re differenciálható, ezért csak ott lehet szélsőértéke, ahol a sugár szerinti differenciálhányadosa zérus:

$$\frac{dF}{dr}=2r\pi-\frac{1}{r^2}=0;$$

ebből — r^2-tel végigszorozva, majd az egyenletet rendezve —

$$r_1^3=\frac{1}{2\pi};\quad \text{vagyis}\quad r_1=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\approx 0{,}543.$$

A szélsőérték létezését és fajtáját a második derivált előjele alapján döntjük el:

$$\frac{d^2F}{dr^2}=2\pi+\frac{2}{r^3};\quad \left(\frac{d^2F}{dr^2}\right)_{r_1}=2\pi+4\pi>0,$$

tehát a függvénynek az r_1 helyen minimuma van.

A felhasználandó lemezmennyiség:

$$F=r_1^2\pi+\frac{1}{r_1}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\,\pi+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}}\approx$$

$$\approx 0{,}543^2\pi+\frac{1}{0{,}543}\approx 0{,}93+1{,}84=2{,}77\ \mathrm{dm}^2.$$

A 0,5 l térfogatú, adott alakú edény tehát 2,77 dm^2 területű lemezből készíthető el a leggazdaságosabban.

3. Egy tűzfal mellett 600 m^2-es, téglalap alakú területet akarunk elkeríteni. Csak három oldalon kell kerítést készítenünk, mert a negyedik oldal a tűzfal. Hogyan válasszuk meg a téglalap hosszúságát és szélességét, hogy a kerítés hossza a legkisebb legyen és mekkora ez a minimális hossz?

Jelöljük a téglalap két különböző oldalát a-val és b-vel; utóbbi legyen a tűzfal mellett. A kerítés hossza:

$$l=2a+b.$$

Az a és b értékeket úgy kell megválasztanunk, hogy a kettő szorzata, vagyis a bekerített terület 600 m^2 legyen:

$$T=ab=600.$$

Ebből „b" értékét kifejezzük, és a kerület képletébe helyettesítjük, ekkor a kerület már csak az a értéktől függ:

$$b=\frac{600}{a}; \quad l=2a+\frac{600}{a}.$$

Ez a függvény minden pozitív a-ra differenciálható. a negatív vagy 0 értéke pedig a feladat jellegéből nem kerülhet megoldásként szóba.

Az l hossznak, mint a függvényének, ott lehet szélsőértéke, ahol az „a" szerint vett első deriváltja zérus:

$$\frac{dl}{da}=2-\frac{600}{a^2}=0.$$

Ebből a-t kifejezzük:

$$a^2=300; \quad a_1=\sqrt{300}.$$

Az egyenlet negatív megoldása a feladat jellegéből következően nem érdekel bennünket, hiszen negatív oldalú téglalap nem létezik.

A szélsőérték tényleges létezését és fajtáját a második derivált alapján döntjük el:

$$\frac{d^2l}{da^2}=\frac{1200}{a^3}; \quad \left(\frac{d^2l}{da^2}\right)_{a_1}=\frac{1200}{\sqrt{300^3}}>0,$$

tehát a kerületnek az a_1 helyen minimuma van.

A minimális kerület kiszámítása:

$$l_1=2a_1+\frac{600}{a_1}=2\sqrt{300}+\frac{600}{\sqrt{300}}=2\sqrt{300}+2\sqrt{300}=$$

$$=4\sqrt{300}\approx 69{,}6\text{ m}.$$

Az adott nagyságú terület elkerítéséhez szükséges minimális kerítéshossz 69,6 m.

4. A lencsetörvény összefüggést állapít meg a lencse fókusztávolsága, a tárgytávolság és a képtávolság között: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$. Adott f fókusztávolság esetén milyen tárgy- és képtávolságra legkisebb a két távolság összege, és mekkora ez a minimális távolság? Ha a két távolság összegét y-nal jelöljük, akkor

$$y=t+k.$$

A lencsetörvényből kifejezzük k értékét és y kifejezésébe helyettesítjük:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}\ \Big|\cdot tkf;$$

$$tk=fk+tf;$$

$$k=\frac{tf}{t-f};$$

$$y=t+\frac{tf}{t-f}.$$

Mivel f (a lencse fókusztávolsága) állandó, így y értéke csak t értékétől függ. Differenciáljuk y-t mint t függvényét:

$$\frac{dy}{dt}=1+\frac{f(t-f)-tf}{(t-f)^2}=1-\frac{f^2}{(t-f)^2}.$$

$t=f$ kivételével mindenütt differenciálható.

A függvénynek t azon értékére lehet szélsőértéke, amelyre az első derivált nulla:

$$1-\frac{f^2}{(t-f)^2}=0;$$

Ebből $(t-f)^2=f^2$;

$$t^2-2tf+f^2=f^2; \quad t(t-2f)=0.$$

Az egyenlet megoldásai: $t_1=0$ és $t_2=2f$. A felírt függvénynek tehát ezen t értékek mellett lehet szélsőértéke. A szélsőérték létezésére és fajtájára a második derivált előjeléből következtetünk:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{f^2\cdot 2(t-f)}{(t-f)^4}=\frac{2f^2}{(t-f)^3}.$$

$t_1=0$-ra a lencsetörvény nem értelmezett (a tárgyat nem lehet a lencsében elhelyezni).

$t_2=2f$ behelyettesítésével

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{t_2}=\frac{2f^2}{f^3}=\frac{2}{f}>0,$$

tehát y-nak minimuma van.

Értéke ezen helyen

$$y_2=t_2+\frac{t_2f}{t_2-f}=2f+\frac{2f^2}{f}=4f.$$

A kép és tárgy távolsága ekkor a fókusztávolság négyszerese.

5. A ferde hajítás távolságát megadó képlet:

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

ahol v_0 az elhajított test kezdősebessége, α a kezdősebesség irányának a vízszintessel bezárt szöge ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 90°$), g a nehézségi gyorsulás. Milyen α érték mellett legnagyobb a hajítás távolsága? Mekkora ez a maximális távolság? (v_0 állandó, g állandó).

A hajítás távolsága tehát adott v_0 és g esetén az α szög függvénye. Ott lehet szélsőértéke, ahol α szerinti első deriváltja zérus:

$$\frac{ds_{\max}}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cos 2\alpha = 0.$$

Mivel g pozitív, tehát nullától különböző v_0 kezdősebesség esetén (ha $v_0 = 0$, akkor a kérdésfeltevésnek nincs értelme) $\cos 2\alpha = 0$, vagyis

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ ahol } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \text{ ebből}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

A megoldásnak értelme csak a $\frac{\pi}{4}$ és a $\frac{3\pi}{4}$ szögekre van, így $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} = 45°$ és $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4} = 135°$.

A szélsőérték tényleges létezésére és fajtájára a második derivált előjeléből következtetünk:

$$\frac{d^2 s}{d\alpha^2} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot (-2 \sin 2\alpha) = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 2\alpha;$$

$$\left(\frac{d^2 s}{d\alpha^2}\right)_{\alpha_1} = -\frac{4v_0^2}{g} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{4v_0^2}{g}(+1) < 0,$$

és

$$\left(\frac{d^2 s}{d\alpha^2}\right)_{\alpha_2} = -\frac{4v_0^2}{g} \sin \frac{3\pi}{2} = -\frac{4v_0^2}{g}(-1) > 0.$$

Az α_1 behelyettesítésekor tehát a második derivált negatív, és így a függvénynek itt maximuma van. Az α_2 behelyettesítésekor a második derivált pozitív, és így a függvénynek itt minimuma van. A két szélsőérték fizikai értelmezése a következő: Ha egy testet egy vízszintes alapegyenessel 45°-os szöget bezáró irányban elhajítunk, akkor az egyenes irányításával egyirányban ér el a test maximális távolságra. Ha a bezárt szög 135°, akkor a test a negatív irányban tesz meg maximális távolsá-

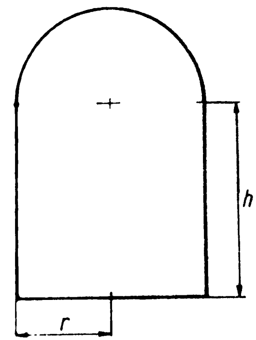
got. A kettő nagysága természetesen egyenlő, hiszen a hajítás távolsága nem függhet az alapegyenes irányításának megválasztásától.

Az $s_{\max}$ értékének meghatározása:

$$s_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g}; \quad s_{\min} = -\frac{v_0^2}{g}.$$

Vegyük észre, hogy s minimális *abszolút* értéke zérus, és ez éppen a vizsgálatunkból kizárt $\alpha = 0$, ill. $\alpha = 90°$ esetében lép fel.

6. Egy csatorna keresztmetszete a 67. ábrán látható alakú; a ke-



67. ábra

resztmetszet $2\ m^2$ kell, hogy legyen. Hogyan válasszuk a csatorna r és h méretét, hogy minimális kerület adódjék? mekkora lesz ez a minimális kerület? A terület:

$$T = \frac{r^2\pi}{2} + 2rh = 2.$$

A kerület:

$$K = 2r + 2h + r\pi.$$

A kerület r és h értékétől függ, a terület képlete segítségével azonban ezek egyike kiküszöbölhető. A terület képletéből h-t kifejezzük és K-ba helyettesítjük:

$$r^2\pi + 4rh = 4; \quad h = \frac{4 - r^2\pi}{4r};$$

$$K = 2r + 2\,\frac{4 - r^2\pi}{4r} + r\pi = 2r + \frac{2}{r} - \frac{r\pi}{2} + r\pi =$$

$$= 2r + \frac{2}{r} + \frac{r\pi}{2} = r\left(\frac{4+\pi}{2}\right) + \frac{2}{r}.$$

Ez a függvény minden pozitív r-re differenciálható. A kerületnek azon r érték esetén lehet szélsőértéke, amelyre r szerinti deriváltja nulla:

$$\frac{dK}{dr}=\frac{4+\pi}{2}-\frac{2}{r^2}=0;$$

ebből

$$\frac{4+\pi}{2}=\frac{2}{r^2};\quad r^2=\frac{4}{4+\pi};\quad r=\pm\sqrt{\frac{4}{4+\pi}}.$$

A feladatnak nyilván csak pozitív r lehet a megoldása:

$$r_1=\frac{2}{\sqrt{4+\pi}}\approx 0{,}75\text{ m}.$$

A szélsőérték tényleges előfordulására és fajtájára a második derivált előjeléből következtetünk:

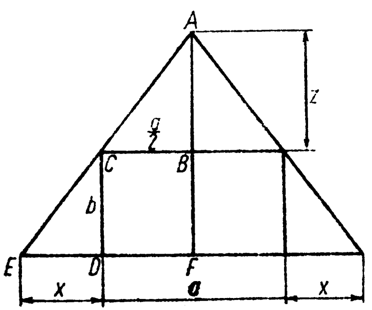
$$\frac{d^2K}{dr^2}=\frac{4}{r^3},\quad \text{és}\quad \left(\frac{d^2K}{dr^2}\right)_{r_1}=\frac{4}{\dfrac{8}{(\sqrt{4+\pi})^3}}>0,$$

tehát a függvénynek az r_1 helyen minimuma van. A kerület minimális értéke:

$$K(r_1)=\frac{2}{\sqrt{4+\pi}}\left(\frac{4+\pi}{2}\right)+\frac{2}{\dfrac{2}{\sqrt{4+\pi}}}=2\sqrt{4+\pi}\approx$$

$$\approx 2\sqrt{7{,}14}\approx 2\cdot 2{,}67=5{,}34\text{ m}.$$

7. Adott egy a és b oldalú téglalap. A 68. ábrán látható módon olyan egyenlőszárú háromszöget szerkesztünk, amelynek alapja a téglalap egyik a oldalával egy egyenesbe esik, szárai pedig átmennek a téglalap másik két csúcspontján. Mekkorának válasszuk az egyenlőszárú háromszög magasságát, hogy területe a legkisebb legyen, és mekkora a legkisebb terület?



68. ábra

Az egyenlőszárú háromszög alapja $a+2x$; magassága $b+z$; területe tehát

$$T=\frac{(a+2x)(b+z)}{2};$$

ebben a képletben két változó mennyiség fordul elő, ezek egyike azonban kiküszöbölhető, az ACB és CED háromszögek hasonlóságának felhasználásával. Ui. fennáll:

$$z:\frac{a}{2}=b:x,$$

amiből

$$z=\frac{ab}{2x}.$$

Ezt a terület fenti formulájába behelyettesítve:

$$T=\frac{(a+2x)\left(b+\dfrac{ab}{2x}\right)}{2}=\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(b+\frac{ab}{2x}\right)=$$

$$=\frac{ab}{2}+\frac{a^2b}{4x}+bx+\frac{ab}{2}=ab+bx+\frac{a^2b}{4x}.$$

Mivel a és b a téglalap oldalai adott állandók, az egyenlőszárú háromszög területe csak az x-szel jelölt szakasz hosszúságától függ.

A területnek ott lehet szélsőértéke, ahol x szerinti differenciálhányadosa zérus:

$$\frac{dT}{dx}=b-\frac{a^2b}{4x^2}=0;\quad b=\frac{a^2b}{4x^2};\quad 4x^2=a^2,$$

vagyis

$$x^2=\frac{a^2}{4},\quad x=\frac{a}{2}.$$

A negatív gyököt azért nem vettük figyelembe, mert az x szakasz csak pozitív lehet.

A szélsőérték fajtája a második derivált előjeléből állapítható meg:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=-\frac{a^2b}{4}\left(-\frac{2x}{x^4}\right)=\frac{a^2b}{2x^3}>0,$$

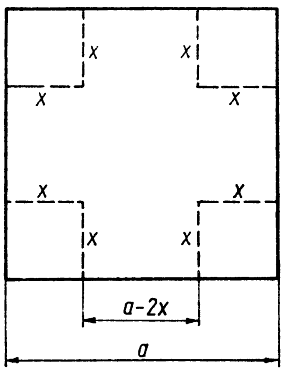
vagyis az egyenlőszárú háromszög területének minimuma van. Ha $x=\frac{a}{2}$, akkor $z=\frac{ab}{2x}=b$, és a magasság $m=b+z=2b$.

A minimális terület:

$$T_{min}=ab+b\frac{a}{2}+\frac{a^2b}{4\frac{a}{2}}=ab+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=2ab.$$

A háromszög minimális területe tehát az adott téglalap területének kétszerese.

8. Adott egy a oldalú négyzet, amelynek mind a négy sarkából kivágunk egy-egy x oldalú négyzetet. Hogyan válasszuk meg x értékét, hogy a megmaradt lemezből az oldalak felhajlításával kapható — felül nyitott, $a-2x$ oldalú négyzet alapú — edény térfogata maximális legyen (69. ábra)?



69. ábra

Az edény térfogata:

$$V=(a-2x)^2\cdot x=a^2x-4ax^2+4x^3.$$

A térfogat x harmadfokú függvénye. Ott lehet szélsőértéke, ahol első deriváltja nulla:

$$\frac{dV}{dx}=a^2-8ax+12x^2=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{8a\pm\sqrt{64a^2-48a^2}}{24}=\frac{8a\pm4a}{24};$$

$$x_1=\frac{a}{2},\quad x_2=\frac{a}{6}.$$

A szélsőérték fajtáját a második derivált előjele dönti el:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=24x-8a;$$

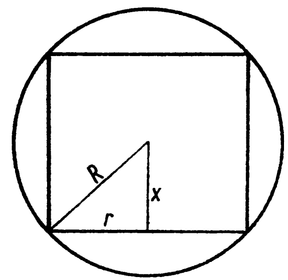
$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_1}=24\cdot\frac{a}{2}-8a=4a>0;$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x_2}=24\cdot\frac{a}{6}-8a=-4a<0.$$

Vagyis a térfogatnak az x_1 helyen minimuma, az x_2 helyen maximuma van. A minimális térfogat nulla, mert ekkor a lemezt félbevágjuk. A maximális térfogat:

$$V(x_2)=\left(a-\frac{a}{3}\right)^2\cdot\frac{a}{6}=\frac{4a^2}{9}\cdot\frac{a}{6}=\frac{2a^3}{27}.$$

9. Határozzuk meg az R sugarú gömbben elhelyezhető legnagyobb térfogatú henger sugarát és magasságát (metszetét l. a 70. ábrán)!



70. ábra

A henger térfogata: $V=r^2\pi m=2r^2\pi x$, ahol r az alapkör sugara, és x a magasság fele. Mindkét mennyiség változhat, de egymástól nem függetlenek, így az egyik kiküszöbölhető. Pythagoras tétele alapján ui.: $R^2=r^2+x^2$; ebből r-et kifejezve: $r=\sqrt{R^2-x^2}$; ezt a térfogat képletbe helyettesítve:

$$V=2(R^2-x^2)\pi x=2R^2\pi x-2\pi x^3.$$

A térfogat tehát a magasság felének (és így a magasságnak is) harmadfokú függvénye.

Keressük a szélsőértéket:

$$\frac{dV}{dx}=2R^2\pi-6\pi x^2=0;$$

12*

ebből

$$x^2 = \frac{R^2}{3}, \quad \text{és} \quad x = \frac{R}{\sqrt{3}};$$

a megoldás nem lehet negatív előjelű, mert x hosszúságot jelent.

A szélsőérték fajtája a második derivált előjeléből határozható meg:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -12\pi x, \quad \text{és} \quad V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -12\pi\frac{R}{\sqrt{3}} < 0,$$

ezért a függvénynek az $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ helyen maximuma van.

Az R sugarú gömbben elférő legnagyobb térfogatú henger térfogata:

$$V_{max} = V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = 2R^2\pi\frac{R}{\sqrt{3}} - 2\pi\frac{R^3}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{6R^3\pi - 2R^3\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4R^3\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tehát a gömbbe helyezhető henger térfogata maximálisan a gömb térfogatának $\sqrt{3}$-ad része lehet.

10. Határozzuk meg az R sugarú gömbben elférő legnagyobb palástú henger sugarát és felszínét (70. ábra)!

A henger palástja:

$$P = 2r\pi\cdot 2x = 4r\pi x.$$

Az r és x közötti kapcsolat az ábrán látható derékszögű háromszögre felírható Pythagoras-tétel alapján: $R^2 = r^2 + x^2$, amiből $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, ezt a palást képletébe helyettesítve:

$$P = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2} = 4\pi x(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A palást így már csak egy mennyiség (a fél magasság) függvénye. Differenciáljuk ezt a függvényt:

$$\frac{dP}{dx} = 4\pi\left[(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x\frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right] =$$

$$= 4\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right).$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol első deriváltja nulla:

$$4\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) = 0 \;\Big|\cdot\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{4\pi};$$

$$R^2 - x^2 - x^2 = 0, \quad \text{ebből} \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}};$$

a gyökvonáskor csak a pozitív előjelet vettük figyelembe, mert x csak pozitív lehet.

Tekintsük a második deriváltat:

$$\frac{d^2P}{dx^2} =$$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) - \frac{\sqrt{R^2 - x^2}\cdot 2x - x^2\cdot\frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{R^2 - x^2}\right] =$$

$$= 4\pi\left[-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \frac{x^3}{(\sqrt{R^2 - x^2})^3}\right] =$$

$$= -4\pi\left[\frac{3x}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{x^3}{(\sqrt{R^2 - x^2})^3}\right] < 0$$

minden szóba jövő $0 < x < R$ értékre, tehát $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ értékre is, vagyis erre az értékre a palást területe maximális.

A maximális palástú henger sugara $r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$, és palástja

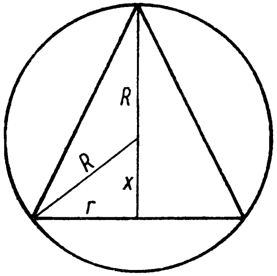
$$P_{max} = P\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = 4\frac{R}{\sqrt{2}}\pi\frac{R}{\sqrt{2}} = 2R^2\pi.$$

A hengerpalást maximális területe tehát a gömb felszínének a fele.

11. Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írható legnagyobb térfogatú kúp sugarát, magasságát és térfogatát (metszetét l. a 71. ábrán)!

Az ábra jelöléseivel a kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2\pi(R + x)}{3}.$$



71. ábra

Itt az r és x mennyiségek változhatnak, azonban az $r^2 = R^2-x^2$ kapcsolat áll fenn közöttük, így egyikük kiküszöbölhető, ezt az összefüggést a kúp térfogatának képletébe helyettesítve:

$$V=\frac{(R^2-x^2)\pi(R+x)}{3}=\frac{\pi(R+x)^2(R-x)}{3}.$$

A térfogatot megadó függvényt x szerint differenciálva:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\pi}{3}[2(R+x)(R-x)+(R+x)^2(-1)]=$$

$$=\frac{\pi}{3}(R+x)(2R-2x-x-R)=\frac{\pi}{3}(R+x)(R-3x).$$

Mivel R és x pozitív előjelűek, így az első derivált csak akkor nulla, ha

$$R-3x=0, \quad \text{azaz} \quad x=\frac{R}{3}.$$

A második derivált:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{\pi}{3}[R-3x+(R+x)(-3)]=\frac{\pi}{3}(-2R-6x)=$$

$$=-\frac{\pi}{3}(2R+6x)<0,$$

mivel R és x pozitív, tehát a térfogat az $x=\frac{R}{3}$ helyen maximális.

A kúp sugara: $r=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{9}}=\sqrt{\frac{8R^2}{9}}=\frac{2}{3}R\sqrt{2}.$

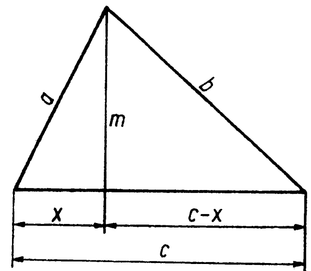
A kúp magassága: $m=x+R=\frac{R}{3}+R=\frac{4}{3}R.$

A maximális térfogat:

$$V_{max}=V\left(\frac{R}{3}\right)=\frac{\frac{8R^2}{9}\pi\cdot\frac{4}{3}R}{3}=\frac{4R^3\pi}{3}\cdot\frac{8}{27}.$$

Tehát a kúp maximális térfogata a gömb térfogatának $\frac{8}{27}$-ede.

12. Adott területű és alapú háromszögnek mikor legkisebb a kerülete (72. ábra)?



72. ábra

Ha a háromszög alapját c-vel, területét T-vel, magasságát m-mel jelöljük, akkor $m=\frac{2T}{c}$, tehát m is adottnak tekintendő. A háromszöget a magasság két derékszögű háromszögre bontja; az ábrán látható jelölésekkel a háromszög oldalai: $a=\sqrt{m^2+x^2}$; $b=\sqrt{m^2+(c-x)^2}$; c. A kerület:

$$k=\sqrt{m^2+x^2}+\sqrt{m^2+(c-x)^2}+c=(m^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+[m^2+(c-x)^2]^{\frac{1}{2}}+c.$$

Differenciálva:

$$\frac{dk}{dx}=\frac{1}{2}(m^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x+\frac{1}{2}[m^2+(c-x)^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(c-x)\cdot(-1)=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{m^2+x^2}}-\frac{c-x}{\sqrt{m^2+(c-x)^2}}.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol az első derivált nulla, tehát

$$\frac{x}{\sqrt{m^2+x^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{m^2+(c-x)^2}};$$

mindkét oldalt négyzetre emelve, majd a nevezőkkel keresztbe szorozva,

$$x^2[m^2+(c-x)^2]=(c-x)^2(m^2+x^2).$$

Ránézésre láthatjuk, hogy mindkét oldalon előfordul az $x^2(c-x)^2$ tag, tehát ezek kiesnek.

Marad

$$x^2m^2=(c-x)^2m^2;\quad x^2m^2=c^2m^2-2cm^2x+m^2x^2;\quad 2cm^2x=c^2m^2;$$

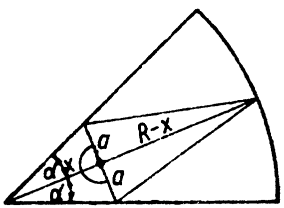
$$x=\frac{c^2m^2}{2cm^2}=\frac{c}{2}.$$

Irracionális egyenletet oldottunk meg négyzetre emeléssel; ilyenkor hamis gyököt is kaphatunk. $\frac{c}{2}$ azonban megoldása (gyöke) az eredeti egyenletnek, erről behelyettesítéssel győződhet meg az Olvasó.

A szélsőértéket szolgáltató háromszög tehát egyenlőszárú, mert a magassága az alapot felezi.

Annak eldöntését, hogy a kerület valóban minimális, az Olvasóra bízzuk.

13. Rajzoljunk egy 2α nyílásszögű körcikkbe egyenlőszárú háromszöget, a 73. ábrán látható helyzetben. Mekkorának válasszuk a háromszög alapját, hogy területe maximális legyen? Határozzuk meg a maximális területét!



73. ábra

A háromszög alapja és a szög csúcsa közötti szakaszt x-szel jelölve, a terület:

$$T=\frac{2a(R-x)}{2}=a(R-x),$$

ahol „a" a háromszög alapjának fele. Az a és az x változó mennyiségek egyike kifejezhető a másikkal; ui.

$$a=x\,\mathrm{tg}\,\alpha,\ \text{így a terület}\ T=x(R-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

A terület tehát most már csak az x-szel jelölt távolság függvénye. Differenciáljuk a kapott függvényt x szerint:

$$\frac{dT}{dx}=[R-x+x(-1)]\,\mathrm{tg}\,\alpha=(R-2x)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol az első derivált nulla, ez pedig az $x=\frac{R}{2}$ -re teljesül.

A második derivált: $\frac{d^2T}{dx^2}=-2\,\mathrm{tg}\,\alpha<0$, mert $\alpha<90°$, így a területnek az $x=\frac{R}{2}$ helyen maximuma van.

Az alap tehát $2a=R\,\mathrm{tg}\,\alpha$, és a maximális terület:

$$T\left(\frac{R}{2}\right)=\frac{R^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

14. Bontsuk fel az A pozitív számot két pozitív szám összegére úgy, hogy az egyik szám négyzetének és a másik szám köbének összege minimális legyen!

Legyen az egyik szám x, a másik pedig $A-x$; ekkor a vizsgálandó összefüggés

$$y=(A-x)^2+x^3=A^2-2Ax+x^2+x^3,$$

a függvény tehát harmadfokú. Ezt differenciálva:

$$y'=-2A+2x+3x^2.$$

Határozzuk meg az első differenciálhányados zérushelyeit!

$$3x^2+2x-2A=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+24A}}{6}=\frac{-2\pm2\sqrt{1+6A}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{1+6A}}{3};$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+6A}}{3};\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{1+6A}}{3}<0,$$ tehát nem jön számításba.

A második derivált és helyettesítési értéke az x_1 helyen:

$$y'' = 2+6x;$$

$$y''(x_1) = 2+2\left(-1+\sqrt{1+6A}\right) = 2-2+2\sqrt{1+6A} > 0.$$

A függvénynek tehát az x_1 helyen minimuma van. Legyen $A=4$; ekkor

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+24}}{3} = \frac{4}{3}, \quad \text{és} \quad A-x_1 = 4-\frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{9}+\frac{64}{27} = \frac{192+64}{27} = \frac{256}{27} = 9\frac{13}{27}.$$

15. Valamely mennyiséget (pl. egy test súlyát) n-szer megmérjük. Legyenek a mérési eredmények az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok. A mennyiség valódi értéke legjobb becslésének azt az x számot tekintjük, amelytől a mérési eltérések négyzetösszege a legkisebb. Bevezetve az

$$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2 = A$$

jelölést, keressük azt az x értéket, amelyre A minimális.

Szélsőérték ott lehet, ahol A-nak mint x függvényének a deriváltja zérus:

$$\frac{dA}{dx} = 2(x-x_1)+2(x-x_2)+\ldots+2(x-x_n) = 0.$$

Kiemelve és összevonva:

$$2[nx-(x_1+x_2+\ldots+x_n)] = 0,$$

azaz $nx = x_1+x_2+\ldots+x_n$, így

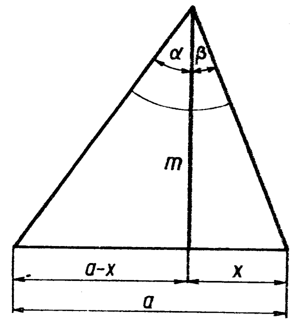
$$x = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n};$$

vagyis a kapott x érték a mért értékek számtani közepe.

A második derivált: $\dfrac{d^2A}{dx^2} = 2n$ mindig pozitív, tehát a függvénynek erre az x értékre minimuma van.

A mennyiség valódi értékének tehát a mért értékek számtani közepét tekinthetjük.

16. Adott egy háromszög a alapja és m magassága (74. ábra). Milyen legyen a háromszög, hogy az alappal szemben a lehető legnagyobb szög feküdjön?



74. ábra

Az ábra jelöléseivel a $y = \alpha+\beta$ maximumát keressük.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a-x}{m}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{m}.$$

$$y = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{a-x}{m}+\frac{x}{m}}{1-\frac{a-x}{m}\cdot\frac{x}{m}} =$$

$$= \frac{\frac{a}{m}}{1-\frac{ax-x^2}{m^2}} = \frac{am}{m^2-ax+x^2}.$$

Így a keresett szög tangense már csak egy változó mennyiségtől függ. Differenciáljuk ezt a függvényt x szerint!

$$y' = \frac{d\operatorname{tg}\gamma}{dx} = \frac{-am(-a+2x)}{(m^2-ax+x^2)^2}.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első differenciálhányadosa nulla, vagyis ahol a tört számlálója nulla (és a nevező nem nulla). Mivel a és m nem nulla, a számláló akkor zérus, ha

$$-a+2x = 0, \quad \text{amiből} \quad x_1 = \frac{a}{2}.$$

Ha $m \neq a/2$, akkor a nevező ez esetben nem nulla.

A második derivált, és helyettesítési értéke az $x_1=a/2$ helyen:

$$y''=\frac{d^2\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)}{dx^2}=$$

$$=\frac{-am[2(m^2-ax+x^2)^2-(-a+2x)\cdot 2(m^2-ax+x^2)(-a+2x)]}{(m^2-ax+x^2)^4}.$$

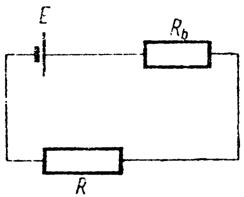
A kijelölt műveleteket nem hajtjuk végre, mert a behelyettesítés során így gyakran egyszerűbben kapjuk meg a keresett értéket. Valóban ránézésre látható, hogy az $x_1=\frac{a}{2}$ helyen a számláló zárójelében a második tag 0; így az $x_1=\frac{a}{2}$ helyen vett helyettesítési érték:

$$y''\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{-2am\left(m^2-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)^2}{\left(m^2-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)^4}<0 \quad \left(m\neq\frac{a}{2}\right);$$

tehát a függvénynek az $x=a/2$ helyen maximuma van.

Mivel $\mathrm{tg}\,\alpha_1=\frac{\frac{a}{2}}{m}=\frac{a}{2m}$ és $\mathrm{tg}\,\beta_1=\frac{\frac{a}{2}}{m}=\frac{a}{2m}$, így $\alpha_1=\beta_1$, és a háromszög egyenlőszárú.

17. Egy villamos telep belső ellenállása R_b, a külső R ellenállás változtatható. R milyen értékére lesz a külső ellenállásra jutó villamos teljesítmény a lehető legnagyobb (75. ábra), és mekkora ez a maximális teljesítmény?



75. ábra

A villamos teljesítmény: $P=I^2R$.
Ha a telep forrásfeszültsége E, akkor az áramkörben folyó áram:

$$I=\frac{E}{R_b+R},$$

és így az R ellenállásra jutó teljesítmény:

$$P=\left(\frac{E}{R_b+R}\right)^2\cdot R=\frac{E^2R}{(R_b+R)^2},$$

amely a telepre kapcsolt R ellenállástól függ.

Differenciáljuk a teljesítményt megadó függvényt az R ellenállás szerint!

$$\frac{dP}{dR}=E^2\frac{(R_b+R)^2-R\cdot 2(R_b+R)}{(R_b+R)^4}=E^2\frac{R_b+R-2R}{(R_b+R)^3}=$$

$$=E^2\frac{R_b-R}{(R_b+R)^3}.$$

A teljesítménynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első differenciálhányadosa nulla, vagyis

$$R_b-R=0, \quad \text{tehát} \quad R=R_b.$$

A második derivált, és helyettesítési értéke az $R=R_b$ helyen:

$$\frac{d^2P}{dR^2}=E^2\frac{-1(R_b+R)^3-(R_b-R)\cdot 3(R_b+R)^2}{(R_b+R)^6};$$

$$P''(R_b)=E^2\frac{-1(2R_b)^3}{(2R_b)^6}=-\frac{E^2}{(2R_b)^3}<0,$$

tehát a függvénynek az $R=R_b$ helyen maximuma van.

$$P(R_b)=\frac{E^2R_b}{(2R_b)^2}=\frac{E^2}{4R_b}=\frac{1}{4}\frac{E^2}{R_b}.$$

Tehát a terhelő ellenállásra jutó maximális teljesítmény

$$\frac{1}{4}\frac{E^2}{R_b}.$$

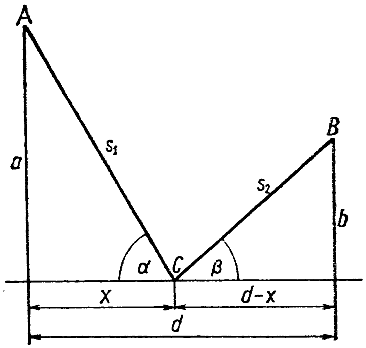
18. Egy országúttól „a" távolságra van az A község és „b" távolságra a B község; a kettő vetületének távolsága az országúton d. Mindkét községhez az országút egyazon pontjából kiinduló egyenes bekötőutat kell építeni úgy, hogy a két bekötőút együttes hossza a legkisebb legyen. Hogyan válasszuk meg ezt a pontot (76. ábra)?

C-vel jelöljük a feladat feltételének megfelelő pontot.

A teljes út az ábra jelöléseivel: $Z=s_1+s_2$, ahol

$$s_1=\sqrt{a^2+x^2}; \quad s_2=\sqrt{b^2+(d-x)^2}.$$

$$Z=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}=(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+[b^2+(d-x)^2]^{\frac{1}{2}}.$$



76. ábra

Differenciáljuk Z-t mint az x függvényét:

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x+\frac{1}{2}[b^2+(d-x)^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(d-x)(-1)=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első differenciálhányados nulla, vagyis

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Az ábrából látható, hogy

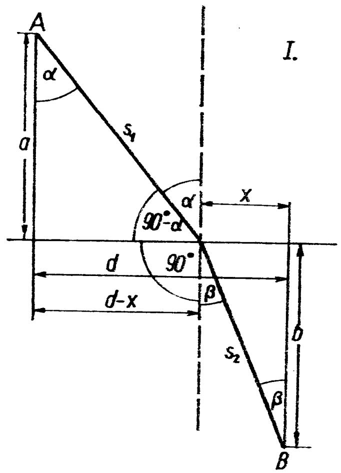
$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\cos\alpha \quad \text{és} \quad \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}=\cos\beta,$$

amiből feladatunkban következik a szögek egyenlősége is, vagyis

$$\alpha=\beta.$$

Ugyanúgy kell tehát eljárnunk, mintha az A pontból egy fénysugár indult volna el, és ez verődött volna vissza az országútról, mint tükörről a B pontba.

19. Egy test az *I.* félsíkban (77. ábra) adott c_1 sebességgel tud haladni, a *II.* félsíkban pedig adott c_2 sebességgel ($c_1>c_2$). Milyen kapcsolatnak kell fennállni az ábra szerinti kiindulási α és β szögek között, hogy a test a legrövidebb idő alatt jusson el az *I.* tartománybeli A pontból a *II.*



77. ábra

tartománybeli B pontba? Jelölje az A pont távolságát a két síktartomány határoló egyenesétől a, és a B pontét b; a két pont vetületét d.

Az egyes útszakaszok — az ábra szerinti x szakasz bevezetésével — a következők:

$$s_1=\sqrt{a^2+(d-x)^2} \quad \text{és} \quad s_2=\sqrt{b^2+x^2}.$$

A menetidő:

$$T=t_1+t_2=\frac{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}{c_1}+\frac{\sqrt{x^2+b^2}}{c_2}.$$

A menetidő, melynek minimumát keressük, x értékétől függ. Ezt a függvényt differenciálva,

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{2}[a^2+(d-x)^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot 2(d-x)(-1)+$$

$$+\frac{1}{c_2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{-(d-x)}{c_1\sqrt{a^2+(d-x)^2}}+\frac{x}{c_2\sqrt{x^2+b^2}}.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol első differenciálhányadosa nulla, vagyis ahol

$$\frac{x}{c_2\sqrt{x^2+b^2}}=\frac{d-x}{c_1\sqrt{a^2+(d-x)^2}}.$$

Nem fejezzük ki x értékét, mivel ez meglehetősen bonyolult lenne, hanem az egyenletet α és β szögfüggvényei segítségével írjuk fel. Az ábra alapján

$$\sin\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} \quad \text{és} \quad \sin\alpha = \frac{d-x}{\sqrt{a^2+(d-x)^2}};$$

ezt behelyettesítve előbbi kifejezésünkbe,

$$\frac{\sin\beta}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{c_1},$$

vagy átrendezve

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}.$$

A szögek szinuszai és a sebességek közötti kapcsolat megegyezik a fénytörés ismert törvényével, ha c_1 a fény terjedési sebessége a *I.* közegben, és c_2 a *II.* közegben. Ez is alátámasztja azt a tapasztalatot, hogy a fény két pont között mindig olyan úton halad, amelyre „menetideje" a legrövidebb. Azonos közegen belül ez egyúttal a „legrövidebb" — tehát egyenes — út.

Annak megállapitását, hogy az így kapott szélsőérték valóban minimum, az Olvasóra bízzuk.

2. L'Hospital-szabály alkalmazása

A L'Hospital-szabály lehetővé teszi, hogy bizonyos esetekben kiszámítsuk olyan törtfüggvények határértékét valamely $x=a$ helyen (az „a" hely lehet véges vagy végtelen), melyek helyettesítési értéke itt $\frac{0}{0}$, ill. $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alakú.

Ha ui. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ [vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\infty$] és az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az „a" hely környezetében differenciálhatók, továbbá $g'(a)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vagyis a két függvény hányadosának határértéke — az előbbi feltételek esetén — a derivált függvények hányadosának határértékével egyenlő. Amennyiben $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a} g'(x)=0$ (ill. mindkét határérték ∞) és a második deriváltak az „a" hely környezetében léteznek, akkor a szabályt ismételten alkalmazhatjuk.

Megjegyzés: Az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek nem kell az $x=a$ helyen értelmezve lenniök, mert csak a határérték létezését használtuk fel.

Az előbb tárgyalt két esetre vezethető vissza még a következő öt eset is: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Ha ugyanis például az első esetben $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, akkor — felhasználva, hogy $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=0$ —

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

alakú, tehát alkalmazható rá a L'Hospital-szabály; azaz

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}.$$

Hasonlóképpen a második esetben, amikor $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \infty-\infty$ lenne, de a különbséget átalakítjuk úgy, hogy szorozzuk és osztjuk $f(x)+$ $+g(x)$-szel.

$$\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]}{f(x)+g(x)}.$$

A nevező határértéke végtelen, a számlálóé pedig vagy véges, vagy végtelen. Ha a számláló határértéke véges, akkor a tört határértéke nulla, ha pedig végtelen, akkor alkalmazható rá a L'Hospital-szabály.

A harmadik esetben: legyen $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, az adott függvény pedig $y=f(x)^{g(x)}$ alakú.

Mindkét oldal e alapú logaritmusát véve,

$$\ln y=g(x)\ln f(x);$$

ennek határértéke

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] = 0\cdot(-\infty)$$

alakú, és így az előbbiek értelmében az első esetben használt átalakítás után alkalmazható a L'Hospital-szabály. Mivel a kapott határérték $\ln y$ határértéke, ezért ebből pl. visszakereséssel lehet meghatározni y határértékét.

A negyedik esetben legyen $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, az adott függvény pedig

$$y=f(x)^{g(x)}$$

alakú.

Mivel $\lim\limits_{x\to a} y=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\infty^0$ alakú, ezért előbb mindkét oldal e alapú logaritmusát vesszük:

$$\ln y=g(x)\ln f(x).$$

Így $\ln y$ határértéke

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] = 0\cdot\infty$$

alakú, ezzel a feladatot visszavezettük az első esetre, tehát a L'Hospital-szabály alkalmazható.

Ha $\ln y$ határértékét megkaptuk, ebből már meg tudjuk határozni y határértékét is.

Legyen végül $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$; és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, az adott függvény pedig $y=f(x)^{g(x)}$ alakú.

A határérték ekkor

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty$$

alakú.

Mind a két oldal e alapú logaritmusát vesszük:

$$\ln y=g(x)\ln f(x);$$

ekkor

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)] = \infty\cdot 0$$

alakú, így az első esetre vezettük vissza $\ln y$ határértékének kiszámítását; ebből y határértéke meghatározható.

Gyakorló feladatok

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=?$

$\ln\frac{2}{2}=\ln 1=0$; $2-2=0$, tehát a tört helyettesítési értékére az $x=2$ helyen $\frac{0}{0}$ adódik.

Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\ln\frac{x}{2}\right)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}.$$

Megjegyzés: Mivel az $\frac{1}{x}$ függvény az $x=2$ helyen folytonos, tehát a bal- és jobboldali határérték megegyezik, vagyis jogosan beszélhetünk határértékről.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x^2}{x-1}=?$ Először a jobboldali határértéket számítjuk ki:

$$\lim_{x\to 1+0}\ln x^2=0;\quad 1-1=0,$$

tehát a tört helyettesítési értéke az $x=1$ helyen $\frac{0}{0}$ határozatlan alakú.

A L'Hospital-szabályt alkalmazva:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{2}{x}=2.$$

Mivel a $\frac{2}{x}$ függvény az $x=1$ helyen folytonos, ezért a két különböző oldali határérték megegyezik, tehát

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x-1} = 2.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$ Mivel $\sin 0 = 0$, tehát a tört az $x=0$ helyen $\frac{0}{0}$ alakú. Mivel itt két páratlan függvény hányadosáról van szó, mely páros, az $x=0$ helyen számított bal- és jobboldali határértékeknek — ha léteznek — meg kell egyezniök.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = ?$ Az $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ összefüggés miatt a tört az $x=0$ helyen $\frac{0}{0}$ alakú. Az előző feladathoz hasonlóan a bal- és jobboldali határértékek — ha léteznek — egyezőek.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-\sin x}{x^2} = ?$ $2\cdot 0 - \sin 0 = 0$ miatt a tört az $x=0$ helyen $\frac{0}{0}$ alakú. A számláló páratlan függvény, a nevező páros függvény, ezért először a jobboldali határértéket számítjuk ki, azután a baloldali határértéket.

$$\lim_{x\to +0} \frac{2x-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to +0} \frac{2-\cos x}{2x} = +\infty,$$

mert $\lim\limits_{x\to +0} (2-\cos x) = 2-1 = 1$, és a nevező a pozitív számokon keresztül tart nullához.

Vizsgáljuk meg az előbbi kifejezés baloldali határértékét!

$$\lim_{x\to -0} \frac{2x-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to -0} \frac{2-\cos x}{2x} = -\infty,$$

mert a számláló határértéke most is 1, de a nevező a negatív számokon keresztül tart a nullához; tehát a bal- és a jobboldali határérték nem egyezik meg.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-7^x}{x} = ?$ A tört helyettesítési értéke az $x=0$ helyen $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ alakú. Először a jobboldali határértéket számítjuk ki.

$$\lim_{x\to +0} \frac{5^x-7^x}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{5^x \ln 5 - 7^x \ln 7}{1} =$$

$$= \lim_{x\to +0} (5^x \ln 5 - 7^x \ln 7) = 5^0 \ln 5 - 7^0 \ln 7 = \ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}.$$

A baloldali határérték szintén ugyanannyi, mert az 5^x, ill. 7^x függvények a nulla helyen folytonosak. Tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x-7^x}{x} = \ln \frac{5}{7}.$$

7. $\lim\limits_{x\to +0} \frac{7^x-5^x}{x^2} = ?$ $\lim\limits_{x\to -0} \frac{7^x-5^x}{x^2} = ?$ A helyettesítési érték az $x=0$ helyen mindkét esetben $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ alakú.

$$\lim_{x\to +0} \frac{7^x-5^x}{x^2} = \lim_{x\to +0} \frac{7^x \ln 7 - 5^x \ln 5}{2x} = +\infty,$$

mert $\lim\limits_{x\to +0} (7^x \ln 7 - 5^x \ln 5) = \ln 7 - \ln 5 = \ln \frac{7}{5} > 0$, és $2x$ a pozitív számokon keresztül tart nullához.

$$\lim_{x\to -0} \frac{7^x-5^x}{x^2} = \lim_{x\to -0} \frac{7^x \ln 7 - 5^x \ln 5}{2x} = -\infty,$$

mert a számláló határértéke az előbbi, de a nevező a negatív számokon keresztül tart nullához.

8. $\lim\limits_{x\to +0} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = ?$ $\lim\limits_{x\to -0} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = ?$ A tört helyettesítési értéke az $x=0$ helyen $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ alakú.

$$\lim_{x\to +0} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to +0} \frac{2^{3x}\cdot 3 \ln 2 - 3^{4x}\cdot 4 \ln 3}{2x}.$$

A számláló jobboldali határértéke:

$$\lim_{x\to +0} (2^{3x}\cdot 3 \ln 2 - 3^{4x}\cdot 4 \ln 3) = \ln \frac{8}{81} < 0,$$

tehát véges negatív szám.

A nevező jobboldali határértéke: 0; mivel x a pozitív számokon keresztül tart a nullához, így a tört jobboldali határértéke: $-\infty$.

A baloldali határérték kiszámításakor azt kapjuk, hogy a számláló határértéke $\ln \frac{8}{81}<0$, de a nevező a negatív számokon át tart a nullához, tehát a tört baloldali határértéke: $+\infty$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{x}=?$ A feladatot megoldjuk a L'Hospital-szabállyal is, és elemi úton is.

Ezzel hívjuk fel az Olvasó figyelmét arra, hogy az ilyen típusú határértékek nemcsak a L'Hospital-szabállyal oldhatók meg.

I. Megoldás:

Az $x=0$ helyen a helyettesítési érték $\frac{0}{0}$ alakú.

$$\lim_{x\to +0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{7}{\cos^2 7x}}{1}=\lim_{x\to +0}\frac{7}{\cos^2 7x}=7,$$

mivel a nevező határértéke 1.

A baloldali határérték szintén ennyi, mert a $\frac{7}{\cos^2 7x}$ tört folytonos a nulla helyen; így

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{x}=7.$$

II. Megoldás:

A feladat megoldása elemi úton:

$$\lim_{x\to +0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{\cos 7x}=$$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\lim_{x\to +0}\frac{7}{\cos 7x}=1\cdot 7=7.$$

A két eredmény megegyezik, de az elemi út ebben az esetben könnyebb.

Itt említjük meg, hogy a L'Hospital-szabály a határérték-számítás hatásos eszköze, de — amint ez a példa is bizonyítja — nem vezet mindig a legrövidebb megoldásra.

10. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}=?$ A helyettesítési érték az $x=\pi$ helyen $\frac{0}{0}$ alakú. Két páratlan függvény hányadosa páros függvény, ezért a bal- és jobboldali határérték — ha létezik — megegyezik.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}=\lim_{x\to\pi}\frac{4\cos 4x}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to\pi}\frac{4\cos^2 5x\cos 4x}{5}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to\pi}\cos^2 5x=1$, és $\lim\limits_{x\to\pi}\cos 4x=1$, ezért

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}=\frac{4}{5}.$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=?$ A számláló és nevező határértéke egyaránt végtelen, így a tört $\frac{\infty}{\infty}$ határozatlan alakú. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}.$$

A helyettesítési érték most is $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, tehát ismételten alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x(\ln 2)^2}.$$

A számláló véges (2), a nevező határértéke végtelen, így a tört határértéke nulla;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=0.$$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x+5}{7x^3+5x-3}=?$ A helyettesítési érték $\frac{\infty}{\infty}$ alakú lenne. A feladatot L'Hospital-szabállyal és elemi úton is megoldjuk.

I. Megoldás:

A L'Hospital-szabályt egymás után háromszor alkalmazva:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x+5}{7x^3+5x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-4}{21x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{42x}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{42}=\frac{2}{7}.$$

II. Megoldás:

A számlálóból és nevezőből x^3-ot kiemelve;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(7+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{2}{7}.$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{\ln 4x}=?$ A tört helyettesítési értéke a végtelenben $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú; alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\ln 4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\frac{1}{4x}\cdot 4}=\lim_{x\to\infty}5x=\infty.$$

14. $\lim\limits_{x\to+0}2x\ln x$? Mivel $\ln x$ csak pozitív x-ekre van értelmezve, tehát nem beszélhetünk baloldali határértékről.

Itt $\lim\limits_{x\to+0}2x=0$, és $\lim\limits_{x\to+0}\ln x=-\infty$, tehát a helyettesítési érték $0\cdot(-\infty)$ alakú.

Alakítsuk át törtté az eredeti kifejezést a következő módon:

$$\lim_{x\to+0}2x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=?$$

Mivel $\lim\limits_{x\to+0}2\ln x=-\infty$, és $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=\infty$, így alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-2x)=0.$$

15. $\lim\limits_{x\to0}2x\operatorname{ctg}3x=?$

Mivel páratlan függvények szorzata páros függvény, ezért az $x=0$ helyen a bal- és jobboldali határérték — ha létezik — megegyezik.

A helyettesítési érték $0\cdot\infty$ határozatlan alakú lenne.

I. Megoldás:

A szorzatot törtté alakítjuk és a L'Hospital-szabályt alkalmazzuk:

$$\lim_{x\to0}2x\operatorname{ctg}3x=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\cos^2 3x=\frac{2}{3}.$$

II. Megoldás:

A kifejezést ügyesen bővítjük, tényezőkre bontjuk:

$$\lim_{x\to0}2x\operatorname{ctg}3x=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x=\frac{2}{3},$$

ugyanis jól ismert, hogy

$$\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin 3x}=1,\quad\text{és}\quad\lim_{x\to0}\cos 3x=1.$$

16. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=?$

A helyettesítési érték 0^0 alakú. A feladatot úgy oldhatjuk meg, hogy a kifejezés logaritmusának határértékét számítjuk ki.

Legyen $y=x^{\sin x}$, akkor

$$\ln y=\ln x^{\sin x}=(\sin x)\ln x;$$

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}(\sin x)\ln x=0\,(-\infty)$$

alakú.

A szorzatot átírva tört alakba:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\frac{-\infty}{\infty}$$

alakú, most már alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-(\sin x)^{-2}\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}-\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to+0}\operatorname{tg} x=(-1)\cdot 0=0.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=0$, ezért $\lim\limits_{x\to+0} y=1$.

A függvénynek csak jobboldali határértéke van az $x=0$ helyen, mert a negatív x értékekre $x^{\sin x}$ nincs értelmezve.

17. $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^x=?$ Baloldali határérték nem létezhet; ui. nullához közeli negatív x értékekre $\sin x<0$, viszont negatív szám valós kitevőjű hatványa általában nincs értelmezve a valós számok körében. Tehát nem végezhetjük el az $x\to-0$ határátmenetet.

A függvény helyettesítési értéke az $x=0$ helyen 0^0 alakú. A feladatot az előbbi példában alkalmazott módszerrel oldjuk meg.

Legyen $y=(\sin x)^x$; akkor $\ln y=x\ln\sin x$, és $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=\lim\limits_{x\to+0}x\ln\sin x$, ami $0\cdot(-\infty)$ alakra vezet.

A szorzatot törtté alakítjuk úgy, hogy az x-et a nevező nevezőjébe visszük; ekkor a számláló $(-\infty)$-hez, a nevező pedig $(+\infty)$-hez tart, vagyis alkalmazható a L'Hospital-szabály:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x}{\sin x}\cdot x\cos x\right).$$

A szorzat egyes tényezőinek jobboldali határértéke:

$$\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x}{\sin x}\right)=-1;\quad \lim_{x\to+0}x\cos x=0\cdot1=0;$$

ezt felhasználva

$$\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x}{\sin x}x\cos x\right)=0,\quad\text{vagyis}\quad\lim_{x\to+0}\ln y=0,$$

és így $\lim\limits_{x\to+0} y=\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^x=1.$

18. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{x}}=?$ Határértéket nem keresünk; ui. $\operatorname{ctg} x$ elég kis negatív x értékekre negatív, de negatív szám valós kitevőjű hatványa általában nem értelmezett, ezért balról nem végezhető el a határátmenet.

A függvény helyettesítési értéke az $x=0$ helyen ∞^0 alakú. Logaritmálással alakítjuk át.

Legyen $\ln y=\ln(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}\ln\operatorname{ctg} x$; akkor

$$\lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln\operatorname{ctg} x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{3x\sqrt[3]{x}}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{3\sqrt[3]{x}}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to+0}\frac{3\sqrt[3]{x}}{\cos x}=1\cdot0=0.$$

Mivel $\lim\ln y=0$, tehát

$$\lim y=\lim_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{x}}=1.$$

19. $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\frac{1}{x}}=?$ A függvénynek baloldali határértéke nincs, ui. $\sin x$ elég kis negatív x-ekre negatív, de negatív szám tetszőleges valós kitevőjű hatványa nem értelmezett, ezért a határátmenet nem végezhető el.

A függvény helyettesítési értéke az $x=0$ helyen 0^∞ alakú. Az $\ln y=\ln(\sin x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\ln\sin x$ jelölést bevezetve,

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\ln\sin x=-\infty,$$

mivel a számláló határértéke $-\infty$, a nevezőé pedig nulla. Mivel $\lim\ln y=-\infty$, tehát

$$\lim y=\lim_{x\to+0}(\sin x)^{\frac{1}{x}}=0.$$

20. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{2}{3+4\ln x}} = ?$ A kifejezés helyettesítési értéke az $x=0$ helyen 0^0.

Legyen

$$\ln y = \ln x^{\frac{2}{3+4\ln x}}.$$

Ekkor

$$\lim_{x\to+0} \frac{2}{3+4\ln x}\cdot \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{2\ln x}{3+4\ln x} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{2}{x}}{4\cdot\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Összehasonlítva az első és utolsó tagot

$$\lim_{x\to+0} \ln y = \frac{1}{2},$$

ebből

$$\lim_{x\to+0} y = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

A kifejezésnek baloldali határértéke nincs, mert negatív számnak valós hatványát általánosságban nem értelmeztük.

3. Elemi függvények Taylor-sorba fejtése

A *Taylor-formula* a következőket mondja ki: Ha az $[a, x]$ zárt intervallumban az $f(x)$ függvény $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható és még n-edik deriváltja is létezik az intervallum belsejében, akkor felírható

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n(a, x),$$

ahol $R_n(a, x)$ az ún. *maradéktag*. Ennek Lagrange-féle alakja

$$R_n(a, x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\Theta(x-a)],$$

ahol Θ egy alkalmas 0 és 1 közötti szám.

A példákban az $a+\Theta(x-a) = \xi$ jelölést alkalmazzuk.

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, x]$ intervallumban akárhányszor differenciálható, akkor a Taylor-formulát végtelen sok tagra felírva, $f(x)$ *Taylor-sora* adódik:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots .$$

Amennyiben ez a sor a-ra konvergens, vagyis az

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$

maradéktag zérushoz tart, midőn $n\to\infty$, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvényt az a pontban Taylor-sora *előállítja.* Azon pontok összességét, amelyekben $f(x)$ Taylor-sora konvergens, $f(x)$ *konvergenciatartományának* nevezzük.

Sokszor a konvergencia a maradéktag vizsgálata helyett egyszerűbben állapítható meg — pl. az alábbi konvergenciakritériumok alapján.

Leibniz-féle konvergenciakritérium: Egy váltakozó előjelű sor konvergens, ha a tagok abszolút értékei monoton tartanak nullához $n\to\infty$ esetében.

D'Alambert-féle vagy *hányadoskritérium:* Egy pozitív tagokból álló sor konvergens, ha az egymás utáni tagok hányadosa bizonyos n-től kezdve $(n>N)$ egy 1-nél kisebb q szám alatt marad.

Az $a=0$ választással speciális esetként a *Maclaurin-formula,* ill. *Maclaurin-sor* adódik. Tehát a Maclaurin-formula:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n(x);$$

a *Maclaurin-sor* pedig

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots .$$

Könnyen belátható, hogy az

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

n-edfokú *polinomot* Taylor-sora minden a-ra (röviden: mindenütt) előállítja; ugyanis az $(n+1)$-edik és minden magasabbrendű derivált nulla, tehát a sor csak n tagból áll:

$$f(x)=a_0+f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Az n-edfokú polinom Maclaurin-sora:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

Gyakorló feladatok

1. $y=x^6-5x^5+2x^4-3x^3+2x^2+6$. Írjuk fel a függvény $a=2$ helyhez tartozó *Taylor*-formuláját, vagyis alakítsuk át a függvényt úgy, hogy benne csak $x-2$ hatványai szerepeljenek!

Mivel a feladat megoldásához a deriváltak, és azok $x=2$ helyhez tartozó helyettesítési értékei kellenek, először ezeket számítjuk ki:

$$y'=6x^5-25x^4+8x^3-9x^2+4x;$$

$$y''=30x^4-100x^3+24x^2-18x+4;$$

$$y'''=120x^3-300x^2+48x-18;$$

$$y^{(4)}=360x^2-600x+48;$$

$$y^{(5)}=720x-600;\quad y^{(6)}=720.$$

A hetedik és ennél magasabbrendű deriváltak értéke azonosan egyenlő nullával.

A helyettesítési értékek:

$$y(2)=2^6-5\cdot2^5+2\cdot2^4-3\cdot2^3+2\cdot2^2+6=$$
$$=64-160+32-24+8+6=-74;$$
$$y'(2)=6\cdot2^5-25\cdot2^4+8\cdot2^3-9\cdot2^2+4\cdot2=$$
$$=192-400+64-36+8=-172;$$
$$y''(2)=30\cdot2^4-100\cdot2^3+24\cdot2^2-18\cdot2+4=$$
$$=480-800+96-36+4=-256;$$
$$y'''(2)=120\cdot2^3-300\cdot2^2+48\cdot2-18=$$
$$=960-1200+96-18=-162.$$
$$y^{(4)}(2)=360\cdot2^2-600\cdot2+48=1440-1200+48=288;$$
$$y^{(5)}(2)=720\cdot2-600=1440-600=840;$$
$$y^{(6)}(2)=720.$$

A *Taylor-polinom* tehát

$$y=-74+\frac{-172}{1!}(x-2)+\frac{-256}{2!}(x-2)^2+$$

$$+\frac{-162}{3!}(x-2)^3+\frac{288}{4!}(x-2)^4+\frac{840}{5!}(x-2)^5+\frac{720}{6!}(x-2)^6.$$

A számegyütthatókat kiszámítva:

$$y=-74-172(x-2)-128(x-2)^2-27(x-2)^3+12(x-2)^4+$$
$$+7(x-2)^5+(x-2)^6.$$

Ennek a felírásnak előnye könnyen belátható, ha valamely hatványfüggvény helyettesítési értékét kell meghatározni valamely egész értéket tartalmazó kis intervallum sok pontjában. Rendszerint az egész értékhez tartozó függvényértéket ismerjük, ill. azt könnyebb kiszámítani.

2. Határozzuk meg az előbbiekben átalakított függvény helyettesítési értékét (két tizedesjegy pontossággal) az $x_1=2{,}1$, $x_2=2{,}2$, ill. $x_3=2{,}01$ helyeken!

$$y(2{,}1)=-74-172(2{,}1-2)-128(2{,}1-2)^2-$$
$$-27(2{,}1-2)^3+12(2{,}1-2)^4+7(2{,}1-2)^5+(2{,}1-2)^6=$$
$$=-74-172\cdot0{,}1-128\cdot0{,}01-27\cdot0{,}001+12\cdot0{,}0001+$$
$$+7\cdot0{,}000\,01+0{,}000\,001.$$

Az egyes tagok nagyságrendjét összehasonlítva látjuk, hogy az ötödik tag már csak az eredmény ötödik jegyét befolyásolja; így az első négy tagot hagyva meg

$$y(2{,}1) \approx -74-17{,}2-1{,}28-0{,}03 = -92{,}51.$$

Ha a függvény eredeti alakjába helyettesítettünk volna, akkor a következőket kellett volna kiszámítanunk:

$$y(2{,}1) = 2{,}1^6-5\cdot 2{,}1^5+2\cdot 2{,}1^4-3\cdot 2{,}1^3+2\cdot 2{,}1^2+6,$$

ami elég nehézkes.

$$y(2{,}2) = -74-172\cdot 0{,}2-128\cdot 0{,}04-27\cdot 0{,}008+12\cdot 0{,}0016+$$
$$+7\cdot 0{,}000\,32+0{,}000\,064.$$

Csak az első öt tagot vesszük figyelembe, és így

$$y(2{,}2) \approx -74-34{,}4-5{,}12-0{,}22+0{,}02 = -113{,}76;$$

$$y(2{,}01) = -74-172\cdot 0{,}01-128\cdot 0{,}01^2-27\cdot 0{,}01^3+$$
$$+12\cdot 0{,}01^4+7\cdot 0{,}01^5+0{,}01^6 = -74-1{,}72-0{,}0128-$$
$$-0{,}000\,027+12\cdot 0{,}01^4+7\cdot 0{,}01^5+0{,}01^6.$$

Mint látható, a második tizedesjegy értékét csak az első három tag befolyásolja.

$$y(2{,}01) \approx -74-1{,}72-0{,}01 = -75{,}73.$$

Ha az eredeti alakba helyettesítettünk volna be, akkor háromjegyű szám (2,01) hatodik hatványát is ki kellett volna számítanunk, ami sok munkát jelentett volna.

3. Számítsuk ki az $y = 5+x^5-4x^3+2x^4-7x^2+2x$ függvény helyettesítési értékeit az $x_1=1{,}1$ és $x_2=1{,}01$ helyeken hat jegy pontossággal, az $a=1$ helyhez tartozó Taylor-polinom segítségével!

Először a függvényt x fogyó hatványai szerint rendezzük, mert így könnyebb a deriváltat ellenőrizni.

$$y = x^5+2x^4-4x^3-7x^2+2x+5.$$

Meghatározzuk a differenciálhányadosokat:

$$y' = 5x^4+8x^3-12x^2-14x+2;$$
$$y'' = 20x^3+24x^2-24x-14;$$
$$y''' = 60x^2+48x-24;$$
$$y^{(4)} = 120x+48;$$
$$y^{(5)} = 120.$$

A további deriváltak értéke azonosan zérus.

A helyettesítési értékek az $x=1$ helyen:

$$y(1) = 1+2\cdot 1-4\cdot 1-7\cdot 1+2\cdot 1+5 = -1;$$
$$y'(1) = 5\cdot 1+8\cdot 1-12\cdot 1-14\cdot 1+2 = -11;$$
$$y''(1) = 20\cdot 1+24\cdot 1-24\cdot 1-14 = 6;$$
$$y'''(1) = 60+48-24 = 84;$$
$$y^{(4)}(1) = 120+48 = 168;$$
$$y^{(5)}(1) = 120.$$

Az $a=1$ helyhez tartozó Taylor-polinom tehát:

$$y = -1+\frac{-11}{1!}(x-1)+\frac{6}{2!}(x-1)^2+\frac{84}{3!}(x-1)^3+$$
$$+\frac{168}{4!}(x-1)^4+\frac{120}{5!}(x-1)^5;$$

$$y = -1-11(x-1)+3(x-1)^2+14(x-1)^3+7(x-1)^4+(x-1)^5.$$

Most meghatározzuk a függvény értékét az $x_1=1{,}1$ helyen:

$$y(1{,}1) = -1-11\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}01+14\cdot 0{,}001+7\cdot 0{,}0001+0{,}000\,01.$$
$$y(1{,}1) = -1-1{,}1+0{,}03+0{,}014+0{,}0007+0{,}000\,01 =$$
$$= -2{,}1+0{,}044\,71 = -2{,}055\,29.$$

A függvényérték az $x_2=1{,}01$ helyen:

$$y(1{,}01) = -1-11\cdot 0{,}01+3\cdot 0{,}0001+14\cdot 0{,}000\,001+7\cdot 10^{-8}+10^{-10}.$$

Az értéket ismét csak hat jegy pontossággal határozzuk meg. Mivel az utolsó két tag ezt nem befolyásolja, ezért

$$y(1{,}01) \approx -1-0{,}11+0{,}0003+0{,}000\,014 = -1{,}11+0{,}000\,314 =$$
$$= -1{,}109\,686 \approx -1{,}109\,69.$$

4. Írjuk fel az $y=\sin x$ függvény Maclaurin-sorát, és az $x=\dfrac{\pi}{6}$ helyen a Taylor-sorát.

A függvény deriváltjai: $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $y''' = -\cos x$; $y^{(4)} = \sin x$ stb., általában $y^{(4k)} = \sin x$, $y^{(4k+1)} = \cos x$, $y^{(4k+2)} = -\sin x$, $y^{(4k+3)} = -\cos x$.

A függvény Maclaurin-sorát határozzuk meg először.

$$y(0)=\sin 0=0;\quad y'(0)=\cos 0=1;\quad y''(0)=-\sin 0=0;$$

$$y'''(0)=-\cos 0=-1;\quad \text{s. í. t.}$$

Vagyis

$$y=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\ldots,$$

azaz

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots.$$

A függvénysor Lagrange-féle maradéktagja:

$$R_n(x)=\frac{(\sin\xi)^{(n)}}{n!}x^n,\quad \text{ahol}\quad 0<\xi<x.$$

Mivel

$$R_n(x)=\frac{(\sin\xi)^{(n)}}{n!}x^n\leqq\frac{x^n}{n!},$$

és

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n}=0,$$

mert n növelésével az előző törtet egyre kisebb számmal szorozzuk és az $\frac{x}{n}$ szorzótényező rögzített x-re nullához tart, midőn $n\to\infty$. A maradéktag tehát x bármely értéke esetén nullához tart, vagyis a függvénysor bármely x-re konvergens és előállítja az $y=\sin x$ függvényt.

A $\sin x$ függvény Maclaurin-sorában x-nek csak páratlan hatványai szerepelnek. Tehát a szinusz függvény nem csupán maga páratlan függvény, hanem Taylor-sorának minden tagja, így bármely részletösszege is páratlan függvény.

Most meghatározzuk a függvény Taylor-sorát az $x=\pi/6$ helyen; mivel a $\pi/6$ radián 30°-nak felel meg, ezért ezt helyettesítjük be a deriváltakba:

$$y(30°)=\sin 30°=\frac{1}{2};$$

$$y'(30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y''(30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2};$$

$$y'''(30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y^{(4)}(30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}\ \text{stb.}$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{-\frac{1}{2}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+$$

$$+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}}{4!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4+\ldots.$$

5. Határozzuk meg a 31°-os szög szinuszát logarléc adta pontossággal! A feladatot úgy oldjuk meg, hogy az $y=\sin x$ függvény $x=\pi/6$ radiánhoz tartozó Taylor-sorának első három tagját számítjuk ki (T_3). Mivel csak az elvet akarjuk megadni, ezért logarléccel számolunk:

$$T_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2.$$

A zárójeleken belül szögkülönbségek vannak, és mivel $31°-30°=1°$, ezért csak az 1°-t számítjuk át radiánba: $1°\approx 0{,}017\,45$ radián.

$$T_3(31°)=\frac{1}{2}+\frac{1{,}732}{2}\cdot 0{,}017\,45-\frac{1}{4}\cdot 0{,}017\,45^2\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}+\frac{1{,}732}{2}\cdot 1{,}745\cdot 10^{-2}-\frac{1}{4}\cdot 1{,}745^2\cdot 10^{-4}.$$

$$T_3(31°)=\frac{1}{2}+1{,}51\cdot 10^{-2}-0{,}76\cdot 10^{-4}=0{,}5+0{,}0151-0{,}000\,076=$$

$$=0{,}5151-0{,}000\,076=0{,}515\,024\approx 0{,}5150.$$

A négyjegyű függvénytáblázatban található érték: 0,5150.

14*

6. Határozzuk meg a $\cos x$ függvény Maclaurin-sorát, valamint az $a=\pi/3$ helyen Taylor sorát!
A deriváltak meghatározása:

$$y' = -\sin x; \quad y'' = -\cos x; \quad y''' = \sin x; \quad y^{(4)} = \cos x; \quad \text{stb.}$$

Helyettesítési értékek az $x=0$ helyen:

$$y(0) = \cos 0 = 1; \quad y'(0) = -\sin 0 = 0; \quad y''(0) = -\cos 0 = -1;$$

$$y'''(0) = \sin 0 = 0; \quad y^{(4)}(0) = \cos 0 = 1 \quad \text{stb.}$$

A függvény Maclaurin-sora:

$$y = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots,$$

vagyis

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots.$$

A sor Lagrange-féle maradéktagja:

$$R_n(x) = \frac{(\cos\xi)^{(n)}}{n!}x^n, \quad \text{ahol} \quad 0 < \xi < x.$$

Mivel

$$R_n(x) = \frac{(\cos\xi)^{(n)}}{n!}x^n \leqq \frac{x^n}{n!},$$

amely viszont — mint a 4. példában beláttuk — nullához tart, ha n végtelenhez tart, ezért a felírt sor minden x-re konvergens és előállítja a $\cos x$ függvényt.

A $\cos x$ függvény Maclaurin-sora x-nek csak páros kitevőjű hatványait tartalmazza. Tehát nemcsak maga $\cos x$ páros függvény, hanem Maclaurin-sorának minden tagja és így minden részletösszege is az.

Most felírjuk az $y=\cos x$ függvény $a=\pi/3$-hoz tartozó Taylor-sorát. Először a függvény és deriváltjainak $x=\pi/3$ helyen vett értékét kell meghatározni.

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad y'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Csak az első öt tagot írjuk fel:

$$\cos x = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\frac{-1}{2}}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 +$$

$$+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\frac{1}{2}}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4 + \dots.$$

7. Az $y=\cos x$ függvény $a=\pi/3$ helyhez tartozó Taylor-sora ismeretében számítsuk ki a cos 65° közelítő értékét, ha a sornak csak három tagjával számolunk! Hasonlítsuk össze a kapott értéket a négyjegyű függvénytáblázatból kapható értékkel!
A Taylor-sorban az $x-\pi/3$ szögkülönbség hatványai szerepelnek, ezért 5°-ot számítunk át radiánba:

$$5° = 5\cdot 0{,}017\,45 = 0{,}087\,25;$$

$$T_3(65°) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}087\,25 - \frac{1}{4}\cdot 0{,}087\,25^2 =$$

$$= 0{,}5 - \frac{1{,}732\cdot 8{,}725}{2}\cdot 10^{-2} - \frac{8{,}725^2\cdot 10^{-4}}{4} \approx$$

$$\approx 0{,}5 - 7{,}55\cdot 10^{-2} - 19\cdot 10^{-4} = 0{,}5 - 0{,}0755 - 0{,}0019 =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}0774 = 0{,}4226.$$

A táblázatban található érték szintén 0,4226. (Megjegyezzük, hogy a táblázatokat is ilyen sorelőállításból szokás kiszámítani.)

8. Írjuk fel az $y=\ln x$ függvény Taylor-sorát az $a=1$ helyen!
Először a deriváltakat, azután a helyettesítési értékeket határozzuk meg.

$$y' = \frac{1}{x}; \quad y'' = -\frac{1}{x^2}; \quad y''' = \frac{2}{x^3}; \quad y^{(4)} = -\frac{6}{x^4}; \quad \text{stb.}$$

A helyettesítési értékek:

$$y(1)=\ln 1=0;\quad y'(1)=\frac{1}{1}=1;\quad y''(1)=-1;$$

$$y'''(1)=2;\quad y^{(4)}(1)=-6.$$

A Taylor-sor tehát

$$y=0+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{-1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\frac{-6}{4!}(x-1)^4+\ldots,$$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+-\ldots.$$

Vizsgáljuk meg, hogy ez a sor milyen x értékekre konvergens:

a) Legyen $x \geqq 1$. Ekkor a sor váltakozó előjelű.

Alkalmazzuk a Leibniz-kritériumot:

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)^n}{n}=0,\quad \text{ha}\quad 1\leqq x\leqq 2,$$

mert akkor $(x-1)\leqq 1$, tehát a számláló 1-nél kisebb, monoton csökkenő, a nevező pedig ∞-hez tart monoton növekvően.

b) Legyen $x \leqq 1$. Ekkor a sor minden tagja negatív, tehát alkalmazható a negatív előjel kiemelése után a pozitív tagú sorok konvergenciájára vonatkozó D'Alambert-féle hányadosfeltétel:

$$\frac{(-1)^{n+2}\dfrac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}}=(-1)\frac{(x-1)n}{n+1}=\frac{n}{n+1}(1-x)\leqq 1-x=q;$$

$q<1$, ami abból következik, hogy $0<x\leqq 1$.

A sor konvergenciatartománya tehát $0<x\leqq 2$.

9. Táblázatból tudjuk, hogy $\ln 1{,}5=0{,}4055$. Számítsuk ki a függvény Taylor-sorának első négy tagja ismeretében $\ln 1{,}5$ közelítőleg pontos értékét, és állapítsuk meg a relatív hibát!

$$T_4(1{,}5)=0{,}5-\frac{0{,}5^2}{2}+\frac{0{,}5^3}{3}-\frac{0{,}5^4}{4}=$$

$$=0{,}5-\frac{0{,}25}{2}+\frac{0{,}125}{3}-\frac{0{,}0625}{4}\approx$$

$$\approx 0{,}5-0{,}125+0{,}0417-0{,}0156=0{,}5417-0{,}1406=0{,}4011.$$

A számított érték tehát tízezred pontossággal 0,4011, a táblázatból kapott érték 0,4055, a hiba 0,4055—0,4011 = 0,0044.

A hiba százalékban kifejezve, vagyis a relatív hiba:

$$p=\frac{0{,}0044}{0{,}4055}\cdot 100\%=\frac{0{,}44}{0{,}4055}\%\approx 1\%.$$

10. Határozzuk meg az $y=e^x$ függvény Maclaurin-sorát, valamint az $a=1$ helyen Taylor-sorát!

A függvény akárhányadik deriváltja e^x, ezért az $x=0$ helyen mindegyik derivált értéke 1. A Maclaurin-sor tehát

$$y=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\ldots,$$

illetve

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots.$$

A függvénysor konvergenciáját a Lagrange-féle maradéktaggal igazoljuk:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n=\frac{e^\xi}{n!}x^n=e^\xi\frac{x^n}{n!},$$

ahol $0<\xi<x$.

Az első tényező (e^ξ) n-től független állandó, a második tényező pedig (rögzített x érték mellett) — mint már a 4. példában beláttuk — n növelésével nullához tart, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} e^\xi\frac{x^n}{n!}=0,$$

tehát a függvénysor bármely x-re konvergens.

Ha a Taylor-sort akarjuk felírni az $a=1$ helyen, akkor a deriváltakat az $x=1$ helyen kell kiszámítani.

Minden egyes derivált e^x, és így a helyettesítési érték e-vel egyenlő.

$$y=e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3+\ldots.$$

Ha a közös e-t kiemeljük, akkor

$$y=e\left[1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\ldots\right]=$$

$$=e\left[x+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\ldots\right].$$

Azt, hogy a sor bármely x-re konvergens, a D'Alambert-féle hányados-kritériummal bizonyítjuk.

A sorozat két — egymás után következő — tagjának hányadosa:

$$\frac{e(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{e(x-1)^n}{n!}=\frac{e(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e(x-1)^n}=(x-1)\cdot\frac{1}{n+1}.$$

A szorzat első tényezője — $(x-1)$ — rögzített x értékre állandó, a második tényezője pedig n növelésével csökken. Megadható egy olyan N szám, amelynél nagyobb n-ekre a tört értéke egynél kisebb, ugyanis

$$\frac{x-1}{n+1}<1, \quad \text{ha} \quad x-1<n+1,\ x-2<n.$$

1-nél nagyobb x-ekre az előbbiek miatt, 1-nél kisebb x-ekre pedig a váltakozó előjelű sorokra vonatkozó Leibniz-féle konvergenciakritérium miatt konvergens a sor.

11. Határozzuk meg az $y=e^x$ függvény Maclaurin-sora ismeretében e közelítő értékét! Az

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\dots$$

kifejezésben x helyébe 1-et helyettesítve (és csak 5 tagot tartva meg):

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\approx 2{,}5+0{,}1667+0{,}0416=2{,}7083.$$

e öt jegyre kerekített értéke: 2,7183, ezért az előző számításaink során elkövetett relatív hiba százalékban:

$$p=\frac{2{,}7183-2{,}7083}{2{,}7183}\cdot 100\%=\frac{0{,}01\cdot 100}{2{,}7183}\%=\frac{1}{2{,}7183}\%\approx 0{,}37\%.$$

12. Írjuk fel az $y=\operatorname{sh} x$ függvény Maclaurin-sorát, valamint Taylor-sorát az $a=1$ helyen.

A deriváltak:

$$y'=\operatorname{ch} x;\quad y''=\operatorname{sh} x;\quad y'''=\operatorname{ch} x \text{ stb.}$$

A helyettesítési értékek az $x=0$ helyen: $y(0)=\operatorname{sh} 0=0$; $y'(0)=\operatorname{ch} 0=1$; $y''(0)=\operatorname{sh} 0=0$; $y'''(0)=\operatorname{ch} 0=1$, így a Maclaurin-sor

$$y=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\dots;$$

vagyis

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots.$$

Ahhoz, hogy a függvénynek az $x=1$ helyhez tartozó Taylor-sorát fel tudjuk írni, ismernünk kell a sh 1 és ch 1 értékeket, ezeket táblázatból vesszük:

$$\operatorname{sh} 1=1{,}1752;\quad \operatorname{ch} 1=1{,}5431.$$

Amennyiben táblázatunk csak e hatványait tartalmazza (ilyen pl. a középiskolában használt Négyjegyű függvénytáblázat), akkor a

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \text{ill.}\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

összefüggéseket alkalmazzuk.

$$\text{Pl.: } \operatorname{sh} 1=\frac{e-e^{-1}}{2}\approx\frac{2{,}718-0{,}368}{2}=\frac{2{,}350}{2}=1{,}175;$$

$$\operatorname{ch} 1=\frac{2{,}718+0{,}368}{2}=\frac{3{,}086}{2}=1{,}543.$$

Tehát a sh függvény és deriváltjai az $x=1$ helyen:

$$y(1)=\operatorname{sh} 1=1{,}1752;\quad y'(1)=\operatorname{ch} 1=1{,}5431 \text{ stb.}$$

A Taylor-sor így

$$y=1{,}1752+\frac{1{,}5431}{1!}(x-1)+\frac{1{,}1752}{2!}(x-1)^2+$$
$$+\frac{1{,}5431}{3!}(x-1)^3+\frac{1{,}1752}{4!}(x-1)^4+\dots.$$

13. Határozzuk meg sh 1,2 közelítő értékét és a relatív hibát, ha ismerjük a sh x függvény $a=1$ helyhez tartozó Taylor-sorát! Számításainkban csupán három tagot vegyünk figyelembe.

$$y(1{,}2)=1{,}1752+1{,}5431\cdot 0{,}2+\frac{1{,}1752}{2}0{,}04=$$
$$=1{,}1752+0{,}308\,62+0{,}023\,504\approx 1{,}5073.$$

Összehasonlításul megemlítjük, hogy a táblázatban található érték sh 1,2 = 1,5095.

Határozzuk meg a százalékos hibát!

$$p=\frac{1{,}5095-1{,}5073}{1{,}5095}\cdot 100\%=\frac{0{,}0022\cdot 100\%}{1{,}5095}=\frac{0{,}22}{1{,}5095}\%\approx 0{,}146\%.$$

14. Írjuk fel az $y=\operatorname{ch} x$ függvény Maclaurin-sorát, valamint az $a=1$ helyen Taylor-sorát!

$y=\operatorname{ch} x$ deriváltja:

$$y'=\operatorname{sh} x;\quad y''=\operatorname{ch} x;\quad y'''=\operatorname{sh} x;\ \text{stb.}$$

Ezek helyettesítési értéke:

$$y(0)=\mathrm{ch}\,0=1;\quad y'(0)=\mathrm{sh}\,0=0;\quad y''(0)=\mathrm{ch}\,0=1 \text{ stb.}$$

Így a Maclaurin-sor

$$y=1+\frac{0}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\dots,$$

azaz

$$\mathrm{ch}\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots.$$

Az

$$y(1)=\mathrm{ch}\,1=1,5431;\quad y'(1)=\mathrm{sh}\,1=1,1752$$

értékeket felhasználva, kapjuk az $y=\mathrm{ch}\,x$ Taylor-sorát az $a=1$ helyen:

$$y=1,5431+\frac{1,1752}{1!}(x-1)+\frac{1,5431}{2!}(x-1)^2+\frac{1,1752}{3!}(x-1)^3+\dots.$$

15. Határozzuk meg ch 1,1 értékét és a relatív hibát, ha ismerjük a függvény $a=1$ helyhez tartozó Taylor-sorát! Csak az első három tagot vegyük figyelembe.

$$\mathrm{ch}\,1,1\approx T_3(1,1)=1,5431+1,1752\cdot 0,1+\frac{1,5431}{2}\cdot 0,01=$$

$$=1,5431+0,117\,52+0,007\,715\approx 1,6683.$$

ch 1,1 táblázatban található értéke: 1,6685.
A viszonylagos hiba százalékban:

$$p=\frac{1,6685-1,6683}{1,6685}\cdot 100\%=\frac{0,0002}{1,6685}\cdot 100\%=\frac{0,02}{1,6685}\%\approx 0,012\%.$$

4. Egyenletek közelítő megoldása Newton-módszerrel

Tegyük fel, hogy az $f(x)=0$ egyenletről már tudjuk, hogy egyetlen gyöke van az (a, b) intervallumban. Legyen az $y=f(x)$ függvény az (a, b) intervallumban differenciálható, és differenciálhányadosa zérustól különböző. Írjuk fel a függvénygörbe $x=a$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő egyenletét!

$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

Ez az érintő az X-tengelyt abban az x_1 abszcisszájú pontban metszi, amelynek ordinátája nulla, azaz:

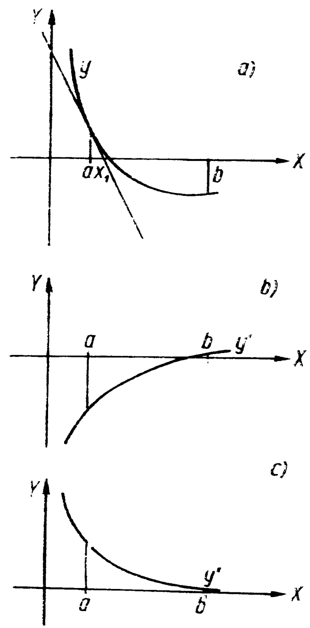
$$-f(a)=x_1f'(a)-af'(a);$$

és ebből

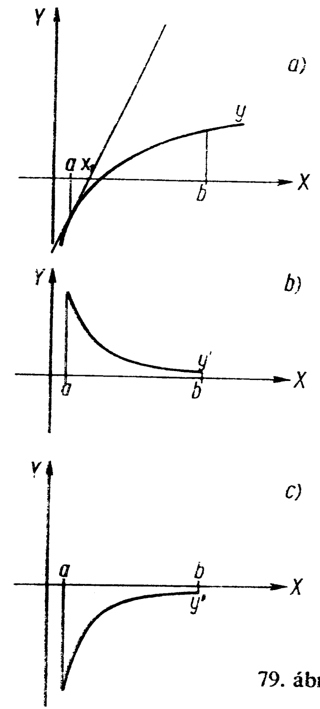
$$x_1=\frac{af'(a)-f(a)}{f'(a)}=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

A kijelölt osztás elvégezhető, mert feltételezésünk szerint $f'(a)\neq 0$.

Az x_1 abszcisszájú pont a keresett gyökhelyhez az „a" abszcisszájú pontnál közelebb van, ha: *1.* Az $f(a)>0$ és a görbe konvex, vagyis $f''(a)>0$ (78. ábra). *2.* Az $f(a)<0$ és a görbe konkáv, vagyis $f''(a)<0$ (79. ábra).

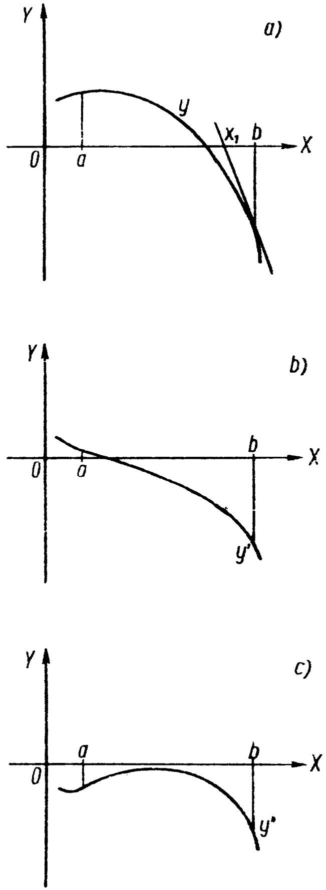


78. ábra



79. ábra

Kiszámítjuk $f(x_1)$-et. Ha $f(x_1)$ nem azonosan zérus, ill. nem közelíti meg a kívánt pontossággal a zérus értéket, akkor a módszert ismételten alkalmazzuk, azaz ezután az x_1 abszcisszájú pontban határozzuk meg az érintő egyenletét, majd az újabb érintő és az X-tengely x_2-vel jelölt metszéspontját.



80. ábra

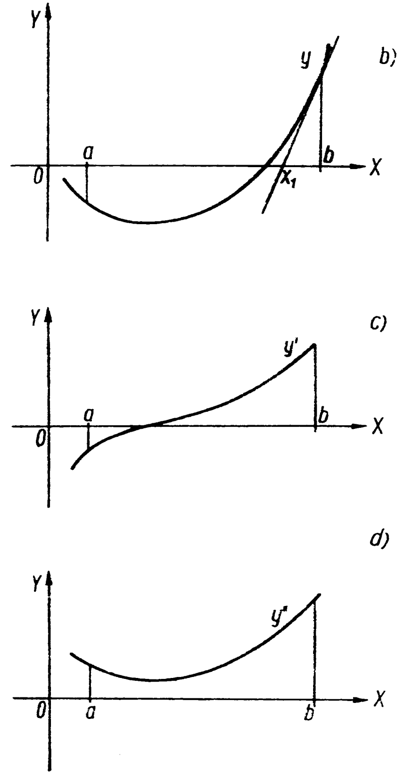
Az előző számításhoz hasonlóan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Ezt az eljárást folytatva:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \ \dots, \ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Az előző feltételek mellett az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok (ha f'' végig nem vált előjelet) növekedő sorozatot alkotnak, és be lehet látni, hogy ezen sorozat határértéke a keresett gyök.



81. ábra

Ha $f(a)>0$ és a görbe konkáv, vagyis $f''(a)<0$, de $f(b)<0$, és $f''(b)<0$ (80. ábra), vagy ha $f(a)<0$ és a görbe konvex, vagyis $f''(a)>0$, de $f(b)>0$ és $f''(b)>0$ (81. ábra), akkor a b abszcisszájú pontból indulva, a módszert ugyanúgy alkalmazzuk, mint előbb, csak most (ha f'' nem vált előjelet) a metszéspontok sorozata monoton csökkenő lesz.

A fenti szabályokat úgy jegyezhetjük meg a legkönnyebben, hogy az (a, b) *intervallumnak abból a pontjából kell elindulnunk, amelyben a függvényérték és második derivált előjele megegyezik.* Az eljárást addig folytatjuk, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük. A következő számításaink során logarlécet, és négyjegyű logaritmustáblázatot használunk, ennek megfelelően a kapott eredmények is három, ill. négy jegy pontosságúak lesznek. A számítás módját minden feladat elején megadjuk.

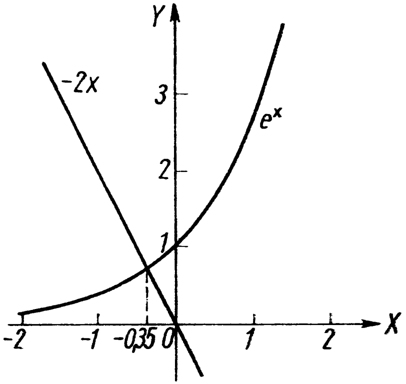
Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a $2x+e^x = 0$ egyenletet század pontossággal.

Egy első — kiinduló — durva közelítő intervallumot a legcélszerűbben grafikus úton kaphatunk, oly módon, hogy az egyenlőségjel egyik oldalán hagyjuk pl. e^x-et, és a másik oldalra átvisszük $2x$-et:

$$e^x = -2x;$$

mindkét oldal x függvénye, ezeket ábrázolva (82. ábra), a két görbe metszéspontjának abszcisszája az egyenlet megoldása. Az ábrából látható, hogy egy gyök van, és az -1 és 0 közé esik, vagyis $a=-1$ és $b=0$ alkalmas végpontok.



82. ábra

A Newton-módszer első lépése az, hogy meghatározzuk az $a=-1$ és $b=0$ pontokban az $y = 2x+e^x$ függvény, ill. második deriváltja előjelét.

$$y = 2x+e^x; \quad y' = 2+e^x; \quad y'' = e^x > 0$$

minden x-re.

$$y(-1) = -2+\frac{1}{e} < 0, \quad y(0) = e^0 = 1 > 0.$$

A függvény és a második derivált előjele az $x_0=b=0$ pontban egyezik meg, ezért ezt választjuk kiindulópontnak. Jelen esetben a logarléc pontossága elegendő.

$$x_1 = b-\frac{y(b)}{y'(b)} = 0-\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3} \approx -0{,}33.$$

Az első közelítő gyök tehát $-0{,}33$; $y_1 = 2x_1+e^{x_1} \approx y\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}+$ $+e^{-\frac{1}{3}} \approx -0{,}67+0{,}72 = 0{,}05.$

Mivel nem pontos nullahelyet találtunk, az eljárást tovább folytatjuk.

A gyökhelyhez tartozó sorozat második tagja:

$$x_2 = x_1-\frac{y(x_1)}{y'(x_1)} = -0{,}33-\frac{y\left(-\frac{1}{3}\right)}{y'\left(-\frac{1}{3}\right)}.$$

Meghatározzuk $y'\left(-\frac{1}{3}\right)$ értékét:

$$y'\left(-\frac{1}{3}\right) = 2+e^{-\frac{1}{3}} \approx 2+0{,}72 = 2{,}72.$$

Ezeket behelyettesítve:

$$x_2 = -0{,}33-\frac{0{,}05}{2{,}72},$$

az osztást logarléccel elvégezve:

$$x_2 \approx -0{,}33-0{,}0184 \approx -0{,}33-0{,}02 = -0{,}35.$$

Határozzuk meg a függvényértéket a $-0{,}35$ helyen!

$$y_2 = y(-0{,}35) = -0{,}7+e^{-0{,}35} = -0{,}7+0{,}7047 = 0{,}0047.$$

A függvényérték már csak 5 ezrednél kisebb hibával tér el nullától, így a feladat megoldásaként század pontossággal valószínűleg elfogadható $-0{,}35$. Erről úgy bizonyosodunk meg, hogy kiszámítjuk a függvényértéket a $-0{,}36$ helyen is:

$$y(-0{,}36) = 2(-0{,}36)+e^{-0{,}36} = -0{,}72+0{,}6977 = -0{,}0223.$$

Mivel itt már negatív a függvényérték és a függvény folytonos, tehát $-0{,}35$ és $-0{,}36$ között kell lennie a gyökhelynek. A függvényérték abszolút értéke $-0{,}35$ behelyettesítésekor kisebb, ezért a feladat megoldásaként $-0{,}35$ elfogadható.

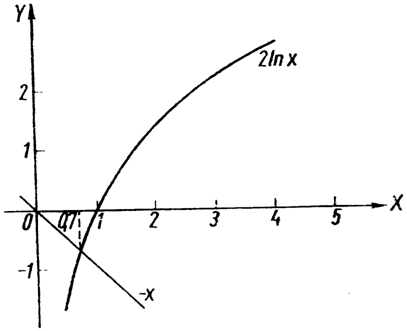
2. Oldjuk meg az $x+2\ln x = 0$ egyenletet (három tizedesjegy pontossággal)!

Az első durva közelítő intervallum meghatározása:

Most az $y = x+2\ln x$ függvény és az X-tengely metszéspontját kell közelítőleg meghatároznunk. Vigyük át az egyenlet egyik oldalára az x-et, a másikra pedig a $2\ln x$-et:

$$2\ln x = -x,$$

tekintsük mindkét oldalt x függvényének és ábrázoljuk a két függvényt. A két grafikon metszéspontjának x koordinátája a keresett gyök (83. ábra).



83. ábra

Az egyetlen metszéspont abszcisszája láthatóan 0 és 1 közé esik. A 0 pont azonban nem felel meg az intervallum bal végpontjának, mivel ebben a függvény nincs értelmezve. Ezért az intervallumot ehelyett szűkebbre

választjuk. Az ábrából durva leolvasással is úgy látjuk, hogy pl. $(0{,}5; 1)$ megfelel kiinduló intervallumnak.

$$y(0{,}5) = 0{,}5+2\ln 0{,}5 = 0{,}5+\ln 0{,}25 = 0{,}5-1{,}3863 = -0{,}8863;$$

$$y(1) = 1+2\ln 1 = 1;$$

$$y' = 1+\frac{2}{x}; \quad y'' = -\frac{2}{x^2} < 0$$

az értelmezési tartomány minden pontjában.

A függvényérték és a második derivált előjele a 0,5 pontban egyezik meg, kiinduló értékünk tehát $x_0 = a = 0{,}5$; $y(0{,}5)$ értékét már kiszámítottuk;

$$y'(0{,}5) = 1+\frac{2}{0{,}5} = 5;$$

tehát

$$x_1 = a-\frac{y(a)}{y'(a)} = 0{,}5-\frac{-0{,}8863}{5} \approx 0{,}5+0{,}1773 = 0{,}6773.$$

A második közelítő gyök tehát 0,6773.

$$y_1 = y(0{,}6773) = 0{,}6773+2\ln 0{,}6773 \approx 0{,}6773+2(-0{,}3896) =$$
$$= 0{,}6773-0{,}7792 = -0{,}1019.$$

A harmadik közelítő gyök:

$$x_2 = x_1-\frac{y(x_1)}{y'(x_1)} = 0{,}6773-\frac{y(0{,}6773)}{y'(0{,}6773)};$$

$$y'(0{,}6773) = 1+\frac{2}{0{,}6773} \approx 1+2{,}952 = 3{,}952.$$

Behelyettesítünk x_2 képletébe:

$$x_2 = 0{,}6773-\frac{-0{,}1019}{3{,}952} = 0{,}6773+\frac{0{,}1019}{3{,}952} \approx$$
$$\approx 0{,}6773+0{,}0258 = 0{,}7031 \approx 0{,}703.$$

Helyettesítsük be a gyök közelítő értékét az eredeti függvénybe!

$$y(0{,}703) = 0{,}703+2\ln 0{,}703 = 0{,}703+2(-0{,}3524) \approx$$
$$\approx 0{,}703-0{,}705 = -0{,}002.$$

A negyedik közelítő gyök:

$$x_3 = x_2 - \frac{y(x_2)}{y'(x_2)}.$$

Azt nézzük meg, hogy az $y(x_2)/y'(x_2)$ tört milyen mértékben befolyásolja a gyököt.

$$y'(x_2) = y'(0{,}7031) = 1 + \frac{2}{0{,}7031} \approx 1+3 = 4,$$

vagyis

$$\frac{y(x_2)}{y'(x_2)} = \frac{-0{,}002}{4} = -0{,}0005.$$

Mivel a következő, vagyis negyedik közelítés a gyöknek csak a tízezredeit befolyásolja, ezért a feladat megoldásaként három tizedesjegy pontossággal $x=0{,}703$ valószínűleg elfogadható. Győződjünk meg erről oly módon, hogy kiszámítjuk $y(0{,}704)$ értékét:

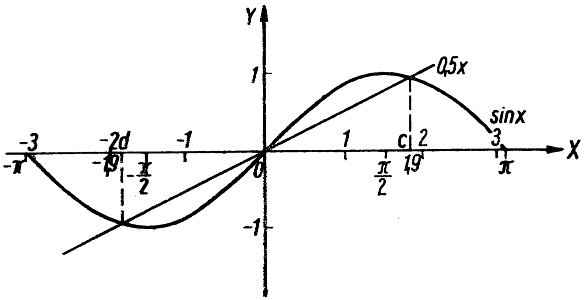
$$y(0{,}704) = 0{,}704 + 2\ln 0{,}704 \approx 0{,}704 + 2(-0{,}3510) =$$

$$= 0{,}704 - 0{,}702 = 0{,}002.$$

A függvény folytonos és 0,703 és 0,704 között előjelet vált, tehát valóban ebben az intervallumban van a gyöke. A függvényérték abszolút értéke a két végpontban egyenlő, tehát bármelyiket elfogadhatjuk gyökként.

3. Oldjuk meg közelítő eljárással, logarléccel a $\sin x = 0{,}5x$ egyenletet!

Ha az egyenlet mindkét oldalát x függvényeként tekintjük, akkor a feladat grafikus megoldásai az $y=\sin x$ és az $y=0{,}5x$ függvények metszéspontjainak abszcisszái (84. ábra). Mivel mindkét függvény páratlan,



84. ábra

ezért a metszéspontok az origóra szimmetrikusan helyezkednek el. Az egyenlet egyik gyöke $x=0$. Mi most azt a gyököt keressük, amit az ábrán c-vel jelöltünk. A függvény, amelynek zérushelyét keressük.

$$y = \sin x - 0{,}5x.$$

A gyökhely, amint az ábrából látjuk és behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, a $\frac{\pi}{2}$ és a 2 radián közé esik.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} - 0{,}5\frac{\pi}{2} \approx 1 - 0{,}785 = 0{,}215 > 0.$$

$y(2) = \sin 2 - 0{,}5\cdot 2$ (1 radián $\approx 57{,}3°$ értéket használjuk).

$$y(2) = \sin 114{,}6° - 1 = \sin 65{,}4° - 1 = 0{,}9092 - 1 = -0{,}0908 \approx$$

$$\approx -0{,}091 < 0.$$

Most a második deriváltat, valamint előjelét határozzuk meg a határokon:

$$y' = \cos x - 0{,}5, \quad y'' = -\sin x < 0$$

az egész $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ intervallumban.

A függvényérték és a második derivált előjele az $x_0=2$ végpontban egyezik meg, tehát ezt kell választanunk kiindulási pontul.

$$x_1 = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} = 2 - \frac{y(2)}{y'(2)};$$

$$y'(2) = \cos 2 - 0{,}5 = \cos 114{,}6° - 0{,}5 = -\cos 65{,}4° - 0{,}5 =$$

$$= -0{,}4163 - 0{,}5 = -0{,}9163.$$

$$x_1 = 2 - \frac{-0{,}0908}{-0{,}9163} = 2 - \frac{0{,}0908}{0{,}9163} \approx 2 - 0{,}1 = 1{,}9.$$

A függvényérték az $x_1=1{,}9$ helyen:

$$y_1 = y(1{,}9) = \sin 1{,}9 - 0{,}5\cdot 1{,}9 \approx \sin 109° - 0{,}95 = \sin 71° - 0{,}95 =$$

$$= 0{,}9455 - 0{,}95 = -0{,}0045.$$

Amennyiben az újabb közelítő gyök az eddig kapott gyök első három jegyét nem befolyásolná, akkor ezt közelítő gyöknek valószínűleg elfogadhatjuk:

$$x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)} = 1{,}9 - \frac{y(1{,}9)}{y'(1{,}9)};$$

a korrekciós tagot $\left[\frac{y(1{,}9)}{y'(1{,}9)}\right]$ számítjuk ki:

$$y'(1{,}9) = \cos 1{,}9 - 0{,}5 \approx \cos 109° - 0{,}5 = -\cos 71° - 0{,}5 =$$

$$= -0{,}3256 - 0{,}5 = -0{,}8256 \approx -0{,}83.$$

Mivel $\frac{y(1{,}9)}{y'(1{,}9)} \approx \frac{-0{,}0045}{0{,}83} \approx -0{,}0055$, ez pedig a gyöknek legfeljebb negyedik jegyét befolyásolja, tehát $x=1{,}9$, sőt $x=1{,}90$ közelítő gyök valószínűleg elfogadható. Erről úgy győződünk meg, hogy kiszámítjuk a helyettesítési értéket az $x=1{,}89$ helyen:

$$y(1{,}89) = \sin 1{,}89 - 0{,}5 \cdot 1{,}89 \approx \sin 108{,}3° - 0{,}945 =$$

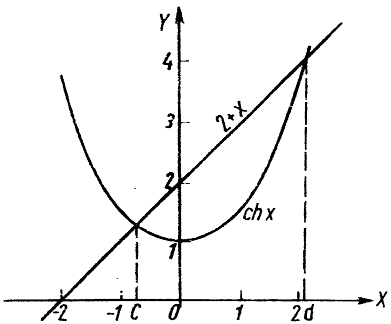
$$= \sin 81{,}7° - 0{,}945 = 0{,}9895 - 0{,}945 = 0{,}0445.$$

A függvényérték előjele itt pozitív, tehát (folytonos függvényről lévén szó) a gyökhely valóban 1,90 és 1,89 közé esik. Az egyenlet megoldásának 1,90 fogadható el, mivel y abszolút értéke itt a kisebb. A d-vel jelölt másik gyök $-1{,}9$.

Az egyenletnek gyökei tehát: $-1{,}9$; 0; 1,9.

9. Oldjuk meg a $\operatorname{ch} x = 2 + x$ egyenletet három értékes jegyre!

A bal és jobb oldalt — mint x függvényét — ábrázoljuk a koordinátarendszerben (85. ábra). Mint látható, a $2+x$ egyenes a $\operatorname{ch} x$ görbét két



85. ábra

pontban metszi, tehát az egyenletnek két megoldása van. Először az origótól balra eső gyököt számítjuk ki. Az egyenletet nullára redukáljuk:

$$\operatorname{ch} x - 2 - x = 0.$$

Keressük az $y = \operatorname{ch} x - 2 - x$ függvény zérushelyeit.

Az ábrából leolvassuk, hogy a függvénynek a $(-1{,}0)$ szakaszon egy gyöke van; mégpedig

$$y(0) = \operatorname{ch} 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0;$$

$$y(-1) = \operatorname{ch}(-1) - 2 + 1 = 1{,}5431 - 1 = 0{,}5431 > 0.$$

A $(-1{,}0)$ intervallum bal oldali végpontjában a helyettesítési érték pozitív, a jobb oldali végpontban pedig negatív, tehát közben egy zérushelynek kell lennie.

A második derivált előjele dönti el, hogy az intervallum melyik végpontjából közeledünk a c-vel jelölt gyökhely felé. Az első és második derivált:

$y' = \operatorname{sh} x - 1$, $y'' = \operatorname{ch} x > 0$ az egész számegyenesen. y'' helyettesítési értéke az $x = -1$ helyen:

$$y''(-1) = \operatorname{ch}(-1) = \operatorname{ch} 1 = 1{,}5431 > 0.$$

Az $y(-1)$ helyettesítési érték előjele megegyezik a második derivált előjelével, mert mindkettő pozitív a -1 helyen. Az $x_0 = a = -1$ pontból indulunk tehát el.

$$y(-1) = 0{,}5431; \quad y'(-1) = \operatorname{sh}(-1) - 1 = -\operatorname{sh} 1 - 1 =$$

$$= -1{,}1752 - 1 = -2{,}1752.$$

$$x_1 = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} = -1 \frac{y(-1)}{y'(-1)} = -1 \frac{0{,}5431}{-2{,}1752} \approx$$

$$\approx -1 + \frac{0{,}5431}{2{,}175} \approx -1 + 0{,}2497 = -0{,}7503.$$

$$y_1 = y(x_1) = y(-0{,}7503) = \operatorname{ch}(-0{,}7503) - 2 - (-0{,}7503) =$$

$$= \operatorname{ch} 0{,}7503 - 2 + 0{,}7503 \approx 1{,}2949 - 1{,}2497 = 0{,}0452.$$

A második közelítés:

$$x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)}.$$

Először $y'(x_1)$ értékét, azután x_2 értékét határozzuk meg.

$$y'(x_1) = y'(-0{,}7503) = \mathrm{sh}\,(-0{,}7503)-1 = -\mathrm{sh}\,0{,}7503-1 \approx$$

$$\approx -0{,}8227-1 = -1{,}8227;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)} = -0{,}7503 - \frac{0{,}0452}{-1{,}8227} \approx -0{,}7503+0{,}0248 =$$

$$= -0{,}7255 \approx -0{,}726;$$

$$y_2 = y(-0{,}726) = \mathrm{ch}\,(-0{,}726)-2+0{,}726 = 1{,}2753-1{,}2740 =$$

$$= 0{,}0013;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{y(x_2)}{y'(x_2)};$$

$$y'(-0{,}726) = \mathrm{sh}\,(-0{,}726)-1 = -\mathrm{sh}\,0{,}726-1 \approx -0{,}7915-1 =$$

$$= -1{,}7915;$$

$$x_3 = -0{,}726 + \frac{0{,}0013}{1{,}7915} \approx -0{,}726+0{,}0007.$$

Látjuk, hogy a korrekció már csak az ezredet befolyásolhatja. Ezért kiszámítjuk a függvényértéket az $x = -0{,}725$ helyen:

$$y(-0{,}725) = \mathrm{ch}\,(-0{,}725)-2+0{,}725 = \mathrm{ch}\,0{,}725-1{,}275 \approx$$

$$\approx 1{,}2746-1{,}275 = -0{,}0004.$$

A függvény a $-0{,}726$ és $-0{,}725$ helyek között előjelet vált, tehát ebben az intervallumban van a keresett gyök. Mivel a helyettesítési érték abszolút értéke a $-0{,}725$ helyen a kisebb, ezt fogadjuk el a gyök értékeként.

Most a másik gyököt határozzuk meg három értékes jegy pontossággal.

A gyököt tartalmazó intervallum (az ábrából leolvasható) legyen pl.: (2; 2,2); ui. egyrészt

$$y(2) = \mathrm{ch}\,2-2-2 = \mathrm{ch}\,2-4,$$

ahol

$$\mathrm{ch}\,2 = \frac{e^2+e^{-2}}{2} \approx \frac{7{,}3891+0{,}1353}{2} = \frac{7{,}5244}{2} = 3{,}7622,$$

és így

$$y(2) = 3{,}7622-4 = -0{,}2378 < 0.$$

Másrészt

$$y(2{,}2) = \mathrm{eh}\,2{,}2-2-2{,}2 = \mathrm{ch}\,2{,}2-4{,}2,$$

ahol

$$\mathrm{eh}\,2{,}2 = \frac{e^{2,2}+e^{-2,2}}{2} \approx \frac{9{,}0250+0{,}1108}{2} = \frac{9{,}1358}{2} = 4{,}5679,$$

és így

$$y(2{,}2) = 4{,}5679-4{,}2 = 0{,}3679 > 0.$$

Az intervallum két végén a helyettesítési érték ellentétes előjelű — a függvény folytonos —, tehát közben van egy gyökhely.

A második derivált előjele mindenütt pozitív, az $x_0^* = 2{,}2$ pontban a függvényérték és a második derivált helyettesítési értékének előjele megegyezik, és így a gyökhöz tartó sorozat első tagja $x_0^* = 2{,}2$. A második tag

$$x_1^* = x_0^* - \frac{y(x_0^*)}{y'(x_0^*)} = 2{,}2 - \frac{y(2{,}2)}{y'(2{,}2)}.$$

Meghatározzuk $y'(2{,}2)$ értékét, majd x_1^*-ot.

$$y'(2{,}2) = \mathrm{sh}\,2{,}2-1,$$

ahol

$$\mathrm{sh}\,2{,}2 = \frac{e^{2,2}-e^{-2,2}}{2} \approx \frac{9{,}0250-0{,}1108}{2} = \frac{8{,}9142}{2} = 4{,}4571,$$

és így

$$y'(2{,}2) = 4{,}4521-1 = 3{,}4571.$$

A kapott értéket x_1^* képletébe helyettesítve:

$$x_1^* = 2{,}2 - \frac{0{,}3679}{3{,}4571} \approx 2{,}2-0{,}107 = 2{,}093 \approx 2{,}1;$$

$$y(x_1^*) = y(2{,}1) = \mathrm{ch}\,2{,}1-2-2{,}1 = \mathrm{ch}\,2{,}1-4{,}1,$$

ahol

$$\mathrm{ch}\,2{,}1 = \frac{e^{2,1}+e^{-2,1}}{2} \approx \frac{8{,}1662+0{,}1225}{2} = \frac{8{,}2887}{2} \approx 4{,}1443,$$

és ezért

$$y(x_1^*) \approx 4{,}1443-4{,}1 = 0{,}0443.$$

A megoldást az x_1^* közelítő gyökkel folytatjuk.

$$x_2^* = x_1^* - \frac{y(x_1^*)}{y'(x_1^*)}.$$

Meghatározzuk $y'(x_1^*)$ értékét, majd x_2^* értékét.

$$y'(x_1^*) = y'(2{,}1) = \operatorname{sh} 2{,}1 - 1,$$

ahol

$$\operatorname{sh} 2{,}1 = \frac{e^{2,1} - e^{-2,1}}{2} \approx \frac{8{,}1662 - 0{,}1225}{2} = \frac{8{,}0437}{2} \approx 4{,}0218,$$

és így

$$y'(2{,}1) \approx 4{,}0218 - 1 = 3{,}0218.$$

A kapott értéket x_2^* képletébe helyettesítve:

$$x_2^* = 2{,}1 - \frac{0{,}0443}{4{,}0218} \approx 2{,}1 - 0{,}011 = 2{,}089 \approx 2{,}09.$$

A függvényérték az $x = 2{,}09$ helyen:

$$y(2{,}09) = \operatorname{ch} 2{,}09 - 2 - 2{,}09 = \operatorname{ch} 2{,}09 - 4{,}09,$$

ahol

$$\operatorname{ch} 2{,}09 = \frac{e^{2,09} + e^{-2,09}}{2} \approx \frac{8{,}0849 + 0{,}1237}{2} \approx 4{,}1043,$$

ezért

$$y(2{,}09) = 4{,}1043 - 4{,}09 = 0{,}0143.$$

A függvényérték pozitív. Határozzuk most meg az $x = 2{,}08$-hoz tartozó helyettesítési értéket!

$$y(2{,}08) = \operatorname{ch} 2{,}08 - 2 - 2{,}08 = \operatorname{ch} 2{,}08 - 4{,}08,$$

ahol

$$\operatorname{ch} 2{,}08 = \frac{e^{2,08} + e^{-2,08}}{2} = \frac{8{,}0045 + 0{,}1249}{2} = \frac{8{,}1294}{2} = 4{,}0647;$$

$$y(2{,}08) \approx 4{,}0647 - 4{,}08 = -0{,}0153.$$

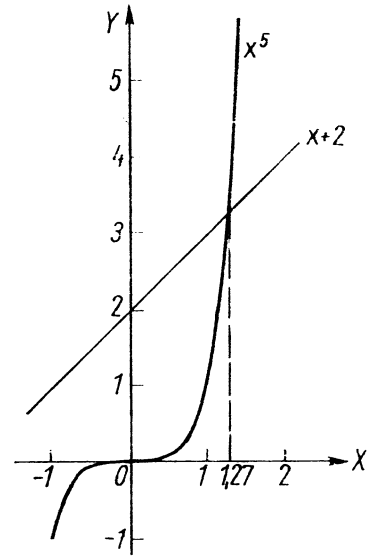
A függvény folytonos és a (2,08; 2,09) szakaszon előjelet vált, ezért itt gyöke van. A gyök két tizedesjegyre pontos értékének a 2,09-et fogadjuk el.

5. Oldjuk meg az $x^5 = x + 2$ egyenletet század pontossággal!
Mindkét oldalt x függvényének tekintve, és ezek grafikonját megrajzolva (86. ábra) látjuk, hogy az egyenletnek egy valós gyöke van. A gyök 1 és 2 közé esik.

Az $y = x^5 - x - 2$ függvény helyettesítési értékei az 1 és 2 helyen:

$$y(1) = 1 - 1 - 2 = -2 < 0.$$

$$y(2) = 32 - 2 - 2 = 28 > 0.$$



86. ábra

Meghatározzuk a függvény második deriváltját, mert segítségével tudjuk eldönteni, hogy az intervallum melyik határát válasszuk x_0-nak.

$$y' = 5x^4 - 1, \quad y'' = 20x^3 > 0 \text{ minden pozitív } x\text{-re.}$$

Az $x_0 = 2$ helyen a függvényértéknek és a második derivált helyettesítési értékének előjele megegyezik, ezért ez lesz a gyökhöz tartó sorozat első tagja.

$$x_1 = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} = 2 - \frac{y(2)}{y'(2)};$$

$$y(2) = 28, \quad y'(2) = 5 \cdot 2^4 - 1 = 79;$$

$$x_1 = 2 - \frac{28}{97} \approx 2 - 0{,}35 = 1{,}65.$$

Az x_1-hez tartozó függvényértéket meghatározzuk:

$$y(x_1) = y(1{,}65) = 1{,}65^5 - 1{,}65 - 2 = 1{,}65^5 - 3{,}65 \approx$$
$$\approx 12{,}23 - 3{,}65 = 8{,}58.$$

Az 1,65 közelítő gyökkel számolunk tovább.

$$x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)} = 1{,}65 - \frac{y(1{,}65)}{y'(1{,}65)}.$$

Meghatározzuk y' értékét, majd x_2-t.

$$y'(1{,}65) = 5 \cdot 1{,}65^4 - 1 \approx 5 \cdot 7{,}413 - 1 = 37{,}065 - 1 \approx 36{,}07.$$

$$x_2 = 1{,}65 - \frac{8{,}58}{36{,}07} \approx 1{,}65 - 0{,}24 = 1{,}41.$$

Meghatározzuk az $y(x_2)$ értéket:

$$y(x_2) = y(1{,}41) = 1{,}41^5 - 1{,}41 - 2 = 1{,}41^5 - 3{,}41 \approx$$
$$\approx 5{,}572 - 3{,}41 = 2{,}162.$$

Az 1,41 értékkel számolunk tovább:

$$x_3 = x_2 - \frac{y(x_2)}{y'(x_2)} = 1{,}41 - \frac{y(1{,}41)}{y'(1{,}41)}.$$

Meghatározzuk $y'(1{,}41)$ értékét, majd x_3-at.

$$y'(1{,}41) \approx 5 \cdot 1{,}41^4 - 1 \approx 5 \cdot 3{,}952 - 1 = 19{,}76 - 1 = 18{,}76.$$

$$x_3 = 1{,}41 - \frac{2{,}162}{18{,}76},$$

a tört értékét logarléccel számolva:

$$x_3 \approx 1{,}41 - 0{,}115 \approx 1{,}41 - 0{,}12 = 1{,}29.$$

A függvényértéket meghatározzuk az 1,29 helyen:

$$y(1{,}29) = 1{,}29^5 - 1{,}29 - 2 = 1{,}29^5 - 3{,}29 \approx 3{,}572 - 3{,}29 = 0{,}282.$$

A számítást az 1,29 közelítő gyökkel folytatjuk tovább.

$$x_4 = x_3 - \frac{y(x_3)}{y'(x_3)} = 1{,}29 - \frac{y(1{,}29)}{y'(1{,}29)}.$$

Meghatározzuk $y'(1{,}29)$ értékét.

$$y'(1{,}29) = 5 \cdot 1{,}29^4 - 1 \approx 5 \cdot 2{,}77 - 1 = 13{,}85 - 1 = 12{,}85;$$

$$x_4 = 1{,}29 - \frac{0{,}282}{12{,}85} \approx 1{,}29 - 0{,}022 = 1{,}268 \approx 1{,}27;$$

$$y(1{,}27) = 1{,}27^5 - 1{,}27 - 2 = 1{,}27^5 - 3{,}27 \approx 3{,}304 - 3{,}27 = 0{,}034.$$

Mivel a függvény görbéje meredek, a feladat megoldásának az 1,27 értéket valószínűleg elfogadhatjuk; ellenőrzésül kiszámítjuk az 1,26-hoz tartozó helyettesítési értéket:

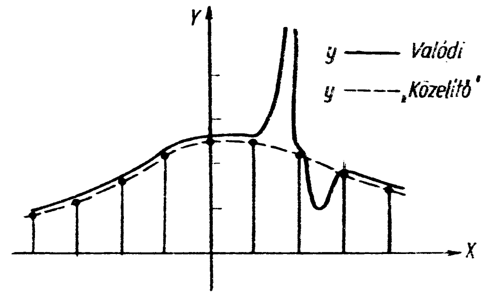
$$y(1{,}26) = 1{,}26^5 - 1{,}26 - 2 = 1{,}26^5 - 3{,}26 \approx 3{,}177 - 3{,}26 = -0{,}083.$$

Az előjelváltás bekövetkezett; tehát a gyök három jegyre, ill. két tizedesjegyre pontos értéke: 1,27 (a függvényérték abszolút értéke itt kisebb).

5. Függvényvizsgálat

Ha ismert egy függvénykapcsolat és arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen a függvénygörbe alakja és elhelyezkedése a koordinátarendszerben, akkor az egyes abszcisszaértékekhez tartozó ordinátaértékek kiszámítása általában fáradságos és nem mindig megbízható eljárás, hiszen ily módon véletlenül átugorhatjuk a görbe egyes „kényes" részeit (pontjait, rövidebb szakaszait). A 87. ábrán illusztráljuk, mennyire félrevezető lehet az ily módon pontokból megrajzolt „közelítő" görbe.

Ezért célszerűbb — gyorsabb és megbízhatóbb — eljárás, ha először általánosabb módszerekkel, mint pl. nagyságrendi meg-



87. ábra

gondolások, határérték-meghatározások, differenciálszámítási segédeszközök, megállapítjuk a görbe bizonyos jellegzetes pontjait, szakaszait; az így kapott felvilágosítások alapján megismerjük a görbe hozzávetőleges menetét; majd ezután szükség esetén — pontosabb ábrázolás céljából — kiszámítunk egyes helyettesítési értékeket.

Adott esetben ehhez természetesen szükséges, hogy pl. a görbe megfelelő szakasza differenciálható legyen.)

Az ilyen függvényvizsgálat általában a következőkre terjed ki (adott esetben ezek egyike vagy másika elmaradhat):

1. A függvény értelmezési tartománya;
2. A tengelymetszetek, vagyis azok a pontok, ahol a görbe az X-tengelyt, ill. az Y-tengelyt metszi;
3. A függvény folytonossága, korlátossága, ill. szakadási helyei (pólusai), és a görbe viselkedése ezek mindkét oldali környezetében, valamint a $+\infty$-ben és $-\infty$-ben, ill. az értelmezési tartomány szélein;
4. A lokális szélsőértékek (maximumok és minimumok);
5. Az inflexiós pontok (konvex és konkáv szakaszok elválasztó pontjai);
6. Az eddig meghatározott jellegzetes pontok alapján a függvénygörbe hozzávetőleges menetének megrajzolása;
7. Értékkészletének meghatározása;
8. Szükség szerinti további pontok kiszámítása.

A függvény fenti tulajdonságait a következő módon határozzuk meg:

1. *Értelmezési tartomány:* Vizsgáljuk meg, milyen x értékek esetén vesz fel y valós számértéket. Sokszor úgy tesszük fel a kérdést: van-e olyan valós x érték, amelyre y nem ad valós értéket.
2. *Tengelymetszetek:* A görbe ott metszi (esetleg érinti) az X-tengelyt, ahol $y=0$; ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$. Pl. racionális törtfüggvény esetén y ott nulla, ahol a függvény számlálója nulla, de nevezője nem nulla. Szükség esetén a tengelymetszeteket közelítő módszerrel oldhatjuk meg.
3. *Folytonosság, szakadás:* A racionális egész függvény az egész számegyenesen folytonos; a racionális törtfüggvénynek ott van szakadási helye, ahol a nevező zérus (ha a nevező gyökhelye egyúttal a számlálónak is gyökhelye, akkor ez megszüntethető szakadás lehet; ha a számlálónak nem gyökhelye, akkor ún. pólus, vagyis a függvényérték + vagy − végtelenné válik).

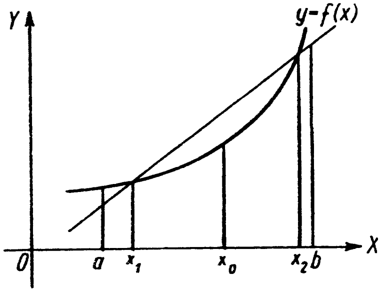
   A görbe viselkedése a $+\infty$-ben és $-\infty$-ben, ill. az értelmezési tartomány szélein: Tudjuk pl., hogy egy racionális egész függvény viselkedését nagy abszolút értékű x esetén a legmagasabb kitevőjű tag viselkedése szabja meg; ennek alapján megállapítható sok egyéb, bonyolultabb függvény viselkedése is a $\pm\infty$-ben sorfejtésükből.
4. *Szélsőérték:* Ennek feltételeit már a 1. pontban összefoglaltuk.
5. *Inflexiós pont:* Az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele: $y''=0$. Ha ezen a helyen $y'''\neq 0$ (vagy — ami ezzel egyenértékű — y'' előjelet vált), akkor a függvénynek inflexiós pontja van, vagyis $y'''\neq 0$ már elégséges feltétel.

   Megjegyzés: Ha az x_0 helyen $y'(x_0)=y''(x_0)=\ldots=$ $=y^{(n)}(x_0)=0$, de $y^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, akkor x_0-ban páratlan n esetén szélsőérték van, páros n esetén pedig inflexiós pont.
6. Az eddigi vizsgálatok alapján lényegében felvázolhatjuk a függvény menetét, a jellegzetes pontok közötti szakaszok tulajdonsága figyelembevételével: Ha folytonos függvény minden metszéspontját az X-tengellyel meg tudtuk határozni, akkor két szomszédos metszéspont közötti szakasz előjelét meghatározza bármely belső pontjához tartozó függvényérték előjele. Ha valamely szakaszról tudjuk, hogy ott $f'(x)\geqq 0$, akkor e szakaszon a görbe monoton nő, ha $f'(x)\leqq 0$, akkor a monoton fogy; ha ennél valamivel többet is tudunk, ti. hogy $f'(x)>0$, ill. $f'(x)<0$, akkor a görbe szigorúan monoton nő, ill. fogy.

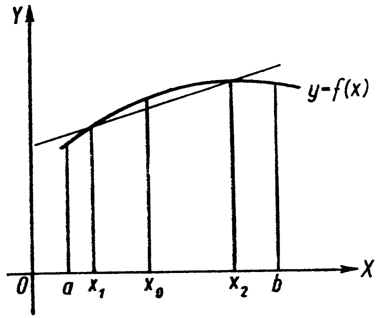
   Általában, ha egy görbe két szomszédos szélsőértékhelye között folytonos, akkor minimumtól maximumig terjedő szakasz esetén monoton nő, maximumtól minimumig terjedő szakaszon monoton fogy.

   Ha valamely szakaszról tudjuk, hogy $f''(x)\geqq 0$, akkor ott a görbe konvex (domború), míg ha valamely szakaszon $f''(x) \leqq 0$, akkor ott a görbe konkáv (homorú). Konvexnek nevezünk egy görbét (görbeszakaszt), ha bárhogyan választva az intervallum két belső x_1 és x_2 pontját (ahol $x_1 < x_2$), minden olyan x_0 pontra, melyre $x_1 < x_0 < x_2$, $f(x_0)$ az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ ordinátájú pontokat összekötő húr alatt van (88. ábra). Valamely görbe (görbeszakasz) akkor konkáv, ha bárhogyan választva az intervallum két belső x_1 és x_2 pontját (ahol $x_1 < x_2$), minden olyan x_0 pontra, melyre $x_1 < x_0 < x_2$, $f(x_0)$ az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ ordinátájú pontokat összekötő húr felett van (89. ábra).

7. A függvénygörbe alapján megállapítjuk a függvény értékkészletét.



88. ábra



89. ábra

Gyakorló feladatok

1. Vizsgáljuk meg az $y = x^2+x-6$ függvényt:

1. A függvény racionális egész függvény, ezért mindenütt értelmezett.

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény ott metszi (érinti) az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz

$$x^2+x-6=0.$$

Az egyenletet megoldjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2};$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -3.$$

A metszéspontok abszcisszája tehát 2 és -3.

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, tehát

$$y = -6,$$

vagyis a függvény görbéje az Y-tengelyt a -6 ordinátájú pontban metszi.

3. Mivel racionális egész függvény, tehát mindenütt folytonos (szakadása nincs), ezért csak a végtelenben kell határértéket kiszámítanunk, ezek

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2+x-6) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2+x-6) = +\infty.$$

Ha $x \to \pm\infty$, akkor a függvény x^2-es tagja lesz domináló.

4. A szélsőértéket az első derivált segítségével határozzuk meg. Az első derivált:

$$y' = 2x+1.$$

A függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol $y' = 2x+1 = 0$, vagyis az $x_1 = -1/2$ helyen.

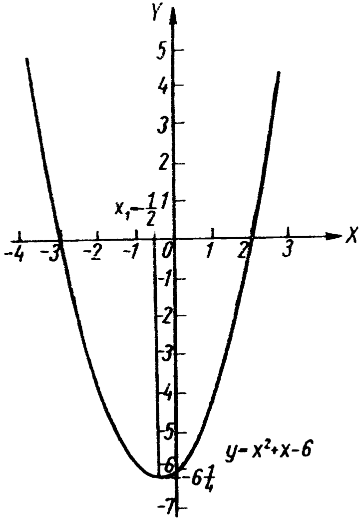
Mivel $y''=2>0$ mindenütt, tehát az $x = -1/2$ helyen is, ezért itt e függvénynek minimuma van.

A minimum értéke:

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = -6\frac{1}{4}.$$

5. A függvény görbületi viszonyaira a második derivált előjeléből következtetünk. A második derivált: $y''=2$. Mivel ez x-től függetlenül pozitív, ezért inflexiós pont nincs, a függvény görbéje a teljes értelmezési tartományban konvex.

6. A függvény grafikonja az eddig számított eredmények alapján felvázolható (90. ábra).



90. ábra

7. A függvény értékkészlete a $-6\frac{1}{4}$ és $+\infty$ közé eső számok halmaza.

$$\text{Ék.: } -6\frac{1}{4} \leq y < +\infty.$$

A $-6\frac{1}{4}$ értéket egyszer, a többi függvényértéket pedig kétszer veszi fel a függvény.

2. Vizsgáljuk meg az $y = 2x^2-3x-4$ függvényt!

1. A függvény racionális egész függvény, ezért mindenütt értelmezett:

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény ott metszi (érinti) az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz

$$2x^2-3x-4=0.$$

Az egyenletet megoldjuk:

$$x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+32}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{41}}{4} \approx \frac{3\pm6{,}403}{4};$$

$$x_1 \approx \frac{9{,}403}{4} \approx 2{,}351; \quad x_2 = \frac{-3{,}403}{4} \approx -0{,}851.$$

A függvény az Y-tengelyt ott metszi, ahol $x=0$, tehát

$$y=-4,$$

vagyis a függvény az Y-tengelyt a -4 pontban metszi.

3. A függvénynek szakadása nincs, hiszen racionális egész függvény, tehát folytonos, ezért csak a végtelenbeli viselkedését kell megállapítanunk:

$$\lim_{x\to-\infty} (2x^2-3x-4) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x\to+\infty} (2x^2-3x-4) = +\infty,$$

ui. nagy x értékekre a függvény $2x^2$ tagja a domináló.

4. A szélsőértékekre a függvény első deriváltja jellemző:

$$y' = 4x-3.$$

Szélsőérték csak ott lehet, ahol $y'=0$, vagyis $4x-3=0$; ebből

$$x_3 = \frac{3}{4}.$$

$y''=4$, tehát minimum van.

$$y\left(\frac{3}{4}\right) = 2\cdot\frac{9}{16}-3\cdot\frac{3}{4}-4 = \frac{9}{8}-\frac{18}{8}-\frac{32}{8} = -\frac{41}{8} = -5\frac{1}{8}.$$

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

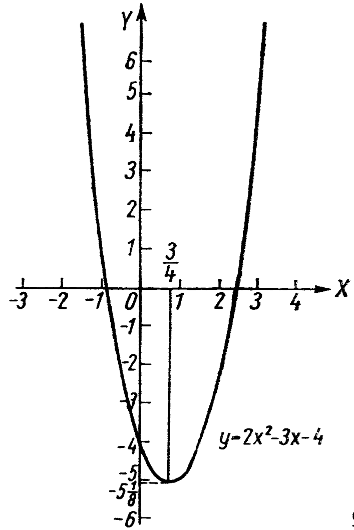
$$y''=4.$$

Mivel ez minden x-re pozitív, ezért nincs inflexiós pont, és a függvény konvex a teljes értelmezési tartományban.

6. A függvény grafikonja a 91. ábrán látható.

7. A függvény értékkészlete $-\frac{41}{8}$-tól $+\infty$-ig terjed, és minden $-\frac{41}{8}$-nál nagyobb függvényértéket kétszer vesz fel:

$$\text{Ék.: } -\frac{41}{8} \leq y < +\infty.$$



91. ábra

3. Vizsgáljuk meg az $y=-3x^2+2x-6$ függvényt!

1. A függvény racionális egész függvény, ezért mindenütt értelmezett:

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény ott metszi az X-tengelyt, ahol $y=0$, vagyis

$$-3x^2+2x-6=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12\cdot 6}}{-6}=\frac{2\pm\sqrt{-68}}{-6}.$$

Mivel a diszkrimináns negatív, a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, így a függvény nem metszi, sem érinti az X-tengelyt.

A függvény az Y-tengelyt ott metszi, ahol $x=0$, vagyis az $y=-6$ pontban.

3. A függvény folytonos, nincs szakadása. Viselkedése a végtelenben:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^2+2x-6)=-\infty,$$

és

$$\lim_{x\to+\infty}(-3x^2+2x-6)=-\infty.$$

Ha $x\to\infty$, akkor a függvény $-3x^2$ tagja dominál, ezért a görbe olyan gyorsan tart a végtelenhez, mint az $y=-3x^2$ függvény.

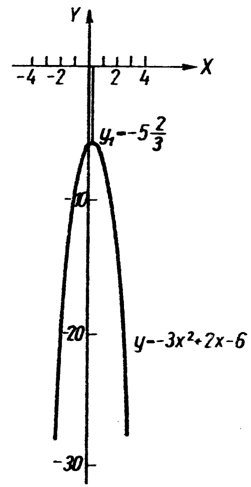
4. A szélsőértékek az első derivált ismeretében meghatározhatók:

$$y'=-6x+2.$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $y'=0$, ez pedig a $-6x+2=0$ egyenlet megoldása: $x_1=\frac{1}{3}$. Mivel $y''=-6<0$, tehát a függvénynek itt maximuma van. A függvényérték ezen a helyen $y\left(\frac{1}{3}\right)=-3\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{3}-6=-\frac{1}{3}+$ $+\frac{2}{3}-6=-5\frac{2}{3}$.

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjele a jellemző: $y''=-6$ a teljes számegyenesen negatív, így nincs inflexiós pont és a függvény konkáv.

6. A függvény görbéje a 92. ábrán látható.



92. ábra

7. A függvény értékkészlete a $-\infty$ és $-5\frac{2}{3}$ közé eső számok halmaza:

$$\text{Ék.: } -\infty<y\leq-5\frac{2}{3}.$$

Minden x értékhez csak egy y érték tartozik. A függvény a $-5\frac{2}{3}$ értéket egyszer, a többi y értéket pedig kétszer veszi fel.

16*

4. Vizsgáljuk meg az $y = 5x^3 - 4x^4$ függvényt!

1. A függvény negyedfokú racionális egész függvény. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza:

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$, vagyis

$$5x^3 - 4x^4 = 0; \quad x^3(5-4x) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=0$ és $x_2=\frac{5}{4}$, mégpedig $x_1=0$ háromszoros gyöke. A gyök multiplicitása páratlan, ezért a függvény görbéje az $x_1=0$ helyen metszi az X-tengelyt. Az origó egyúttal az Y-tengellyel való metszéspontja is.

3. A függvény mindenütt folytonos, nincs szakadása, ezért csak a $\pm\infty$-ben vizsgáljuk viselkedését.

$$\lim_{x\to-\infty} (5x^3 - 4x^4) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} (5x^3 - 4x^4) = -\infty.$$

Ha $x \to +\infty$, akkor a függvény $-4x^4$ tagja lesz a domináló, ezért a görbe úgy tart a végtelenhez, mint az $y = -4x^4$ függvény.

4. A szélsőértékek megállapítása:

$$y' = 15x^2 - 16x^3,$$

vagy átalakítva

$$y' = x^2(15-16x).$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $y'=0$; ennek megfelelő gyökök: $x_3=0$, $x_4=\frac{15}{16}$. Mivel $y''=30x-48x^2$, tehát $y''(0)=0$, itt nincs feltétlenül szélsőérték. Az $x=\frac{15}{16}$ helyen y'' kiszámítása helyett egyszerűbb y' előjelének viselkedését vizsgálni e hely környezetében. Mivel $y' = x^2(15-16x)$, tehát az előjelet a $(15-16x)$ tényező dönti el. Ránézésre látható, hogy ez pozitív minden $\frac{15}{16}$-nál kisebb értékre és negatív minden $\frac{15}{16}$-nál nagyobb értékre. Tehát az $x=\frac{15}{16}$ helyen maximum van. A függvényérték e helyen

$$y\left(\frac{15}{16}\right) = 5\left(\frac{15}{16}\right)^3 - 4\left(\frac{15}{16}\right)^4 = \left(\frac{15}{16}\right)^3\left(5 - \frac{4\cdot 15}{16}\right) =$$

$$= \left(\frac{15}{16}\right)^3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3375}{4096}\cdot\frac{5}{4} \approx 1{,}03.$$

5. A függvény görbületi viszonyait a második derivált ismeretében tudjuk megadni:

$$y'' = 30x - 48x^2.$$

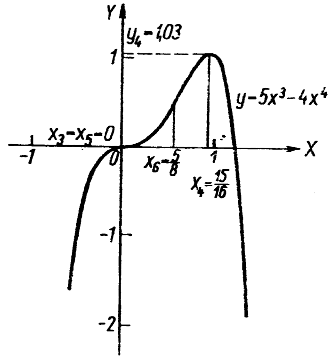
Inflexiós pont ott lehet, ahol $y''=0$, vagyis $30x-48x^2=0$; ezt szorzattá alakítva $x(30-48x)=0$, ez pedig akkor nulla, ha $x_5=0$; $x_6=\frac{30}{48}=\frac{5}{8}$.

$$y''' = 30 - 96x; \quad y'''(0) = 30 \neq 0; \quad y'''\left(\frac{5}{8}\right) = 30 - 96\cdot\frac{5}{8} =$$

$$= -30 \neq 0.$$

Tehát $x=0$ és $x=\frac{5}{8}$ inflexiós pont. A megfelelő függvényértékek: $y(0)=0$; $y\left(\frac{5}{8}\right) \approx 0{,}61$.

6. A függvény görbéje a 93. ábrán látható.



93. ábra

7. A függvény egyértékű, és értékkészlete $-\infty$-től 1,03-ig terjed. (A maximális érték kerekített!)

$$\text{Ék.: } -\infty < y \leqq 1{,}03.$$

5. Vizsgáljuk meg az $y = x^3 - 5x^2$ függvényt:

A függvényt x^2 kiemelésével szorzattá alakítjuk:

$$y = x^2(x-5).$$

1. A függvény racionális egész függvény, ezért bármely x értékre értelmezett:

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény görbéje ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$, vagyis

$$x^2(x-5) = 0.$$

A felírt harmadfokú egyenletnek $x_1=0$ kétszeres gyöke, míg $x_2=5$ egyszeres gyöke. Az $x-5$ tényező előjele az $x_1=0$ hely kis környezetében negatív, az x^2 előjele viszont bármely x-re pozitív, vagyis a harmadfokú kifejezés az $x_1=0$ helyen nem vált előjelet, tehát a függvény görbéje nem metszi az X-tengelyt, csak érinti! Az $x_2=5$ helyen az $x-5$ tényező előjelet vált ($x<x_2$ esetén negatív és $x>x_2$ esetén pozitív), ezért a függvény görbéje az $x_2=5$ helyen metszi az X-tengelyt (x^2 előjele állandó!)

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis az $y=0$ helyen.

A függvény tehát az origóban az X-tengelyt érinti, és az Y-tengelyt metszi.

3. A függvénynek nincs szakadása, mert racionális egész függvény, és így folytonos, ezért csak a végtelenbeli határértékeket kell kiszámítanunk. Ezek

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-5x^2) = -\infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^3-5x^2) = +\infty.$$

Ui. ha $x\to\infty$, akkor a függvény x^3 tagja dominál.

4. A szélsőértékekről a függvény első deriváltja tájékoztat: $y'=3x^2-10x$.

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $y'=0$, vagyis

$$3x^2-10x = 0;$$

ebből x-et kiemelve, a hiányos másodfokú egyenletet szorzattá tudjuk alakítani:

$$x(3x-10) = 0;$$

ennek gyökei

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{10}{3}.$$

$$y'' = 6x-10; \quad y''(0) = -10 < 0; \quad y''\left(\frac{10}{3}\right) = 6\cdot\frac{10}{3}-10 = 10 > 0;$$

tehát az $x=0$ helyen maximum van, az $x=\frac{10}{3}$ helyen pedig minimum.

A függvényértékek:

$$y(0)=0;$$

$$y\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}\left(\frac{10}{3}-\frac{15}{3}\right) = \frac{100}{9}\left(-\frac{5}{3}\right) =$$

$$= -\frac{500}{27} = -18\,\frac{14}{27}.$$

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk; a függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol második deriváltja nulla, vagyis

$$6x-10 = 0;$$

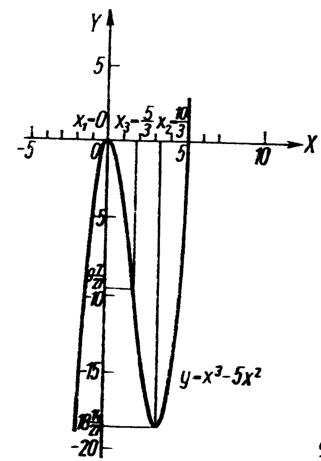
ebből

$$x_3 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

$y'''=6\neq0$, tehát az $x=\frac{5}{3}$ helyen inflexiós pont van. A megfelelő függvényérték

$$y\left(\frac{5}{3}\right) = -9\,\frac{7}{27}.$$

6. A függvény grafikonja a 94. ábrán látható.



94. ábra

7. A függvény értékkészlete:

Ék.: $-\infty < y < +\infty$.

A függvény a $-18\,\frac{14}{27}$-nél kisebb, ill. a 0-nál nagyobb függvényértékeket egyszer, a $-18\,\frac{14}{27}$ és 0 értéket kétszer, míg a $-18\,\frac{14}{27}$ és 0 közé eső függvényértékeket háromszor veszi fel.

6. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt:

$$y = (x+2)(x^2-8x+16),$$

ami tovább alakítva

$$y = (x+2)(x-4)^2.$$

Ezt az alakot már könnyebb vizsgálni.

1. A függvény harmadfokú racionális egész függvény, ezért bármely x-re értelmezett:

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény görbéje ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz

$$(x+2)(x-4)^2 = 0.$$

A felírt harmadfokú egyenletnek az $x_1 = -2$ és $x_2=4$ számok a gyökei ($x_2=4$ szám kétszeres gyök). A függvény görbéjének tehát az X-tengellyel két közös pontja van. Vizsgáljuk meg ezeket a pontokat! Az $x+2$ tényező az $x_1=-2$ pont környezetében előjelet vált, és így a függvény görbéje az $x_1=-2$ pontban metszi az X-tengelyt. Az $(x-4)^2$ tényező az $x_2=4$ pont környezetében nem vált előjelet, mert 4-nél kisebb, ill. nagyobb x értékekre egyaránt pozitív, így a görbe nem metszi (csak érinti) az $x_2=4$ abszcisszájú pontban az X-tengelyt.

A függvény görbéje ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis $y=32$.

3. A függvény folytonos, nincs szakadása; beszorozva $(x+2)(x-4)^2 = x^3-6x^2+32$ és

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+32) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-6x^2+32) = +\infty.$$

Ui. ha $x \to \pm\infty$, akkor a függvény x^3 tagja a domináló.

4. A szélsőértékek a függvény első deriváltjával határozhatók meg:

$$y' = 3x^2-12x.$$

Szélsőérték csak ott lehet, ahol $y'=0$, vagyis $3x^2-12x=0$; ezt szorzattá alakítva, $3x(x-4)=0$.

Az egyenlet gyökei $x_3=0$; $x_4=4$.

$$y'' = 6x-12; \quad y''(0) = -12 < 0;$$

$$y''(4) = 24-12 = 12 > 0;$$

ezért az $x=0$ helyen maximum, az $x=4$ helyen minimum van. $y(0) = 2\cdot(-4)^2 = 32$; $y(4)=0$, amit már előzőleg láttunk.

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

$$y'' = 6x-12.$$

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol $y''=0$, azaz

$$6x-12 = 0,$$

ebből

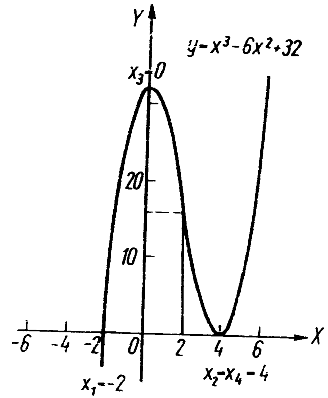
$$x_5 = 2.$$

$y'''=6\neq 0$; tehát az $x=2$ helyen inflexiós pont van.

A függvényérték ezen a helyen

$$y(2) = 4\cdot(-2)^2 = 16.$$

6. A függvény grafikonja az eddigiek ismeretében felvázolható (95. ábra).



95. ábra

7. A függvény értékkészlete a valós számok halmaza:

$$\text{Ék.: } -\infty < y < +\infty.$$

A $-\infty$ és 0 közé eső, valamint a 32-nél nagyobb függvényértékeket egyszer, a 0 és 32 függvényértéket kétszer, míg a 0 és 32 közé eső függvényértékeket háromszor veszi fel.

7. Vizsgáljuk meg az $y = 2x^3-6x^2-2x+6$ függvényt!

1. A függvény racionális egész függvény, ezért mindenütt értelmezett:

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény ott metszi az X-tengelyt, ahol $y=0$, ezért meg kell oldanunk a

$$2x^3-6x^2-2x+6=0$$

harmadfokú egyenletet. Vegyük észre, hogy az együtthatók rendre: 2, -6; majd -2, 6. Tehát a számok egyenlők, előjelek különbözők és ebben a speciális esetben a függvényt könnyen szorzattá alakíthatjuk:

$$2(x^3-3x^2-x+3)=2[x^2(x-3)-(x-3)]=2(x^2-1)(x-3)=$$
$$=2(x+1)(x-1)(x-3).$$

A metszéspontok tehát $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$.

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis az $y_0=6$ pontban.

3. A függvény folytonos, nincs szakadása; ezért csak az $x=\pm\infty$-beli határértéket kell megvizsgálnunk:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3-6x^2-2x+6)=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^3-6x^2-2x+6)=+\infty,$$

Ui. ha $x\to\infty$, akkor a függvény $2x^3$ tagja a domináló.

4. A szélsőértékek helye az első derivált ismeretében meghatározható:

$$y'=6x^2-12x-2.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $y'=0$.

$$y'=6x^2-12x-2=0;\quad 3x^2-6x-1=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+12}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{48}}{6}=\frac{6\pm4\sqrt{3}}{6}=1\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$x_1=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx1+\frac{2}{3}\cdot1{,}732\approx1+0{,}67\cdot1{,}732\approx$$
$$\approx1+1{,}155=2{,}155\approx2{,}16;$$

$$x_2=1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx1-1{,}155=-0{,}155\approx-0{,}16;$$

$$y''=12(x-1);\quad y''\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)>0,$$

tehát az x_1 helyen minimuma van;

$$y''\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)<0,$$

tehát az x_2 helyen maximuma van.

A maximum, valamint a minimum értékét úgy számítjuk ki, hogy a gyöktényezős alakba helyettesítünk:

$$y=2(x+1)(x-1)(x-3);$$

$$y_1\approx y(2{,}16)=2\cdot3{,}16\cdot1{,}16(-0{,}84)\approx-6{,}1;$$

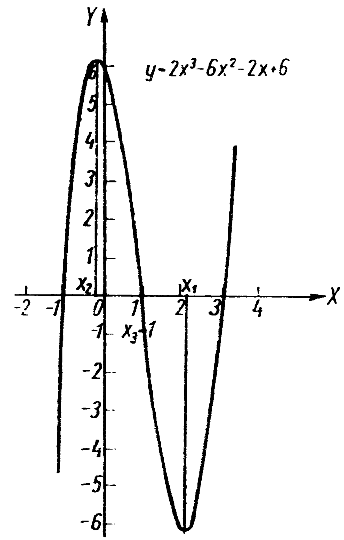
$$y_2\approx y(-0{,}16)=2\cdot(-1{,}16)\cdot0{,}84(-3{,}16)\approx+6{,}1.$$

5. A görbületi viszonyok a második derivált ismeretében határozhatók meg:

$$y''=12x-12.$$

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol a második deriváltja nulla, vagyis ahol

$$12x-12=0;\quad \text{ebből}\quad x_3=1.$$



96. ábra

$y''' = 12 > 0$, tehát inflexiós pont van az $x_3 = 1$ helyen. A függvényérték itt $y_3 = 0$ (amit már a gyökhelyek keresésekor is megállapítottunk).

6. Mindezek alapján a függvény felvázolható (96. ábra).

7. A függvény értékkészlete $-\infty$-től $+\infty$-ig terjed. A maximumnál felvett függvényérték (kerekítve) 6,1; és a minimummal felvett függvényérték $-6{,}1$; a függvény ezeket az értékeket kétszer, a közöttük levő értékeket háromszor, minden más értéket csak egyszer vesz fel.

8. Vizsgáljuk meg az $y = 2x^4 - 4x^2 + 6$ függvényt!

1. A függvény racionális egész függvény, ezért mindenütt értelmezett:

$$\text{Ét.: } -\infty < x < +\infty.$$

2. A függvény ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y = 0$, azaz

$$2x^4 - 4x^2 + 6 = 0.$$

Vegyük észre, hogy a független változónak csak páros hatványa fordul elő, tehát a függvényértéket x előjele nem befolyásolja, vagyis a görbe szimmetrikus az Y-tengelyre.

Mivel az $x^2 = z$ helyettesítéssel a $2z^2 - 4z + 6 = 0$ másodfokúra redukálható negyedfokú egyenlet diszkriminánsa

$$d = 16 - 48 < 0,$$

ezért az egyenletnek nincs valós gyöke, tehát az X-tengelyt a függvény görbéje nem metszi, és nem is érinti.

A függvény az Y-tengelyt ott metszi, ahol $x = 0$, vagyis az $y_0 = 6$ pontban.

3. A függvény folytonos, ezért csak a végtelenben számíthatunk határértéket.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (2x^4 - 4x^2 + 6) = +\infty;$$

ui. ha $x \to \infty$, akkor a függvény $2x^4$ tagja a domináló.

4. A szélsőérték megállapításához szükségünk van a függvény első deriváltjára:

$$y' = 8x^3 - 8x.$$

Szélsőértéke ott lehet a függvénynek, ahol $y' = 0$; vagyis

$$8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 8x(x+1)(x-1) = 0.$$

Ez az $x_1 = -1$, vagy $x_2 = 0$, vagy $x_3 = +1$ értékekre teljesül.

$y'' = 24x^2 - 8$; $\quad y''(-1) = 24 - 8 = 16 > 0$, tehát itt minimum van;

$y''(0) = -8 < 0$, tehát itt maximum van;

$y''(+1) = 16 > 0$, tehát itt minimum van.

A megfelelő függvényértékek:

$$y_1(-1) = 4; \quad y_2(0) = 6; \quad y_3(1) = 4.$$

5. A görbületi viszonyok megállapításához a második deriváltra van szükségünk:

$$y'' = 24x^2 - 8.$$

Inflexiós pontja ott lehet a függvénynek, ahol $y'' = 0$, azaz

$$24x^2 - 8 = 8(3x^2 - 1) = 0,$$

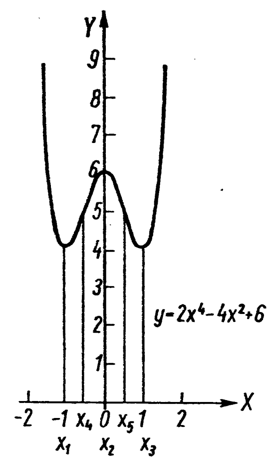
ez pedig akkor teljesül, ha $x_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, vagy $x_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$y''' = 48x; \quad y'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0; \quad y'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0;$$

tehát a görbének mindkét pontban inflexiós pontja van. A megfelelő függvényértékek:

$$y_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{44}{9} \approx 4{,}9; \quad y_5\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 4{,}9.$$

6. Mindezek alapján a függvény grafikonja könnyen felvázolható (97. ábra).



97. ábra

7. A függvény értékkészlete 4-től $+\infty$-ig terjed, mégpedig a $4<y<6$ értékeket négyszer, az $y=6$ értéket háromszor és az $y=4$, valamint $y>6$ értékeket kétszer veszi fel.

9. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt:

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

1. A függvény egy racionális egész függvény és egy racionális törtfüggvény összege. Vegyük észre, hogy ha x csak előjelet vált, akkor a függvényérték szintén előjelet vált, de nagysága változatlan marad, vagyis a függvény páratlan. Az értelmezési tartomány e két függvény értelmezési tartományának közös pontjait tartalmazza. Mivel az osztás nullával nincs értelmezve, ezért a függvény az $x=0$ helyen nincs értelmezve:

Ét.: $-\infty<x<0$ és $0<x<+\infty$, ill. rövidebb jelöléssel: $x\neq 0$.

2. A függvény ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz ahol

$$x+\frac{1}{x}=0.$$

Az egyenletnek nincs valós megoldása, hiszen az $x+\frac{1}{x}$ kifejezés értéke pozitív x értékre pozitív, negatív x értékre negatív, $x=0$-ra pedig nincs értelmezve; vagyis a függvény görbéje nem metszi az X-tengelyt.

A függvény ott metszené az Y-tengelyt, ahol $x=0$; ez viszont nem tartozik az értelmezési tartományhoz.

3. A függvénynek szakadása van az $x=0$ helyen, ezért ennek két oldalán, valamint a $\pm$ végtelenben számítjuk ki a határértéket:

$$\lim_{x\to-0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

Ha $x\to\infty$, akkor a függvény x tagja dominál és $\frac{1}{x}$ zérushoz tart, ezért a görbe aszimptotája a végtelenben az $y=x$ egyenes. Az $x\to 0$ esetben pedig az aszimptota az Y-tengely.

4. A szélsőértékek az első derivált ismeretében meghatározhatók:

$$y'=1-\frac{1}{x^2}.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált nulla, vagyis ahol $1-\frac{1}{x^2}=0$; ebből $x_{1,2}=\pm 1$.

$$y''=\frac{2}{x^3};\quad y''(+1)=2>0,\quad \text{tehát itt minimum van;}$$

$$y''(-1)=-2<0,\quad \text{tehát itt maximum van.}$$

A megfelelő függvényértékek:

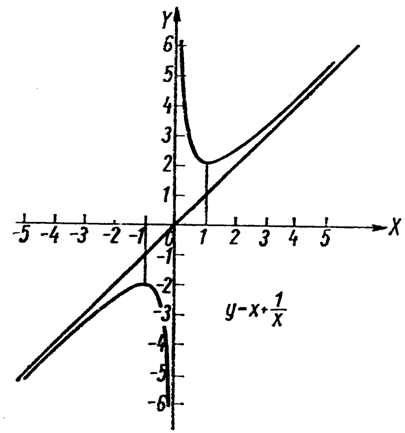
$$y_1=y(-1)=-2;\quad y_2=y(1)=2.$$

5. A görbületi viszonyok a második derivált ismeretében határozhatók meg.

$$y''=\frac{2}{x^3}.$$

A függvénynek inflexiós pontja nincs, mert a második derivált semmilyen x-re sem nulla. Az $x=0$ szakadási helytől jobbra, vagyis pozitív x értékekre, $y''>0$, tehát a görbe konvex. Negatív x értékekre $y''<0$, tehát a görbe konkáv.

6. A függvény görbéje a 98. ábrán látható.



98. ábra

7. A függvény értékkészlete $-\infty$-től -2-ig, valamint 2-től $+\infty$-ig terjed:

Ék.: $-\infty<y\leqq -2$ és $2\leqq y<+\infty$.

Az $y=-2$, ill. $y=2$ értéket egyszer, a többit pedig kétszer veszi fel a függvény.

10. Vizsgáljuk meg a következő függvényt:

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

1. A függvény egy racionális egész függvény és egy racionális törtfüggvény összege; az $x=0$ hely kivételével mindenütt értelmezett és folytonos; az $x=0$ helyen szakadása van; páros függvény.

Ét.: $-\infty < x < 0$ és $0 < x < +\infty$, ill. rövidebben: $x \neq 0$.

2. A függvény ott metszené az X-tengelyt, ahol $y=0$, de az

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 0; \quad x^4 + 1 = 0; \quad x^4 = -1$$

egyenletnek nincs valós gyöke, vagyis nem metszi az X-tengelyt. Az Y-tengelyt pedig ott metszené, ahol $x=0$, de ezen a helyen szakadása van, és így az Y-tengelyt sem metszi.

3. A függvény mindkét oldali határértékét az $x=0$ szakadási hely környezetében, valamint a pozitív és negatív végtelenben kell kiszámítanunk:

$$\lim_{x \to -0} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \to +0} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

Ha $x \to \pm\infty$, akkor a függvény x^2 tagja a domináló, $\frac{1}{x^2}$ zérushoz tart, így a görbe a végtelenben az $y=x^2$ görbéhez simul. Ha $x \to 0$, akkor x^2 tart nullához és az $\frac{1}{x^2}$ tag dominál; vagyis a görbe az Y-tengelyhez simul.

4. A szélsőértékek az első derivált előjeléből állapíthatók meg:

$$y' = 2x - \frac{2}{x^3}.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált nulla:

$$2x - \frac{2}{x^3} = 0.$$

Az egyenlet két valós gyöke: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

$$y'' = 2 + \frac{6}{x^4}; \quad y''(1) > 0, \quad \text{tehát itt minimum van;}$$

$$y''(-1) > 0, \quad \text{tehát itt szintén minimum van.}$$

A függvényértékek ezeken a helyeken:

$$y_1 = y(1) = 2; \quad y_2 = y(-1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

5. Az alaki viszonyok a második derivált előjele alapján dönthetők el:

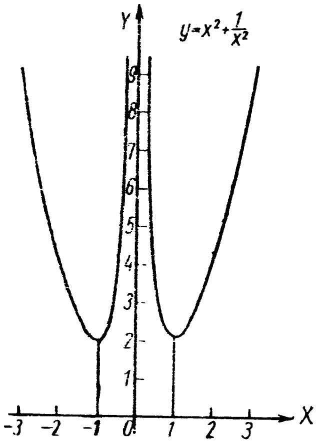
$$y'' = 2 + \frac{6}{x^4}.$$

Inflexiós pontja ott lehet ennek a függvénynek, ahol a második derivált nulla; mivel ilyen x érték nincs, tehát a függvénynek inflexiós pontja sincs. A második deriváltnak is szakadási helye az $x=0$ pont, mely az értelmezési tartományt két részre osztja; ezekben a második derivált előjele:

$$y''(-1) = 2+6 > 0 \quad \text{és} \quad y''(1) = 2+6 > 0.$$

Tehát a görbe a teljes értelmezési tartományban konvex.

6. Az eddig számított adatokból a függvény képe már felvázolható (99. ábra).



99. ábra

7. A függvény értékkészlete 2-től $+\infty$-ig terjed. A 2-t kétszer, a 2-nél nagyobb függvényértékeket pedig négyszer veszi fel a függvény.

11. Vizsgáljuk meg az alábbi függvényt:

$$y=\frac{5x}{x^2+4x+4}=\frac{5x}{(x+2)^2}.$$

1. A függvény racionális törtfüggvény, szakadási helye ott van, ahol a nevezője nulla, ez pedig az $x_1=-2$ helyen következik be (x_1 a nevező kétszeres gyöke). A függvény értelmezési tartománya tehát az $x_1=-2$ hely kivételével az egész X-tengely:

$$\text{Ét.: } -\infty<x<-2 \text{ és } -2<x<+\infty, \text{ ill. rövidebben: } x\neq -2.$$

2. A függvény ott metszi az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz $\frac{5x}{(x+2)^2}=0$; ennek megoldása $x_2=0$, tehát a görbe átmegy az origón.

3. A függvény az $x=-2$ szakadási hely kivételével mindenütt folytonos; megvizsgáljuk viselkedését a szakadási hely környezetében, valamint a végtelenben.

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{5x}{(x+2)^2}=-\infty;\qquad \lim_{x\to -2+0}\frac{5x}{(x+2)^2}=-\infty,$$

mert a nevező kis pozitív számokon keresztül tart nullához akár balról akár jobbról közeledünk a -2 helyhez, a számláló pedig negatív.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{5x}{(x+2)^2}=0;\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x}{(x+2)^2}=0.$$

Megjegyzés: Ha $x\to-\infty$, akkor a függvény a negatív számokon keresztül közeledik nullához, míg $x\to+\infty$ esetben a pozitív számokon keresztül.

A szakadási helyen a függvény aszimptotája az Y-tengellyel párhuzamos $x=-2$ egyenes, míg a $\pm\infty$-ben az aszimptota az X-tengely.

4. A növekedési viszonyokra az első derivált előjeléből következtetünk:

$$y'=\left[\frac{5x}{(x+2)^2}\right]'=\frac{5(x+2)^2-5x\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{5(x+2)-10x}{(x+2)^3}=\frac{10-5x}{(x+2)^3}.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $y'=0$:

$$\frac{10-5x}{(x+2)^3}=0.$$

Az egyenlet egyetlen megoldása $x_3=2$.

$$y''=\frac{-5(x+2)^3-(10-5x)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6}=\frac{-5(x+2)-(10-5x)\cdot 3}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{-5x-10-30+15x}{(x+2)^4}=\frac{10x-40}{(x+2)^4}.$$

$$y''(2)=\frac{20-40}{(2+2)^4}=-\frac{20}{256}<0,$$

tehát az $x_3=2$ helyen maximum van. A megfelelő függvényérték:

$$y_3=y(2)=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=0{,}625.$$

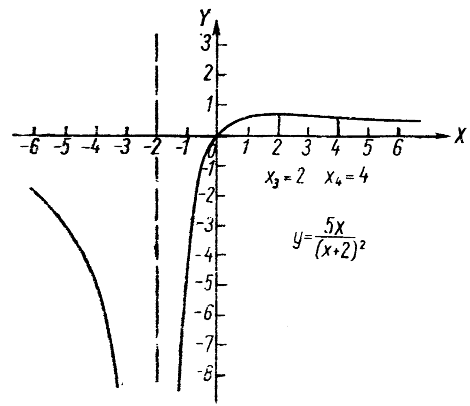
5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk; a függvénynek csak ott lehet inflexiós pontja, ahol második deriváltja nulla; a $\frac{10x-40}{(x+2)^4}=0$ egyenletnek egy megoldása van, mégpedig $x_4=4$.

Az $y'''(4)$ függvényérték meghatározása helyett most célszerűbbnek tűnik y'' előjelváltását vizsgálni.

Ti. y'' nevezője $x=4$ környezetében nyilván mindenütt pozitív, számlálója viszont 4-nél nagyobb értékekre pozitív, 4-nél kisebb értékekre negatív. Tehát y'' előjelet vált az $x=4$ pontban, vagyis itt inflexiós pont van. A megfelelő függvényérték:

$$y(4)=\frac{5\cdot 4}{6^2}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}\approx 0{,}55.$$

6. A függvény grafikonja a 100. ábrán látható.



100. ábra

7. A függvény értékkészlete a $-\infty$ és 0,625 közé eső számok halmaza.

Ék.: $-\infty < y \leq 0{,}625$.

A 0 és 0,625 számot csak egyszer, a többit kétszer veszi fel.

12. Vizsgáljuk meg az $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$ függvényt!

1. A függvény racionális törtfüggvény, és így mindazokra az x értékekre értelmezett, amelyekre a nevező nem nulla; tehát

Ét.: $-\infty < x < 2$, ill. $2 < x < +\infty$, vagy rövidebben felírva:

Ét.: $x \neq 2$.

A függvénynek az $x=2$ helyen szakadása van.

2. A függvény görbéje ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$; vagyis ahol

$$\frac{3x-5}{x-2} = 0.$$

Egy tört értéke akkor nulla, ha számlálója nulla (és nevezője ugyanott nem nulla), azaz

$$3x-5=0; \quad \text{ebből} \quad x = \frac{5}{3}.$$

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis $y = \dfrac{5}{2}$.

3. A függvénynek szakadása van az $x=2$ helyen; bármely más pontban folytonos, ezért négy határértéket kell meghatározni (kettőt a szakadási helyen, és kettőt a végtelenben).

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3.$$

A függvénynek az $y=3$ egyenes az aszimptotája.

A számláló pozitív az $x=2$ helyen. Ha x-szel a 2-nél kisebb számokon keresztül tartunk a 2-höz, akkor a tört nevezője egyre kisebb abszolút értékű negatív szám lesz, vagyis a tört $-\infty$-hez tart, tehát

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{3x-5}{x-2} = -\infty.$$

Hasonló módon látható be, hogy

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{3x-5}{x-2} = +\infty.$$

4. A szélsőértékről a függvény első deriváltja tájékoztat:

$$y' = \frac{3(x-2)-(3x-5)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{3x-6-3x+5}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

A függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált nulla, de az — mint látható — semmilyen x-re sem teljesül. Az $x=2$ szakadási hely az értelmezési tartományt két részre osztja: $(-\infty, 2)$ és $(2, +\infty)$. A derivált előjele az egyes részintervallumokban állandó; alkalmasan választott értékeket behelyettesítve, az előjel meghatározható: $y'(0) = = \dfrac{-1}{4} < 0$, $y'(3) = \dfrac{-1}{1} < 0$. Mivel az első derivált mindkét részintervallumban negatív, így a függvény mindkettőben szigorúan monoton csökkenő.

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

$$y'' = [-(x-2)^{-2}]' = 2(x-2)^{-3} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

A függvénynek csak ott lehet inflexiós pontja, ahol a második deriváltja nulla. A második deriváltnak nullahelye nincs, tehát a függvénynek inflexiós pontja sincs.

Az $x=2$ szakadási hely a teljes értelmezési tartományt két részre osztja. A második derivált előjele ezeken belül állandó, így elegendő egy-egy belső pontban meghatározni: $y''(0) = \dfrac{2}{(-2)^3} < 0$, $y''(3) = \dfrac{2}{1^3} > 0$, tehát a $(-\infty, 2)$ tartományban a görbe konkáv, a $(2, +\infty)$ tartományban konvex.

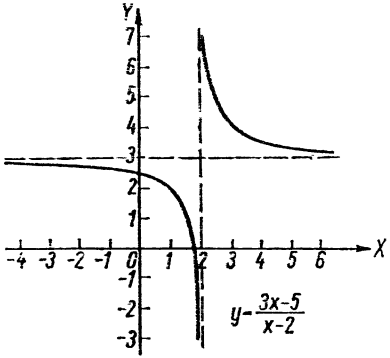
6. Az eddigi adatok ismeretében a függvény görbéje felvázolható (101. ábra).

7. A függvény az $y=3$ érték kivételével minden függvényértéket egyszer és csak egyszer felvesz.

Ék.: $-\infty < y < 3$ és $3 < y < +\infty$,

vagy rövidebben felírva

Ék.: $y \neq 3$.



101. ábra

13. Vizsgáljuk meg az $y = \sqrt{2-x}$ függvényt!

1. A függvény irracionális és egyértékű, mivel csak a pozitív gyök veendő figyelembe. Értelmezési tartománya azon x értékek halmaza, amelyekre a gyökjel alatti kifejezés nulla vagy pozitív, tehát amelyekre $2-x \geqq 0$; vagyis

$$\text{Ét.: } -\infty < x \leqq 2.$$

2. A függvény ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$, vagyis $\sqrt{2-x} = 0$; ebből $x_1=2$.

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis az $y=\sqrt{2}$ pontban.

3. A függvény folytonos. Határértéket csak $x \to -\infty$ esetben kell számítanunk:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty.$$

4. A szélsőértékekről az első derivált tájékoztat:

$$y' = \left[(2-x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}.$$

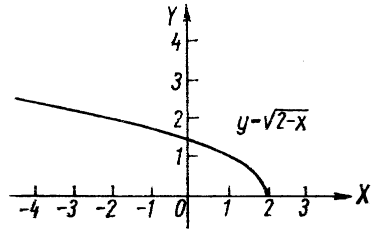
A derivált semmilyen x értékre sem nulla, így a függvénynek nincs szélsőértéke. A derivált előjele a teljes értelmezési tartományban ($x \neq 2$) negatív, tehát a függvény a $(-\infty, 2)$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő.

5. A görbületi viszonyok a második derivált előjeléből állapíthatók meg:

$$y'' = \left[-\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}}(-1) = -\frac{1}{4\sqrt{(2-x)^3}}.$$

A második derivált semmilyen x-re sem nulla, így a függvénynek inflexiós pontja nincs. A második derivált a teljes értelmezési tartományban ($x \neq 2$) negatív, és így a függvény konkáv.

6. Az előbbiek alapján a görbe a 102. ábrán látható.



102. ábra

7. A függvény értékkészlete a 0 és $+\infty$ közé eső számok halmaza:

$$\text{Ék.: } 0 \leqq y < +\infty.$$

Minden függvényértéket csak egyszer vesz fel a függvény.

14. Vizsgáljuk meg az $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvényt!

1. A függvény irracionális törtfüggvény, kétértékű. Értelmezési tartományához csak azok az x értékek tartoznak, amelyekre a gyök alatt pozitív szám áll. Ezek:

$$\text{Ét.: } -1 < x < 1.$$

A függvény az X-tengelyre szimmetrikus. Az egyszerűbb tárgyalhatóság kedvéért különválasztjuk az X-tengely feletti és alatti ágat. Legyen

$$y_I = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{és} \quad y_{II} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. A függvény ott metszi az X-tengelyt, ahol $y=0$, tehát mindkét ág egyenletét felírva:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Az egyenletnek nincs megoldása, tehát egyik ág sem metszi az X-tengelyt.

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis az y_I függvény a $+1$ pontban, az y_{II} függvény a -1 pontban.

3. A függvény az értelmezési tartományon belül folytonos, de a határoknál a végtelenhez tart, mert — külön vizsgálva az y_I és y_{II} függvény viselkedését —

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty; \quad \lim_{x\to +1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty; \quad \lim_{x\to +1-0} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty.$$

4. A szélsőértékek helye az első deriváltból állapítható meg:

$$y_I' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Ugyanígy adódik

$$y_{II}' = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Mindkét ágnak csak ott lehet szélsőértéke, ahol az első deriváltja nulla:

$$\pm\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = 0, \quad \text{ha} \quad x_1 = 0.$$

Az $x_1=0$ hely két részre osztja az értelmezési tartományt, ezekben a derivált előjele állandó. Ezért most célszerűbb y'' helyett y' előjelváltását vizsgálni:

y_I vizsgálatához szükséges értékek: $y_I'(-0{,}5) = \dfrac{-0{,}5}{\sqrt{(1-0{,}25)^3}} < 0$,

$y_I'(0{,}5) = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{(1-0{,}25)^3}} > 0$, tehát az $x=0$ helyen y_I' előjelet vált; mivel

negatív értékből pozitív értékbe megy át, minimum van. A minimális függvényérték:

$$y_I(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1.$$

Az y_{II}' vizsgálatához szükséges értékek:

$$y_{II}'(-0{,}5) = \frac{0{,}5}{\sqrt{(1-0{,}25)^3}} > 0; \quad y_{II}'(0{,}5) = \frac{-0{,}5}{\sqrt{(1-0{,}25)^3}} < 0,$$

tehát y_{II}' pozitívból negatív értékbe megy át, vagyis maximum van. A maximális függvényérték:

$$y_{II}(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-0}} = -1.$$

5. A görbületi viszonyok a második derivált segítségével tanulmányozhatók. Az X-tengely feletti ág esetén

$$y_I'' = \left[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]' = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}+3x^2\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^3} = \frac{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2+3x^2)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}\,(1+2x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Az X-tengely alatti ág második deriváltja ettől csak előjelben különbözik:

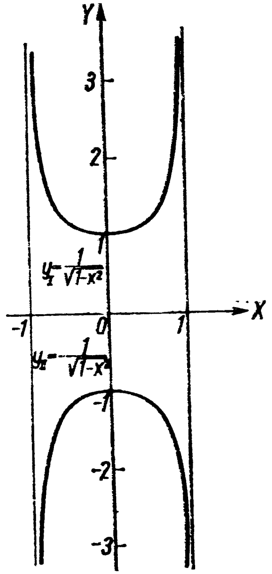
$$y_{II}'' = -\frac{\sqrt{1-x^2}\,(1+2x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

A függvénynek csak ott lehet inflexiós pontja, ahol a második derivált nulla; de ilyen x nincs, mert a számláló mindkét tényezője és a nevező is az értelmezési tartomány bármely x értékére pozitív. A második derivált az értelmezési tartományban folytonos, és így — mivel nem metszi az X-tengelyt — állandó előjelű.

$$y_I''(0) = \frac{1\cdot 1}{1} > 0; \quad y_{II}''(0) = -\frac{1\cdot 1}{1} < 0.$$

Az I ág tehát konvex, a II ág pedig konkáv.

6. A függvény grafikonja ezekből már felvázolható (103. ábra).



103. ábra

7. A függvény értékkészlete az 1 és 1-nél nagyobb abszolút értékű számok halmaza.

Ék.: $-\infty < y \leqq -1$, ill. $1 \leqq y < +\infty$, vagy $|y| \geqq 1$.

A függvény a $+1$ és -1 értékeket egyszer, a többi függvényértéket kétszer veszi fel.

15. Végezzük el az $y=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ függvény vizsgálatát!

1. A függvény irracionális törtfüggvény. Értelmezési tartományához azok az x értékek tartoznak, amelyekre a gyökjel alatti kifejezés pozitív:

Ét.: $-\infty < x < -1$, ill. $1 < x < +\infty$, rövidebben: $|x| > 1$.

Az előbbi függvényhez hasonlóan a kétértékű függvény két ágát külön-külön vizsgáljuk. Legyen

$$y_I = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{és} \quad y_{II} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2. A függvény ott metszi az X-tengelyt, ahol $y=0$, vagyis $\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

Ennek az egyenletnek nincs gyöke, tehát a függvény görbéjének nincs közös pontja az X-tengellyel.

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$; de ez az abszcissza nem is tartozik az értelmezési tartományhoz, és így a függvény nem metszheti az Y-tengelyt sem.

3. A függvény a szakadási helyeken kívül folytonos, határértékét a $-\infty$, -1, 1, $+\infty$ helyeken kell számolnunk. Először az y_I ág határértékét számítjuk ki:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0; \qquad \lim_{x\to-1-0}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$$

A szakadási helyeken azért számítunk csak bal-, ill. csak jobboldali határértéket, mert a másik oldal már nem tartozik az értelmezési tartományhoz.

Most meghatározzuk az y_{II} ág megfelelő határértékeit:

$$\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0; \qquad \lim_{x\to-1-0}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=0.$$

A két ágnak közös aszimptotái vannak. Ugyanis a végtelenben az aszimptota az X-tengely; az $x=1$, ill. $x=-1$ abszcisszájú pontokban az aszimptota az $x=1$, ill. az $x=-1$ egyenes.

4. A függvény szélsőértékeit az első derivált segítségével keressük meg:

$$y_I=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}; \quad y_I'=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

A II. ág deriváltja pedig

$$y_{II}'=\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

A függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált nulla; ez $x=0$-ra teljesülne, ami viszont nem tartozik az értelmezési tartományhoz.

A szakadási helyek két részre osztják az értelmezési tartományt, ezek mindkét ágra $(-\infty, -1)$ és $(1, +\infty)$.

5. A görbületi viszonyok meghatározhatók a második derivált ismeretében:

$$y_{\mathrm{I}}'' = \left[\frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]' = \frac{-1(x^2-1)^{\frac{3}{2}} + x\cdot\frac{3}{2}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}2x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}\,(-x^2+1+3x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{\sqrt{x^2-1}\,(2x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Hasonlóan

$$y_{\mathrm{II}}'' = \left[\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]' = \frac{\sqrt{x^2-1}\,(-2x^2-1)}{(x^2-1)^3}.$$

A függvénynek csak ott lehet inflexiós pontja, ahol második deriváltja nulla. A második derivált azonban semmilyen x-re sem nulla, mert a tört számlálójának első tényezője pozitív, a második tényezője pedig a I. ágra pozitív és a II. ágra negatív az egész értelmezési tartományban. A második derivált előjeléből megállapítjuk, hol konvex, ill. konkáv a függvény.

Először a I. ágat vizsgáljuk. A két résztartomány: $(-\infty, -1)$ és $(1, +\infty)$. A kiválasztott x értékek: -2 és 2.

$$y_{\mathrm{I}}''(-2) = \frac{\sqrt{3}\,9}{3^3} > 0; \quad y_{\mathrm{I}}''(2) = \frac{\sqrt{3}\,9}{3^3} > 0.$$

Most a II. ágat vizsgáljuk. Az intervallumok és az x értékek az előbbivel megegyeznek:

$$y_{\mathrm{II}}''(-2) = \frac{\sqrt{3}(-9)}{3^3} < 0; \quad y_{\mathrm{II}}''(2) = \frac{\sqrt{3}(-9)}{3^3} < 0.$$

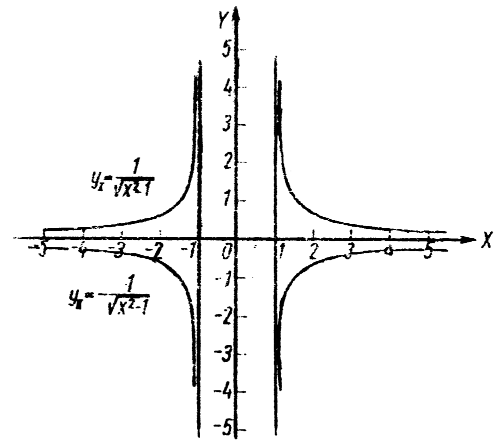
Vagyis az I. ág konvex, a II. ág pedig konkáv.

6. A függvény grafikonja az előbbi eredmények ismeretében megrajzolható (104. ábra).

7. A függvény értékkészlete $y=0$ kivételével az összes valós szám. Minden függvényértéket kétszer vesz fel.

Ék.: $-\infty < y < 0$, ill. $0 < y < +\infty$;

rövidebb alakban felírva: $y \neq 0$.



104. ábra

16. Vizsgáljuk meg az $y = \pm\sqrt{x-2}+3$ függvényt!

1. A függvény irracionális, kétértékű függvény.

Csak azokra az x értékekre értelmezett, amelyekre a gyökjel alatti kifejezés nemnegatív:

Ét.: $2 \leqq x < +\infty$.

Mivel a függvény kétértékű, bevezetjük a következő jelölést:

$y_{\mathrm{I}} = \sqrt{x-2}+3$ és $y_{\mathrm{II}} = -\sqrt{x-2}+3$. Mint látható, az y_{I} ág függvényértékei háromnál nem lehetnek kisebbek, és az y_{II} ág függvényértékei háromnál nem lehetnek nagyobbak.

2. A függvény görbéje ott metszi az X-tengelyt, ahol $y=0$. Mivel az y_{I} ág függvényértékei 3-nál nagyobbak, ezért ez az ág nem metszheti az X tengelyt. Megvizsgáljuk az $y_{\mathrm{II}}=0$ esetet:

$$-\sqrt{x-2}+3=0; \quad 3=\sqrt{x-2}; \quad 9=x-2; \quad x_1=11.$$

Az y_{II} ág tehát az X-tengelyt az $x_1=11$ pontban metszi.

A függvény az Y-tengelyt nem metszheti, mert az $x=0$ hely nem tartozik az értelmezési tartományhoz.

3. A függvény folytonos, de csak az $x \geqq 2$ értékekre van értelmezve, így határértéket mindkét ágra csak a $+\infty$-ben kell számolnunk:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2}+3 = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x-2}+3 = -\infty.$$

4. A szélsőértékeket a függvény első deriváltja segítségével keressük:

$$y'_{\mathrm{I}}=\left[(x-2)^{\frac{1}{2}}+3\right]'=\frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}};$$

$$y'_{\mathrm{II}}=-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}.$$

A függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol első deriváltja nulla, de y'_{I} és y'_{II} semmilyen x-re sem nulla; $x>2$-re $y'_{\mathrm{I}}>0$ és $y'_{\mathrm{II}}<0$, vagyis az y_{I} ág monoton növekedő, az y_{II} ág pedig monoton csökkenő.

Megjegyzés: Az $x=2$ pont az y_{I} és y_{II} függvény értelmezési tartományához tartozik ugyan, de y'_{I} és y'_{II} nincs értelmezve ebben a pontban (nevezőjük nullává válik), vagyis y itt nem differenciálható. Mivel azonban $\lim\limits_{x\to 2+0} y'_{\mathrm{I}}=+\infty$ és $\lim\limits_{x\to 2+0} y'_{\mathrm{II}}=-\infty$, ez azt mutatja, hogy mindkét ág érintője a függőleges helyzet felé közeledik, midőn $x\to 2+0$ (a másik oldalon egyik ág sincs értelmezve).

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

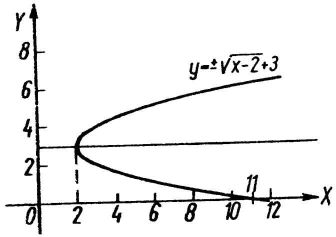
$$y''_{\mathrm{I}}=\left[\frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{(x-2)^3}},$$

ill.

$$y''_{\mathrm{II}}=\frac{1}{4\sqrt{(x-2)^3}}.$$

Az y''_{I} ág előjele a teljes értelmezési tartományban (kivéve az $x=2$ helyet) negatív, tehát a görbe I ága konkáv. Az $x=2$ helyen y''_{I} és y''_{II} nincs értelmezve, de $\lim\limits_{x\to 2+0} y''_{\mathrm{I}}=-\infty$ és $\lim\limits_{x\to 2+0} y''_{\mathrm{II}}=+\infty$. Az y''_{II} előjele pozitív, és így az y_{II} ág konvex. A függvénynek inflexiós pontja nincs, mert a második deriváltja semmilyen x-re sem nulla.

6. A függvény grafikonja a 105. ábrán látható.



105. ábra

7. A függvény értékkészlete az összes valós szám. Az $y=3$ értéket egyszer, a többi értéket pedig kétszer veszi fel a függvény.

Ék.: $-\infty<y<+\infty$.

17. Vizsgáljuk meg az $y=\sqrt[3]{(x-4)^2}$ függvényt!

1. A függvény irracionális, minden x értékre értelmezett:

Ét.: $-\infty<x<+\infty$.

2. A függvény ott metszi, ill. érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz

$$\sqrt[3]{(x-4)^2}=0.$$

Az egyenlet megoldása $x_1=4$. Az $x_1=4$ helytől balra és jobbra $(x-4)^2$ egyaránt pozitív (a gyökjel alatt mindig nemnegatív szám áll), tehát görbéje nem metszi, hanem érinti az X-tengelyt.

A függvény görbéje az $x=0$ abszcisszájú pontban metszi az Y-tengelyt:

$$y=\sqrt[3]{(-4)^2}=\sqrt[3]{16}\approx 2{,}52.$$

3. A függvény folytonos, ezért határértékét csak a végtelenben kell kiszámítanunk:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(x-4)^2}=+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x-4)^2}=+\infty.$$

4. A szélsőértékekre a függvény első deriváltja jellemző:

$$y'=\left[(x-4)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}(x-4)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-4}}.$$

A deriváltnak az $x=4$ helyen szakadása van, mert a nevező helyettesítési értéke nulla.

Megjegyzés: A függvény mindenütt folytonos, de az $x=4$ helyen deriváltja nem létezik, a függvény ott nem differenciálható. (Mint a vázlatos ábrából látni fogjuk, a függvénynek az $x=4$ helyen csúcsa van.)

A derivált semmilyen x-re sem nulla, de szakadási helye a teljes értelmezési tartományt két részre osztja, ezek $(-\infty, 4)$ és $(4, +\infty)$. Ezeken belül az első derivált állandó előjelű. Alkalmasan választott x értéket helyettesítve a deriváltba, annak előjele meghatározható:

$$y'(0)=\frac{2}{3\sqrt[3]{-4}}<0;\quad y'(5)=\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}>0.$$

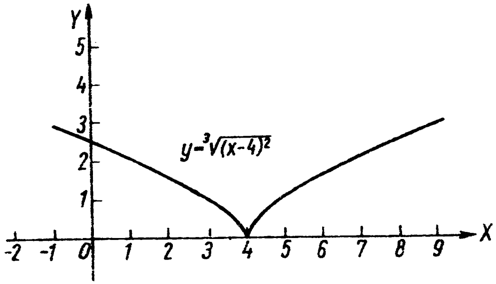
Ennek alapján nem állapíthatjuk meg a függvény viselkedését az $x=4$ helyen. Mivel azonban láttuk, hogy y csak az $x=4$ helyen nulla, minden egyéb helyen — tehát az $x=4$ hely környezetében is — pozitív, ezért a függvénynek az $x=4$ helyen minimuma van.

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

$$y'' = \left[\frac{2}{3}(x-4)^{-\frac{1}{3}}\right]' = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-4)^4}}.$$

A függvénynek y'' értelmezési tartományában inflexiós pontja nem lehet, mert y'' értéke sehol sem zérus. A második deriváltnak is szakadási helye az $x=4$ pont, ezt külön kell vizsgálni. Rátekintésre látható azonban, hogy y'' értelmezési tartománya minden pontjában, tehát a szakadási hely környezetében is negatív, ezért itt sem lehet inflexiós pont.

6. A függvény görbéje az előbbiek ismeretében felvázolható (106. ábra).



106. ábra

A függvény értékkészlete a nemnegatív számok halmaza: Ék.: $0 \leq y < +\infty$.

A 0 értéket egyszer, minden pozitív értéket kétszer vesz fel a függvény.

18. Vizsgáljuk meg az $y=\sqrt{\cos x}$ függvényt (feltételezzük, hogy a $\sin x$ és $\cos x$ függvények alaptulajdonságait ismerjük)!

1. A függvény csak azon x értékekre értelmezett, amelyekre $\cos x \geq 0$. A gyökjel csak pozitív értékével veendő figyelembe, így a függvény egyértékű.

Mivel tudjuk, hogy az $y=\cos x$ függvény periodikus, ezért $y=\sqrt{\cos x}$ is az. Figyelemmel a periodicitásra, az értelmezési tartomány:

$$\text{Ét.}: -\frac{\pi}{2}+k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+k2\pi,$$

ahol $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Megjegyzés: A függvény összes tulajdonságait először a $k=0$-hoz tartozó $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban vizsgáljuk meg, és csak azután vesszük figyelembe a periodicitást.

2. A függvény ott metszi az X-tengelyt, ahol $y=0$, vagyis $\sqrt{\cos x}=0$; ebből $x_1=-\frac{\pi}{2}$ és $x_2=\frac{\pi}{2}$. A periodicitást figyelembe véve, az összes metszéspont: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis $y_0=\sqrt{\cos 0}=1$.

3. A függvény az értelmezési tartomány $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi; \frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ intervallumaiban folytonos. Határértéket nem kell számítanunk, mivel ezeken belül nincs szakadása, és e tartományok végpontjaiban értelmezve van.

4. A szélsőértékeket az első derivált ismeretében határozzuk meg:

$$y' = \left[(\cos x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}}(-\sin x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

A függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol $y'=0$, tehát

$$\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}=0.$$

A trigonometrikus egyenlet megoldása: $x=2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ugyanis a tört értéke akkor nulla, ha a számlálója nulla és nevezője nem nulla. A $\sin x=0$ egyenlet megoldása az $x=l\pi$ $(l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ gyöksorozat, ebből l páratlan értékeihez tartozó x-ek nem tartoznak a vizsgált függvény értelmezési tartományához; l páros értékeire, vagyis $l=2k$-ra $\sqrt{\cos l\pi} \neq 0$. A $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban az $x=0$ helyen levő szélsőértékre az y' előjelváltásának vizsgálatával következtetünk. A derivált számlálója páratlan, nevezője páros függvény, tehát a derivált páratlan függvény, és így az origó környezetében — mivel nem azonosan zérus — előjelet vált. Mégpedig kis negatív x-ekre pozitív, kis pozitív x-ekre negatív, tehát az $x_3=0$ helyen maximum van. A maximális függvényérték

$$y_3 = y(0) = \sqrt{1} = 1.$$

A periodicitást figyelembe véve azt kapjuk, hogy a függvénynek az $x=k2\pi$ helyeken maximuma van.

A függvény növekedő a $-\frac{\pi}{2}+k2\pi < x < k2\pi$ intervallumokban, és csökkenő a $k2\pi < x < \frac{\pi}{2}+k2\pi$ intervallumokban.

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

$$y'' = \left[\frac{-\sin x}{2(\cos x)^{\frac{1}{2}}}\right]' =$$

$$= \frac{-\cos x\cdot 2(\cos x)^{\frac{1}{2}} + \sin x\cdot(\cos x)^{-\frac{1}{2}}(-\sin x)}{4\cos x} =$$

$$= \frac{-2\cos x\sqrt{\cos x} - \sin^2 x\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}}{4\cos x} = -\frac{2\cos^2 x+\sin^2 x}{4(\cos x)^{\frac{3}{2}}}.$$

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol második deriváltja nulla. A tört akkor nulla, ha a számlálója nulla és nevezője nem nulla, vagyis ahol

$$2\cos^2 x+\sin^2 x = 0;$$

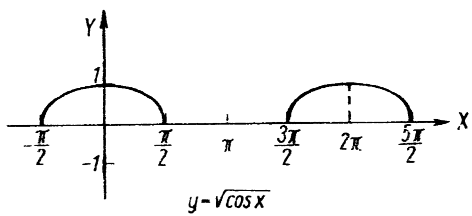
$$\cos^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x = 0;$$

$$\cos^2 x+1 = 0.$$

Mivel x bármely értékére $\cos^2 x+1 > 0$, ezért az egyenletnek nincsen valós gyöke, ezért a függvénynek inflexiós pontja sincs.

A második derivált előjele a $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumban negatív, tehát a függvény konkáv.

6. A függvény képe a 107. ábrán látható.



107. ábra

7. A függvény értékkészlete a 0 és 1 közé eső számok halmaza. Egy-egy periódus alatt az 1 értéket egyszer, a többi értéket kétszer veszi fel:

Ék.: $0 \leq y \leq 1$.

19. Vizsgáljuk meg az $y=\sin^2 x$ függvényt!

1. A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Mivel az $y=\sin x$ függvény 2π szerint periodikus, és a négyzetreemelés a periodicitást nem szüntetheti meg [ugyanis ha $\sin x = \sin(x+2k\pi)$, akkor $\sin^2 x = \sin^2(x+2k\pi)$], ezért a $\sin^2 x$ függvény 2π szerint biztosan periodikus. Tudjuk azonban, hogy $\sin x = -\sin[x+\pi]$; ezt négyzetre emelve, $\sin^2 x = \sin^2[x+\pi]$, amiből látható, hogy az $y=\sin^2 x$ függvény π szerint is periodikus.

Ét.: $-\infty < x < +\infty$.

2. A függvény ott metszi (vagy érinti) az X-tengelyt, ahol y értéke nulla. Ha $\sin^2 x=0$, akkor $\sin x=0$, és ebből $x=k\pi$, ahol $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

A függvény ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$, vagyis az $y_0=\sin^2 0=0$ helyen.

A függvény görbéje tehát átmegy az origón.

3. Mivel a függvény folytonos, és π szerint periodikus, ezért határértéket nem kell számítanunk. Vizsgálatainkat csak a $(0, \pi)$ intervallumban végezzük, és azután vesszük figyelembe a periodicitást.

4. A szélsőértékek az első deriváltból meghatározhatók:

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Ez akkor nulla, ha $2x=k\pi$, vagyis ha

$$x = k\frac{\pi}{2}, \quad \text{ahol} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

A gyöksorozat három egymás utáni tagja van a $(0, \pi)$ intervallumban, ebből kettő a határokra esik.

$$y'' = 2\cos 2x; \quad y''(0) = 2 > 0, \quad \text{tehát minimum van.}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0, \quad \text{tehát maximum van.}$$

$$y''(\pi) = 2 > 0, \quad \text{tehát minimum van.}$$

A megfelelő függvényértékek:

$$y(0) = \sin^2 0 = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1; \quad y(\pi) = \sin^2\pi = 0.$$

A periodicitást figyelembe véve, a függvénynek minimuma van (értéke 0) az $x=k\pi$ helyeken, és maximuma van (értéke 1) az $x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ helyeken ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

$$y''=2\cos 2x.$$

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol $y''=0$, vagyis $2\cos 2x=0$. Ez akkor teljesül, ha

$$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{vagyis} \quad x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}.$$

Egy perióduson belül tehát két inflexiós pont lehet. A $(0, \pi)$ intervallumban ezek a $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{3\pi}{4}$ pontok.

$$y'''=-4\sin 2x;$$

$$y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\frac{\pi}{2}\neq 0;$$

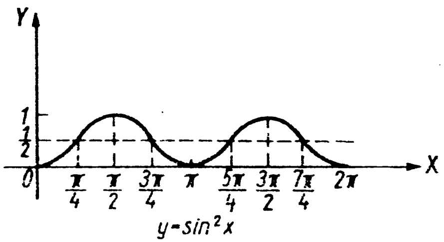
$$y'''\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-4\sin\frac{3\pi}{2}\neq 0;$$

tehát mindkét helyen inflexiós pont van. A függvényértékek:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}; \quad y\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}.$$

Figyelembe véve a periodicitást, a függvénynek az $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ helyeken inflexiós pontja van.

6. A fentiek alapján a függvény görbéje megrajzolható (108. ábra).



108. ábra

7. Az értékkészlet a 0 és 1 közé eső számok halmaza. Az 1 értéket egyszer, míg a többit kétszer veszi fel minden periódusban.

Ék.: $0\leq y\leq 1$.

20. Vizsgáljuk meg az $y=xe^x$ függvényt!

1. A függvény egy elsőfokú és egy exponenciális függvény szorzata. Mindkét függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, ezért szorzatuké szintén az:

Ét.: $-\infty < x < +\infty$.

2. A függvény ott metszi vagy érinti az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz

$$xe^x=0.$$

Az egyenletnek csak $x_1=0$ a megoldása. Mivel az $x_1=0$ helyen az x előjelet vált, e^x pedig nem, ezért az $y=xe^x$ függvény görbéje ebben a pontban metszi az X-tengelyt.

A függvény görbéje ott metszi az Y-tengelyt, ahol $x=0$. Mivel ott $y=0$, ezért a függvény áthalad az origón.

3. A függvény két folytonos függvény szorzata, tehát folytonos, ezért határértéket csak $x\to\pm\infty$ esetben kell számolnunk.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$, mert mindkét tényező $+\infty$-hez tart.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=\,?$$

Az első tényező $-\infty$-hez, míg a második tényező nullához tart. A határértéket — a szorzat hányadossá való átalakítása után — L'Hospital-szabállyal számítjuk ki.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0,$$

mert a számláló állandó, a nevező $-\infty$-hez tart, és így a tört a negatív számokon keresztül nullához tart.

Vagyis a függvény aszimptotája, ha $x\to-\infty$, az X-tengely.

4. A szélsőértékekre a függvény első deriváltja jellemző:

$$y'=e^x+xe^x=e^x(1+x).$$

A függvénynek csak ott lehet szélsőértéke, ahol

$$e^x(1+x)=0.$$

A szorzat első tényezője semmilyen x-re sem nulla, a második tényező pedig $x_2=-1$ értékre. Mivel a második tényező az $x_2=-1$ helyen negatívból pozitívba vált (vagyis a szorzat is), ezért a függvénynek az $x_2=-1$ helyen minimuma van.

A minimális függvényérték:

$$y(-1)=(-1)e^{-1}=-\frac{1}{e}\approx-0{,}3679.$$

5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

$$y'' = e^x(1+x)+e^x = e^x(2+x).$$

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol

$$e^x(2+x) = 0;$$

ez pedig csak $x_3 = -2$ értékre teljesül.

$$y''' = e^x(3+x);$$

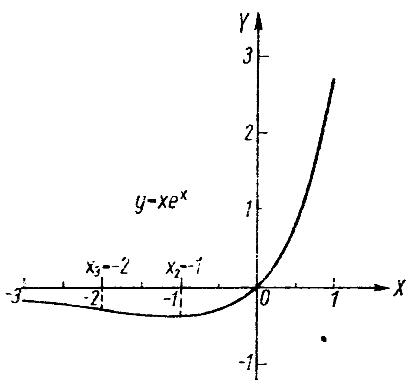
$y'''(-2) > 0$, tehát inflexiós pont van. A függvényérték:

$$y(-2) \approx -0{,}27.$$

Ugyanis

$$y(-2) = (-2)e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \approx -2\cdot 0{,}135 = -0{,}270.$$

6. A függvény grafikonját az eddig számított értékekből már felvázolhatjuk (109. ábra).



109. ábra

7. A függvény értékkészlete: Ék.: $-\frac{1}{e} \leqq y < +\infty$. A függvény a $-\frac{1}{e}$ értéket és a 0-tól $+\infty$-ig terjedő függvényértékeket egyszer, míg a $-\frac{1}{e}$ és 0 közé eső függvényértékeket kétszer veszi fel.

21. Vizsgáljuk meg az $y = x \ln x$ függvényt!

1. A függvény egy elsőfokú és egy logaritmusfüggvény szorzata. Értelmezési tartományuk a két értelmezési tartomány közös része, ez pedig a pozitív számok halmaza:

$$\text{Ét.: } 0 < x < +\infty.$$

2. A függvény ott metszi (érinti) az X-tengelyt, ahol $y=0$, azaz

$$x \ln x = 0.$$

A szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla (és a többi tényező azon a helyen véges!). Az $x \ln x$ szorzatnak az $x=0$ helyen nincs helyettesítési értéke, mert $\ln 0$ nincs értelmezve. A szorzat akkor is nulla ha $\ln x = 0$, ebből $x_1 = 1$. Mivel az $x_1 = 1$ helyen $\ln x$ előjelet vált, y pedig nem, ezért a függvény görbéje az X-tengelyt az $x_1 = 1$ pontban valóban metszi.

A függvény görbéje az Y-tengelyt nem metszi, mert $x=0$-ra nincs értelmezve.

3. A függvény folytonos, de határértékét az értelmezési tartomány két határán meg kell határozni.

$$\lim_{x\to+0} x \ln x = ?$$

A feladatot törtté való átalakítás után L'Hospital-szabállyal oldjuk meg:

$$\lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0.$$

A függvény görbéje negatív számokon keresztül közelíti meg a nullát. (Baloldali határérték a 0 helyen nincs.)

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln x = +\infty.$$

Mindkét tényező határértéke $+\infty$, így szorzatuké is az.

4. A szélsőértékek a függvény első deriváltjából határozhatók meg:

$$y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol

$$\ln x + 1 = 0.$$

Az egyenlet megoldása $x_2 = \frac{1}{e}$.

$$y'' = \frac{1}{x}; \quad y''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0, \quad \text{tehát minimum van.}$$

A minimális függvényérték:

$$y\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}\approx -0{,}368.$$

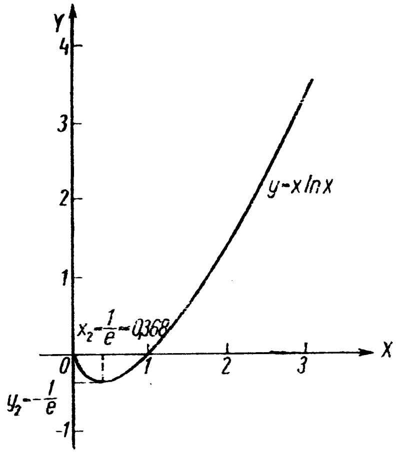
5. A görbületi viszonyokra a második derivált előjeléből következtetünk:

$$y''=\frac{1}{x}.$$

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol $y''=0$, de ez semmilyen x-re sem nulla, tehát nincs inflexiós pont.

A második derivált előjele — a teljes értelmezési tartományban — pozitív, és így a függvény konvex.

6. Az eddigiek felhasználásával a függvény görbéje megrajzolható (110. ábra).



110. ábra

Megjegyzés: Az $x=0$ pont nem tartozik az értelmezési tartományhoz, mert a függvénynek határértéke van ugyan az $x=0$ helyen, de helyettesítési értéke nincs.

7. A függvény értékkészlete: Ék.: $-\frac{1}{e}\leqq y<+\infty$. A függvény a $-\frac{1}{e}$ értéket, valamint a 0 és annál nagyobb értékeket egyszer, a $-\frac{1}{e}$ és 0 közé eső értékeket kétszer veszi fel.

$y=\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$	$y'=\operatorname{ch}x$
$y=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};$	$y'=\operatorname{sh}x$
$y=\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};$	$y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$
$y=\operatorname{cth}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}};$	$y'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$
$y=\log_a x;$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$
$y=\ln x;$	$y'=\frac{1}{x}$
$y=\operatorname{Arc}\sin x;$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\operatorname{Arc}\cos x;$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}x;$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}x;$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$
$y=\operatorname{ar}\operatorname{sh}x=\ln\lvert x+\sqrt{x^2+1}\rvert;$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y=\operatorname{ar}\operatorname{ch}x=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})\quad x>1;$	$y'=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y=\operatorname{ar}\operatorname{th}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad \lvert x\rvert<1;$	$y'=\frac{1}{1-x^2}$
$y=\operatorname{ar}\operatorname{cth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\quad \lvert x\rvert>1;$	$y'=\frac{1}{1-x^2}$