BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A csaknem 40 éve indult, igen sikeres Bolyai-könyvek példatár sorozat újjászületését éli. A sorozat könyveiben a szerzők a középiskolai tanulóknak, továbbá főiskolai és egyetemi hallgatóknak adnak szerencsésen választott, bőséges példát, kidolgozott feladatokat. Kívánatos, hogy a feladatokat mindenki igyekezzék előbb önállóan megoldani, és csak utána hasonlítsa össze az eredményt a könyvben található megoldásokkal.
A sorozat három témakört ölel fel: a matematikát, a fizikát és a kémiát.
E könyvben a szerző a kombinatorikával, az események algebrájával, a valószínűséggel, a feltételes valószínűséggel, a valószínűségi változókkal és jellemzőikkel, a fontosabb eloszlásokkal és a nagy számok törvényével foglalkozik.
Ajánljuk a könyvet elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak és azoknak a középiskolás diákoknak, akik a reáltudományok terén kívánják folytatni tanulmányaikat.

195 Ft (ÁFA-val) MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

BOLYAI-KÖNYVEK

SOLT GYÖRGY

VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

$0 \leq P \leq 1$

Kombinatorika:

$P_n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$ $\qquad$ $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_l} = \dfrac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_l!}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} \qquad C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) \qquad V_n^{k,i} = n^k$$

teljes eseményrendszer: $\sum_{i=1}^{n} B_i = I$ és $B_i B_j = O$, ha $i \neq j$ $\quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

disztributív törvények: $A(B+C) = AB + AC$

$A + (BC) = (A+B)(A+C)$

de Morgan-féle képletek: $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$ $\qquad$ $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$

események valószínűsége: $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$

$\mathbf{P}(O) = 0 \qquad \mathbf{P}(I) = 1$ $\qquad$ ha $A \subset B$, akkor $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$

$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ $\qquad$ ha $AB = O$, akkor $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

klasszikus valószínűségi mező: $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \dfrac{k}{n}$

geometriai valószínűségi mező: $\mathbf{P}(A) = \dfrac{m}{M}$

feltételes valószínűség: $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$

teljes valószínűség tétele: $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid B_i)\mathbf{P}(B_i)$

Bayes-tétel: $\mathbf{P}(B_i \mid A) = \dfrac{\mathbf{P}(A \mid B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A \mid B_j)\mathbf{P}(B_j)}$

független események: $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A) \qquad \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$

eloszlásfüggvény: $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ $\qquad$ *sűrűségfüggvény:* $f(x) = F'(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathbf{P}(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

várható érték: $\mathbf{M}(\xi) = \Sigma p_k x_k$ $\qquad$ $\mathbf{M}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$

szórásnégyzet: $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}[\xi - \mathbf{M}(\xi)]^2 = \mathbf{M}(\xi^2) - [\mathbf{M}(\xi)]^2$

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k\right)^2 \qquad \mathbf{D}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$

SOLT GYÖRGY

VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

SOLT GYÖRGY

VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS

PÉLDATÁR

6. kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Lektorálta:

TUSNÁDY GÁBOR
okl. matematikus

ETO: 519.2

ISBN: 963 10 2734 9 (első kiadás)

ISBN: 963 10 9781 1 (hatodik kiadás)

ISSN 1216-5344

TARTALOM

Előszó

A valószínűségszámítás korunkban úgyszólván mindenkit érdekel. Az egyszerű játékoktól a legbonyolultabb tudományos kérdésekig mindenütt találkozunk valószínűségszámítási feladatokkal. Ennek a tudományágnak módszerei kiterjedtek már a műszaki és természettudományokra csakúgy, mint a közgazdaságtanra és az orvostudomány egyes területeire.

Éppen ezért egyre többen szeretnének megismerkedni a valószínűségszámítás alapjaival és alkalmazási módjaival. Ehhez kívántam segítséget adni e példatárral, amely kidolgozott és magyarázatokkal ellátott példákat és gyakorló feladatokat tartalmaz. Ez utóbbiak megválasztásával az alkalmazási lehetőségek széles körére igyekeztem legalábbis utalni.

A könyv nagyszámú érdeklődő számára nyújthat sokszor igen fontos segítséget a valószínűségszámítási feladatmegoldó készség alapjainak elsajátításában; elsősorban mérnököknek és közgazdászoknak, valamint egyetemi és főiskolai hallgatóknak.

Munkám megírásakor, ill. felépítésekor nagymértékben szem előtt tartottam a didaktikai szempontokat: a kombinatorikán és az eseményalgebrán át vezetem el az Olvasót az egyszerűbb, majd viszonylag összetettebb valószínűségszámítási feladatokhoz. Ennélfogva középiskolásoknak is segítségére lehet az új tanterv szerinti matematika anyag elsajátításában.

Mivel a könyv bőséges példaanyagot tartalmaz, hasznos segédeszköze lehet e tárgykör oktatóinak is.

Köszönet illeti a könyv lektorát, *Tusnády Gábort,* aki észrevételeivel és tanácsaival segítségemre volt.

Budapest, 1969. március hó

Solt György

I. KOMBINATORIKAI BEVEZETÉS

1. Permutációk

a) Legyen n számú egymástól különböző elemünk. Ezeknek egy meghatározott sorrendjét az n elem egy *permutációjának* nevezzük. Az n egymástól különböző elem összes permutációinak számát P_n-nel jelöljük. P_n egyenlő az első n természetes szám szorzatával:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!.$$

Az $n!$ szimbólumot „*n faktoriális*"-nak olvassuk.

b) Legyen n számú elemünk, melyek közt rendre $k_1, k_2, \ldots, k_l$ számú egymás közt megegyező elem található. Ezeknek egy meghatározott sorrendjét az n elem egy *ismétléses permutációjának* nevezzük. (Megegyező elemek egymás közti felcserélésével nem kapunk más ismétléses permutációt.) Az összes ismétléses permutációk számát $P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_l}$ jelöli és a következőképpen számítható:

$$P_n^{k_1, k_2, \ldots, k_l} = \frac{n!}{k_1!\,k_2! \cdots k_l!}.$$

Gyakorló feladatok

1. Három tanuló, András, Gábor és Róbert együtt megy iskolába. Hányféle sorrendben léphetik át az iskola küszöbét? Írjuk fel a lehetséges sorrendeket!

I. Megoldás:

Az egyes lehetséges sorrendek — a tanulókat nevük kezdőbetűjével jelölve — három elem egy-egy permutációját alkotják. Három elem permutációinak száma $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Tehát hatféle sorrendben léphetnek be az iskolába. Ezek a sorrendek a következők:

AGR, ARG, GAR, GRA, RAG, RGA.

II. Megoldás:

Elsőként bármelyik tanuló átlépheti az iskola küszöbét; ez három különböző lehetőség. Ha az első tanuló belépett, a másik kettő már csak kétféle sorrendben léphet be. Tehát az előző három lehetőség mindegyikéhez két további folytatási lehetőség tartozik, vagyis az összes lehetséges sorrendek száma: $3 \cdot 2 = 6$.

A sorrendeket könnyen felírhatjuk, ha először mindig az első tanuló személyét rögzítjük, majd a másik kettő kétféle sorrendjét jelöljük:

AGR, ARG, GAR, GRA, RAG, RGA.

2. Hány különböző négyjegyű számot alkothatunk két 1-es, egy 2-es és egy 3-as számjegyből? Írjuk fel ezeket a számokat!

I. Megoldás:

Egy négyjegyű szám a jegyeknek mint elemeknek egy sorrendjét jelenti. Az elemek száma négy, melyek közt kettő egymással megegyező. Így az összes sorrendet az ismétléses permutációk P_4^2 száma adja.

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 = 12.$$

A lehetséges négyjegyű számok a következők: 1123, 1132, 1213, 1231, 1312, 1321, 2113, 2131, 2311, 3112, 3121, 3211.

II. Megoldás:

Először tekintsünk el attól, hogy egy számjegy kétszer fordul elő. Négy különböző számjegyből az első helyre választhatunk négyféleképpen; ez után a második helyre már csak háromféleképpen, majd a harmadik helyre kétféleképpen. Az utolsó helyre a megmaradt számjegy kerül. Mivel azonban a négy közül két jegy azonos, a fenti kiválasztások közül kettő mindig megegyezik egymással. Tehát a felírható négyjegyű számok száma

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12.$$

A számok a következők (úgy írjuk fel őket, hogy először a jegyeket növekvő sorrendben írjuk fel, majd mindig úgy cseréljük fel a jegyeket, hogy ezáltal a szám értéke a lehető legkevesebbel növekedjék. Így elkerüljük, hogy egy szám véletlenül kimaradjon vagy megismétlődjék):

1123, 1132, 1213, 1231, 1312, 1321,
2113, 2131, 2311, 3112, 3121, 3211.

3. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben minden számjegy csak egyszer fordul elő? (Az első számjegy nem lehet 0.)

I. Megoldás:

Először vegyük az összes olyan számokat, melyek 10 különböző jegyből állnak. Ezek számát 10 elem összes permutációinak száma, vagyis $P_{10} = 10!$ adja meg. Mivel a permutációk képzése során egyik számjegynek sincs megkülönböztetett szerepe, ezért nyilván e számok $\frac{1}{10}$ részében

0 áll az első helyen. Így a „megfelelő" permutációk száma az összes permutációk $\frac{9}{10}$ része. Tehát a megoldás: $\frac{9}{10} \cdot 10! = 9 \cdot 9!$ valódi tízjegyű, csupa különböző számjegyet tartalmazó szám van.

II. Megoldás:

Induljunk ki abból, hogy az első jegyet 9-féleképpen választhatjuk ki; ha ezt már rögzítettük, akkor minden esetben a további 9 helyen a megmaradt 9 jegy bármilyen (ismétlés nélküli) permutációja állhat. Tehát az eredmény $9 \cdot P_9 = 9 \cdot 9!$.

4. Hányféleképpen rendezhető egy sorba 10 nő és 16 férfi, ha a nők elöl állnak?

A 10 nő összes lehetséges sorrendje 10 elem permutációinak számával egyenlő, vagyis $P_{10} = 10!$, a 16 férfi elrendezési módjai $P_{16} = 16!$ számúak. A nők bármely sorrendjéhez a férfiak tetszőleges sorrendje tartozhat, tehát az összes lehetőségek számát úgy kapjuk, hogy az előbbi két permutáció számát összeszorozzuk; vagyis $P_{10} \cdot P_{16} = 10! \cdot 16!$ a lehetséges sorrendek száma.

5. Hány olyan hatjegyű telefonszámot alkothatunk a 2, 3, 5, 6, 7, 9 számjegyekből, amelyben a második jegy 3-as?

Miután a 3-as helyét rögzítettük, a többi 5 helyre 5 különböző számjegyet helyezhetünk el, ez $P_5 = 5!$-féleképpen lehetséges. Tehát $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ a megfelelő telefonszámok száma.

6. Hányféle sorrendben rakhatunk ki a magyar kártyából 8 piros és 8 zöld lapot, ha egymás után különböző színű lapokat kell elhelyeznünk?

A 8 piros lap egymástól mind különböző, tehát sorrendjük $P_8 = 8!$-féleképpen adható meg; a 8 zöld lapé hasonlóképpen. Minden „piros" permutáció minden „zöld" permutációval párosítható, ez $8! \cdot 8!$ lehetőség. Minden ilyen párosításban az első lap színét kétféleképpen választhatjuk meg, így az előírásnak megfelelő kirakási sorrendek száma $2 \cdot 8! \cdot 8!$.

7. Egy 12 tagú társaság kerek asztalnál foglal helyet. Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha a helyek nem számozottak?

I. Megoldás:

A társaság egyik tagja helyet foglal az egyik helyen. A többiek lehetséges elhelyezkedését kell megadnunk. Ez 11 elem permutációinak számával, $P_{11} = 11!$-sal egyenlő. Tehát a társaság a kerek asztal körül 11!-féleképpen helyezkedhet el.

II. Megoldás:

Ha a tagokat egy sorban kellene elhelyezni, akkor nyilván 12 elem permutációjáról lenne szó. Ha viszont a tagok elhelyezésében csak egymáshoz viszonyított helyzetük számít, vagyis a „sor"-t körré zárjuk össze, akkor az előbbi elrendezésekből 12 mindig egyenértékű. Tehát a lehetséges elrendezések száma $\frac{P_{12}}{12} = \frac{12!}{12} = 11!$.

8. Egy 14 tagú tánccsoport kört alakít. Hányféleképpen alakulhat a táncosok sorrendje, ha a két legmagasabbnak egymás mellé kell kerülnie?

A két legmagasabb táncos kétféleképpen állhat egymás mellett. A többiek lehetséges elrendeződéseit mindkét esetben 12 elem permutációinak száma, $P_{12}=12!$ adja. Így a tánccsoport tagjainak összes lehetséges megfelelő sorrendje $2\cdot 12!$.

9. Egy kockával hatszor dobunk egymás után. Hányféle olyan dobássorozat van, melyben nincs több azonos pontszámú dobás?

A dobássorozatokban mind a 6 pontszámnak elő kell fordulnia. A dobott pontszámok sorrendje tetszőleges, így 6 elem permutációi adják az eredményt, amely $P_6=6!$.

10. Ha adott elemek számát 2-vel csökkentjük, a lehetséges permutációk száma $\frac{1}{12}$ részére csökken. Mennyi volt az elemek száma?

Az eredeti elemszám legyen n. Ekkor a permutációk száma $n!$. Ha az elemszámot kettővel csökkentjük, a permutációk száma $(n-2)!$ lesz. A feladat szerint ennek 12-szerese egyenlő $n!$-sal:

$$n! = 12(n-2)!.$$

A bal oldalt a következő alakban is írhatjuk:

$$n(n-1)(n-2)! = 12(n-2)!.$$

Egyszerűsítve $(n-2)!$-sal:

$$n(n-1) = 12;$$

$$n^2-n-12 = 0.$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$n_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{1\pm 7}{2};$$

$$n_1=4; \quad n_2 = -3.$$

A feladatnak csak $n=4$ felel meg, mivel negatív szám nem jöhet szóba.

Ellenőrizzük a kapott eredményt: az eredeti elemek száma 4, ekkor a permutációk száma $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. Ha 2-vel csökkentjük az elemszámot, akkor 2 elemünk marad, ezek permutációinak száma 2. A lehetséges sorrendek száma valóban $\frac{1}{12}$ részére csökkent.

11. Hány ötjegyű számot írhatunk fel a 4, 4, 4, 5, 5 számjegyekből és melyek ezek?

Az öt számból három, ill. kettő egymással megegyező, így lehetséges sorrendjeik ismétléses permutációkat alkotnak, amelyeknek száma:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 10.$$

A keresett ötjegyű számok növekvő sorrendben a következők:

44 455, 44 545, 44 554, 45 445, 45 454,
45 544, 54 445, 54 454, 54 544, 55 444.

12. Hány olyan tízjegyű számot írhatunk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből, melyben e jegyek mindegyike előfordul?

A keresett tízjegyű számokban mind a 9 jegy legalább egyszer előfordul, ez pedig csak úgy lehet, ha az egyik jegy kétszer fordul elő, a többi egyszer. Ha mondjuk az 1-es fordul elő kétszer, akkor 10 elem ismétléses permutációjáról van szó, mégpedig az elemek közül kettő azonos; ezek száma $P_{10}^{2} = \frac{10!}{2!}$. Tekintve, hogy az ismétlődő jegy az adott kilenc szám bármelyike lehet, és mindegyikhez ugyanannyi számú ismétléses permutáció tartozik, összesen $9\cdot\frac{10!}{2!}$ tízjegyű számot kapunk.

13. Egy dobozban 16 golyó van, közülük 10 fehér, 4 piros és 2 kék színű. A 16 golyót egymás után kihúzzuk a dobozból. Hány sorrendben húzhatjuk ki a golyókat, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg?

Egy húzási sorrend 16 elem ismétléses permutációja, amikor az elemekből 10, 4, ill. 2 elem egymás közt egyenlő. Az összes ilyen sorrend száma tehát $P_{16}^{10,4,2} = \frac{16!}{10!\,4!\,2!}$.

14. Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt — ha 13 mérkőzésre tippelünk — úgy, hogy 8 darab 1-es, 2 darab x-es és 3 darab 2-es tipp legyen rajta.

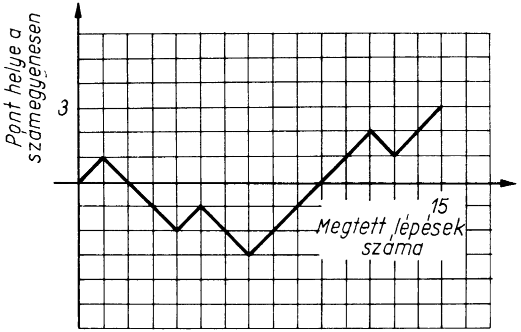
A lehetséges tippek mindegyike 13 elem egy-egy ismétléses permutációja, mégpedig rendre 8, 2 és 3 egymás közt egyező elem esetén. Az előírt módon kitölthető totószelvények száma tehát:

$$P_{13}^{8,2,3} = \frac{13!}{8!\,2!\,3!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\,2\cdot 3\cdot 2} = 13\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 12\,870.$$

15. Egy háromemeletes, új épületben 14 lakás van, mégpedig az első emeleten 3, a másodikon 4, a harmadikon 7. Hányféleképpen költözhetnek be a kijelölt új lakók, ha csak azt figyeljük, hogy hányadik emeletre költöznek?

A lakások az elemek, így 14 elemről van szó. Az azonos emeleten levő lakások megegyező elemeket jelentenek. Ha az egyes lakókat gondolatban sorba állítjuk és ugyanilyen sorban képzeljük a megfelelő emeletet felírva, akkor láthatjuk, hogy a beköltözések lehetséges elrendezését 14 elem ismétléses permutációi adják 3, 4 és 7 egyező elem esetén, vagyis e szám

$$P_{14}^{3,4,7}=\frac{14!}{3!\,4!\,7!}=7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13=120\,120.$$



1. ábra

16. Egy pont egységnyi lépéseket tesz meg a számegyenesen, pozitív vagy negatív irányban. Hányféleképpen juthat el az origóból 15 lépéssel a $+3$ pontba? (1. ábra.)

A pozitív irányba tett lépések száma legyen x, a negatív irányba tett lépéseké y. Az összes lépés száma $x+y=15$. Bolyongása során a pont helykoordinátája 1-gyel nő, ha a pont pozitív irányba lép, negatív irányba lépve pedig 1-gyel csökken. Tehát a helykoordináta x-szer nő 1-gyel és y-szor csökken 1-gyel valamilyen sorrendben, így a pont az origóból kiindulva az $(x-y)$ pontba jut, vagyis esetünkben $x-y=3$. A kapott egyenletrendszer:

$$x+y=15;$$

$$x-y=3.$$

Ennek megoldása $x=9$, $y=6$. Tehát összesen 9 pozitív és 6 negatív irányú lépést kell tennie a pontnak, tetszőleges sorrendben. A lehetséges sorrendek 15 elem ismétléses permutációi, ha 9 és 6 egymással megegyező elem van, számuk tehát

$$P_{15}^{9,6}=\frac{15!}{9!\,6!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=5005.$$

17. Egy dobozban két sárga golyó van. Hány darab piros golyót kell a dobozba tennünk, ha azt kívánjuk elérni, hogy a dobozban levő összes golyókat egymás után kihúzva, 21 különböző sorrend legyen lehetséges? (Az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg.)

A dobozban legyen a húzás előtt n számú golyó. Ebből 2 sárga és $n-2$ piros. A húzások lehetséges sorrendjeinek számát n elem ismétléses permutációinak száma adja, ha 2 és $n-2$ egyforma elem van:

$$P_n^{2,n-2}=21, \text{ vagyis}$$

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!}=21;$$

ezt másként írva:

$$\frac{(n-2)!\,n(n-1)}{2(n-2)!}=21;$$

egyszerűsítés után:

$$n(n-1)=42;$$

$$n^2-n-42=0.$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+168}}{2}=\frac{1\pm 13}{2};$$

$$n_1=7;\quad n_2=-6.$$

A feladatnak csak $n=7$ felel meg. Az összes golyók számának a dobozban 7-nek kell lennie, így 5 piros golyót kell a dobozba tennünk.

Ellenőrizzük a kapott eredményt: 7 elem ismétléses permutációinak száma, ha 2 és 5 egymással megegyező elem van:

$$P_7^{2,5}=\frac{7!}{2!\,5!}=\frac{7\cdot 6}{2}=21.$$

18. Hányféle sorrendbe írhatók a PARALELOGRAMMA szó betűi?

A betűk száma 14, ennyi elemünk van. Az A betű négyszer, az L, az M és az R betű kétszer fordul elő. A 14 elem ismétléses permutációinak számát kell meghatároznunk egyszer 4 és háromszor két, egymással egyező elem esetén. Tehát a lehetséges sorrendek száma:

$$P_{14}^{4,2,2,2}=\frac{14!}{4!\,2!\,2!\,2!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{2^3}=$$

$$=5\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14.$$

19. Egy pénzérmét tízszer egymás után feldobunk. Hányféle olyan dobássorozat van, amelyben 6 fej és 4 írás fordul elő?

A dobások száma adja az elemek számát, ez tehát 10. A 6 fej és a 4 írás megegyező elemeket jelentenek. A sorrendek számát ismétléses permutációval kapjuk meg:

$$P_{10}^{6,4}=\frac{10!}{6!\,4!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!\,4\cdot3\cdot2\cdot1}=3\cdot7\cdot10=210.$$

20. Hányféle sorrendben kaphatunk egy dobókockával végzett kilenc egymás utáni dobás eredményeként 3 egyes, 3 kettes és 3 ötös dobást?

A dobások száma 9; ez az elemek száma. A három különböző eredmény mindegyike háromszor ismétlődik. Az előírt feltételeknek eleget tevő dobássorozatok száma ezért ismétléses permutációk számaként adódik:

$$P_9^{3,3,3}=\frac{9!}{3!\,3!\,3!}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3!}=8\cdot7\cdot6\cdot5=1680.$$

Tehát a feltételnek 1680 különböző dobássorozat felel meg.

21. Hány olyan nyolcjegyű szám írható fel az 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3 számjegyekből, mely 13-mal végződik?

Az első hat helyre két 1-es, egy 2-es és három 3-as számjegy kerül. Összes lehetséges sorrendjüket tehát úgy számítjuk ki, hogy 6 elem ismétléses permutációját vesszük két, ill. három egyező elem esetében:

$$P_6^{2,3}=\frac{6!}{2!\,3!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{2\cdot3!}=3\cdot5\cdot4=60.$$

Tehát 60 különböző nyolcjegyű, 13-ra végződő számot írhatunk fel az adott számjegyekből.

2. Kombinációk

a) Legyen n számú egymástól különböző elemünk. Ezekből k $(k\leq n)$ elemből álló csoportokat készítünk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott k elem sorrendjére nem vagyunk tekintettel. E csoportok az *n elem k-adosztályú kombinációi;* számukat C_n^k-val jelöljük és így számíthatjuk ki:

$C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dbinom{n}{k}$, mely szimbólumot „$n$ alatt a k”-nak olvassuk; ebből látható, hogy $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n}{n-k}$. Ha a fenti kifejezésben $(n-k)!$-sal egyszerűsítünk, akkor $\dbinom{n}{k}$ kifejezését más

alakban kapjuk:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots2\cdot1}.$$

Vegyük észre, hogy ily módon — tehát a nevezőben az egyes tényezőt is kiírva — a számláló és nevező azonos számú szorzótényezőt tartalmaz.

b) Legyen n számú különböző elemünk. Ha ezekből k elemet választunk ki oly módon, hogy egyes elemek többször is szerepelhetnek, és az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, akkor ezt a k elemet az n *elem* egy *k-adosztályú ismétléses kombinációjának* nevezzük. Az n elemből kiválasztható különböző ismétléses kombinációk számát $C_n^{k,i}$-vel jelöljük, és így számítjuk ki:

$$C_n^{k,i}=\binom{n+k-1}{k}.$$

Gyakorló feladatok

1. Négy személy egyszerre érkezik egy kétszemélyes lifthez. Vizsgáljuk meg, hányféle módon választhatjuk ki közülük az első menet két utasát.

Jelöljük a személyeket A, B, C, D betűkkel. A betűk négy elemet jelölnek, melyekből két elemből álló csoportokat kell képeznünk, sorrendre való tekintet nélkül. E csoportok 4 elem másodosztályú kombinációit adják, amelyeknek száma:

$$C_4^2=\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6.$$

Tehát 6-féle módon választhatók a párok az első menethez.

2. Egy négytagú család telefonja kétszer szólalt meg egy estén. Számítsuk ki, hányféle változatban vehették fel a kagylót, ha ugyanaz a személy kétszer is felvehette, és a sorrendet nem vesszük figyelembe? Írjuk fel az összes változatot!

A család négy tagját jelölje A, B, C, D. Így 4 elemünk van, amelyekből kettes csoportokat kell készítenünk úgy, hogy egy elem kétszer is szerepelhet és sorrendjük nem lényeges. A csoportok száma 4 elem másodosztályú ismétléses kombinációinak számával egyenlő, ez pedig

$$C_4^{2,i}=\binom{4+2-1}{2}=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10.$$

Ez a 10 változat a következő:

AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD.

3. Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 rekeszbe, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe *a)* legfeljebb egy levelet teszünk, *b)* több levelet is tehetünk?

a) A rekeszek 16 elemet jelentenek. Ezekből kell 5-ös csoportokat kiválasztanunk a levelek számára úgy, hogy ugyanazt a rekeszt csak egyszer választhatjuk ki. Tehát az összes lehetséges kiválasztások száma 16 elem 5-ödosztályú kombinációinak számával egyenlő:

$$C_{16}^{5} = \binom{16}{5} = \frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 3\cdot8\cdot13\cdot14 = 4368.$$

Tehát 4368-féle lehetőségünk van a levelek elhelyezésére.

b) Ha egy rekeszbe több levelet is tehetünk, akkor 16 elem 5-ödosztályú ismétléses kombinációiról van szó. Ezek száma:

$$C_{16}^{5,i} = \binom{20}{5} = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 3\cdot16\cdot17\cdot19 = 15\,504.$$

Tehát ez esetben 15 504 módon helyezhetjük el a leveleket a rekeszekben.

Sok, egészen más megfogalmazású kombinatorikai feladat lényegében a levél—rekesz-problémával egyenértékű, ezért érdemes ezt a feladatot igen jól megjegyezni.

4. Lottójátékon egy alkalommal 90 számból 5-öt sorsolnak ki. Hány szelvényt kellene kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük öttalálatos?

A 90 szám az elemek számát jelenti, amelyekből 5 különböző elemből álló csoportokat kell képeznünk. A csoportok tehát 90 elem 5-ödosztályú kombinációi, amelyeknek száma:

$$C_{90}^{5} = \binom{90}{5} = \frac{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 43\,949\,268.$$

Tehát 43 949 268 szelvényt kellene kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan legyen öttalálatos szelvényünk.

5. Egyszerre három kockával dobunk. Hányféle olyan dobási eredményt kaphatunk, melynél ugyanaz a szám csak egyszer szerepel, ha a kockák között nem teszünk különbséget?

A kockákon hatféle szám szerepel, ezek a különböző elemek. Ezekből egy-egy dobás során 3 kerül fölülre. Ha azoknak a dobásoknak a számát

keressük, amelyekben nincs azonos elem, akkor 6 elem harmadosztályú kombinációit kell képeznünk:

$$C_{6}^{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20.$$

Azt kaptuk, hogy 3 kockával 20-féle módon dobhatunk úgy, hogy azonos számok ne lépjenek fel.

6. Az őrszolgálati egységből egyszerre 4 ember áll őrségben. Hány főből áll az őrszolgálati egység, ha őrségre 1365-féleképpen lehet 4 őrt kiválasztani?

Jelöljük az őrszolgálati egység létszámát n-nel. Az n elemből 4-et minden lehetséges módon — sorrendre való tekintet nélkül — kiválasztva, az n elem negyedosztályú kombinációit kapjuk. Ezek száma 1365, tehát felírhatjuk, hogy

$$C_{n}^{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 1365;$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 32\,760.$$

I. Megoldás:

Egyenletünket legegyszerűbben próbálgatással oldhatjuk meg: a bal oldalon négy, közel egyforma szám szorzata áll, így ezek értéke $\sqrt[4]{32\,760} = 13{,}4$ körül van. $n=14$ mellett a bal oldal $14\cdot13\cdot12\cdot11 = 24\,024$, ami még kisebb a jobb oldalnál; $n=15$ mellett a bal oldal előbbi $\frac{15}{11}$-szerese, azaz $15\cdot2184 = 32\,760$, ez pedig egyenlő a jobb oldallal, tehát $n=15$.

II. Megoldás:

Egyenletünk algebrai eszközökkel is megoldható: a bal oldalon az első és utolsó, valamint a két középső tényezőt összeszorozva, az

$$(n^2-3n)(n^2-3n+2) = 32\,760$$

egyenletet kapjuk; az $x = n^2-3n$ helyettesítéssel ez az

$$x^2+2x = 32\,760$$

másodfokú egyenletbe megy át, amelyből

$$x+1 = \pm\sqrt{32761} = \pm181;$$

tehát

$$x_1 = +180 \quad \text{és} \quad x_2 = -182.$$

Ha x_1-et helyettesítjük vissza, akkor

$$n^2-3n-180 = 0$$

2*

és ebből

$$n=\frac{3\pm\sqrt{9+720}}{2}=\frac{3\pm 27}{2}.$$

Bennünket csak a pozitív egész megoldás érdekel, mely

$$n=15.$$

Ha x_2-t helyettesítjük vissza, akkor

$$n^2-3n+182=0,$$

amiből

$$n=\frac{3\pm\sqrt{9-728}}{2}.$$

Tehát itt nem adódik valós megoldás, vagyis egyetlen, számunkra alkalmas megoldás $n=15$.

Tehát az őrszolgálati egység 15 főből áll.

Ellenőrizzük a megoldást: 15 elem 4-edosztályú kombinációinak száma:

$$C_{15}^4=\binom{15}{4}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=1365.$$

7. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen húzhatunk visszatevés nélkül 5 piros lapot? A sorrendet ne vegyük figyelembe.

A 32 lapos magyar kártya 8 piros lapot tartalmaz. Az 5 piros lapot csak ezek közül választhatjuk. Tehát a csomag 8 piros lapja alkotja azokat az elemeket, amelyeknek ötödosztályú kombinációit kell képeznünk. Ezeknek száma:

$$C_8^5=\binom{8}{5}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=8\cdot 7=56.$$

Feladatunknak az a feltevése, hogy a kártyacsomagból a lapokat visszatevés nélkül húzzuk ki, azt biztosítja, hogy a kihúzott lapok között nem lehet ismétlődés. Ezt a továbbiakban még sokszor felhasználjuk.

8. Adott a síkban 10 általános helyzetű pont (azaz nincs olyan egyenes, amely az adott pontok közül 2-nél többön átmegy). Hány olyan egyenes van, amely az adott pontok közül kettőn átmegy?

A 10 pont az elemek számát jelenti; ezekből kell minden lehetséges módon az egyenesek meghatározásához szükséges két különböző pontot — azaz két elemet — kiválasztanunk. A pontok sorrendje tetszőleges, így a 10 elem másodosztályú kombinációinak számát határozzuk meg:

$$C_{10}^2=\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45.$$

Tehát az adott pontok 45 egyenest határoznak meg.

9. 7 különböző sík legfeljebb hány olyan pontot határoz meg, amely legalább három síkra illeszkedik? (Ha három sík nem haladhat át egy egyenesen.)

A legtöbb pontot akkor kapjuk, ha a síkok közül bármely három más-más pontban találkozik. Ekkor a síkok 7 elemet jelentenek, amelyekből 3 különböző elemet kell kiválasztanunk minden lehetséges módon, sorrendre való tekintet nélkül. Így 7 elem harmadosztályú kombinációit számítjuk:

$$C_7^3=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}=35.$$

Tehát legfeljebb 35 ilyen pontot kaphatunk.

10. Hányféleképpen töltheti még ki lottószelvényét az, aki a 3, 7, 13 számokat már bejelölte a szelvényén?

A lottószelvényen 90 számból 5-öt kell megjelölnünk. Így, aki már hármat beírt, még két számot választhat a fennmaradt 87 szám közül. Tehát 87 másodosztályú kombinációt kell képeznünk, hogy az összes lehetséges változatokat megkapjuk. Ezeknek száma:

$$C_{87}^2=\binom{87}{2}=\frac{87\cdot 86}{1\cdot 2}=3741.$$

Vagyis 3741 különböző módon fejezhető be a szelvény kitöltése.

11. Tombolán 50 jegyet adtak el. A sorsoláson először 3 egyforma kisebb nyereményt sorsolnak, majd a megmaradt számok között két egyforma nagyobb nyereményt, végül az ezután megmaradt számok között a főnyereményt. A nyerő tombolajegyek hányféle változata lehetséges?

Először 50 számból hármat választanak ki, amelyeknek sorrendje tetszőleges, vagyis 50 elem harmadosztályú kombinációit kell képeznünk. Ezeknek száma: C_{50}^3. Megmarad 47 szám, amelyből most kettőt választanak, és itt sem vagyunk tekintettel a sorrendre, így 47 elem másodosztályú kombinációit kell vennünk, amelyeknek száma C_{47}^2. Végül 45 szám közül sorsolják a főnyereményt, itt természetesen 45 lehetőség van. A teljes sorsolás nyerőszámai lehetséges változatainak száma:

$$C_{50}^3C_{47}^2 45=\binom{50}{3}\binom{47}{2}45=\frac{50\cdot 49\cdot 48}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{47\cdot 46}{1\cdot 2}\cdot 45=$$

$$=50\cdot 49\cdot 4\cdot 47\cdot 46\cdot 45=953\,442\,000.$$

Tehát 953 442 000 változatban fordulhatnak elő a nyerő számok.

12. A 32 lapos magyar kártyából 10 lapot osztunk ki valakinek. Hányféleképpen fordulhat elő ilyen kiosztásban, hogy a 4 ász az illetőhöz kerül?

A 10 lapból csak 6 lap változtatható, ezek 28 lapból választhatók. Képeznünk kell 28 elem 6-odosztályú kombinációit, amelyeknek száma:

$$C_{28}^{6} = \binom{28}{6} = \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 28\cdot 9\cdot 13\cdot 5\cdot 23 = 376740.$$

Tehát a 4 ászt tartalmazó 10 lap 376 740-féle módon osztható ki.

13. Egy községben 35 telefonállomás van. Hányféle helyi beszélgetés létesülhet a községben?

I. Megoldás:

Egy beszélgetéshez két előfizetőt kell kiválasztanunk. A 35 telefonállomás azoknak az elemeknek a számát adja, amelyekből másodosztályú kombinációkat kell készítenünk. A kombinációk száma:

$$C_{35}^{2} = \binom{35}{2} = \frac{35\cdot 34}{1\cdot 2} = 35\cdot 17 = 595.$$

II. Megoldás:

Gondolkodhatunk a következőképpen is: A 35 előfizető mindegyike az összes többi előfizetővel beszélgethet. Így $35\cdot 34$ beszélgetést kapunk. Közülük azonban kettő mindig megegyezik, hiszen mindkét beszélő félnél egyszer számba vettük. Ezért a lehetséges különböző beszélgetések száma annak a fele, vagyis

$$\frac{35\cdot 34}{2} = 595.$$

Tehát 595 különböző helyi beszélgetés fordulhat elő.

14. Egy úszóversenyen az egyik versenyszámban 16 induló van. Ezeket két 8-as csoportba kívánják beosztani, mégpedig úgy, hogy a két favorit egyazon csoportba kerüljön. Hányféleképpen végezhető el az a beosztás?

A két legjobbnak vélt versenyző mellé még 6 indulót kell kiszemelnünk a megmaradt 14-ből. Képeznünk kell tehát 14 elem 6-odosztályú kombinációit, amelyeknek száma:

$$C_{14}^{6} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 3003.$$

Tehát 3003 különböző módon végezhető el a versenyzők két csoportba osztása, a megadott feltétel betartásával.

15. Hatan azonos jellegű munkát végeznek egy esztergaműhelyben. Minden negyedév végén a legkevesebb selejtárut termelő jutalmat kap. Egy év folyamán hányféleképpen alakulhat a jutalmazottak csoportja, ha a jutalmazások időbeli sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

A 6 esztergályos közül négyet kell választanunk úgy, hogy egyes személyek többször is előfordulhatnak (sorrendjük nem számít). Képeznünk kell tehát 6 elem 4-edosztályú ismétléses kombinációit, amelyeknek száma:

$$C_{6}^{4,i} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126.$$

Tehát 126-féle módon alakulhat egy év folyamán a jutalmazottak csoportja.

16. Egy tisztségre 3 jelölt van, ezekre 20-an szavaznak. Hányféle eredménnyel végződhet a titkos szavazás, ha mindenki egy jelöltre szavaz? („Eredményen" annak megadását értjük, hogy a 3 jelölt külön-külön hány szavazatot kapott.)

A szavazás végén a 20 szavazólap mindegyikén a 3 jelölt valamelyikének a neve áll. A szavazólapok sorrendje nem számít, csupán az, hogy a jelöltek külön-külön hány szavazatot kaptak. A szavazás minden lehetséges eredménye tehát a három jelölt egy 20-adosztályú ismétléses kombinációja. Ezeknek száma:

$$C_{3}^{20,i} = \binom{3+20-1}{20} = \binom{22}{20} = \frac{22\cdot 21}{1\cdot 2} = 231.$$

Azt kaptuk tehát, hogy 231 különböző eredménnyel zárulhat a szavazás.

(Vegyük észre, hogy itt a probléma lényegében ugyanaz, mint amikor 20 levelet akarunk 3 rekeszbe elhelyezni, természetesen úgy, hogy egy rekeszbe több levél is juthat.)

17. Állapítsuk meg — a műveletek elvégzése nélkül — hogy hány tagból áll a hatványozás és az összevonások után a következő kifejezés:

$$(2a-b+3c)^5.$$

A műveletek elvégzése után a betűkifejezések kitevőinek összege minden tagban 5. Az egyes tagokban szereplő betűket 3 betűből választhatjuk. Így az elemek száma 3 és ezekből kell az összes lehetséges 5-ös csoportokat képeznünk, sorrendre való tekintet nélkül. E csoportok száma tehát 3 elem 5-ödosztályú ismétléses kombinációinak számával egyenlő:

$$C_{3}^{5,i} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 7\cdot 3 = 21.$$

A fenti kifejezést tehát 21 tag összegeként írhatjuk fel a műveletek elvégzése után.

18. Egy gyermek 5 különböző fagylaltból választhat egy háromgombócos adagot. Hányféle lehetősége van a választásra? Az adagolás sorrendjére nem vagyunk tekintettel.

A fagylaltfajták száma — vagyis az elemek száma — tehát 5. Ezekből 3-as csoportokat képezünk, melyekben a sorrend nem számít, és több gombóc is állhat ugyanabból a fagylaltból. A csoportok számát 5 elem 3-adosztályú ismétléses kombinációinak száma adja, vagyis

$$C_5^{3,i} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

19. Négy egyforma kockát feldobunk. Hányféle módon alakulhat a dobás eredménye? (A kockákat nem különböztetjük meg.)

A 6 elemből, melyet az egyes kockák pontszámai adnak, negyedosztályú ismétléses kombinációkat kell alkotnunk. Ezeknek száma:

$$C_6^{4,i} = \binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126.$$

Tehát 4 kocka dobásakor 126-féle eredmény adódhat.

20. Egy árucikkből naponta 8 egyforma nagyságú láda érkezik egy üzletbe. Minden láda tartalmazhat I., II. vagy III. osztályú árut. Hányféle lehetőség adódik az áru minőségének napi megoszlására?

A minőségi fajták száma az elemek számát adja, ez tehát 3. Ezekből 8-as csoportokat kell képeznünk, sorrendre való tekintet nélkül. Így 3 elem 8-adosztályú ismétléses kombinációit kapjuk, amelyeknek száma:

$$C_3^{8,i} = \binom{3+8-1}{8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45.$$

Tehát a napi minőség megoszlása 45-féle lehet.
(Itt 8 „levelet" helyezünk el 3 „rekeszben"!)

21. Magyar kártyából 5 lapot osztunk valakinek. Hányféle változat adódhat, ha csak a színeket vesszük figyelembe?

A négy szín az elemek számát jelenti. Ezekből az elemekből sorrendre való tekintet nélkül 5-ös csoportokat kell képeznünk (négy „rekeszbe" öt „levelet" teszünk!) és ezek számát meghatároznunk. Ezt 4 elem 5-ödosztályú ismétléses kombinációinak száma adja:

$$C_4^{5,i} = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

Azt kaptuk, hogy a színek eloszlása szerint az 5 lap 56-féle lehet.

22. Hányféle színű golyót kell egy dobozba tennünk, hogy két, egymás utáni húzásnál 28-féle különböző lehetőségünk legyen, ha az elsőként kihúzott golyót visszatesszük a dobozba és a golyók sorrendjét a kihúzott pároknál figyelmen kívül hagyjuk?

A szükséges golyók száma legyen n. Ebből az n elemből képezett másodosztályú ismétléses kombinációk száma 28, vagyis $C_n^{2,i}=28$.

$$\binom{n+2-1}{2} = 28;$$

$$\frac{(n+1)n}{2} = 28;$$

$$n^2+n-56 = 0;$$

$$n_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 56}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{225}}{2} = \frac{-1\pm 15}{2}.$$

A negatív gyök nem felel meg a feladatnak. Így $n=7$ adódik. Ennyi a szükséges színek száma.

3. Variációk

a) Legyen n számú egymástól különböző elemünk. Ezekből tetszőlegesen választott k ($k\leqq n$) különböző elem egy meghatározott sorrendjét az *n elem* egy *k-adosztályú variációjának* nevezzük. Az n egymástól különböző elem összes k-adosztályú variációjának számát V_n^k-val jelöljük, és így számítjuk ki:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

b) Legyen n számú különböző elemünk. Ha ezekből bármilyen k elemből álló csoportot választunk ki, melyben ugyanaz az elem többször is szerepelhet, és az elemek sorrendjét is figyelembe vesszük, akkor az *n elem* egy *k-adosztályú ismétléses variációját* kapjuk; a különböző ilyen ismétléses variációk számát $V_n^{k,i}$-vel jelöljük, és így számítjuk ki:

$$V_n^{k,i} = n^k.$$

Gyakorló feladatok

1. Négy sportrepülő felváltva gyakorlatozik egy kétszemélyes gépen úgy, hogy két együtt felszálló sportoló közül az egyik vezeti a repülőt. Számítsuk ki, hányféle „szereposztás" lehetséges! Írjuk fel ezeket!

I. Megoldás:

Jelöljük a sportolókat A, B, C, D betűkkel. A betűk négy elemet jelölnek, amelyekből esetenként két különbözőt választunk ki úgy, hogy a sorrendjükre is tekintettel vagyunk (pl. első helyre írjuk a gép vezetőjét). Képeznünk kell 4 elem másodosztályú variációit. Ezeknek száma:

$$V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

II. Megoldás:

Először kiválasztjuk a négy közül a gép vezetőjét, majd a fennmaradt három közül az utasát. Tehát a különböző választások száma $4 \cdot 3 = 12$.

Tehát 12-féle módon végezhetik el gyakorlataikat a repülők. Az egyes párosítások a következők:

AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.

2. Egy pénzdarabbal három dobást végzünk. Vizsgáljuk meg, hányféle dobássorozat adódhat, ha a dobások sorrendjét is figyelembe vesszük! Írjuk fel a lehetséges sorozatokat!

I. Megoldás:

Egy dobás alkalmával két lehetőségünk van. Jelöljük ezeket F és I betűkkel. E két elemből hármas csoportokat kell képeznünk, amelyekben a sorrend is számít. Ezek két elem 3-adosztályú, ismétléses variációit adják, amelyeknek száma:

$$V_2^{3,i} = 2^3 = 8.$$

II. Megoldás:

Az első dobásnak kétféle eredménye lehet. Ezek mindegyikéhez kétféle második dobáseredmény tartozhat, ez összesen $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség. Minden első két dobáseredményhez kétféle harmadik dobáseredmény társulhat, vagyis a hármas dobássorozatok száma $2^3 = 8$.

Ez a nyolc sorozat a következő:

FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III.

3. Kilenc különböző színből hányféle háromszínű zászló készíthető? (Egy szín sem szerepelhet kétszer a zászlóban.)

A kilenc különböző szín adja az elemeket. Ezekből egy-egy zászlóhoz három színt kell kiválasztanunk, a sorrendet is figyelembe véve. Képeznünk kell tehát 9 elem harmadosztályú variációit. Ezeknek száma:

$$V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Tehát 504-féle háromszínű zászlót készíthetünk.

4. Egy rejtvénypályázaton 3 különböző díjat sorsolnak ki a helyes megfejtést beküldők között. 78 jó megfejtés érkezik be. Hányféle eredményt hozhat a sorsolás?

I. Megoldás:

A 78 helyes megfejtés képviseli azokat az elemeket, amelyekből díjazottként 3 elemet választhatunk — a sorrendet is figyelembe véve. Az összes ilyen lehetőséget 78 elem harmadosztályú variációinak száma adja meg:

$$V_{78}^3 = 78 \cdot 77 \cdot 76 = 456\,456.$$

II. Megoldás:

Az első kiosztandó díjra 78 személy jön számításba. Ha a nyertest már kiválasztottuk, akkor a második nyereményt már csak 77 személy valamelyikének adhatjuk. Az első két díjazott minden kiválasztásához 76 lehetőség van a harmadik nyerő személyére. A díjazás $78 \cdot 77 \cdot 76 = 456\,456$ különböző módon lehetséges.

Tehát 456 456-féle eredménnyel végződhet a sorsolás.

5. Hány olyan négyjegyű szám van, mely különböző számjegyekből áll?

I. Megoldás:

A 10 számjegy között szereplő 0 nem állhat a négyjegyű szám első helyén. Először számítsuk ki az összes lehetőségeket, ezekben a 0 elöl is állhat. Ekkor 10 elemből 4-et választhatunk, és a sorrendet is számításba veszszük. A 10 elem negyedosztályú variációinak száma:

$$V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Ezután számítsuk ki közülük azoknak a számát, amelyekben a 0 áll elöl. E számokat úgy kapjuk, hogy a többi három helyre 9 számjegy közül választunk, a sorrendet is figyelembe véve. Ki kell számítanunk 9 elem harmadosztályú variációinak számát, ez

$$V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Ezt a számot az előbbiből levonjuk:

$$V_{10}^4 - V_9^3 = 5040 - 504 = 4536.$$

II. Megoldás:

Az első jegyet kilenc számjegy közül választhatjuk (hiszen nulla nem állhat az első helyen). Ha ezt már kiválasztottuk, akkor a második jegyet minden esetben szintén kilencféleképpen választhatjuk meg (az első számjegy már nem jöhet szóba, de a nulla igen). Ezt kiválasztva, marad 8 lehetőség a harmadik jegyre, végül 7 az utolsóra. Vagyis az eredmény $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Tehát 4536 olyan négyjegyű szám van, amelyekben a számjegyek különbözők.

6. Egy sakkversenyen 12 sakkozó vesz részt. Körmérkőzést játszanak, mégpedig úgy, hogy minden pár kétszer mérkőzik, másodszor a világos és sötét színekkel fordítva küzdenek. Hány mérkőzésre kerül sor a versenyen?

A 12 résztvevő jelenti azokat az elemeket, amelyekből egy játszmához kettőt kell kiválasztanunk. A sorrendet is figyelembe vesszük. Az összes lehetséges párosítást a 12 elem másodosztályú variációinak száma adja meg, így

$$V_{12}^2 = 12 \cdot 11 = 132.$$

Tehát a körmérkőzésen 132 játszmára kerül sor.

7. Egy osztály létszáma 32. Egyik tanítási órán a tanár 4 tanulót akar feleltetni. Hányféle módon választhatja ki a felelőket, ha a sorrendet is figyelembe vesszük?

Az osztály létszáma azoknak az elemeknek a száma, amelyekből — a sorrendet is tekintve — négyes csoportokat kell kiválasztanunk. E csoportok száma a 32 elem 4-edosztályú variációinak számával egyenlő:

$$V_{32}^4 = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 863\,040.$$

Tehát 863 040-féle módon választható ki a négy felelő, ha a sorrendet is megkülönböztetjük.

8. Egy nyolctagú család egy alkalommal négy színházjegyet kap. Hányféleképpen oszthatók ki a jegyek a családtagok között? (Mivel a jegyek számozottak, a sorrendet is vegyük figyelembe!)

A család nyolc tagjából négyet kell választanunk és ezek sorrendjét is meg kell külön adnunk. Képeznünk kell tehát 8 elem negyedosztályú variációit. Ezeknek száma:

$$V_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

Tehát 1680-féleképpen osztható ki a 4 színházjegy a 8 családtag között.

9. A könyvtár egyik olvasója két könyvet választ egy könyvespolcról. Ezek sorrendjét is megkülönböztetve, 2862 lehetősége van olvasmányai megválasztására. Hány könyv van ezen a polcon?

Jelöljük a polcon levő könyvek számát n-nel. A választási lehetőségek száma ezen n elem másodosztályú variációinak számával egyenlő, vagyis $V_n^2 = 2862$. Így

$$n(n-1) = 2862;$$

$$n^2 - n - 2862 = 0.$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 11\,448}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{11\,449}}{2} = \frac{1 \pm 107}{2}.$$

A negatív gyök nem adhat megoldást. Így $n = 54$. Tehát 54 könyv van a polcon.

10. Egy kockával ötször dobunk egymás után. Hány különböző dobássorozatot kaphatunk?

I. Megoldás:

Egy dobás alkalmával hatféle pontértéket kaphatunk. E hat elemből ötös csoportokat kell képeznünk, amelyekben egyes elemek többször is előfordulhatnak, és a sorrend is számít. A lehetséges csoportok számát 6 elem 5-ödosztályú ismétléses variációinak száma adja:

$$V_6^{5,i} = 6^5 = 7776.$$

II. Megoldás:

Az első dobás eredménye hatféle lehet. Ezek mindegyikéhez szintén hatféle második dobáseredmény csatlakozhat, tehát az első két dobás eredménye $6 \cdot 6 = 6^2$ módon alakulhat. Mindegyikhez 6 különböző harmadik eredmény tartozhat, tehát $6^2 \cdot 6 = 6^3$ hármas dobássorozat van. Ezt az eljárást folytatva a negyedik, majd ötödik dobásra, összesen $6^5 = 7776$ különböző ötös dobássorozatot kapunk.

Tehát 7776-féle dobássorozat lehetséges.

11. Hány szelvényt kellene kitöltenünk a totón, hogy az első 13 mérkőzést az egyik szelvényen biztosan eltaláljuk?

Egy mérkőzésre háromféle tippünk lehet: 1, 2, x. Egy szelvényen e 3 elemből az első 13 mérkőzés mindegyikéhez egyet-egyet hozzá kell rendelnünk. Az összes lehetséges esetek 3 elem 13-adosztályú ismétléses variációinak számával egyenlők, hiszen az elemek sorrendje is számít. Ezeknek a száma:

$$V_3^{13,i} = 3^{13} = 1\,594\,323.$$

Tehát 1 594 323 totószelvény kitöltése szükséges a biztos 13 találat eléréséhez.

12. Egy fogászati rendelőintézetben 5 szobában folyik egyidőben rendelés. Az érkező betegek bármelyik kezelőorvosnál jelentkezhetnek sorszámuk beadásával. Hányféleképpen jelentkezhet valamely napon az első tíz beteg az 5 orvosnál?

Minthogy 5 szobában folyik rendelés, minden beteg ezekből az egyiket választhatja és ugyanabba a szobába nyilván több beteg is jelentkezhet. Így 5 elemből kell 10-es csoportokat képeznünk, sorrendjüket is számításba véve. E csoportok számát 5 elem 10-edosztályú ismétléses variációinak száma adja, amely

$$V_5^{10,i} = 5^{10} = 9\,765\,625.$$

Tehát a 10 beteg 9 765 625-féleképpen jelentkezhet rendelésre.

13. A kettes számrendszerben hány valódi nyolcjegyű szám van?

A kettes számrendszerben csak a 0 és az 1 számjegyekből állnak a számok. Valódi nyolcjegyű szám első jegye csak 1-es lehet. A többi 7 jegyet két elemből választhatjuk, tekintettel a sorrendre is. Az összes lehetőséget 2 elem 7-edosztályú ismétléses variációinak száma adja:

$$V_2^{7,i}=2^7=128.$$

Tehát 128 valódi nyolcjegyű szám van a kettes számrendszerben.

14. Nyolc különböző zenei hangból 5-öt egymás után lejátszunk. Hányféle változat lehetséges?

A nyolc zenei hang 8 elemet jelent. Ezekből 5-ös csoportokat képezünk úgy, hogy sorrendjüket figyelembe vesszük. A lehetséges csoportok száma egyenlő a 8 elem 5-ödosztályú ismétléses variációinak számával; ez

$$V_8^{5,i}=8^5=32\,768.$$

Tehát 32 768-féle változatban szólalhatnak meg a hangok.

15. Hat számot tárcsázunk a telefonkészüléken. Hányféleképpen lehetséges ez?

A készüléken 10 számjegy van. Ezekből választunk ki 6-os csoportokat úgy, hogy a sorrendet is figyelembe vesszük. E csoportok száma 10 elem 6-odosztályú ismétléses variációinak számával egyenlő, vagyis

$$V_{10}^{6,i}=10^6=1\,000\,000.$$

Tehát 6 szám tárcsázásakor 1 000 000 lehetőségünk van.

16. Tetszőleges 6 számot a négy alapművelet, vagyis összeadás, kivonás, szorzás, osztás jeleiből választott 5 műveleti jellel kapcsolunk össze. A szokásostól eltérően abban állapodunk meg, hogy a műveleteket minden esetben a műveleti jelek felírási sorrendjében kell elvégezni. A kapott számtani kifejezés értékét kiszámítjuk. A műveleti jeleket változtatva, hány különféle végeredményt kaphatunk?

A műveleti jelek az elemeket jelentik, amelyekből 5-öt kell egy-egy kifejezés képzésekor kiválasztanunk, a sorrendet is figyelembe véve. Ha így mindig elvégezhető a számítás, és ha az eredmény esetenként más és más, akkor az összes lehetőséget 4 elem 5-ödosztályú ismétléses variációinak száma adja:

$$V_4^5=4^5=1024.$$

Tehát 1024 különböző eredményt kaphatunk.

17. Rulettjátéknál egy játszmában a golyó 37 számozott hely valamelyikén áll meg. Hányféle eredménye lehet három játszmának, ha azok sorrendjét is figyelembe vesszük?

A számozott helyek az elemeket jelentik, amelyekből hármas csoportok alakulnak. Az összes lehetséges csoportot — ha a sorrendet is megkülönböztetjük — 37 elem harmadosztályú ismétléses variációi adják. Ezeknek száma:

$$V_{37}^{3,i}=37^3=50\,653.$$

Tehát a 3 rulettjátszmában 50 653 féle változat jöhet létre.

18. A kétféle morzejelből, vagyis pontból és vonalból, 5-öt írunk fel egymás után. Hány ilyen ötös jelsorozat létezik?

A kétféle morzejel két elemet jelent, amelyekkel 5 helyet kell betölteni, rögzített sorrendben. A lehetséges jelcsoportok száma 2 elem 5-ödosztályú ismétléses variációinak száma:

$$V_2^{5,i}=2^5=32.$$

Tehát 32-féle jelcsoportot írhatunk fel.

19. Egy vizsgán a jelölteknek 8 kérdést tartalmazó lapot osztanak ki. Az egyes kérdések mellett 4—4 választ tüntetnek fel, melyeket A, B, C, D betűvel jelölnek. A jelölteknek a kérdésekre egy-egy betű kiválasztásával kell válaszolniok. Hányféle különböző válaszsorozat lehetséges?

Az egy kérdésre adható válaszok négyfélék. Ez 4 elemet jelent, amelylyel 8 egymás utáni helyet kell (a sorrendet is figyelembe véve) kitölteni. Az összes lehetőséget 4 elem 8-adosztályú variációinak száma adja:

$$V_4^{8,i}=4^8=66\,536.$$

Tehát a különböző válaszsorozatok száma: 66 536.

20. Legalább hány számjegyre van szükség ahhoz, hogy 243 ötjegyű számot írhassunk fel ezek felhasználásával? (A nem valódi ötjegyű számokat is figyelembe vesszük, tehát ahol az első helyen nulla áll!)

Jelöljük a szükséges számjegyek számát n-nel. Ez az n számjegy az elemek számát adja, amelyekből ötödosztályú ismétléses variációk képzésével kapjuk az ötjegyű számokat. A következő összefüggésnek kell az n-re teljesülnie:

$V_n^{5,i}\geqq 243$, másképpen

$$n^5\geqq 243;$$

$$n\geqq\sqrt[5]{243};$$

$$n\geqq 3.$$

Tehát legalább 3 számjegyre van szükségünk.

21. Az 1, 2, 3, 4 számjegyekből legalább hány jegyből álló számokat kell felírnunk ahhoz, hogy legalább 1024 különböző számot kapjunk?

Legyen a szükséges jegyek száma k. A 4 számjegyből mint elemekből képzett k-adosztályú ismétléses variációk adják a lehetséges számokat. Ezek összes számának a következő összefüggésnek kell eleget tennie:

$$V_4^{k,i}\geqq 1024;$$

másképpen:

$$4^k\geqq 1024;$$

ebből:

$$k\geqq 5.$$

Tehát legalább 5 jegyből álló számokat kell felírnunk.

4. Vegyes feladatok

1. Egy sakktáblára hányféleképpen állíthatunk 8 bábut úgy, hogy minden számmal jelölt és minden betűvel jelölt sorban csak egy bábu álljon?

A betűvel jelölt sorok eredeti sorrendjéhez a 8 számozott sor egy-egy tetszőleges sorrendje tartozhat, és az ily módon adódó kockákba helyezzük el a bábukat. Az összes lehetséges sorrendet a számozott sorok mint elemek permutációi adják, amelyeknek száma:

$$P_8 = 8! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40320.$$

Tehát 8 bábut a fenti feltételeknek megfelelően 40 320-féleképpen helyezhetünk el egy sakktáblán.

2. Egy dobozban 5 kék és 6 piros számozott golyó van. Először egy piros golyót, majd egymás után öt kéket, végül ismét egymás után öt pirosat húzunk ki visszatevés nélkül. Hányféle sorrend alakulhat ki?

Tekintve, hogy az egyes húzások alkalmával a kihúzott golyó színe adott, és minden golyót kihúzunk, így csak az azonos színű golyók egymás közti sorrendje változhat. A 6 piros golyó sorrendje P_6-féle, az 5 kék golyó sorrendje P_5-féle lehet. Az összes lehetséges sorrend ezért:

$$P_6\cdot P_5 = 6!\cdot5! = 6\cdot(5!)^2 = 6\cdot120^2 = 86400.$$

3. A 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány olyan valódi ötjegyű szám írható fel, amelyben legalább az egyik számjegy ismétlődik?

A számítást úgy végezzük, hogy először az adott számjegyekből álló összes valódi ötjegyű számok számát állapítjuk meg, majd ugyanezen számjegyekből álló olyan valódi ötjegyűekét, amelyekben ismétlődés nincsen, ezután az előbbiek számából kivonjuk az utóbbiakét. Először vizsgáljuk meg, hány valódi ötjegyű számot kapunk a 0, 1, 2, 3, 4 jegyekből. Az első helyre 4-féle számjegy írható, a **0** nem. A többire viszont 5-féle. Összesen tehát $4\cdot5^4$ ilyen ötjegyű szám van. Most azokat számoljuk össze, amelyekben nincs ismétlődés. Itt 5 elem permutációinak számát kellene vennünk, ha az első helyen állhatna 0 is; ezek $\frac{1}{5}$ részében a 0 áll első helyen, ezért csak a $\frac{4}{5}$ részük megfelelő, vagyis

$$\frac{4}{5}P_5 = \frac{4}{5}5! = 4\cdot4!.$$

Az előbbiek számából kivonjuk az utóbbiakét:

$$4\cdot5^4-4\cdot4! = 4\cdot625-4\cdot24 = 2404.$$

Tehát 2404-féle olyan 5 jegyű számot írhatunk, mely a feltételeknek megfelel.

4. Hány betűcsoportot képezhetünk az a, e, i, o, u és l, m, n, s betűkből úgy, hogy minden betűcsoportban 5 betű legyen, a magánhangzók és mássalhangzók felváltva következzenek, és egyik betű se ismétlődjék?

A betűcsoportok egyik része 3 magánhangzóból és 2 mássalhangzóból áll. Ekkor az 5 magánhangzóból választunk 3 különbözőt, és sorrendjüket is megkülönböztetjük; ugyanígy a 4 mássalhangzóból kettőt. Az ilyen betűcsoportok száma:

$$V_5^3\cdot V_4^2.$$

Ha viszont a betűcsoport 2 magánhangzóból és 3 mássalhangzóból áll, akkor az 5 magánhangzóból választunk ki kettőt és a 4 mássalhangzóból hármat. Az ilyenfajta betűcsoportok száma:

$$V_5^2\cdot V_4^3.$$

A kétféle betűcsoport számát összeadjuk:

$$V_5^3\cdot V_4^2+V_5^2\cdot V_4^3 = 5\cdot4\cdot3\cdot4\cdot3+5\cdot4\cdot4\cdot3\cdot2 = 5\cdot4\cdot4\cdot3(3+2) =$$
$$= 25\cdot48 = 1200.$$

Tehát a fenti feltételeknek megfelelő betűcsoportok száma 1200.

5. Vívóedzésen 15 vívóból 6 pár vív egyidejűleg. Hányféleképpen választhatók ki a párok?

I. Megoldás:

Először azt a 3-at választjuk ki, akik nem vívnak. Számuk C_{15}^3. Ezután a megmaradó 12 vívóból állítjuk össze a párokat. Ha a párok sorrendje is számítana, akkor az első párt C_{12}^2, a másodikat C_{10}^2 stb.-féle módon választva, a párok száma:

$$C_{12}^2\cdot C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2$$

lenne. Minthogy a sorrendjük nem számít, e számot a 6 pár lehetséges elrendezéseinek számával, P_6-tal osztani kell. Most kiszámítjuk a lehetőségek számát:

$$\frac{C_{15}^3 C_{12}^2 C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2}{P_6} = \frac{\binom{15}{3}\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{6!} =$$
$$= \frac{\frac{15!}{3!12!}\,\frac{12!}{2!10!}\,\frac{10!}{2!8!}\,\frac{8!}{2!6!}\,\frac{6!}{2!4!}\,\frac{4!}{2!2!}}{6!} = \frac{15!}{3!6!(2!)^6} =$$
$$= \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot2^6} = 4729725.$$

II. Megoldás:

A 15 vívót 7 csoportba kell elosztanunk: 6 játszópárba 12-t, a 7-edik csoportot a játékból kimaradók alkotják. Ha a vívópárok sorrendje is számítana, a következőképpen határozhatnánk meg a lehetséges esetek számát. A vívók névsorában minden név mellé odaírva, hogy az illető hányadik csoportba kerül, a 2—2 db 1-es, 2-es, ..., 6-os és 3 db 7-es egy-egy ismétléses permutációját kapnánk. Ezek száma összesen:

$$P_{15}^{2,2,\ldots,2,3} = \frac{15!}{(2!)^6 \cdot 3!}.$$

A 6 vívópár lehetséges sorrendjeinek a száma P_6; ha a párok sorrendjét nem akarjuk figyelembe venni, ezzel kell elosztani a fenti eredményünket:

$$P_{15}^{2,2,\ldots,2,3} : P_6 = \frac{15!}{(2!)^6 \cdot 3!} : 6! = 4\,729\,725.$$

Tehát 4 729 725 féleképpen választható ki a 6 vívópár.

6. Egy raktárpolcon 15 üveg bor áll. Ezekből 10 üvegben fehér és 5 üvegben vörös bor van. Hányféleképpen választhatunk 6 palackot úgy, hogy köztük éppen kettőben legyen vörös bor.

A 10 üveg fehérborból 4-et kell választanunk, sorrendre való tekintet nélkül. Erre C_{10}^4 lehetőségünk van. Az 5 üveg vörösborból 2 palackot az előbbiekhez hasonlóan C_5^2-féle módon választhatunk. A két kiválasztást minden módon párosíthatjuk, ezért lehetőségeik számának szorzatát kell vennünk:

$$C_{10}^4 \cdot C_5^2 = \binom{10}{4}\binom{5}{2} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 2100.$$

Tehát a 6 palackot 2100-féleképpen választhatjuk ki.

7. Hányféleképpen lehet 4 egyenlő nagyságú részre osztani a 32 lapos magyar kártyát úgy, hogy a négy ász az egyik részbe kerüljön?

A négy ászhoz még négy lapot választunk a többi 28 lapból. Ez C_{28}^4-féleképpen lehetséges. Ezzel az egyik csoport elkészül. A további három nyolcas csoportot ezután a megmaradó 24 lapból választjuk. Ha a csoportok sorrendje is számítana, akkor ezek közül az elsőt C_{24}^8, a másodikat C_{16}^8 módon lehetne választani, a harmadik pedig már ezekkel a választásokkal egyértelműen meg lenne határozva, vagyis a három nyolcas csoport megválasztására az összes lehetőség $C_{24}^8 C_{16}^8$ lenne. A nyolcas csoportok sorrendje azonban tetszőleges, és így P_3 számú olyan elrendezés, mely csak a három csoport sorrendjében különbözik, mindig azonosnak tekinthető. Az összes lehetőség így:

$$\frac{C_{28}^4 C_{24}^8 C_{16}^8}{P_3} = \frac{\binom{28}{4}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{3!} = \frac{\frac{28!}{4!24!}\,\frac{24!}{8!16!}\,\frac{16!}{8!8!}}{3!} = \frac{28!}{3!\,4!\,(8!)^3}.$$

8. Egy társaságban 7 fiú és 5 leány van. Hányféleképpen alakulhat belőlük 5 egyszerre táncoló pár?

I. Megoldás:

Az 5 leány mindenképpen táncol. A 7 fiúból az 5 táncoló C_7^5-féleképpen választható ki. Ha már valahogy kiválasztottuk, hogy kik fognak táncolni, akkor a lányokat egy bizonyos sorrendben felállítva képzelve, az 5 fiú bármely sorrendben felállhat; e sorrendek száma P_5. Az összes lehetőségek tehát:

$$C_7^5 P_5 = \binom{7}{5} 5! = \frac{7!}{5!2!}\cdot 5! = \frac{7!}{2!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520.$$

II. Megoldás:

Az 5 leány mindenképpen táncol. Tehát valamilyen sorrendben felállítva őket, az a kérdés, hogy hányféleképpen állíthatjuk velük szemben sorrendbe a fiúkat. Az első fiú kiválasztására 7 lehetőség van. Bárhogy választottuk ki az elsőt, a másodikra már csak 6 lehetőségünk maradt stb. Így az összes lehetőség:

$$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2520.$$

Tehát 2520-féle változatban táncolhat 5 pár.

9. Hány különböző módon olvashatjuk ki a következő összeállításból a MATEMATIKA szót, ha a bal felső sarokból kiindulva egy-egy lépéssel jobbra vagy lefelé haladunk, míg a jobb alsó sarokba nem érünk:

M	A	T	E	M
A	T	E	M	A
T	E	M	A	T
E	M	A	T	I
M	A	T	I	K
A	T	I	K	A

I. Megoldás:

Összesen 9 lépést kell tennünk, mégpedig 4 lépést jobbra és 5 lépést lefelé. E kétfajta lépés minden lehetséges sorrendjéhez egy kiolvasás tartozik, különböző sorrendek mellett különböző útvonalakon történik a kiolvasás. A lehetséges kiolvasások száma e kétfajta lépés lehetséges sorrendjeinek — tehát az ismétléses permutációinak a számával egyenlő:

$$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2} = 126.$$

II. Megoldás:

Összesen 9 lépést kell tennünk, mégpedig 4 lépést jobbra és 5 lépést lefelé. Ezeknek minden lehetséges sorrendje egy kiolvasási módot eredményez. Ha az egyik irányú lépések helyét kiválasztjuk, akkor ezzel már a másik irányú lépések — tehát a kiolvasási mód is — egyértelműen meg vannak határozva. Tekintsük — mondjuk — a jobbra irányuló lépések helyének megválasztásait: ezek mindegyike 9 elem egy negyedosztályú kombinációja. Számuk tehát

$$C_9^4 = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126.$$

Tehát a MATEMATIKA szót 126-féleképpen olvashatjuk ki az elrendezésből.

10. Egy úttörőcsapat számháborúra készül. Ehhez piros és kék színű számjegyeket festenek lapokra, mégpedig a 4, 5, 6, 7, 8 számjegyeket választják. A játék kezdetekor minden részvevő három azonos színű és különböző számjegyet mutató lapot kap és ezeket tetszőleges sorrendben jól láthatóan homlokára köti. A két szín alapján két csoport alakul ki, és ezek vívják meg a számháborút úgy, hogy igyekeznek a másik csoport tagjainak számait leolvasni. Hány úttörő vehet részt a játékban?

Az azonos színű számok viselői 5 számjegyből három különbözőt kapnak, a jegyek sorrendje nem érdekes. Az összes lehetőséget 5 elem 3-adosztályú kombinációinak száma adja, vagyis C_5^3. Minthogy kétféle színből alakul a két csoport, a játékosok száma ennek kétszerese lehet:

$$2C_5^3 = 2\binom{5}{3} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 20.$$

Tehát 20 úttörő vehet részt a számháborúban.

11. Egy rejtvénypályázat első 4 helyezettje között 10 könyv kerül kiosztásra, mégpedig úgy, hogy először az első helyezett választ 4 könyvet, utána a második hármat, majd a harmadik kettőt. A negyedik helyezett a megmaradó könyvet kapja. Hányféle elosztás alakulhat ki?

I. Megoldás:

Az első helyezett C_{10}^4-féle módon választhat. A második a megmaradt 6 könyvből hármat C_6^3-féleképpen választhat. A harmadik pedig C_3^2-féle módon választhat két könyvet a háromból. Az egyes lehetőségek számát össze kell szorozni. Tehát

$$C_{10}^4 C_6^3 C_3^2 = \binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2} = \frac{10!}{4!\,6!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{1!\,2!} = 12\,600.$$

II. Megoldás:

Készítsük elő a könyvek kiosztását úgy, hogy a könyvek listájára minden könyv mellé odaírjuk, hogy a verseny hányadik helyezettje kapja az illető könyvet. A 10 könyv címe mellé tehát az 1, 2, 3, 4 számokat írjuk, mégpedig az 1-est 4-szer, a 2-est 3-szor, a 3-ast 2-szer és a 4-est 1-szer. Az összes lehetőség száma tehát az ezekből az elemekből képezhető ismétléses permutációk számával egyenlő:

$$P_{10}^{4,3,2} = \frac{10!}{4!\,3!\,2!} = 12\,600.$$

Tehát a sorsolás 12 600-féle eredménnyel végződhet.

12. Hány különböző elemből képezhetünk 176-tal több harmadosztályú ismétléses variációt, mint harmadosztályú ismétlés nélkülit?

Jelöljük az elemek számát n-nel. A következő összefüggés áll fenn:

$$V_n^{3,i} - V_n^3 = 176;$$

$$n^3 - n(n-1)(n-2) = 176.$$

A műveleteket elvégezve és egyenletet rendezve, a harmadfokú tagok kiesnek és a kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$n_1 = 8 \quad \text{és} \quad n_2 = -\frac{44}{6}.$$

A feladat megoldása csak pozitív egész szám lehet, így az elemek száma 8.

Ellenőrizzük a kapott megoldást: 8 elem harmadosztályú ismétléses variációinak száma $V_8^{3,i} = 8^3 = 512$, az ismétlés nélküli variációk száma $V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. A kettő különbsége $512 - 336 = 176$.

13. Kilenc ember csónakázni készül. Három csónak áll rendelkezésükre. Az egyik négy-, a másik három-, a harmadik kétüléses. Hányféleképpen foglalhatják el a csónakokat? Egy csónakon belül a helyek sorrendje nem számít!

I. Megoldás:

Az első csónakba kerülő 4 személy a 9-ből C_9^4-féleképpen, ezek mindegyikéhez a második csónakba a megmaradó 5 emberből 3 személy C_5^3-féle módon választható, így már csak 2 fő marad és ezek a harmadik csónakba kerülnek. A kétféle választási lehetőség számának szorzata adja meg az összes különböző lehetőség számát:

$$C_9^4 C_5^3 = \binom{9}{4}\binom{5}{3} = \frac{9!}{4!\,5!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 1260.$$

II. Megoldás:

Tegyük fel, hogy indulás előtt minden részvevő megkapja a csónakja számát: felállítjuk őket valamilyen sorrendben és kiosztunk közöttük 4 db 1-est, 3 db 2-est és 2 db 3-ast. A lehetséges esetek száma tehát ezen elemek ismétléses permutációinak a számával egyenlő:

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1260.$$

Tehát a 9 ember 1260-féleképpen helyezkedhet el a csónakokban.

14. 20 láda áruból 15 láda elsőosztályú, a többi másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki 5 ládát ezekből úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen köztük?

Választhatunk úgy, hogy az 5 között nincs másodosztályú áru, ekkor a 15 elsőosztályúból C_{15}^5-féle választási lehetőségünk van. Lehet, hogy egy másodosztályút választunk ki és négy elsőosztályút, ekkor $C_5^1C_{15}^4$ a lehetőségek száma. Ha két másodosztályút veszünk ki és három elsőosztályút, akkor a választási lehetőségek száma $C_5^2C_{15}^3$. Ezeknek a választási lehetőségeknek a számát össze kell adnunk:

$$C_{15}^5+C_5^1C_{15}^4+C_5^2C_{15}^3 = \binom{15}{5}+\binom{5}{1}\binom{15}{4}+\binom{5}{2}\binom{15}{3} =$$

$$= \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{5\cdot4\cdot3\cdot2}+5\cdot\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12}{4\cdot3\cdot2}+\frac{5\cdot4}{2}\,\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2} =$$

$$= 3003+6825+4550 = 14378.$$

Tehát az 5 ládát 14 378-féleképpen választhatjuk ki.

15. Egy kockával háromszor dobunk egymás után. Hány olyan dobássorozat fordulhat elő, amelyben a 6-os dobás is szerepel?

Az összes lehetséges dobássorozat számát akkor kapjuk, ha kiszámítjuk, hogy 6 elemből hányféleképpen képezhetők 3-as csoportok, a sorrendet is figyelembe véve, és ismétlődéseket is megengedve. Ez a szám $V_6^{3,i}$. Ezután azoknak a 3-as dobássorozatoknak a számát határozzuk meg, amelyekben 6-os dobás nem fordul elő. Ezekben 5 elemből választunk 3-at, sorrendjüket is figyelembe véve, és ismétlődéseket megengedve. Így $V_5^{3,i}$ számú dobássorozat lehetséges. Az előbbiek számából kivonjuk az utóbbiakét:

$$V_6^{3,i}-V_5^{3,i} = 6^3-5^3 = 216-125 = 91.$$

Tehát 91 olyan 3-as dobássorozat van, amelyben 6-os dobás fordul elő

16. Az 52 lapos bridzskártyában 4 ász és 4 király van. Szétosztjuk a lapokat úgy, hogy 4 játékosnak 13—13 lapot adunk. Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melynek során a 4 játékos mindegyikének 1—1 ász és 1—1 király jut, ha a játékosok sorrendjét megkülönböztetjük?

A 4 ász lehetséges sorrendjeinek száma P_4, ugyanennyi a 4 királyé is. A többi 44 lapból 11—11 jut minden játékosnak. Az elsőnek jutó 11-et C_{44}^{11}-féleképpen választhatjuk, a másodiknak a megmaradó 33 lapból 11-et C_{33}^{11}-féleképpen, a harmadiknak 22 lapból választunk, erre C_{22}^{11} számú lehetőség van. A megmaradt 11 lap jut a negyedik játékosnak. Az összes megfelelő szétosztás számát megkapjuk, ha az egyes eddig megállapított lehetőségek szorzatát vesszük:

$$(P_4)^2\cdot C_{44}^{11}C_{33}^{11}C_{22}^{11} = (4!)^2\binom{44}{11}\binom{33}{11}\binom{22}{11} =$$

$$= (4!)^2\frac{44!}{33!\,11!}\cdot\frac{33!}{22!\,11!}\cdot\frac{22!}{11!\,11!} = \frac{(4!)^2\,44!}{(11!)^4}.$$

17. Egy gépkocsivezető négyüléses kocsijával 9 személyt akar 3 csoportban egymás után elszállítani. Hányféleképpen teheti ezt, ha a legidősebb személyt az első menetben szállítja?

Az első menetben a legidősebb személy mellett még 2 személy szállítható. Ezeket 8 emberből választja ki. A választási lehetőségek száma itt C_8^2. Még 6 ember várakozik, amikor visszatér. Ezekből C_6^3-féleképpen választhatja ki a második menetben utazókat. A többi személyt viszi utoljára. A kétféle választásnál kapott lehetőségek számának szorzatát kell vennünk:

$$C_8^2C_6^3 = \binom{8}{2}\binom{6}{3} = \frac{8!}{2!\,6!}\,\frac{6!}{3!\,3!} = \frac{8!}{2!\,3!\,3!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot3\cdot2} = 560.$$

A gépkocsivezető tehát 560-féleképpen választhatja ki az utasokat.

18. Egy vasúti szerelvény a mozdonyon kívül 9 kocsiból áll. Hányféle sorrendben kapcsolhatók a mozdonyhoz a kocsik, ha közülük 5 személy-, 3 háló- és 1 étkezőkocsi van, és az azonos fajtájúakat egymás közt nem különböztetjük meg?

A 9 kocsi az elemek számát jelenti, melyek között 5, ill. 3 megegyező van. A lehetséges sorrendek számát tehát ismétléses permutációval számolhatjuk ki:

$$P_9^{5,3} = \frac{9!}{5!\,3!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 504.$$

Tehát a szerelvény 504-féle módon kapcsolható össze.

19. Egy páncélszekrény 6 egymás mögötti tárcsa megfelelő beállításakor nyitható ki. A tárcsák 9 számjegyet tartalmaznak, amelyekből egyet-egyet kell beállítanunk. Ha valaki nem tudja, hogy milyen számjegyek beállításával nyitható ki a szekrény, mennyi időt vesz igénybe, amíg biztosan sorra kerül a helyes beállítás, ha megállás nélkül próbálkozik és egy beállítás 5 másodpercig tart?

A tárcsákon levő 9 számjegyből 6-os csoportokat kell választanunk; a számjegyek ismétlődhetnek, és a sorrendet figyelembe kell vennünk. A lehetőségeket így 9 elem 6-odosztályú ismétléses variációi adják. Ezeknek száma:

$$V_9^{6,i}=9^6=531\,441.$$

A helyes sorrend biztosan előáll, ha ezeket mind végigpróbáljuk. Az összes különböző beállítás elvégzéséhez szükséges idő: $531\,441\cdot5$ másodperc, vagyis

$$\frac{531\,441\cdot5}{60\cdot60}\text{ óra} \approx 738\text{ óra }7\text{ perc}.$$

Tehát 738 óra és 7 perc alatt biztosan megtalálható a helyes beállítás és kinyitható a páncélszekrény.

20. Hány olyan valódi négyjegyű szám van, amelyben legalább egy páros és legalább egy páratlan számjegy szerepel?

A valódi négyjegyű számok száma, amelyekben tehát nem a 0 áll az első helyen: $9 \cdot V_{10}^{3,i} = 9 \cdot 10^3 = 9000$. A csupa páros számjegyekből álló valódi 4-jegyű számok száma: $4 \cdot V_5^{3,i} = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500$. A csupa páratlan jegyekből álló 4-jegyű számok száma: $V_5^{4,i} = 5^4 = 625$. A csak páros vagy csak páratlan jegyekből álló valódi négyjegyű számok száma: $500 + 625 = 1125$. Az összes valódi négyjegyű számok számából levonjuk az előbbi összeget: $9000 - 1125 = 7875$. Tehát 7875 olyan valódi négyjegyű szám van, amelyben legalább egy páros és legalább egy páratlan számjegy szerepel.

21. Egy kockával öt egymás utáni dobásból álló dobássorozatokat dobunk. Hány olyan dobássorozat van, amelyben éppen egy 1-es és egy 2-es dobás fordul elő (a dobássorozatban a dobások sorrendjét is figyelembe kell venni)?

Az 5 egymás utáni dobás 5 elemet jelent, ezekből 2-t kell kiválasztanunk az 1-es és a 2-es dobás részére úgy, hogy a sorrend is számít. Erre a lehetőségek száma: V_5^2.

A másik 3 dobás során a többi 4 érték fordulhat elő. Itt a lehetőségek száma, mivel a számok ismétlődhetnek, és a sorrend is számít: $V_4^{3,i}$. A kétféle választáskor kapott lehetőségek számát össze kell szoroznunk:

$$V_5^2 \cdot V_4^{3,i} = 5 \cdot 4 \cdot 4^3 = 5 \cdot 4^4 = 1280.$$

Tehát 1280 olyan dobássorozat van, amely a feltételeknek megfelel.

22. Egy érmével bizonyos számú dobásból álló sorozatokat dobunk. Ha a dobássorozat dobásainak számát 2-vel megnöveljük, a különböző sorozatok száma 384-gyel növekszik. Mennyi dobásból állt az eredeti dobássorozat? (A sorrend is számít.)

Jelöljük k-val az eredeti dobássorozat dobásainak számát. Ekkor két elemből k darabszámú csoportokat kapunk, amelyekben a sorrend is számít. Ezek száma $V_2^{k,i}$. Ha a dobássorozat dobásainak számát 2-vel növeljük, a lehetőségek száma $V_2^{k+2,i}$. Felírjuk a kétféle lehetőség számának összefüggését:

$$V_2^{k+2,i} - V_2^{k,i} = 384,$$

másképpen:

$$2^{k+2} - 2^k = 384;$$

$$3 \cdot 2^k = 384;$$

$$2^k = 2^7,$$

ebből

$$k = 7.$$

Vagyis a dobássorozat eredetileg 7 dobásból állt.

23. Két játékos bizonyos számú sakkjátszma lejátszásában egyezik meg. Az egyik játékos utólag kéri, hogy növeljék meg 1-gyel a játszmák számát, mert akkor a győzelmek, döntetlenek és vereségek lehetséges változatainak száma 9-cel megnőne (az egyes eredmények sorrendjét ennél a megállapításnál nem veszi figyelembe). Hány játszmában állapodtak meg eredetileg?

Jelöljük k-val az eredeti megállapodás szerinti játszmák számát. Az egyes játszmák eredménye háromféle lehet, ez 3 elemet jelent, melyekből k elemű csoportok alakulnak. Itt a sorrend nem számít, így a különböző csoportok száma $C_3^{k,i}$. Ha eggyel több mérkőzés lenne, akkor a lehetőségek száma $C_3^{k+1,i}$ volna. Felírjuk a kétféle játszmaszámra a lehetséges változatok számának összefüggését:

$$C_3^{k+1,i} - C_3^{k,i} = 9, \text{ azaz } \binom{k+3}{k+1} - \binom{k+2}{k} = 9,$$

másképpen

$$\binom{k+3}{2} - \binom{k+2}{2} = 9; \text{ azaz}$$

$$\frac{(k+3)(k+2)}{2} - \frac{(k+2)(k+1)}{2} = 9.$$

Megoldjuk az egyenletet:

$$k^2+5k+6-(k^2+3k+2) = 18$$

$$2k+4 = 18$$

$$k = 7.$$

Tehát a sakkozók eredetileg 7 játszmában egyeztek meg.

Ellenőrzés:

7 játszma esetén a változatok száma

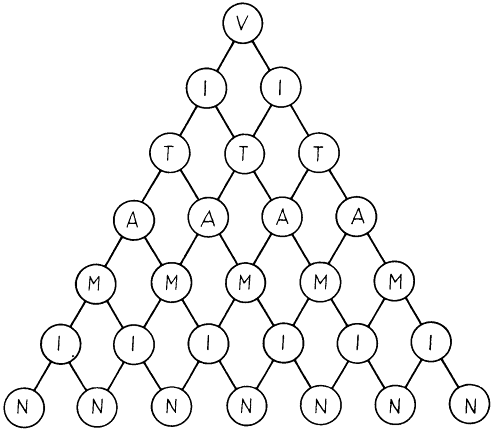
$$C_3^{7,i} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36,$$

8 játszma esetén viszont

$$C_3^{8,i} = \binom{3+8-1}{8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

A változatok számának növekedése: $45 - 36 = 9$.

24. Hányféle változatban villanhat fel egymás után a VITAMIN szó 7 betűje a 2. ábra szerinti világító reklámtáblán, ha minden betű kétféle színben villanhat fel, és a legfelső betűtől kiindulva mindig a kivilágosodó betű alatti sorban levő, hozzá legközelebbi két betű közül az egyik villan fel?



2. ábra

Egy út kiválasztása során 6 lépést teszünk lefelé és erre rendre 2—2 lehetőségünk van. E kétféle lépésből tehát $V_2^{6,i}$ lehetséges csoport hozható létre. Most nézzük meg, hogy egy kiválasztott útnál a színek megválasztása hányféleképpen lehetséges. Itt rendre 7 betű színét választhatjuk meg két színből. Tehát egy út különféle színezési lehetőségeinek száma $V_2^{7,i}$. Az utak és a színek kiválasztására kapott lehetőségek számát össze kell szoroznunk:

$$V_2^{6,i}\, V_2^{7,i} = 2^6 \cdot 2^7 = 2^{13} = 8192.$$

Tehát 8192-féle változatban villanhatnak fel a reklám betűi a feltételeknek megfelelően.

25. Valaki a lottó 90 száma közül 10-et kiválaszt és annyi szelvényt vásárol, hogy biztos 5-ös találata legyen, ha e 10 szám közül húzzák ki az 5 nyerőszámot. Hány szelvényre van szüksége az illetőnek?

A kiválasztott 10 szám azoknak az elemeknek a számát jelenti, melyek közül minden módon 5-öt választunk. Képeznünk kell tehát 10 elemből olyan 5-ös csoportokat, amelyekben nincs ismétlődés és a sorrend sem számít. Az ilyen csoportok száma 10 elem 5-ödosztályú kombinációinak számával egyenlő:

$$C_{10}^5 = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252.$$

Tehát 252 szelvényt kell vásárolnia.

II. ESEMÉNYEK ALGEBRÁJA

1. Kísérlet, esemény és ellentett esemény

A valószínűségszámítás olyan jelenségekkel foglalkozik, amelyek lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhetők, de kimenetelüket a rögzített lényeges tényezőkön kívül sok más — önmagában egyenként kis hatású — tényező is befolyásolja. Utóbbiak okozzák, hogy az ismétlések során többféle eredmény jöhet létre. Az ilyen típusú jelenségeket, ill. megfigyelésüket általánosabb értelemben *kísérletnek* nevezzük, a kísérlet egyes lehetséges kimeneteleit pedig *elemi eseményeknek.*

Az *esemény* fogalma általánosabb: eseménynek nevezünk mindent, amiről a kísérlet elvégzése után eldönthető, hogy a kísérlet során bekövetkezett-e vagy sem. Két eseményt azonosnak tekintünk, ha a kísérlet minden lehetséges kimenetelekor vagy mindkettő bekövetkezik, vagy egyik sem. Az események jelölésére nyomtatott nagybetűket használunk: $A, B, C, \ldots$ Ha az A esemény csak azokban az esetekben következhet be, amikor a B esemény is bekövetkezik, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény *maga után vonja* a B eseményt, és ezt így jelöljük: $A \subset B$. Az A és B esemény tehát akkor azonos, ha $A \subset B$ is és $B \subset A$ is teljesül; ennek jele: $A = B$. Ha $A \subset B$ és $B \subset C$ teljesül, akkor $A \subset C$ is teljesül. Sok esetben célszerű az eseményt azokkal az elemi eseményekkel jellemezni, amelyek maguk után vonják az illető eseményt.

Egy kísérlettel kapcsolatos elemi események összessége *eseményteret* alkot. Az eseményteret T-vel jelöljük.

Bevezetjük a *lehetetlen eseményt,* amely sohasem következik be, ennek jelölése: O. Értelmezzük még a *biztos eseményt,* amely a kísérlet során mindig bekövetkezik, jelölése: I.

Azt az eseményt, amelyik akkor és csakis akkor következik be, ha az A esemény nem következik be, az A esemény *ellentett eseményének* nevezzük, ennek jele: $\bar{A}$. Az értelmezésből következik, hogy az $\bar{A}$ esemény ellentett eseménye az eredeti A esemény, vagyis $\bar{\bar{A}}=A$.

A lehetetlen esemény a biztos esemény ellentett eseménye: $\bar{I}=O$ és megfordítva: $\bar{O}=I$.

Például a kockadobással kapcsolatos eseményeket vizsgálva, hatféle kimenetel lehetséges aszerint, hogy hányast dobunk. Jelöljük az „egyes" dobását A_1-gyel, a „kettesét" A_2-vel stb. Az eseménytér tehát hat elemi eseményt tartalmaz:

$$T = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}.$$

Azt az eseményt pl., hogy nem dobtunk ötöst, úgy jelölhetjük, hogy $\bar{A}_5$. Más események is vizsgálhatók a kockadobással kapcsolatban. Legyen pl. B az az esemény, hogy páratlan számot dobtunk, és C az az esemény, hogy párosat; a B és C közötti kapcsolat így fejezhető ki: $\bar{B}=C$, vagyis B és C ellentett események e kísérletnél. Az A_1 esemény, vagyis az egyes szám dobása maga után vonja a B eseményt, vagyis a páratlan szám dobását, tehát $A_1 \subset B$.

Másik példaként tekintsünk egy dobozt, amelyben 50 fehér és 50 fekete golyó van. Végezzük azt a kísérletet, hogy két golyót húzunk egymás után visszatevés nélkül. A kísérlet kimenetele négyféle lehet, ha a sorrendet is figyelembe vesszük:

A: mindkét golyó fehér;
B: az első fehér, a második fekete;
C: az első fekete, a második fehér;
D: mindkettő fekete.

Az $\bar{A}$ esemény, mely A ellentétje, itt azt jelenti, hogy nem mindkét kihúzott golyó fehér. $\bar{A}$ bekövetkezhet B, C, D módon. Jelöljük E-vel azt az eseményt, hogy az első kihúzott golyó fehér. Ha megvizsgáljuk az A és E események kapcsolatát, azt találjuk, hogy A maga után vonja E-t, így $A \subset E$, viszont E nem vonja maga után A-t, hiszen E teljesülése esetén B is bekövetkezhet.

Pénzfeldobáskor tekinthetjük kísérletnek egyetlen dobás elvégzését. Ennek kimenetele kétféle lehet: fej vagy írás. Tehát az eseménytér két elemi eseményből áll. Tekinthetünk azonban egy tízes dobássorozatot is egyetlen kísérletnek. Ekkor a fejek és írások minden tizes hosszúságú sorozata lehetséges kimenetel. Vagyis most az eseménytér 2^{10} elemi eseményből áll. Legyen

A az az esemény, hogy mind a tíz dobás fej, B pedig az, hogy mind a tíz dobás írás. Ha azt a kérdést vizsgáljuk, vajon $\bar{A}$ és B egyenlők-e, akkor a válasz az, hogy nem, hiszen $\bar{A}$ nem vonja maga után B-t. $\bar{A}$ ui. azt jelenti, hogy nem mind a tíz dobás fej, ez viszont nem csak B módon következhet be, hanem pl. úgy is, hogy az első öt dobás fej, a többi írás. Legyen továbbá C az az esemény, hogy az első kilenc dobás fej. Vizsgáljuk C és A kapcsolatát. Azt találjuk, hogy $A \subset C$, vagyis A maga után vonja C-t, de C nem vonja maga után A-t, hiszen a tizedik dobás írás is lehet.

Tegyük fel, hogy öntvények minőségellenőrzését úgy végezzük, hogy 20-darabos tételeket vizsgálunk. A tétel elfogadható minőségű, ha a kiválasztott 20 öntvényből legfeljebb kettő hibás. Jelöljük ezt az eseményt A-val. Először nézzük meg, mit jelent itt $\bar{A}$. Az $\bar{A}$ akkor következik be, ha a 20 öntvény között kettőnél több hibásat találunk. Tegyük fel, hogy 18 darabot vizsgáltunk meg egy tételből. Jelentse B_k azt az eseményt, hogy az első 18-ban k hibásat találunk. Ezzel a jelöléssel $B_0 \subset A$, vagyis a tétel biztosan elfogadható, $k>2$ mellett viszont $B_k \subset \bar{A}$, így a tétel nem fogadható el. Tehát az utolsó két öntvényt csak a B_1 vagy B_2 események bekövetkezése esetén kell megvizsgálni.

Gyakorló feladatok

1. Egy villamos utasforgalmát vizsgáljuk. A villamos az egyik végállomásról utas nélkül indul. A következő eseményeket vezetjük be: A: az első megállón felszáll legalább 5 utas, B: a második megállón felszáll legalább 12 utas, és nem száll le senki, a harmadik megállón az utasok száma hárommal csökken, a negyedik megállóhoz pedig 14 utas érkezik. Vizsgáljuk meg, hogy B maga után vonja-e A-t, azaz fennáll-e $B \subset A$!

I. Megoldás:

Azt állítjuk, hogy B nem vonja maga után A-t. Így azt kell belátnunk, hogy ha $\bar{A}$ teljesült, attól még fennállhat B. Tegyük fel, hogy $\bar{A}$ teljesült, így csak $x<5$ számú utas szállhat fel az első megállón. Viszont ha a második megállón $y = 17-x > 12$ a felszálló utasok száma, és senki se száll le, akkor B fennáll. Beláttuk, hogy B nem vonja maga után A-t.

II. Megoldás:

A B esemény definíciójából következik, hogy B teljesülhet, ha az első és második megállón összesen 17 utas száll fel, mégpedig ebből legalább 12 a másodikon. Ez teljesíthető akkor is, ha az A esemény nem következik be, mégpedig a következő módokon: az első megállón felszáll 0, a másodikon 17; az elsőn 1, a másodikon 16; ..., az elsőn 4, a másodikon 13. Tehát B teljesülhet úgy is, hogy A nem teljesül, vagyis B nem vonja maga után A-t.

2. Egy aratóbrigád létszámának heti alakulását vizsgáljuk. A vizsgált időszakban naponta legfeljebb egy fővel gyarapodott a létszám, de egyszer sem csökkent. A következő eseményeket tekintjük:

A: az eredeti létszám legalább 15 fő volt;
C: 7 nap alatt a létszám elérte a 22 főt.

Határozzuk meg, mely összefüggések igazak az alábbiak közül:

a) $A \subset C$;

b) $C \subset A$;

c) $A = C$.

a) A nem vonja maga után C-t, hiszen pl. A úgy is teljesülhet, hogy az eredeti létszám 15 volt; ha a létszám ehhez képest nem gyarapodott a hét folyamán, akkor C már nem áll fenn.

b) $C \subset A$ fennáll, hiszen a létszámgyarapodás legfeljebb 7, így az eredeti létszámnak C teljesülése esetén legalább $22-7 = 15$ főnek kellett lennie.

c) Az egyenlőség akkor állna fenn, ha $A \subset C$ és $C \subset A$ együtt teljesülne, de *a)* szerint $A \subset C$ nem áll fenn, így $A \neq C$.

3. Egy osztály létszáma 40, valamely tantárgyból az évvégi átlaga 3,7. A következő eseményeket vegyük szemügyre: A: az osztályban van 5-ös tanuló; B: pontosan 5 tanuló bukott meg. Kérdés, hogy teljesül-e $B \subset A$?

Az osztály jegyeinek összege $40 \cdot 3{,}7 = 148$. A B esemény alapján ebből 5 pont jut a bukott 5 tanulóra, tehát 143 pont jut a többi 35 tanulóra. Most úgy gondolkozhatunk tovább, hogy feltételezzük az $\bar{A}$ esetet, vagyis azt, hogy nincs 5-ös tanuló. Ekkor a 35 tanuló által elérhető legmagasabb pontszám akkor adódik, ha minden diák négyes jegyet kapott, mégpedig így $4 \cdot 35 = 140$ pontot kapunk. Ez a szám nem éri el a 35 tanuló tényleges összpontszámát, tehát a feltevés, hogy $\bar{A}$ fennáll, megdőlt. Ekkor viszont A eseménynek kell teljesülnie. Beláttuk, hogy $B \subset A$, vagyis B maga után vonja A-t.

4. Egy gyár gépeket szállít külföldre. Háromféle gyártmányból kell exporttervét teljesítenie. A gyártmányok darabára: I: 1000 Ft, II: 1500 Ft, III: 2500 Ft. A külföldi cég I-ből és II-ből legfeljebb 1000—1000 darabot vesz át.

A következő eseményeket vegyük figyelembe:

A: az 5 millió forintos exportterv teljesítése;
B: a III. gyártmányból legalább 1000 darab exportálása.

Határozzuk meg, fennáll-e $A \subset B$, vagyis A maga után vonja-e B-t!

Először kiszámítjuk az I és II gyártmányokból elérhető exportösszeget. Az 1000 darabos felső határ miatt I-ből $1000 \cdot 1000 = 1$ millió forint,

II-ből $1000 \cdot 1500 = 1{,}5$ millió forint bevétel adódhat, így ezekből összesen 2,5 millió forinthoz juthat a vállalat. Az A teljesüléséhez még szükséges összeg 2,5 millió forint, ami a III gyártmányból éppen 1000 darab kiszállításával szerezhető be, de ekkor B már teljesül. Tehát A maga után vonja B-t, vagyis $A \subset B$.

2. Műveletek eseményekkel

Összeadás: Adott A és B események $A+B$ összegén azt az eseményt értjük, mely pontosan akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik.

Hasonlóan értelmezzük kettőnél több esemény összegét; így $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ bekövetkezik, ha legalább az egyik összeadandó esemény teljesül.

Az összeadás értelmezéséből következik, hogy teljesül rá a *kommutatív* és az *asszociatív* törvény, azaz

$$A+B = B+A \text{ és } A+(B+C) = (A+B)+C.$$

Szorzás: Az A és B esemény AB szorzatán azt az eseményt értjük, mely pontosan akkor következik be, ha mind A, mind B teljesül.

Kettőnél több tényező esetén hasonló a szorzat értelmezése; vagyis $A_1 A_2 \cdots A_n$ pontosan akkor következik be, ha az összes tényező esemény bekövetkezik.

A szorzás értelmezéséből adódik, hogy teljesül rá a *kommutatív* és az *asszociatív* törvény, tehát

$$AB = BA \text{ és } A(BC) = (AB)C.$$

Ha az A és B események szorzata az O lehetetlen esemény, azaz

$$AB = O,$$

akkor azt mondjuk, hogy A és B *kizárják egymást.*

Tetszőleges A eseményre fennállnak a következő összefüggések:

$$A+A = A; \qquad AO = O;$$
$$AA = A; \qquad A+I = I;$$
$$A+O = A; \qquad AI = A.$$

Bármely A eseményre és ennek $\bar{A}$ ellentettjére a következők állnak fenn:

$$A+\bar{A} = I; \qquad A\bar{A} = O.$$

Tetszőleges A, B, C eseményekre teljesül a következő két *disztributív* törvény:

$$A(B+C) = AB+AC \text{ és } A+(BC) = (A+B)(A+C).$$

Az A és B esemény összegének ellentétjére és szorzatának ellentettjére fennállnak a következő, *de Morgan-féle képletek:*

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B} \quad \text{és} \quad \overline{AB} = \bar{A}+\bar{B}.$$

Hasonlóan kettőnél több összeadandó vagy kettőnél több tényező esetén

$$\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n} = \bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n$$

és

$$\overline{A_1A_2\ldots A_n} = \bar{A}_1+\bar{A}_2+\ldots+\bar{A}_n.$$

Kivonás: Az A és B esemény $A-B$ különbségét úgy értelmezzük, hogy pontosan akkor következik be, ha A teljesül, de B nem; vagyis

$$A-B = A\bar{B}.$$

Azt mondjuk, hogy a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események *teljes eseményrendszert* alkotnak, ha

1. $B_1+B_2+\ \ldots\ +B_n = I$;

2. $B_iB_j = O$, ha $i \neq j$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, n)$;

vagyis ha összegük a biztos eseményt adja és közülük bármely két különböző esemény kizárja egymást. Egy kísérlethez tartozó összes elemi események (ha véges számúak) ilyen teljes eseményrendszert alkotnak.

Összetett eseménynek nevezzük azokat az eseményeket, melyek legalább két, tőlük különböző esemény összegeként állíthatók elő. Az elemi esemény nem állítható így elő — minden más esemény összetett esemény. Minden összetett esemény egyértelműen bontható fel elemi események összegére.

Eseményekre vonatkozó egyszerűbb kifejezések értelmezése vagy átalakítása sok esetben elvégezhető a műveletek definíciója alapján, logikai meggondolásokkal. Bonyolultabb feladatok kapcsán azonban már nem kerülhető el a műveleti szabályok és az alapvető összefüggések formális alkalmazása. Ezért célszerű az utóbbit begyakorolni akár olyan egyszerűbb feladatokon is, melyek logikai úton szintén megoldhatók. A Gyakorló feladatok megoldásaiban majd mindkét utat alkalmazzuk.

Gyakorló feladatok

1. Az egész számok közül választunk egy számot. Az A esemény jelentse azt, hogy a kiválasztott szám 5-tel osztható, B pedig azt, hogy a szám zérussal végződik. Vizsgáljuk meg, mit jelent az *a)* $A+B$; *b)* AB; és *c)* $A-B$ esemény!

a) Az $A+B$ esemény azt jelenti, hogy a szám 5-tel osztható, vagy zérussal végződik; de mivel $B \subset A$ (ha egy szám zérussal végződik, akkor osztható öttel), így $A+B = A$.

b) Az AB esemény akkor teljesül, ha a szám 5-tel osztható és zérussal végződik. Láttuk, hogy $B \subset A$; ennek következtében $AB = B$ fennáll.

c) Az $A-B$ esemény akkor teljesül, ha a szám 5-tel osztható, de nem végződik zérussal, vagyis ha 5-tel végződik.

2. Egy építőanyagraktárból vasúton is, teherautón is szállíthatnak árut. Legyen A az az esemény, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, B pedig jelentse azt, hogy teherautón van szállítás. Vizsgáljuk meg, mit jelentenek ekkor a következő események:

a)	$A+B$;	*h)*	$\overline{AB}$;
b)	AB;	*i)*	$\bar{A}\bar{B}$;
c)	$B-A$;	*j)*	$A\bar{B}+\bar{A}B$;
d)	$\bar{A}$;	*k)*	$AB+\bar{A}\bar{B}$;
e)	$\bar{A}+B$;	*l)*	$\bar{A}+\bar{B}$;
f)	$A\bar{B}$;	*m)*	$A+\bar{A}B$.
g)	$\overline{A+B}$;		

a) Legalább az egyik szállítóeszközön fuvaroznak.

b) Vasúton is, teherautón is szállítanak árut.

c) Teherautón szállítanak árut, de vasúton nem.

d) Vasúton nem fuvaroznak árut (teherautón lehet, hogy igen, de az is lehet, hogy nem).

e) A „vasúton nem fuvaroznak" és a „teherautón fuvaroznak" események közül legalább az egyik teljesül. Tehát ha teherautón fuvaroznak, akkor lehet, hogy fuvaroznak vasúton, de az is lehet, hogy nem; ha viszont teherautón nem fuvaroznak, akkor biztosan nem fuvaroznak vasúton sem.

f) Vasúton szállítanak, de teherautón nem.

g) Nem áll fenn, hogy legalább az egyiken szállítanak, tehát nincs szállítás.

h) Nem teljesül, hogy mindkét eszközön szállítanak, tehát vagy csak az egyiken vagy egyiken sem.

i) Egyik eszközön sem szállítanak (tehát ugyanaz, mint *g)*, ami a de Morgan-féle képletből is következik).

j) Vagy csak vasúton vagy csak teherautón fuvaroznak.

k) Vagy mindkét szállítóeszközön fuvaroznak, vagy egyiken sem.

l) Legalább az egyiken nem fuvaroznak árut, tehát vagy csak az egyiken fuvaroznak vagy egyiken sem (ami ugyanaz, mint *h)*).

m) Legalább az egyiken végeznek szállítást.

3. Egy sakkjátszma eredményeit mint T eseményteret tekintjük. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy világos nyer és B-vel azt, hogy sötét győz. T-nek milyen elemi eseményét kell még bevezetnünk, hogy teljes eseményrendszert nyerjünk?

A teljes eseményrendszer eseményei összegének az I biztos eseményt kell adnia. $A+B$ azonban nem adja azt, hiszen ez valamelyik fél győzelmét jelenti, de az eredmény döntetlen is lehet. Ezért bevezetjük a C eseményt, amely akkor teljesül, amikor a játszma döntetlen. Most már $A+B+C=I$ teljesül, fennáll továbbá az is, hogy az egyes események páronként kizárják egymást; így megalkottuk a teljes eseményrendszert.

4. Két számot húzunk egymás után az első ezer pozitív egész szám közül. Legyen A az az esemény, hogy az első páros, B pedig az, hogy a második szám páros. Jelöljük C-vel azt az eseményt, hogy a két szám szorzata páros, D-vel pedig azt, hogy páratlan. Írjuk fel C-t és D-t az A és B eseményekkel!

Két szám szorzata akkor páros, ha legalább egyikük páros, így $C=A+B$.

Két szám szorzata akkor páratlan, ha mindkét szám páratlan, vagyis $D=\bar{A}\bar{B}$. Ekkor az előbbinek ellentéte teljesül, így $D=\bar{C}=\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$, ami a de Morgan-féle képletből is következik.

5. Két helység között három távbeszélővonalon folyhat beszélgetés. Jelentse A azt, hogy az első vonal hibás, B azt, hogy a második, C pedig azt, hogy a harmadik. Fejezzük ki A, B, C segítségével a következő eseményeket:

a) csak az első vonal hibás;
b) az első kettő hibás, a harmadik nem;
c) legalább az egyik hibás;
d) mindhárom vonal hibás;
e) legalább két vonal hibás;
f) pontosan egy vonal hibás;
g) pontosan két vonal hibás;

h) egyik vonal sem hibás;
i) legfeljebb egy vonal hibás;
j) legfeljebb két vonal hibás;
k) a második nem hibás, de az első és a harmadik közül az egyik legalább hibás.

a) $A\bar{B}\bar{C}$; *g)* $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$;

b) $AB\bar{C}$; *h)* $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

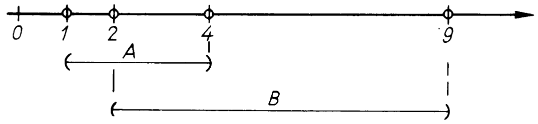
c) $A+B+C$; *i)* $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$;

d) ABC; *j)* $\overline{ABC}=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$;

e) $AB+AC+BC$; *k)* $\bar{B}(A+C)$.

f) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

6. A számegyenesen választunk egy x pontot. Jelentse A azt az eseményt, hogy $1<x<4$; B pedig azt, hogy $2<x<9$ (3. ábra). Vizsgáljuk meg, mely



3. ábra

intervallumban választhatjuk meg az x helyet, hogy a következő események teljesüljenek:

a) $A+B$; *e)* $\bar{A}\bar{B}$;

b) AB; *f)* $\bar{A}+B$;

c) $A-B$; *g)* $\bar{A}+\bar{B}$.

d) $(A-B)+(B-A)$;

Az intervallumokat a következő egyenlőtlenségek határozzák meg:

a) $1<x<9$;

b) $2<x<4$;

c) $1<x\leq 2$;

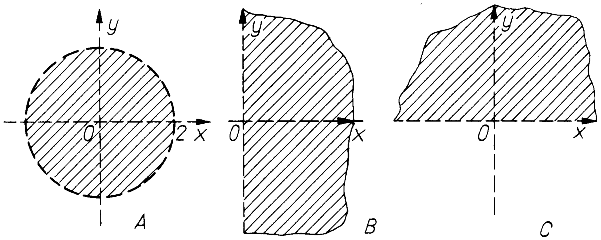
d) $1<x\leq 2$ vagy $4\leq x<9$;

e) $-\infty<x\leq 1$ vagy $9\leq x<\infty$;

f) $-\infty<x\leq 1$ vagy $2<x<\infty$;

g) $-\infty<x\leq 2$ vagy $4\leq x<\infty$.

7. A síkban választunk egy $P(x, y)$ pontot. Jelentse az A esemény azt, hogy a pont koordinátáira teljesül $x^2+y^2<4$, a B esemény azt, hogy a kiválasztott pontban $x>0$, a C esemény pedig azt, hogy a kiszemelt



4. ábra

pontban $y>0$ (4. ábra). Vizsgáljuk meg és szemléltessük a következő eseményeket:

a)	$\bar{A}$;	*h)*	$A+B$;
b)	AB;	*i)*	$A+B+C$;
c)	BC;	*j)*	$\bar{A}+(\bar{B}-\bar{C})$;
d)	$\bar{A}B$;	*k)*	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$;
e)	$\bar{A}\bar{C}$;	*l)*	$A-(B\bar{C}+\bar{B}C)$;
f)	ABC;	*m)*	$A(\bar{B}C+BC+B\bar{C})+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.
g)	$\bar{A}BC$;		

Az események a következő egyenlőtlenségek teljesülését jelentik:

a) $x^2+y^2 \geqq 4$;

b) $x^2+y^2<4$ és $x>0$;

c) $x>0$ és $y>0$;

d) $x^2+y^2 \geqq 4$ és $x>0$;

e) $x^2+y^2 \geqq 4$ és $y \leqq 0$;

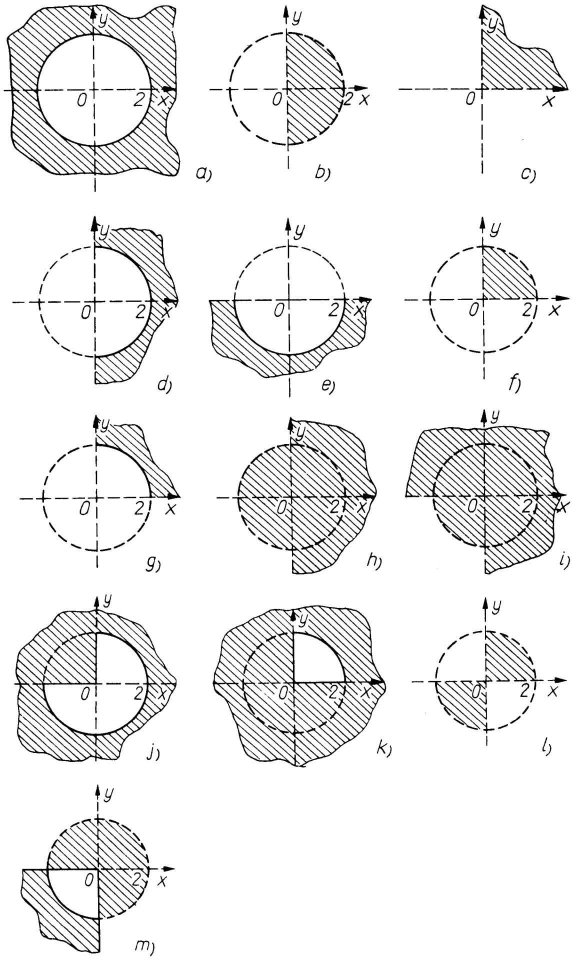
f) $x^2+y^2<4$ és $x>0$ és $y>0$;

g) $x^2+y^2 \geqq 4$ és $x>0$ és $y>0$;

h) $x^2+y^2<4$ vagy $x>0$;

i) $x^2+y^2<4$ vagy $x>0$ vagy $y>0$;

j) $\bar{A}+(\bar{B}-\bar{C})=\bar{A}+\bar{B}C$,



5. ábra

így

$$x^2+y^2 \geqq 4 \quad \text{vagy} \quad (x \leqq 0 \quad \text{és} \quad y>0);$$

k) $x^2+y^2 \geqq 4$ vagy $x \leqq 0$ vagy $y \leqq 0$;

l) $A-(B\bar{C}+\bar{B}C) = A\overline{(B\bar{C}+\bar{B}C)} = A\overline{(B\bar{C})}\,\overline{(\bar{B}C)} =$

$= A(\bar{B}+C)(B+\bar{C}) = A(\bar{B}B+CB+\bar{B}\bar{C}+C\bar{C}) =$

$= A(BC+\bar{B}\bar{C}) = ABC+A\bar{B}\bar{C},$

így

$x^2+y^2 < 4$ és $x>0$ és $y>0$;

vagy

$x^2+y^2 < 4$ és $x\leqq 0$ és $y\leqq 0$.

m) $A(\bar{B}C+BC+B\bar{C})+\bar{A}\bar{B}\bar{C} = A[(\bar{B}+B)C+B\bar{C}]+\bar{A}\bar{B}\bar{C} =$

$= A(IC+B\bar{C})+\bar{A}\bar{B}\bar{C} = A(C+B\bar{C})+\bar{A}\bar{B}\bar{C} =$

$= A(C+B)(C+\bar{C})+\bar{A}\bar{B}\bar{C} =$

$= A(C+B)I+\bar{A}\bar{B}\bar{C} = A(B+C)+\bar{A}\bar{B}\bar{C} = AB+AC+\bar{A}\bar{B}\bar{C},$

így

$x^2+y^2 < 4$ és $x>0$

vagy

$x^2+y^2 < 4$ és $y>0$

vagy

$x^2+y^2 \geqq 4$ és $x\leqq 0$ és $y\leqq 0$.

Az eseményeket síktartományokkal szemléltetjük (5. ábra). A vonalkázott tartományokban vagy ezek folyamatosan kihúzott határvonalain választható a $P(x, y)$ pont.

8. Lássuk be, hogy tetszőleges A és B eseményekre fennáll

$$A = A+AB.$$

I. Megoldás:

Ha a bal oldali esemény bekövetkezett, akkor a jobb oldali is bekövetkezett, hiszen első tagja teljesült (a második tagról nem tudjuk, hogy bekövetkezett-e, de ez nem is érdekes). Ha a bal oldali esemény nem következett be, akkor a jobb oldali sem következett be, hiszen egyik tagja sem teljesült. Tehát a két esemény valóban azonos.

II. Megoldás:

A jobb oldalból indulunk ki és formálisan átalakítjuk:

$$A+AB = AI+AB = A(I+B) = AI = A.$$

9. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B eseményekre igaz

$$A = AB+A\bar{B}$$

és hogy a jobb oldalon álló tagok egymást kizárják.

I. Megoldás:

Ha a bal oldal bekövetkezik, akkor a jobb oldal is teljesül, hiszen bármely B eseményre vagy B vagy $\bar{B}$ igaz, tehát ha A teljesül, akkor vagy AB vagy $A\bar{B}$ teljesül. Egyszerre AB és $A\bar{B}$ nem teljesülhet, hiszen B és $\bar{B}$ nem lehet egyszerre igaz! Ha viszont a bal oldal nem következik be, akkor a jobb oldal egyik tagja sem teljesülhet, hiszen mindkettőben tényezőként szerepel A. Tehát az összefüggés valóban igaz!

II. Megoldás:

A jobb oldallal a következő formális átalakítások végezhetők el:

$$AB+A\bar{B} = A(B+\bar{B}) = AI = A,$$

tehát az egyenlőség valóban fennáll. Most tekintsük az AB és $A\bar{B}$ események szorzatát:

$$(AB)(A\bar{B}) = A(BA)\bar{B} = A(AB)\bar{B} = (AA)(B\bar{B}) = AO = O.$$

Tehát a jobb oldalon valóban egymást kizáró események állnak. Az utóbbi átalakítások során felhasználtuk a szorzás kommutatív és asszociatív tulajdonságát.

10. Igazoljuk, hogy tetszőleges két esemény összege két egymást kizáró esemény összegére bontható.

Legyen a két esemény A és B. Ekkor összegük a következőképpen alakítható át:

$$A+B = I(A+B) = (A+\bar{A})(A+B) = A+\bar{A}B.$$

Itt felhasználtuk többek között a második disztributív törvényt. Másrészt — a szorzás asszociatív tulajdonságát alkalmazva —

$$A(\bar{A}B) = (A\bar{A})B = OB = O.$$

Tehát az $A+B$ esemény valóban felbontható két, egymást kizáró esemény összegére.

11. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B események összegét három, egymást páronként kizáró esemény összegére bonthatjuk!

Végezzük el az $A+B$ összegen a következő átalakításokat (az első lépést az előző feladat megoldása során már igazoltuk):

$$A+B = A+\bar{A}B = IA+\bar{A}B = (B+\bar{B})A+\bar{A}B = AB+A\bar{B}+\bar{A}B.$$

(Az átalakítás közben a második disztributív törvényt is alkalmaztuk.) Ezután megmutatjuk, hogy az összeadandók páronként kizárják egymást:

$$(AB)(\bar{A}B) = A\bar{A}BB = OB = O;$$

$$(AB)(A\bar{B}) = AAB\bar{B} = AO = O;$$

$$(\bar{A}B)(A\bar{B}) = A\bar{A}B\bar{B} = OO = O.$$

(A szorzás kommutativitását és asszociatív tulajdonságát használtuk fel.)

Tehát két esemény összege valóban mindig felbontható három, egymást páronként kizáró esemény összegére.

12. Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat áll fenn az A és B események között, ha teljesül az $AB=A$ egyenlőség!

Két esemény egyenlőségéből következik, hogy bármelyik maga után vonja a másikat. Így teljesül:

$$AB \subset A \quad \text{és} \quad A \subset AB.$$

Az $AB \subset A$ reláció bármely A és B eseményekre fennáll; az $A \subset AB$ reláció — a mindig fennálló $AB \subset B$ reláció következtében — az $A \subset B$ kapcsolatra vezet, így a fenti egyenlőség csakis akkor állhat fenn, ha az A maga után vonja a B eseményt.

13. Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolatban áll az A és B esemény, ha teljesül az $A+B = A$ egyenlőség!

Az egyenlőség azt jelenti, hogy bármelyik oldalon álló esemény maga után vonja a másikat. Így:

$$A \subset A+B \quad \text{és} \quad A+B \subset A.$$

Az $A \subset A+B$ minden A és B eseményre fennáll; az $A+B \subset A$ a $B \subset A+B$ kapcsolat következtében a $B \subset A$ összefüggésre vezet. Tehát a fenti egyenlőség csakis akkor állhat fenn, ha B maga után vonja az A eseményt.

14. Állapítsuk meg, milyen esetben állhat fenn az $A+B = \bar{A}$ egyenlőség!

Szorozzuk meg az egyenlőséget A-val:

$$A(A+B) = A\bar{A}.$$

A bal oldalon $A(A+B) = A+AB = A(I+B) = AI = A$, a jobb oldalon $A\bar{A}=O$, tehát az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $A=O$. Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$O+B = \bar{O},$$

azaz $B=I$.

Tehát $A=O$ és $B=I$ esetén állhat fenn az egyenlőség. Ekkor valóban fennáll, hiszen $O+I = I = \bar{O}$.

15. Határozzuk meg, hogy A és B milyen megválasztásával teljesülhet az $AB=\bar{A}$ egyenlőség!

A két esemény egyenlőségéből következik, hogy

$$\bar{A} \subset AB; \quad AB \subset \bar{A}.$$

Mivel $AB \subset A$ általánosságban teljesül, ebből a két kapcsolatból következik (a tranzitivitás következtében)

$$\bar{A} \subset A.$$

Ebből következik, hogy $\bar{A} = A\bar{A} = O$, tehát $\bar{A}=O$, így $A=I$. Ezeket visszahelyettesítve:

$$IB=O;$$

$$B=O.$$

Tehát $A=I$ és $B=O$ megválasztással teljesülhet az egyenlőség.

16. Vizsgáljuk meg, milyen A és B kapcsolata, ha $A+B = AB$ teljesül!

A két esemény akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$AB \subset A+B \quad \text{és} \quad A+B \subset AB.$$

Az első összefüggés bármilyen A és B mellett fennáll. A második összefüggéshez még két további általános érvényű kapcsolatot használunk fel. Ezek

$$A \subset A+B \quad \text{és} \quad B \subset A+B.$$

Így adódik a tranzitivitás következtében a második összefüggésből:

$$A \subset AB \quad \text{és} \quad B \subset AB.$$

Viszont ezek a relációk fordítva mindig teljesülnek:

$$AB \subset A \quad \text{és} \quad AB \subset B.$$

Tehát

$$AB=A \quad \text{és} \quad AB=B$$

áll fenn. Ezekből azt kapjuk, hogy

$$A=B.$$

Tehát $A=B$ esetén állhat csak fenn a fenti egyenlőség. Ekkor $A+B$ is, AB is egyenlő A-val, tehát egymással is egyenlők.

17. Állapítsuk meg, milyen kapcsolat áll fenn az A és B események között, ha $A+B\bar{A} = B$ igaz!

Az egyenlőség bal oldala a második disztributív törvény alapján átírható:

$$A+(B\bar{A}) = (A+B)(A+\bar{A}) = (A+B)I = A+B.$$

Tehát $A+B\bar{A} = B$ ekvivalens a következő egyenlőséggel:

$$A+B = B.$$

Viszont a 13. példában láttuk, hogy ebből

$$A \subset B$$

adódik. Így arra jutottunk, hogy A maga után vonja B-t. Ekkor az $A+B$ esemény valóban egyenlő B-vel, tehát — $A+B = A+B\bar{A}$ miatt — az eredeti egyenlőség is fennáll.

18. Vizsgáljuk meg, milyen esetben teljesül az $(A+B)-B = A$ egyenlőség!

Az események különbségének értelmezése szerint a bal oldal:

$$(A+B)-B = (A+B)\bar{B} = A\bar{B}+B\bar{B} = A\bar{B}+O = A\bar{B}.$$

Így adódik

$$A\bar{B}=A.$$

Ebből következik

$$A\bar{B}\subset A \quad \text{és} \quad A\subset A\bar{B}.$$

A második kapcsolatból és az

$$A\bar{B}\subset\bar{B}$$

összefüggés alapján

$$A\subset\bar{B}$$

nyerhető. Tehát A maga után vonja $\bar{B}$ teljesülését, így A bekövetkezése esetén B nem teljesülhet, vagyis A és B kizárják egymást.

19. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B esetén fennáll az $(A-AB)+ +B = A+B$ egyenlőség!

A bal oldalon álló eseményből indulunk ki:

$$(A-AB)+B = A(\overline{AB})+B = A(\bar{A}+\bar{B})+B = A\bar{A}+A\bar{B}+B =$$

$$= O+A\bar{B}+B = A\bar{B}+B = (A+B)(\bar{B}+B) = (A+B)I = A+B.$$

A jobb oldalon álló eseményt kaptuk, így igazoltuk a fenti azonosságot.

20. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B esetén fennáll az $(A+B)-AB = A\bar{B}+\bar{A}B$ egyenlőség!

A bal oldali eseményből indulunk ki, és azonos átalakításokat hajtunk végre:

$$(A+B)-AB = (A+B)\overline{AB} = (A+B)(\bar{A}+\bar{B}) =$$

$$= A(\bar{A}+\bar{B})+B(\bar{A}+\bar{B}) = A\bar{A}+A\bar{B}+B\bar{A}+B\bar{B} =$$

$$= O+A\bar{B}+\bar{A}B+O = A\bar{B}+\bar{A}B.$$

Valóban a jobb oldalon levő eseményre jutottunk, így a fenti azonosságot bebizonyítottuk.

21. Hozzuk egyszerűbb alakra az $(A+B)(\bar{A}+B)(A+\bar{B})$ kifejezést!

Az egyszerűsítés során felhasználjuk a disztributív törvényeket:

$$(A+B)(\bar{A}+B)(A+\bar{B}) = (A\bar{A}+B)(A+\bar{B}) = (O+B)(A+\bar{B}) =$$

$$= B(A+\bar{B}) = BA+B\bar{B} = AB+O = AB.$$

Tehát AB a kifejezés egyszerűbb alakja.

22. Lássuk be, hogy tetszőleges A, B és C eseményekre fennáll az $(A+B)(\bar{A}+C) = AC+\bar{A}B$ összefüggés!

A bal oldalon álló eseményből indulunk ki:

$$(A+B)(\bar{A}+C) = (A+B)\bar{A}+(A+B)C =$$

$$= A\bar{A}+B\bar{A}+AC+BC = O+\bar{A}B+AC+BC.$$

A BC eseménytől eltekintve ugyanazt kapjuk, mint a jobb oldalon. Megmutatjuk, hogy BC beolvasztható az előző két esemény összegébe:

$$BC = IBC = (A+\bar{A})BC = ABC+\bar{A}BC.$$

De $\bar{A}BC\subset\bar{A}B$ és $ABC\subset AC$, ezért

$$\bar{A}B+AC+BC = (\bar{A}B+\bar{A}BC)+(AC+ABC) = \bar{A}B+AC.$$

Tehát valóban fennáll az összefüggés.

23. Vizsgáljuk meg, hogy tetszőleges A, B és C események eleget tesznek-e a következő összefüggésnek: $A+B+C = A+(B-AB)+(C-AC)$!

A jobb oldal első két tagja:

$$A+(B-AB) = A+B(\overline{AB}) = A+B(\bar{A}+\bar{B}) =$$

$$= A+\bar{A}B+B\bar{B} = (A+\bar{A})(A+B)+O = I(A+B) = A+B.$$

Hasonló módon kapjuk, hogy

$$A+(C-AC) = A+C.$$

E két azonosság összege a kérdésben szereplő azonosságot adja.

Tehát az azonosság tetszőleges A, B és C eseményekre igaz.

24. Állapítsuk meg, hogy tetszőleges A, B és C eseményre fennáll-e a következő egyenlőség:

$$\overline{(A+B)}C = C-C(A+B)!$$

A jobb oldalon álló eseményből indulunk ki, mivel ennek átalakítása látszik könnyebbnek:

$$C-C(A+B) = C[\overline{C(A+B)}] = C[\bar{C}+\overline{(A+B)}] = C\bar{C}+C\overline{(A+B)} =$$

$$= O+\overline{(A+B)}C = \overline{(A+B)}C.$$

A bal oldali eseményt kaptuk meg, tehát az egyenlőség azonosság.

25. Lássuk be, hogy tetszőleges A, B, C és D eseményekre fennáll a következő egyenlőség:

$$(A-B)(C-D) = AC-(B+D)!$$

A bal oldali eseményt átalakíthatjuk az alábbi módon:

$$(A-B)(C-D) = (A\bar{B})(C\bar{D}) = A\bar{B}C\bar{D}.$$

A jobb oldalt is alakíthatjuk eképpen:

$$AC-(B+D) = AC(\overline{B+D}) = AC(\bar{B}\bar{D}) = A\bar{B}C\bar{D}.$$

Mindkét oldalt ugyanarra az eseményre vezettük vissza, így igazoltuk, hogy azonosságról van szó.

26. Igazoljuk, hogy bárhogyan választva az A, B, C és D eseményeket, fennáll köztük a következő kapcsolat:

$$(A-B)-(C-D) = [A-(B+C)]+(AD-B).$$

Mindkét oldalt átalakítjuk. Először a bal oldali eseményt írjuk át:

$$(A-B)-(C-D) = A\bar{B}-C\bar{D} = A\bar{B}(\overline{C\bar{D}}) = A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}D.$$

Ezután a jobb oldalon állót alakítjuk át:

$$[A-(B+C)]+(AD-B) = A(\overline{B+C})+AD\bar{B} = A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}D.$$

Mivel mindkét átalakítás ugyanazon eseményre vezetett, kimutattuk, hogy a négy esemény közti kapcsolat valóban azonosság.

27. Egy céltáblán 10 koncentrikus kör van. A körök sugarait r_k-val jelöljük ($k=1, 2, \ldots, 10$), mégpedig úgy, hogy $r_1>r_2>\ldots>r_{10}$. Az A_k esemény akkor teljesül, ha valamelyik találat az r_k sugarú kör belsejébe esik. Mit jelentenek az alábbi események:

$$a)\ B_1 = \sum_{k=6}^{10} A_k;\quad b)\ B_2 = \prod_{k=1}^{5} A_k;\quad c)\ B_3 = A_7-A_8;$$

$$d)\ B_4 = (A_7-A_{10})-(A_8-A_9);\quad e)\ B_5 = A_{10}+\sum_{k=1}^{4}(A_{2k}-A_{2k+1}).$$

a) $B_1 = \sum_{k=6}^{10} A_k = A_6+A_7+A_8+A_9+A_{10} = A_6$, mert $A_i \subset A_j$, ha $i>j$. Vagyis B_1 azt jelenti, hogy a találat az r_6 sugarú kör belsejébe esik.

b) $B_2 = \prod_{k=1}^{5} A_k = A_1A_2A_3A_4A_5 = A_5$, mert $A_i \subset A_j$, ha $i>j$. Tehát B_2 esetében a találat az r_5 sugarú kör belsejébe jut.

c) $B_3 = A_7-A_8 = A_7\bar{A}_8$. A találat az r_7 sugarú körön belül, de az r_8 sugarú körön kívül van.

$$d)\ B_4 = (A_7-A_{10})-(A_8-A_9) = (A_7\bar{A}_{10})-(A_8\bar{A}_9) = (A_7\bar{A}_{10})(\overline{A_8\bar{A}_9}) =$$

$$=(A_7\bar{A}_{10})(\bar{A}_8+A_9) = A_7\bar{A}_8\bar{A}_{10}+A_7A_9\bar{A}_{10} = A_7\bar{A}_8+A_9\bar{A}_{10}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\bar{A}_8 \subset \bar{A}_{10}$ és $A_9 \subset A_7$, ezért $\bar{A}_8\bar{A}_{10} = \bar{A}_8$ és $A_7A_9 = A_9$.

Tehát a találat vagy az r_7 sugarú körön belül, de az r_8 sugarú körön kívül, vagy pedig az r_9 sugarú körön belül, de az r_{10} sugarú körön kívül esik.

$$e)\ B_5 = A_{10}+\sum_{k=1}^{4}(A_{2k}-A_{2k+1}) = A_{10}+\sum_{k=1}^{4}(A_{2k}\bar{A}_{2k+1}) =$$

$$= A_{10}+A_2\bar{A}_3+A_4\bar{A}_5+A_6\bar{A}_7+A_8\bar{A}_9.$$

Tehát a találat vagy a legbelső körbe, vagy onnan számítva minden második körgyűrű valamelyikébe esik.

28. Az A_p, B_s, C_t események rendre azt jelentik, hogy három különböző könyvsorozat kötetei közül az elsőből p, a másodikból s, a harmadikból t számú könyvet veszünk. Mit jelentenek a következő események:

a) $A_1+B_1+C_1$; *d)* A_2B_2;

b) $A_1B_1C_1$; *e)* $(A_1B_2+A_3B_1)C_1$.

c) A_1+B_3;

a) Az $A_1+B_1+C_1$ esemény azt jelenti, hogy a három könyvsorozatnak legalább az egyikéből választunk egy könyvet, vagyis hogy a 3 sorozatból legalább egy könyvet veszünk.

b) Az $A_1B_1C_1$ esemény kifejezi, hogy mindhárom könyvsorozat kötetei közül egyet-egyet választunk.

c) Az A_1+B_3 esemény akkor teljesül, ha vagy az első sorozat kötetei közül egyet vagy a második sorozat kötetei közül hármat választunk, vagy pedig ha mindkét választás megtörténik. A harmadik sorozatból való választás nem hat ki erre az eseményre!

d) Az A_2B_2 esemény jelentése, hogy az első és a második könyvsorozat kötetei közül két-két darabot veszünk ki. A harmadik sorozat nem hat ki az esemény teljesülésére!

e) Az $(A_1B_2+A_3B_1)C_1$ esemény mindkét tényezőjének egyidejűleg kell teljesülnie. Itt az első tényező akkor áll fenn, ha vagy az első sorozatból egy és a második sorozatból két vagy az első sorozatból három és a második sorozatból egy kötetet választunk. (Ez a két lehetőség egymást kizárja!) A második tényező pedig a harmadik sorozatból egy kötet kiválasztását jelenti.

29. Három készüléket ellenőrzünk. Az A esemény azt jelenti, hogy legalább egy készülék hibás. A B esemény jelentése, hogy mindhárom készülék kifogástalan. Vizsgáljuk meg, mit jelentenek a következő események:

a) $A+B$; *b)* AB.

a) Ha legalább az egyik készülék hibás, akkor az A, ha egyik sem hibás, akkor a B esemény következik be, ezért az összegük biztosan teljesül, így $A+B = I$.

b) Az AB akkor áll fenn, ha mind A, mind B teljesül. Itt azonban A és B kizárják egymást, így $AB = O$.

30. Egy kazánházi berendezés két kazánból és egy gépből áll. Az A esemény azt jelenti, hogy a gép jó, a B_k $(k=1, 2)$ esemény azt, hogy a k-adik kazán jó. A C esemény jelentése, hogy a berendezés működőképes, ami akkor teljesül, ha a gép és legalább az egyik kazán jó. Fejezzük ki a C és $\bar{C}$ eseményeket az A és B eseményekkel!

A C eseményt megkapjuk, ha az A eseményt — amely azt jelenti, hogy a gép jó — azzal az eseménnyel szorozzuk, hogy legalább az egyik kazán jó, ez B_1+B_2. Vagyis: $C=A(B_1+B_2)$. Ezután képezzük a $\bar{C}$ eseményt, vagyis azt, hogy a kazánházi berendezés nem működőképes: $\bar{C}=\overline{A(B_1+B_2)}=\bar{A}+\overline{(B_1+B_2)}=\bar{A}+\bar{B}_1\bar{B}_2$. Vagyis vagy rossz a gép, vagy egyik kazán sem jó (azt is megengedve, hogy sem a gép, sem a kazánok nem működnek!).

31. Egy hajónak egy kormányszerkezete, négy kazánja és két turbinája van. Az A esemény azt jelenti, hogy a kormányszerkezet jó, a B_j $(j=1, 2, 3, 4)$ esemény, hogy a j-edik kazán jó, a C_k $(k=1, 2)$ esemény pedig azt, hogy a k-adik turbina jó. A D esemény jelentése, hogy működőképes a hajó; ez akkor teljesül, ha jó a kormányszerkezet, továbbá legalább egy kazán és legalább egy turbina jó. Állítsuk elő a D és $\bar{D}$ eseményeket az A, B_j és C_k eseményekkel!

A hajó működőképes, ha három tényező egyidejűleg fennáll. Ezek a tényezők: a kormányszerkezet jó, vagyis A; legalább az egyik kazán jó, tehát $B_1+B_2+B_3+B_4$; legalább egy turbina jó, azaz C_1+C_2. Ily módon

$$D=A(B_1+B_2+B_3+B_4)(C_1+C_2).$$

A $\bar{D}$ eseményt, vagyis azt, hogy a hajó nem működőképes, a már felírt D esemény ellentett eseményeként kapjuk meg, amelyet a de Morgan-képletek alkalmazásával hozhatunk egyszerűbb alakra:

$$\bar{D}=\overline{A(B_1+B_2+B_3+B_4)(C_1+C_2)}=$$

$$=\bar{A}+\overline{(B_1+B_2+B_3+B_4)}+\overline{(C_1+C_2)}=\bar{A}+\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4+\bar{C}_1\bar{C}_2.$$

32. Egy készülék két részből áll. Az első rész két egységet, a második három egységet tartalmaz. Az A_j $(j=1, 2)$ esemény azt jelenti, hogy az első rész j-edik egysége jó, a B_k $(k=1, 2, 3)$ esemény pedig azt, hogy a második rész k-adik egysége jó. A készülék működőképes, ha az első résznek legalább egy egysége, a második résznek pedig legalább két egysége jó. Írjuk fel a C eseményt, amely azt jelenti, hogy a készülék jó, az A_j és B_k eseményekkel!

A készülék működéséhez két tényező egyidejű teljesülése szükséges. Az egyik, hogy az első résznek legalább egy egysége jó legyen, ezt az A_1+A_2 esemény jelenti. A másik az, hogy a második résznek legalább két egysége jó, ez az esemény $B_1B_2+B_1B_3+B_2B_3$. A készülék jó, ha teljesül ezek szorzata:

$$C=(A_1+A_2)(B_1B_2+B_1B_3+B_2B_3).$$

33. Fejezzük ki az ismeretlen X eseményt az ismert A és B eseményekkel a következő egyenlőségből:

$$\overline{(X+A)}+\overline{(X+\bar{A})}=B.$$

Alkalmazzuk a bal oldal mindkét tagjára az első de Morgan-képletet:

$$\bar{X}\bar{A}+\bar{X}A=B.$$

Alkalmazzuk az első disztributív törvényt:

$$\bar{X}(\bar{A}+A)=B,$$

ebből

$$\bar{X}I=B,\quad \bar{X}=B.$$

Mindkét oldal ellentétét véve:

$$X=\bar{B}.$$

34. Egy kockát ötször egymás után feldobunk. Jelöljük B_j-vel azt az eseményt, hogy a j-edik dobás 6-os. Fejezzük ki a B_j-kkel a következő eseményeket:

a) az ötödik dobáskor kapunk először 6-ost (A_1);
b) legalább egyszer 6-ost dobunk (A_2);
c) pontosan négyszer dobunk 6-ost (A_3);
d) az első és a negyedik dobás 6-os, a többi közül az egyik biztosan nem 6-os (A_4).

a) Együttesen fennállnak a következő események: az első négy dobás nem 6-os és az ötödik 6-os. Így a keresett esemény:

$$A_1=\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3\bar{B}_4B_5.$$

b) A B_j események összegét kell vennünk, ez kifejezi, hogy legalább egyik teljesül:

$$A_2=\sum_{j=1}^{5}B_j=B_1+B_2+B_3+B_4+B_5.$$

c) Az A_3 esemény öt — egymást kizáró — esemény összege, amelyeknek mindegyike azt jelenti, hogy az öt dobás valamelyike nem 6-os, a többi pedig 6-os:

$$A_3=\bar{B}_1B_2B_3B_4B_5+B_1\bar{B}_2B_3B_4B_5+B_1B_2\bar{B}_3B_4B_5+$$

$$+B_1B_2B_3\bar{B}_4B_5+B_1B_2B_3B_4\bar{B}_5.$$

d) Három esemény áll fenn együttesen. Az egyik: az első dobás 6-os, vagyis B_1. A másik: a negyedik dobás 6-os, ez B_4. A harmadik: egy összeg, amelynek tagjai azt jelentik, hogy a második, harmadik és ötödik dobás nem mind 6-os, tehát legalább egyik dobás a három közül nem 6-os, ez $\bar{B}_2+\bar{B}_3+\bar{B}_5$. A három esemény szorzatát kell vennünk:

$$A_4=B_1B_4(\bar{B}_2+\bar{B}_3+\bar{B}_5).$$

35. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$AB+C+\overline{A(B+C)}(CD+A).$$

A harmadik tag első tényezőjére a de Morgan-képleteket alkalmazzuk:

$$AB+C+\overline{A(B+C)}(CD+A) = AB+C+(\bar{A}+\overline{B+C})(CD+A) =$$

$$= AB+C+(\bar{A}+\bar{B}\bar{C})(CD+A) =$$

$$= AB+C+\bar{A}CD+\bar{B}\bar{C}CD+\bar{A}A+A\bar{B}\bar{C} = AB+C+\bar{A}CD+A\bar{B}\bar{C}.$$

Ezután a disztributív törvényeket alkalmazzuk, mégpedig az első és a negyedik, ill. a második és a harmadik tagra. Így kapjuk:

$$A(B+\bar{B}\bar{C})+CI+\bar{A}CD = A(B+\bar{B})(B+\bar{C})+C(I+\bar{A}D) =$$

$$= AI(B+\bar{C})+CI = A(B+\bar{C})+C = AB+A\bar{C}+C.$$

A második és harmadik tagra a második disztributív törvényt alkalmazzuk. Így:

$$AB+(A+C)(\bar{C}+C) = AB+(A+C)I = AB+AI+C =$$

$$= A(B+I)+C = AI+C = A+C.$$

Tehát az eredeti kifejezést átalakításokkal $A+C$ alakra egyszerűsíthetjük.

36. Igazoljuk, hogy az A, B és C események tetszőleges megválasztása mellett fennáll a következő egyenlőség: $\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}$!

Azt kell megmutatnunk, hogy a bal oldal harmadik tagja beolvasztható az első két tag összegébe:

$$\bar{A}\bar{C} = \bar{A}\bar{C}I = \bar{A}\bar{C}(B+\bar{B}) = \bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C},$$

ahol

$$\bar{A}B\bar{C} \subset B\bar{C}$$

és

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \subset \bar{A}\bar{B};$$

így valóban

$$\bar{A}B\bar{C}+B\bar{C} = B\bar{C}$$

és

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}.$$

37. Mutassuk meg, hogy három tetszőleges esemény összege mindig felírható a következő alakban:

$$A+B+C = A+(B-AB)+[C-C(A+B)],$$

és hogy a jobb oldalon álló három esemény páronként kizárja egymást!

Először az egyenlőségről mutatjuk ki, hogy azonosság. A jobb oldalon álló eseményből indulunk ki. Felhasználjuk a de Morgan-képleteket is.

$$A+(B-AB)+[C-C(A+B)] = A+B\overline{AB}+C\overline{C(A+B)} =$$

$$= A+B(\bar{A}+\bar{B})+C[(\bar{C}+(\overline{A+B})] = A+B\bar{A}+B\bar{B}+C\bar{C}+C\overline{A+B} =$$

$$= A+B\bar{A}+C\bar{A}\bar{B}.$$

A kétféle disztributív törvény többszöri alkalmazásával folytatjuk az átalakítást:

$$A+\bar{A}(B+C\bar{B}) = A+\bar{A}(B+C)(B+\bar{B}) = A+\bar{A}(B+C)I =$$

$$= A+\bar{A}(B+C) = (A+\bar{A})(A+B+C) = A+B+C.$$

Az eredeti összefüggés bal oldalán álló eseményre jutottunk, tehát bebizonyítottuk az azonosságot. Ezután a jobb oldali tagokról mutatjuk meg, hogy páronként kizárják egymást, vagyis szorzatuk a lehetetlen esemény:

$$A(B-AB) = A(B\overline{AB}) = AB(\bar{A}+\bar{B}) = AB\bar{A}+AB\bar{B} = O;$$

$$A[C-C(A+B)] = A[C\overline{C(A+B)}] = AC[\bar{C}+(\overline{A+B})] =$$

$$= AC(\bar{C}+\bar{A}\bar{B}) = AC\bar{C}+AC\bar{A}\bar{B} = O;$$

$$(B-AB)[C-C(A+B)] = B\overline{AB}[C\overline{C(A+B)}] =$$

$$= B(\bar{A}+\bar{B})[C(\bar{C}+(\overline{A+B}))] =$$

$$= (B\bar{A}+B\bar{B})[C(\bar{C}+\bar{A}\bar{B})] = B\bar{A}(C\bar{C}+C\bar{A}\bar{B}) = O.$$

Az egyenlőség jobb oldalán szereplő három eseményről tehát beláttuk, hogy valóban páronként kizárják egymást.

38. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B és C eseményekre az

(I) $A+B = BC$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

(II) $A \subset B \subset C$!

a) Bebizonyítjuk, hogy ha a (II) kapcsolatról feltesszük, hogy teljesül, akkor ebből (I) következik. Az egyenlőség akkor áll fenn, ha bármelyik oldalának bekövetkezése maga után vonja a másik oldal teljesülését. Ha a jobb oldal, azaz BC fennáll, akkor mind B, mind C teljesül és $B \subset A+B$ miatt a bal oldal is fennáll. Tegyük fel most, hogy a bal oldal, vagyis $A+B$ teljesül. Ekkor vagy A vagy B feltétlenül teljesül. Ha A bekövetkezik, akkor (II) következtében B, továbbá C is teljesül, így BC is fennáll. Ha B teljesül, akkor (II) alapján C is bekövetkezik, és ismét fennáll BC. Így a jobb oldal mindkét esetben bekövetkezik. Tehát (II)-ből következik (I).

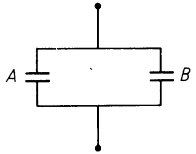
b) Be kell még bizonyítanunk, hogy az (I) egyenlőség fennállásából következik a (II) kapcsolat. Először tegyük fel, hogy az A esemény fennáll. Ekkor $A \subset A+B$ következtében és $A+B = BC$ teljesülése miatt $A \subset BC$ is fennáll; ebből viszont adódik az $A \subset B$ kapcsolat. Most tegyük fel, hogy B teljesül. Ekkor $B \subset A+B$ és $A+B = BC$ következtében $B \subset BC$ is fennáll. Ebből a $B \subset C$ összefüggést kapjuk. A két eset összekapcsolása már a (II) összefüggést adja: $A \subset B \subset C$.

Tehát tetszőleges A, B, C mellett az (I) és (II) állítások ugyanazt a kapcsolatot fejezik ki.

Az események algebráját közvetlenül alkalmazhatjuk kapcsolóáramkörök vizsgálatára. Az áramkörben szereplő elemek áramvezetés szempontjából kétféle állapotban lehetnek: átengedik az áramot (vezetnek), vagy nem. A kapcsolókat latin nagybetűkkel jelöljük.

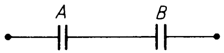
Ha egy kapcsolókból álló rendszer mindig átengedi az áramot (rövidzár), akkor I-vel, ha soha nem engedi át (szakadás), akkor O-val jelöljük állapotát. Ha egy kapcsolási rendszeren belül azonos betűkkel jelölt kapcsolók vannak, akkor ezek vagy mind átengedik az áramot, vagy mind megszakítják. Ha ellentétes elemek fordulnak elő, mint pl. A és $\bar{A}$, akkor ezek az elemek mindig ellentétes állapotban vannak. Két kapcsolási rendszert akkor mondunk ekvivalensnek (egyenértékűnek), ha az azonosan jelölt elemek megegyező állásai mellett egyszerre engedik át vagy szakítják meg az áramot.

Ha két elemet, A-t és B-t párhuzamosan kapcsolunk, akkor az együttes rendszer állapotát $A+B$ adja meg (6. ábra). Ha két



6. ábra

elemet, A-t és B-t sorosan kapcsolunk, akkor az együttes rendszert az AB állapot jellemzi (7. ábra).



7. ábra

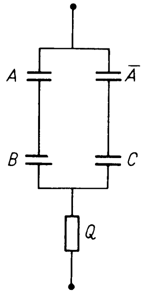
Ily módon kapcsolási elemekből soros és párhuzamos kapcsolásokkal felépített rendszerek leírhatók egy eseményalgebrai (itt kapcsolásalgebrainak nevezett) kifejezéssel. Ha egy kapcsolási rendszert leíró kifejezésen azonos átalakításokat hajtunk végre, akkor ily módon esetleg az előző rendszerrel egyenértékű, de egyszerűbb felépítésű rendszert tudunk szerkeszteni. Sokszor további egyszerűsítési lehetőség adódik, ha a kapott kifejezés ellentétes alakját alakítjuk tovább.

39. Ábrázoljuk az

$$AB+\bar{A}C$$

állapotnak megfelelő áramkört!

Az A és B elemeket, valamint az $\bar{A}$ és C elemeket sorosan kapcsoljuk, majd a kapott két áramkört párhuzamosan kötjük (8. ábra).

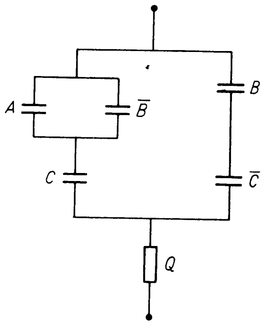


8. ábra

40. Írjuk fel a 9. ábrán feltüntetett kapcsolás vezetési állapotát!

Jelöljük V-vel a rendszer vezetési állapotát:

$$V = (A+\bar{B})C+B\bar{C}.$$



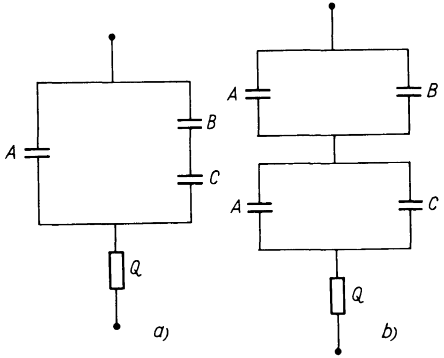
9. ábra

41. Rajzoljuk fel az

$$A+BC = (A+B)(A+C)$$

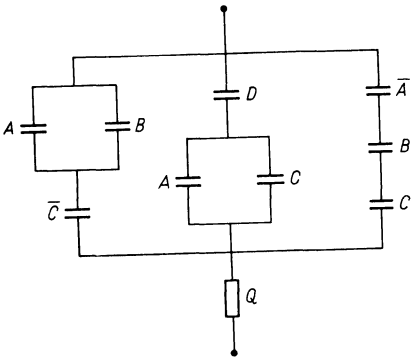
disztributív törvény mindkét oldalának megfelelő kapcsolást!

A 10*a* ábra az egyenlet bal oldalának felel meg, a 10*b* ábra a jobb oldalnak.



10. ábra

42. Határozzuk meg a 11. ábrán feltüntetett kapcsolás vezetési állapotával ellentétes vezetési állapotú rendszert! Vázoljuk az eredmény áramkörének kapcsolását!



11. ábra

A rendszer vezetési állapotát F-fel, az ellentétes vezetési állapotot $\bar{F}$-sal jelöljük. Először az ábra alapján felírjuk a vezetési állapotot:

$$F = (A+B)\bar{C}+D(A+C)+\bar{A}BC.$$

Ezután az ellentétes vezetési állapotot képezzük:

$$\bar{F} = \overline{(A+B)\bar{C}+D(A+C)+\bar{A}BC}.$$

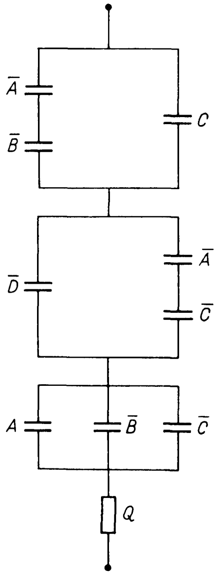
A jobb oldalt a de Morgan-képlet felhasználásával átalakítjuk:

$$\bar{F} = (\overline{(A+B)\bar{C}})\,(\overline{D(A+C)})\,(\overline{\bar{A}BC}) =$$

$$= ((\overline{A+B})+C)(\bar{D}+\overline{(A+C)})(A+\bar{B}+\bar{C}) =$$

$$= (\bar{A}\bar{B}+C)(\bar{D}+\bar{A}\bar{C})(A+\bar{B}+\bar{C}).$$

Ezután az $\bar{F}$ vezetési állapotnak megfelelő áramkört ábrázoljuk (12. ábra).



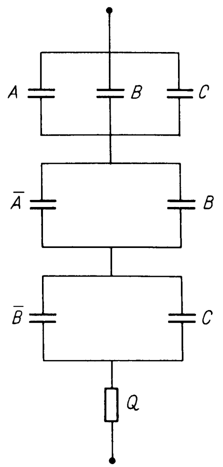
12. ábra

43. Írjuk fel a 13. ábrán adott kapcsolás vezetési állapotát! Egyszerűsítsük a kapott kifejezést és a legegyszerűbb alaknak megfelelő áramkört ábrázoljuk!

Jelöljük F-fel a rendszer vezetési állapotát és ezt írjuk fel az ábra alapján:

$$F = (A+B+C)(\bar{A}+B)(\bar{B}+C).$$

A jobb oldalon álló kifejezést egyszerűbb alakra hozzuk. Először a máso-



13. ábra

dik disztributív törvényt alkalmazzuk az első két tényezőre.

$$F = [B+(A+C)\bar{A}](\bar{B}+C) = (B+A\bar{A}+C\bar{A})(\bar{B}+C) =$$
$$= (B+C\bar{A})(\bar{B}+C).$$

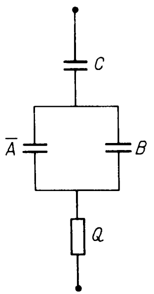
A szorzást elvégezzük.

$$F = B\bar{B}+C\bar{A}\bar{B}+BC+C\bar{A} = C\bar{A}\bar{B}+BC+C\bar{A}.$$

Az első tagot elhagyhatjuk, hiszen $C\bar{A}\bar{B} \subset C\bar{A}$, és ha $C\bar{A}$ bekövetkezik, akkor már F is bekövetkezett, függetlenül attól, hogy B vagy $\bar{B}$ áll-e fenn. Tehát

$$F = BC+\bar{A}C = C(\bar{A}+B).$$

Így az eredeti rendszer vezetési állapotával megegyező vezetési állapotú,

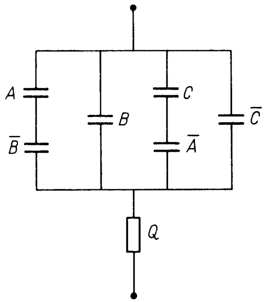


14. ábra

de annál jóval egyszerűbb áramköri megoldásra jutottunk és ennek kapcsolását vázoljuk (14. ábra). Eredményünket szemléletes módon ellenőrizhetjük: azt kaptuk, hogy a rendszer csak akkor vezeti az áramot, ha a C kapcsoló azt átengedi. Valóban: a 13. ábrán ha C nem engedi át az áramot, akkor a felső blokkon csak akkor jut át az áram, ha A vagy B átengedi. Ha A átengedi, akkor $\bar{A}$ nem, így a középső blokkon B-nek kell átengednie, de akkor $\bar{B}$ nem engedi át, így az alsó blokkon nem jut át az áram. Hasonló módon: ha A nem engedi át az áramot, akkor a felső blokkon B-nek kell átengednie, így az alsó blokkon ismét nem jut át az áram.

Ha viszont C átengedi az áramot, akkor a felső és az alsó blokkon átjut az áram, a középsőn viszont csak akkor jut át, ha vagy $\bar{A}$ vagy B átengedi, mint azt az $F = C(\bar{A}+B)$ eredmény is tükrözi.

44. Írjuk fel a 15. ábrán vázolt kapcsolás vezetési állapotát, és végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket!



15. ábra

Jelöljük F-fel a kapcsolás vezetési állapotát:

$$F = A\bar{B}+B+C\bar{A}+\bar{C}.$$

A disztributív törvényt alkalmazzuk az első és második, ill. a harmadik és negyedik tagra:

$$F = (A+B)(\bar{B}+B)+(C+\bar{C})(\bar{A}+\bar{C}) = (A+B)I+I(\bar{A}+\bar{C}) =$$
$$= A+B+\bar{A}+\bar{C} = I+B+\bar{C} = I.$$

Az egyszerűsítés után nyilvánvaló, hogy az áramkör mindig átengedi az áramot.

III. VALÓSZÍNŰSÉG

1. Események valószínűsége

Valamely kísérlettel kapcsolatos esemény bekövetkezéseinek számát a kísérlet n-szeri megismétlése során megszámoljuk. Jelöljük a vizsgált eseményt A-val és tegyük fel, hogy a kísérletsorozatban az A esemény k-szor következett be. Képezzük a $\frac{k}{n}$ hányadost, az A eseménynek a kísérletsorozatra jellemző *relatív gyakoriságát.* A tapasztalat azt mutatja, hogy ha egyre több kísérletből álló sorozatból határozzuk meg az A esemény relatív gyakoriságát, akkor a kapott relatív gyakoriságok egyre kisebb mértékben ingadoznak egy rögzített szám körül. Ezt a számot az A esemény valószínűségének nevezzük, és $\mathbf{P}(A)$-val jelöljük.

Az események valószínűségére a következők állnak fenn:

I. $0 \leqq \mathbf{P}(A) \leqq 1.$

II. $\mathbf{P}(O)=0, \quad \mathbf{P}(I)=1.$

III. Ha $AB=O$, akkor $\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$,

ill. általánosabban

IV. Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események páronként kizárják egymást, akkor

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+\dots+A_n+\dots)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\dots+\mathbf{P}(A_n)+\dots.$$

A fentiekből következnek az alábbi összefüggések:

a) Ha az A esemény maga után vonja a B eseményt, azaz $A \subset B$, akkor

$$\mathbf{P}(A) \leqq \mathbf{P}(B).$$

b) Legyen A és B egy kísérlet két eseménye, akkor

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB).$$

Megfelelő összefüggés több eseményre is érvényes. Például 3 esemény esetén a következő alakot ölti:

c) Ha A, B, C egy kísérlet három eseménye, akkor

$$\mathbf{P}(A+B+C)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-$$
$$-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)+\mathbf{P}(ABC).$$

d) Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszert alkotnak, akkor

$$\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\dots+\mathbf{P}(A_n)=1.$$

Ennek speciális eseteként

e) Ha valamely kísérlet egy eseménye A és ennek ellentettje $\bar{A}$, akkor

$$\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A})=1.$$

Gyakorló feladatok

1. Mutassuk ki, hogy $\mathbf{P}(A) \geqq 0{,}7$ és $\mathbf{P}(B) \geqq 0{,}9$ esetén $\mathbf{P}(AB) \geqq 0{,}6$!

Felhasználjuk a két esemény összegének valószínűségére vonatkozó összefüggést:

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB);$$

ebből átrendezéssel:

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A+B).$$

Feltevésünk alapján nem növeljük a jobb oldalt, ha $\mathbf{P}(A)$ és $\mathbf{P}(B)$ helyett rendre 0,7-et, ill. 0,9-et írunk, és ha $-\mathbf{P}(A+B)$ helyett annak legkisebb lehetséges értékét, (-1)-et vesszük; így

$$\mathbf{P}(AB) \geqq 0{,}7+0{,}9-1=0{,}6.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbf{P}(AB) \geqq 0{,}6$.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B eseményekre fennáll $\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B})$!

Az A esemény előállítható két, egymást kizáró esemény összegeként:

$$A=AB+A\bar{B}.$$

Így a III. alapján

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(AB+A\bar{B})=\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B}).$$

Tehát valóban igaz a fenti összefüggés.

3. Lássuk be, hogy A és B tetszőleges megválasztása esetén fennáll $\mathbf{P}(A+B) = 1-\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B})$.

A de Morgan-tételek alapján tudjuk, hogy

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B},$$

vagyis $A+B$ és $\bar{A}\bar{B}$ ellentett események. Az ellentett események valószínűségeire vonatkozó összefüggés alapján

$$\mathbf{P}(A+B)+\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = 1.$$

Ezt átrendezve, valóban $\mathbf{P}(A+B) = 1-\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B})$ adódik.

4. Mutassuk meg, hogy A-t és B-t tetszőlegesen választva, teljesül a következő kapcsolat:

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A}B)!$$

Két esemény, A és B összege felírható két, egymást kizáró esemény összegenként. Ugyanis

$$A+B(A+\bar{A}) = A+AB+\bar{A}B.$$

De mivel $AB\subset A$, így

$$A+B = A+\bar{A}B.$$

A III.-at alkalmazzuk: $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A+\bar{A}B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A}B)$. Ezzel az álllítást igazoltuk.

5. Igazoljuk, hogy ha A és B tetszőleges események, akkor az $A\bar{B}+\bar{A}B$ eseménynek, vagyis annak az eseménynek, hogy közülük pontosan egy következik be, valószínűsége a következő:

$$\mathbf{P}(A\bar{B}+\bar{A}B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-2\mathbf{P}(AB).$$

Az A és B események felbonthatók egymást kizáró események összegére, a következő módon:

$$A = AB+A\bar{B}, \qquad B = AB+\bar{A}B.$$

Ezeknek az eseményeknek a valószínűségeit képezzük és alkalmazzuk III.-at:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B}), \quad \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(\bar{A}B).$$

A két egyenletet összeadjuk:

$$\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B) = 2\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B})+\mathbf{P}(\bar{A}B).$$

Tudjuk, hogy III. alapján

$$\mathbf{P}(A\bar{B}+\bar{A}B) = \mathbf{P}(A\bar{B})+\mathbf{P}(A\bar{B}).$$

Most az utóbbi összefüggést helyettesítjük az előbbi egyenlőségbe. Átrendezve adódik:

$$\mathbf{P}(A\bar{B}+\bar{A}B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-2\mathbf{P}(AB).$$

6. Próbagyártás után két szempontból vizsgáljuk a késztermékeket. Az A esemény azt jelenti, hogy a vizsgált gyártmány anyaghibás, a B esemény pedig azt, hogy mérethibás. Az A esemény $\mathbf{P}(A)=0{,}15$, a B esemény $\mathbf{P}(B)=0{,}3$ és az AB esemény $\mathbf{P}(AB)=0{,}08$ valószínűséggel következik be. Mi a valószínűsége annak, hogy valamely késztermék hibátlan?

Először annak a valószínűségét számítjuk ki, hogy egy késztermék hibás. Ez az esemény $A+B$, mert ez jelenti azt, hogy a termék legalább az egyik szempontból hibás.

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB) = 0{,}15+0{,}3-0{,}08 = 0{,}37.$$

Az $A+B$ esemény ellentéte $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$ kifejezi, hogy a termék hibátlan:

$$\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = 1-\mathbf{P}(A+B) = 1-0{,}37 = 0{,}63.$$

Tehát 0,63 annak a valószínűsége, hogy valamely késztermék hibátlan.

7. Egy társaság tagjait nyelvtudásuk szerint csoportosítjuk. A következő eseményeket vezetjük be:

A: a kiválasztott személy tud angolul;
B: a kiválasztott személy tud oroszul;
C: a kiválasztott személy tud franciául.

Ismeretesek a következő valószínűségek:

$$\mathbf{P}(A)=0{,}35; \quad \mathbf{P}(B)=0{,}4; \quad \mathbf{P}(C)=0{,}3;$$
$$\mathbf{P}(AB)=0{,}15; \quad \mathbf{P}(AC)=0{,}2; \quad \mathbf{P}(BC)=0{,}2; \quad \mathbf{P}(ABC)=0{,}1.$$

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott személy az angol, orosz és francia nyelvek közül legalább egyiken tud!

Az $A+B+C$ esemény jelenti azt, hogy a kiválasztott személy az angol, orosz és francia közül legalább az egyik nyelven tud. Ennek valószínűsége:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A+B+C) &= \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-\\ &-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)+\mathbf{P}(ABC) =\\ &= 0{,}35+0{,}4+0{,}3-0{,}15-0{,}2-0{,}2+0{,}1 = 0{,}6.\end{aligned}$$

Tehát egy véletlenszerűen kiválasztott személy 0,6 valószínűséggel tud legalább az egyik nyelven.

8. Egy iskola tanulóinál a jeles matematika és a jeles fizika osztályzatokat figyeljük. A következő eseményeket vezetjük be tetszőlegesen kiválasztott tanulókra:

A: jeles osztályzata van matematikából;
B: jeles osztályzata van fizikából.

Ismeretesek a következők: annak valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott tanulónak jelese van fizikából, $\mathbf{P}(B)=0{,}11$; hogy jelese van matematikából és fizikából, $\mathbf{P}(AB)=0{,}09$; hogy a matematika és fizika tárgyak közül legalább egyikből jeles az osztályzata, $\mathbf{P}(A+B) = 0{,}16$. Mi a valószínűsége annak, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott tanulónak jeles osztályzata van matematikából?

Felírjuk a két esemény összegének valószínűségére vonatkozó összefüggést:

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB).$$

Az összefüggésből a $\mathbf{P}(A)$ valószínűséget kifejezzük és az ismert adatokat behelyettesítjük:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A+B)+\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(B) = 0{,}16+0{,}09-0{,}11 = 0{,}14.$$

Tehát 0,14 annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott tanulónak matematikából jeles osztályzata van.

2. Klasszikus valószínűségi mező

Ha egy kísérletnek csak véges sok kimenetele lehet, és az egyes kimeneteleknek, vagyis az elemi eseményeknek azonos a valószínűségük, akkor a kísérlettel kapcsolatos események és ezek valószínűségei együtt ún. *klasszikus valószínűségi mezőt* alkotnak.

Legyen A a kísérlettel kapcsolatos esemény. Ha az A esemény a kísérlet n elemi eseménye közül k különböző elemi esemény összegéből áll, akkor valószínűsége

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n}.$$

Tehát itt n az összes lehetséges elemi esemény — másképpen az „összes eset” — száma, k pedig az A esemény bekövetkezése szempontjából kedvező elemi események — vagyis a „kedvező esetek” — száma.

Például határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával 4-est dobunk!

Kockadobás során a kimenetelek, vagyis az összes esetek száma $n=6$. Ezek szabályos kocka használata esetében egyenlően valószínűek. Most a kedvező eseteket tekintjük. Ilyen csak egy van, $k=1$, mert a vizsgált esemény elemi. Ha az eseményt A-val jelöljük, akkor $\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}=\frac{1}{6}$.

Tehát a 4-es dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$.

Vagy legyen egy dobozban 4 fehér, 1 piros és 5 kék golyó. Egy golyót találomra kiveszünk. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy fehéret húzunk!

Mindegyik golyót azonos valószínűséggel választhatjuk, és az összes lehetőségek száma $n=10$. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a kihúzott golyó fehér. Ennek az eseménynek a szempontjából a kedvező esetek száma: $k=4$.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Tehát 0,4 valószínűséggel húzunk fehér golyót a dobozból.

Gyakorló feladatok

1. Ha tíz könyvet helyezünk el tetszőleges sorrendben egy könyvespolcon, és három könyvet előre megjelölünk, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az elhelyezés során a megjelölt könyvek egymás mellé kerülnek?

Először az összes lehetséges sorrendek számát állapítjuk meg. Ez 10 elem permutációinak száma, így $n=10!$. Ezután a kedvező eseteket tekintjük. Ha a három megjelölt könyv egymás közti sorrendjét nézzük, ezeknek száma $P_3=3!$. Minden rögzített egymás közti sorrend a többi könyvhöz viszonyítva többféle módon valósulhat meg. Ennek számát úgy állapíthatjuk meg, hogy a három, egymás melletti könyvet most egy elemnek tekintve, és a többi könyvet hét elemnek véve, összesen 8 elemet állíthatunk még tetszőleges sorrendbe. Erre $P_8=8!$ lehetőségünk van. A kedvező esetek száma ezért $k=3!8!$. A vizsgált eseményt A-val jelölve, ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{3!\,8!}{10!} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

Tehát $\frac{1}{15}$ a valószínűsége annak, hogy a három megjelölt könyv egymás mellé kerül.

2. Tíz telefonvezeték közül négy beázás miatt használhatatlanná válik. Ezután 4 vonalon hívást kísérelnek meg. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a hívások fele a beázás miatt nem lesz sikeres!

Először az összes lehetőségeket számítjuk. A 10 vonal közül négy vonalon történik a hívás. Így 10 elemből 4-et kell kiválasztanunk, sorrendre való tekintet nélkül. Azt kapjuk, hogy

$$n = C_{10}^{4} = \binom{10}{4}.$$

Most a vizsgált esemény szempontjából kedvező eseteket vesszük tekintetbe. A két sikeres hívás a 6 jó vezetéken, a két sikertelen a 4 hibás vezetéken megy végbe. A sorrend itt sem számít, így

$$k = C_6^2 C_4^2 = \binom{6}{2}\binom{4}{2}.$$

Ha a vizsgált esemény jele A, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{4!6!}} =$$

$$= \frac{6!\cdot 6!\cdot 4!\cdot 4!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 10!} = \frac{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} = \frac{3}{7}.$$

Tehát $\frac{3}{7}$ a valószínűsége annak, hogy a beázás miatt pontosan két hívás lesz sikertelen.

3. Egy 12 tagú diákcsoportban 10 fiú és 2 leány van. Két színházjegyet sorsolnak ki egymás között. A sorsolást úgy végzik, hogy az összes nevet tartalmazó dobozból két nevet kihúznak. Mi a valószínűsége annak, hogy a két leány kapja a jegyeket?

A sorsolás összes lehetséges eredményeinek száma 12 elemből képezett másodosztályú kombinációk számával egyenlő, így

$$n = C_{12}^2 = \binom{12}{2}.$$

Kedvező eset csak az, amikor a két leánynevet húzzák ki, így $k=1$. Ha A az esemény jele, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{\frac{12!}{2!10!}} = \frac{2}{12\cdot 11} = \frac{1}{66}.$$

Tehát $\frac{1}{66}$ a valószínűsége annak, hogy a két diáklány kapja a jegyeket.

4. Egy minden oldalán befestett kockát 1000 azonos méretű kis kockára fűrészelnek szét. A kis kockákból véletlenszerűen választunk egyet. Mi a valószínűsége annak, hogy ez két oldalán van festve?

A választás összes lehetőségeinek száma $n=1000$. Számoljuk meg az esemény szempontjából kedvező lehetőségeket. Az eredeti kockának mind a 12 éle mentén 8 olyan kis kocka keletkezik, amelyeknek pontosan két oldala festett, vagyis $k = 8\cdot 12 = 96$. Ha az eseményt A-val jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{96}{1000} = 0{,}096.$$

Tehát 0,096 annak a valószínűsége, hogy pontosan két lapján festett kockát választunk.

5. Egy sorsjátékon a forint összértékben adtak ki sorsjegyeket. Egy sorsjegy b forintba került. Összesen c darab értékes nyereményt sorsolnak ki. Mi a valószínűsége annak, hogy egy sorsjeggyel értékes nyereményhez jutunk?

Először nézzük meg, hány sorsjegyet adtak ki. Ezek száma: $n=\frac{a}{b}$. Ezután a kedvező eseteket tekintjük. Ezek száma $k=c$. Ha A-val jelöljük a vizsgált eseményt, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{bc}{a}.$$

Tehát $\frac{bc}{a}$ a valószínűsége annak, hogy egy sorsjeggyel értékes nyereményhez jutunk.

6. Dominójátszma kezdetén egy dominót választunk, mely nem dupla, vagyis kétféle pontérték van a két felén. Ezután a többi dominóból egy második dominót választunk véletlenszerűen. Mi a valószínűsége annak, hogy a második dominót az elsőhöz hozzá lehet tenni?

Határozzuk meg először az összes lehetőségek számát. A dominókon 0-tól 8-ig terjedő pontozás található. Egy-egy dominóra a 9 elemből kettő kerül úgy, hogy azonosak is lehetnek. Így az összes különböző dominók számát 9 elem másodosztályú ismétléses kombinációinak száma adja meg, vagyis

$$C_9^{2,i} = \binom{9+2-1}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45.$$

Ebből egyet elsőként már kiválasztottunk. A második húzásra tehát $n=44$ lehetőség van.

Nézzük ezután a kedvező eseteket. Az elsőnek kivett dominó egy-egy feléhez 8—8 dominó tehető hozzá, mert minden rögzített pontérték összesen 9 dominón fordul elő és ezek egyikét már kivettük. A kedvező választások száma tehát $k = 2\cdot 8 = 16$. Jelöljük A-val a szóban forgó eseményt:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{16}{44} = \frac{4}{11}.$$

Tehát $\frac{4}{11}$ annak a valószínűsége, hogy a másodiknak kivett dominó az elsőhöz tehető.

7. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük színét, majd visszatesszük. Ezután jól megkeverjük a csomagot, és ismét választunk egy lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy ez utóbbi lap nem azonos színű az elsővel?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Az összes lehetőség a második lap kihúzására $n=32$. Azoknak az eseteknek a száma, amikor nem azonos fajtájú lapot kapunk, vagyis a kedvező lehetőségek száma, $k = 3 \cdot 8 = 24$.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Tehát $\frac{3}{4}$ valószínűséggel más színű lapot húzunk másodszorra.

8. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az 1-től 100 000-ig tartó egész számok közül véletlenül választott N egész számnak *a)* a négyzete; *b)* a negyedik hatványa 1-es számjeggyel végződik.

Egy N egész szám négyzetének és negyedik hatványának utolsó számjegyét N utolsó számjegye határozza meg. Ennek választására az összes lehetőség $n=10$, amelyek a szám véletlen választása esetén egyenlő valószínűek.

a) A kedvező esetek azok, amelyekben az N utolsó számjegye vagy 1-es vagy 9-es, mert ezek négyzete végződik 1-gyel. Így $k=2$. Ha az eseményt A-val jelöljük, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

b) Egy egész szám negyedik hatványa akkor végződik 1-gyel, ha négyzete 1-gyel vagy 9-cel végződik. Ez viszont akkor áll fenn, ha az eredeti szám 1-es, 3-as, 7-es vagy 9-es számjeggyel végződik. A kedvező választások száma itt $k=4$. Ha B-vel jelöljük az eseményt, akkor

$$\mathbf{P}(B) = \frac{k}{n} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Azt kaptuk, hogy *a)* 0,2 a valószínűsége annak, hogy egy egész szám négyzete és *b)* 0,4 a valószínűsége, hogy negyedik hatványa 1-gyel végződjék.

9. Két egész számot választunk véletlenszerűen az 1-től 10 000-ig terjedő egész számok közül. Határozzuk meg, mi a valószínűsége annak, hogy szorzatuk utolsó számjegye 1-es legyen!

Két egész szám szorzatának utolsó számjegye a két tényező utolsó számjegyeitől függ. Jelentse (a, b) azt, hogy az első tényező utolsó jegye a, a másodiké pedig b. Mivel mind a, mind b a tíz számjegy közül bármelyik lehet, és a tényezők sorrendje is számít, ezért az összes párosítási lehetőség $10 \cdot 10 = 100$, amelyeknek mindegyike azonos valószínűséggel fordul elő.

Az esemény szempontjából kedvező lehetőségek a következő számpárok: (1, 1), (3, 7), (7, 3), (9, 9). A kedvező lehetőségek száma tehát $k=4$. Ha A a vizsgált esemény, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{100} = 0{,}04.$$

Tehát 0,04 a valószínűsége annak, hogy a két véletlenül választott egész szám szorzata 1-re végződik.

10. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az első 100 000 pozitív egész szám közül egy véletlenül választott N szám köbének két utolsó számjegye 11 legyen!

Egy N egész szám köbének utolsó két számjegye csak az eredeti szám két utolsó számjegyétől függ. Jelöljük N utolsó jegyét a-val, utolsó előtti jegyét b-vel. Az utolsó két jegy lehet 00, 01, 02, ..., 98, 99, vagyis összesen 100 lehetséges eset van, amelyeknek mindegyike nyilván azonosan valószínű. Ezután az esemény szempontjából kedvező lehetőségeket nézzük. Írjuk fel az eredeti számot helyértékek szerint, az egyeseket és tízeseket kiírva, a szám további részét — vagyis a százas és magasabb helyértékeket — pedig az alábbi módon összevonva:

$$N = a+10b+100(...).$$

Ekkor N köbe így adódik:

$$N^3 = a^3+30a^2b+100(\cdots),$$

ahol az összevont tagok a két utolsó jegyet már nem befolyásolják. N^3 utolsó jegye csak úgy lehet 1, ha a^3 utolsó jegye is az. Ez csak $a=1$ választás mellett áll fenn. Ha az $a=1$ értéket választjuk, akkor

$$N^3 = 1+30b+100(\cdots).$$

Ebből a felírásból látszik, hogy N^3 utolsó előtti számjegye akkor és csak akkor lehet 1, ha $30b$ utolsó két számjegye 10, vagyis $3b$ utolsó számjegye 1. Ez pedig csak úgy következik be, ha $b=7$. Tehát csak egy kedvező eset van ($k=1$), mégpedig az (1, 7) számpár. Jelöljük a szóban forgó eseményt A-val. Ekkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Tehát 0,01 a valószínűsége annak, hogy egy találomra választott egész szám köbe 11-re végződik.

11. Tíz lapra felírjuk a tíz számjegyet. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy két lapot találomra kiválasztva és egymás mellé téve, a kapott szám osztható 18-cal!

6 Valószínűségszámítás

Minden 100-nál kisebb pozitív egész számot megkaphatunk az adott módon, azok kivételével, amelyeknek mindkét számjegye megegyezik, tehát összesen $n=90$ különböző számot. A húzás során egyiknek sincs kitüntetett szerepe, tehát nyilván bármelyik azonos valószínűséggel lép fel. A kedvező esetek: 18, 36, 54, 72, 90; így $k=5$.

A vizsgált eseményt A-val jelöljük:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}.$$

Azt kaptuk, hogy $\frac{1}{18}$ valószínűséggel adódik 18-cal osztható szám.

12. Nyolc azonos lapra egyenként felírjuk a következő számokat: 2, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13. Közülük két lapot találomra kiválasztunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott lapokon levő számokat egy tört számlálójának, ill. nevezőjének véve, a tört egyszerűsíthető lesz?

Az összes különböző esetet úgy kapjuk, hogy a nyolc lapból minden lehető módon kettőt kiveszünk (a sorrend nem számít). A lehetséges esetek száma tehát 8 elem másodosztályú kombinációinak száma:

$$n=C_8^2=\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28.$$

A kedvező eseteket akkor kapjuk, ha a felírt páros számokból választunk kettőt (sorrendet nem számítva), mert a páratlanok mindegyike törzsszám, ennélfogva semelyik másik szereplő számmal nincs valódi közös osztója. Így 5 elem másodosztályú kombinációinak számát kell vennünk:

$$k=C_5^2=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10.$$

Ha a szóban forgó esemény jele A, akkor

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}.$$

Tehát $\frac{5}{14}$ valószínűséggel kapunk egyszerűsíthető törtet a felírt számokból.

13. Öt különböző hosszúságú egyenesszakasz hossza rendre 1, 3, 5, 7, 9 egység. Határozzuk meg a valószínűségét annak, hogy véletlenszerűen kiválasztva közülük hármat, a kiválasztott szakaszokból háromszög szerkeszthető!

Az összes választási lehetőségek számát úgy kapjuk, hogy 5 elem harmadosztályú kombinációinak számát vesszük:

$$n=C_5^3=\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10.$$

Kedvező a választás a vizsgált esemény szempontjából, ha a három kiválasztott szakasz hosszára a háromszög-egyenlőtlenségek teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy közülük bármelyik kettőnek az összege nagyobb, mint a harmadik. Meggyőződhetünk róla, hogy a háromszög-egyenlőtlenségeknek csak a (3, 5, 7), (3, 5, 9) és (5, 7, 9) választás felel meg. Vagyis $k=3$.

Ha A-val jelöljük a szóban forgó eseményt, akkor

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Tehát 0,3 a valószínűsége annak, hogy a választott szakaszokból háromszög szerkeszthető.

14. Tíz golyó van egy dobozban. Közülük kettő fehér, a többi fekete. Kiveszünk találomra öt golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy éppen egy fehér golyó lesz köztük?

A kiválasztás lehetőségeinek a számát megkapjuk, ha 10 elem ötödosztályú kombinációinak számát vesszük:

$$n=C_{10}^5=\binom{10}{5}.$$

Ezután a kedvező eseteket nézzük. A 2 fehérből választhatunk egyet és a 8 feketéből négyet. Így

$$k=C_2^1C_8^4=2\binom{8}{4}.$$

Ha a vizsgált eseményt A-val jelöljük, akkor

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}=\frac{2\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}}=\frac{2\left(\frac{8!}{4!\,4!}\right)}{\frac{10!}{5!\,5!}}=\frac{2\cdot 5\cdot 5}{10\cdot 9}=\frac{5}{9}.$$

Tehát $\frac{5}{9}$ annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fehér golyó lesz az öt között.

15. Egy kiállításon a 00 001-gyel kezdődő, ötjegyű számokkal ellátott jegyekből az első sorozat elfogyott. Egy véletlenszerűen kiválasztott látogató jegyét, mely az első sorozatból való, megnézzük. Mi a valószínűsége annak, hogy a jegy számjegyei közt nincs ismétlődés? (A nulla sem ismétlődhet, tehát ilyen értelemben pl. minden valódi egy-, két- vagy háromjegyű szám is tartalmaz „ismétlődő jegyeket".)

Az egy sorozatban kiadott jegyek sorszáma (az elöl álló nullákat elhagyva) 1-től 99 999-ig tart, tehát az összes eset $n=99\,999$. A kedvező esetek számát 10 elem ötödosztályú variációi adják:

$$k=V_{10}^5=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6.$$

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val; ekkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{99999} \approx 0{,}302.$$

Az kapjuk, hogy kb. 0,302 a valószínűsége annak, hogy a sorszám jegyei közt nincs ismétlődés.

16. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre 3 lapot húzunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között legalább egy zöld van?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Az ellentétes esemény $\bar{A}$, ami azt jelenti, hogy a kivett kártyalapok között nincsen zöld. Először az $\bar{A}$ esemény valószínűségét számoljuk ki.

Az összes esetek számát úgy kapjuk, hogy 32 elem harmadosztályú kombinációinak számát vesszük:

$$n = C_{32}^{3} = \binom{32}{3}.$$

A kedvező esetek $\bar{A}$ szempontjából azok, amelyekben a 3 lapot a 24 darab nem zöld kártya közül vettük ki. Ezeknek száma:

$$k = C_{24}^{3} = \binom{24}{3}.$$

Az $\bar{A}$ esemény valószínűsége így:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}}.$$

Viszont az ellentett események valószínűségeire vonatkozó összefüggés szerint:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = 1 - \frac{\frac{24!}{3!21!}}{\frac{32!}{3!29!}} =$$

$$= 1 - \frac{24\cdot 23\cdot 22}{32\cdot 31\cdot 30} = \frac{1101}{1860} \approx 0{,}59.$$

Tehát kb. 0,59 a valószínűsége annak, hogy legalább egy zöld lapot találunk a kihúzott kártyák között.

17. Egyszerre dobunk 6 szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két dobókockán azonos pontszám lesz felül?

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt. Az $\bar{A}$ ellentett esemény azt jelenti, hogy minden kockán más pontszám lesz felül. Először $\bar{A}$ valószínűségét határozzuk meg.

Az összes eset számát megkapjuk, ha 6 különböző elemből választunk hat helyre úgy, hogy ismétlődés is lehet, vagyis 6 elem hatodosztályú ismétléses variációinak számát vesszük:

$$n = V_6^{6,i} = 6^6.$$

Az $\bar{A}$ szempontjából kedvező esetek számát pedig úgy számítjuk ki, hogy — mivel mindegyik számnak pontosan egy kockán kell előfordulnia, csak a kockák közötti elosztása lehet különböző — 6 különböző elem összes lehetséges sorrendjének, vagyis a permutációknak számát vesszük:

$$k = P_6 = 6!.$$

Az $\bar{A}$ esemény valószínűsége tehát:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{k}{n} = \frac{6!}{6^6}.$$

Az ellentett események valószínűségei közti összefüggés alapján:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}984.$$

Tehát kb. 0,984 a valószínűsége annak, hogy legalább két kocka azonos pontszámot mutat.

18. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy egy totószelvényt vaktában kitöltve, az első 13 mérkőzés eredménye közül éppen 11-et találunk el!

A szelvény kitöltésére az összes lehetőségek számát — mivel 13 helyre választhatunk az 1, 2, x elemekből — 3 elem 13-adosztályú ismétléses variációinak száma adja:

$$n = V_3^{13,i} = 3^{13}.$$

Ezután a kedvező lehetőségeket számoljuk. A 13 mérkőzés eredményeiből 11-et a szelvényen el kell találni, kettőt viszont nem találhatunk el. A két el nem talált eredmény a 13-ból kiválasztható annyiféleképpen, mint amennyi a 13 elem másodosztályú kombinációinak száma. E két mérkőzés mindegyikére 2—2 hibás tippünk van, vagyis ezekre a tippek számát 2 elem másodosztályú ismétléses variációinak a száma adja. Így a kedvező lehetőségek száma:

$$k = C_{13}^{2} V_2^{2,i} = \binom{13}{2} 2^2.$$

Ha A-val jelöljük a vizsgált eseményt, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{13}{2} 2^2}{3^{13}} = \frac{312}{3^{13}}.$$

Tehát megadtuk a 11 találat valószínűségét.

19. Egy dobozban 5 korong van, amelyeken az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek közül egy-egy szerepel. Három korongot húzunk ki egymás után úgy, hogy a kihúzottat az új húzás előtt visszatesszük a dobozba. Mi a valószínűsége annak, hogy a három korongról leolvasott számjegyek összege 10?

Az összes lehetőségek számát tekintjük először. Három helyre választhatunk 5 elemből úgy, hogy ismétlődés is lehetséges, tehát ismétléses variációról van szó. Az 5 elem harmadosztályú ismétléses variációinak száma:

$$n = V_5^{3,i} = 5^3 = 125.$$

Ezután a vizsgált esemény szempontjából kedvező eseteket számoljuk össze. A három kihúzott számjegyből a következő felbontásokban kaphatunk összegként 10-et:

$1+4+5$ 6-féleképpen, mivel három elem permutációiról van szó;
$2+3+5$ 6-féleképpen, akárcsak az előző esetben;
$2+4+4$ 3-féleképpen, mivel ismétléses permutációról van szó;
$3+3+4$ 3-féleképpen, akárcsak az előző esetben!

Az egyes felbontások különböző sorrendi lehetőségeinek összege a kedvező lehetőségek számát adja:

$$k = 18.$$

Ha a szóban forgó eseményt A-val jelöljük, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{18}{125}.$$

Tehát $\frac{18}{125}$ annak a valószínűsége, hogy a három húzás során kapott számjegyek összege 10.

20. Egy dobozban 40 darab boríték van. Ezek közül 15-ben 60 Ft, 10-ben 50 Ft, 8-ban 40 Ft, 3-ban 10 Ft van; a többi üres. Két borítékot találomra kiveszünk a dobozból. Mi a valószínűsége annak, hogy ezekben összesen 60 Ft van?

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt. Az A esemény kétféleképpen következhet be. Egyszer úgy, hogy az egyik boríték 60 Ft-ot tartalmaz, a másik pedig üres. Ezt az eseményt jelöljük B-vel. A másik módon úgy, hogy 50 Ft van az egyik és 10 Ft van a másik kihúzott borítékban. Jelöljük ezt az eseményt C-vel.

A B és C események valószínűségeit számítjuk ki először. A 40 boríték közül kettőt sorrendre való tekintet nélkül választunk, így az összes lehetőség számát 40 elem másodosztályú kombinációinak száma adja, vagyis

$$n = C_{40}^2 = \binom{40}{2}.$$

A B esemény szempontjából kedvező lehetőségek azok, amelyekben a 15 darab 60 Ft-ot tartalmazóból és a 4 üresből választunk egyet-egyet. Ezeknek száma:

$$k_B = 15 \cdot 4 = 60.$$

A C esemény bekövetkezésének kedvező lehetőségei azok a húzások, amelyeknek során a 10 darab 50 Ft-os és a 3 db 10 Ft-os borítékból veszünk egyet-egyet. Ezeknek száma:

$$k_C = 10 \cdot 3 = 30.$$

Most már a B és C események valószínűségeit felírhatjuk:

$$\mathbf{P}(B) = \frac{k_B}{n} = \frac{60}{\binom{40}{2}};$$

$$\mathbf{P}(C) = \frac{k_C}{n} = \frac{30}{\binom{40}{2}}.$$

Az A esemény akkor jön létre, ha B vagy C bekövetkezik:

$$A = B + C.$$

Minthogy a B és C események kizárják egymást, vagyis $BC = O$, az A esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B+C) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) =$$

$$= \frac{60}{\binom{40}{2}} + \frac{30}{\binom{40}{2}} = \frac{90}{\binom{40}{2}} = \frac{90}{\frac{40!}{2!\,38!}} = \frac{90}{20 \cdot 39} = \frac{3}{26}.$$

Tehát $\frac{3}{26}$ a valószínűsége annak, hogy két borítékban összesen 60 Ft legyen.

21. Egy 52-lapos kártyacsomagból 13 lapot találomra kihúzunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a treff király a 13 lap között lesz?

I. Megoldás:

Az 52 lapból 13-at választunk sorrendre való tekintet nélkül. Az összes lehetőségek számát így 52 elem 13-adosztályú kombinációi adják:

$$n = C_{52}^{13} = \binom{52}{13}.$$

Kedvező esetekben a treff királyon kívül 51 lapból tetszőlegesen választhatunk 12 lapot. Így a kedvező lehetőségek számát, mivel a sorrend nem számít, 51 elem 12-edosztályú kombinációinak száma adja:

$$k = C_{51}^{12} = \binom{51}{12}.$$

Jelöljük a szóban forgó eseményt A-val:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{\frac{51!}{12!\,39!}}{\frac{52!}{13!\,39!}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

II. Megoldás:

Keverjük el jól a kártyacsomagot, majd válasszuk ki az első 13 lapot Keverés után a treff király bárhol lehet a csomagban, helyét a sorszámával adhatjuk meg. Ez tehát 1-től 52-ig változhat, és mindegyik sorszám egyformán valószínű. Az összes eset száma $n=52$.

Választásunk szerint a treff király akkor kerül a 13 lap közé, ha sorszáma nem nagyobb 13-nál. A kedvező esetek száma tehát $k=13$. Így a keresett valószínűség $\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.

Tehát $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között lesz a treff király.

22. Egy futballklub edzésének megkezdése előtt az edzésen részvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi a valószínűsége annak, hogy ha találomra történik a szétosztás két 11-es csoportba, a két legjobb játékos egymás ellen játszik?

I. Megoldás:

Először az egyenlő létszámú csoportba osztás összes lehetőségeit számoljuk össze. Ha a csoportok sorrendjét megkülönböztetnénk, akkor az első csapatba a 22 játékosból 11-et kellene választanunk az összes lehetséges módon. A többi játékos kerülne a második csapatba. A lehetőségek így 22 elem 11-edosztályú kombinációiból adódnának. Minthogy a csapatok sorrendjét nem különböztettük meg, tehát ha ugyanaz a 11 játékos egyszer az „első”, egyszer pedig a „második” csapatba kerül, az nem számít különböző felosztásnak, ezért az előbbi lehetőségek számát feleznünk kell. Tehát a két 11-es csapatba osztás összes eseteinek száma:

$$n = \frac{C_{22}^{11}}{2} = \frac{1}{2}\binom{22}{11}.$$

Ezután az esemény szempontjából kedvező lehetőségeket számoljuk meg. A két legjobb játékoson kívül szereplő 20 játékost úgy osztjuk szét, hogy az egyik legjobbhoz az összes lehetséges módon választunk közülük 10-et.

E választások számát 20 elem 10-edosztályú kombinációinak száma adja meg:

$$k = C_{20}^{10} = \binom{20}{10}.$$

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{20}{10}}{\frac{1}{2}\binom{22}{11}} = \frac{\frac{20!}{10!\,10!}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{22!}{11!\,11!}} = \frac{2\cdot 11\cdot 11}{22\cdot 21} = \frac{11}{21}.$$

II. Megoldás:

Minden játékos 21 társa közül (összes eset) 10 játszik vele egy csapatban és 11 vele szemben (kedvező esetek). Tehát bármely két játékost kiemelve, annak valószínűsége, hogy szemközti csapatba kerülnek (ez csak más megfogalmazás arra, hogy az egyik kiemelt játékossal szemben álló csapatba kerül a másik kiemelt játékos), $\frac{11}{21}$.

Tehát $\frac{11}{21}$ annak a valószínűsége, hogy a két legjobb játékos egymás ellen játszik.

23. Egy sötét helyiségben 4 egyforma pár cipő össze van keverve. Kiválasztunk ezekből 4 darab cipőt. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább egy összetartozó pár lesz a kivettek közt?

Az összes esetek számát úgy kapjuk, hogy a 8 cipőnek megfelelő 8 elemből alkotható negyedosztályú kombinációk számát vesszük:

$$n = C_8^4 = \binom{8}{4}.$$

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Ennek ellentettje, $\bar{A}$, azt jelenti, hogy nincs összetartozó pár a kivett cipők közt. Adjuk meg az $\bar{A}$ szempontjából kedvező eseteket. Az $\bar{A}$ esemény csak úgy következhet be, ha vagy csupa jobblábas cipőt veszünk ki vagy csupa ballábast, így

$$k=2.$$

Az $\bar{A}$ valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{2}{\binom{8}{4}} = \frac{2}{\frac{8!}{4!\,4!}} = \frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} = \frac{1}{35}.$$

Az ellentett események valószínűségeire vonatkozó összefüggés alapján

$$\mathbf{P}(A) = 1-\mathbf{P}(\bar{A}) = 1-\frac{1}{35} = \frac{34}{35}.$$

Tehát $\frac{34}{35}$ annak a valószínűsége, hogy legalább egy pár cipőt is kiválasztunk.

24. Egy 10-lakásos ház elkészültekor kiderül, hogy csak 7 lakás hibamentes, bár a többi is beköltözhető. Az első napon csak 5 lakásba költöznek be lakók. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 3 hibátlan lakásba és 2 hibásba költöznek be?

Az összes lehetőségek számát úgy kapjuk meg, hogy a 10 lakásnak megfelelő 10 elemből képezhető ötödosztályú kombinációk számát veszszük:

$$n = C_{10}^5 = \binom{10}{5}.$$

Ezután a szóban forgó esemény szempontjából kedvező eseteket számítjuk. A 7 hibátlan lakásból 3-at kell választanunk, a 3 hibásból pedig 2-t és ezek minden csoportosítása szóba jön. Így a kedvező esetek száma:

$$k = C_7^3 C_3^2 = \binom{7}{3}\binom{3}{2}.$$

Ha a vizsgált esemény jele A, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{7!}{3!4!}\cdot\frac{3!}{2!}}{\frac{10!}{5!5!}} = \frac{7!5!5!}{4!2!10!} = \frac{5}{12}.$$

Tehát $\frac{5}{12}$ a valószínűsége annak, hogy pontosan 3 hibátlan és 2 hibás lakásba költöznek az első napon.

25. Egy dobozban 4 piros golyó volt. Legalább hány fehér golyót kellett a dobozba helyeznünk ahhoz, hogy ezután találomra húzva belőle egy golyót, az 0,9-nél nagyobb valószínűséggel fehér legyen?

Legyen f a szükséges fehér golyók száma. Ha f darab fehér golyót tettünk a dobozba, akkor abban az összes golyók száma

$$n = 4+f.$$

Ha egyet választunk ezután, akkor fehér golyó kihúzására a lehetőségek száma:

$$k=f.$$

Legyen A a fehér golyó húzását jelentő esemény. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{f}{4+f}.$$

A feltétel szerint $\mathbf{P}(A)>0{,}9$ kell, hogy legyen; így a következő egyenlőtlenség adódik:

$$\frac{f}{4+f}>0{,}9;$$

$$f>0{,}9(4+f);$$

$$f>3{,}6+0{,}9f;$$

$$0{,}1f>3{,}6;$$

$$f>36.$$

Tehát legalább 37 fehér golyót kellett a dobozba helyeznünk.

3. A Maxwell—Boltzmann-, a Bose—Einstein- és a Fermi—Dirac-statisztika

A statisztikus fizika különböző problémáinak megoldásában a klasszikus valószínűségszámítás körébe tartozó különféle típusú modellek, ún. „statisztikák", bizonyultak használhatónak. Ezeknek mindegyike golyóknak dobozok közti elosztásaként fogalmazható meg, és egymástól az elosztás feltételeiben, ill. az egyenlő valószínűségi események megadásában különböznek.

Például gázmolekulákra vonatkozó számításokban a Maxwell—Boltzmann-statisztika, fotonokkal kapcsolatban a Bose—Einstein-statisztika, míg elektronok, protonok, neutronok esetében a Fermi—Dirac-statisztika használata mutatkozik alkalmasnak.

a) A Maxwell—Boltzmann-statisztika modellje: m számú, egymástól megkülönböztethető (pl. 1-től m-ig megszámozott) golyót helyezünk el r számú dobozba oly módon, hogy minden egyes golyó helyét véletlenszerűen, tehát egyenlő valószínűséggel választjuk meg az r doboz közül.

Jelölje $A_{l_1, l_2, \ldots, l_r}$ azt az eseményt, hogy az első dobozba l_1, a másodikba l_2, az r-edikbe l_r golyó kerül. (Természetesen feltesszük, hogy $l_1+l_2+\ldots+l_r = m$.)

Az $A_{l_1, l_2, \ldots, l_r}$ esemény valószínűségének meghatározásához először az összes eset számát vizsgáljuk meg. A golyók egy tetszőleges elrendezését úgy is megadhatjuk, hogy a dobozokat is megszámozzuk 1-től r-ig, és minden golyó sorszáma mellé odaírjuk, hogy az illető golyó hányadik dobozba került. Így a dobozok lehetséges sorszámából egy m elemű ismétléses variációt kapunk. Statisztikánk alapfeltevése éppen az, hogy az így kapott elhelyezések mind egyformán valószínűek.

Az összes eset száma tehát

$$n = V_r^{m,i} = r^m.$$

Kedvezők azok a sorozatok, amelyekben az első doboz pontosan l_1-szer, a második l_2-ször, az r-edik l_r-szer szerepel (hiszen ez jelenti azt, hogy pl. az első dobozban l_1 golyó van). A kedvező sorozatok tehát az l_1 db 1-es, az l_2 db 2-es, stb. az l_r db r ismétlődéses permutációi, amelyeknek száma:

$$k = P_m^{l_1, l_2, \ldots, l_r} = \frac{m!}{l_1! \, l_2! \cdots l_r!},$$

így a vizsgált esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(A_{l_1, l_2, \ldots, l_r}) = \frac{m!}{l_1! \, l_2! \cdots l_r!} \cdot \frac{1}{r^m}.$$

b) A Bose—Einstein-statisztika modellje: m számú, egymástól meg nem különböztethető golyót helyezünk el r számú dobozba. Az elhelyezést véletlenszerűen, vagyis egyenlő valószínűségekkel választjuk ki az összes megkülönböztethető elhelyezés közül. (Mivel a golyók nem különböztethetők meg, tehát két elhelyezés csak akkor tekinthető különbözőnek, ha vannak olyan dobozok, amelyek e két elhelyezéskor különböző számú golyót tartalmaznak.) Jelölje $A_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ most is ugyanazt az eseményt, mint az előbb. Ennek valószínűségét számítjuk ki. Az összes lehetséges golyóeloszlás számát keressük. Gondolatban az m golyót egy sorba rakjuk, ezután a golyósor két szélére egy-egy határfalat, ezek közé pedig tetszőlegesen további $r-1$ válaszfalat húzunk. Az egyik határfaltól kiindulva, a válaszfalak és a másik határfal r darab közt határoznak meg.

Az egyes közök rendre egy-egy doboznak felelnek meg, és a köztük levő golyók adják meg, hány golyó kerül a dobozba. Mivel lehet üres doboz is, válaszfalak egymás mellé is kerülhetnek. A golyók és a válaszfalak összesen $m+r-1$ helyet foglalnak el. E helyekből a válaszfalak számára $r-1$ választható tetszőlegesen. Tehát az összes elhelyezkedési lehetőséget úgy kapjuk, hogy $m+r-1$ elem $(r-1)$-edosztályú kombinációinak számát vesszük:

$$n = C_{m+r-1}^{r-1} = \binom{m+r-1}{r-1} = \binom{m+r-1}{m}.$$

Mivel a kedvező lehetőségek száma $k=1$, tehát egy bizonyos golyóeloszlás valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A_{l_1, l_2, \ldots, l_r}) = \frac{k}{n} = \frac{1}{\binom{m+r-1}{m}}.$$

c) A Fermi—Dirac-statisztika modellje: m számú, egymástól meg nem különböztethető golyót r $(r \geqq m)$ számú dobozba helyezünk el, mégpedig úgy, hogy egy dobozba legfeljebb egy golyó kerülhet. A megkülönböztethető elhelyezések közül véletlenszerűen — vagyis azonos valószínűségekkel — választhatunk. Legyen $A_{l_1 l_2 \ldots l_r}$ most is az az esemény, mint az előzőkben, ahol most az l_i számok mindegyike csak 0 vagy 1 lehet. Kiszámítjuk ennek az eseménynek valószínűségét. Az összes lehetőségek számát úgy kapjuk, hogy az r számú dobozból tetszőlegesen kiválasztunk m-et, amelyekbe golyók kerülnek, vagyis r elem m-edosztályú kombinációinak számát vesszük:

$$n = C_r^m = \binom{r}{m}.$$

Egy meghatározott elhelyezkedés csak egyféle módon következhet be, így a kedvező esetek száma $k=1$. Tehát egy bizonyos golyóelhelyezés valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A_{l_1, l_2, \ldots, l_r}) = \frac{1}{\binom{r}{m}}.$$

A következő Gyakorló feladatok csak a statisztikák illusztrálására szolgálnak, ezért ahol szükséges, előre előírjuk, hogy melyikkel kell számolni.

Gyakorló feladatok

1. 10 sportoló részére 3 öltözőhelyiség áll rendelkezésre. Mindegyik sportoló véletlenszerűen választ egy-egy öltözőt. Mi a valószínűsége annak, hogy az első öltözőt 3, a másodikat 5, a harmadikat 2 sportoló választja?

A kiválasztás módszeréből következik, hogy a Maxwell—Boltzmann-statisztika alapján kell számolnunk. A vizsgált eseményt A-val jelöljük. A sportolók száma $m=10$. Az öltözőhelyiségek száma $r=3$. Az öltözőkbe rendre $l_1=3$, $l_2=5$, $l_3=2$ sportoló kerül. Így az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{m!}{l_1!\,l_2!\,l_3!}\,\frac{1}{r^m}=\frac{10!}{3!\,5!\,2!}\,\frac{1}{3^{10}}\approx 0{,}043.$$

Tehát a vizsgált esemény valószínűsége kb. 0,043.

2. Egy tehervonat 3 kocsijára 8 egyforma ládát kell felrakni. A ládák szétosztása tetszőleges. Mi a valószínűsége annak, hogy a kocsik közül az elsőbe 1, a másodikba 2, a harmadikba 5 láda kerül, ha *a)* mindegyik ládát véletlenszerűen rakják fel a 3 kocsi egyikére; *b)* úgy rakják fel a ládákat, hogy a Bose—Einstein-statisztika feltételei teljesülnek?

a) A feladatból következik, hogy a Maxwell—Boltzmann-statisztika alapján kell számolnunk. Mivel $m=8$ és $r=3$, tehát

$$P(A_{1,2,5})=\frac{8!}{1!\,2!\,5!}\cdot\frac{1}{3^8}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{2}\,\frac{1}{3^8}=\frac{56}{2187}\approx 0{,}025.$$

b) Ha a Bose—Einstein-statisztikát kell használnunk, akkor az $A_{1,2,5}$ elosztás valószínűsége — mint bármely más elosztásé —

$$\mathbf{P}(A_{1,2,5})=\frac{1}{\binom{m+r-1}{m}}=\frac{1}{\binom{8+3-1}{8}}=\frac{1}{\binom{10}{8}}=\frac{1}{\frac{10!}{8!\,2!}}=$$

$$=\frac{2}{10\cdot 9}=\frac{1}{45}\approx 0{,}0222.$$

3. 10 feketekávés csészébe összesen 6 darab kockacukrot teszünk úgy, hogy minden csészébe legfeljebb egy cukrot dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy négy személy, aki keserűen szereti a feketét, véletlenül éppen a négy cukor nélküli kávét választja?

A feladatból következik, hogy a Fermi—Dirac-statisztikát kell használnunk. Jelöljük az adott választásnak megfelelő egyetlen elosztást A-val.

A cukrok száma $m=6$, a csészék száma $r=10$. Az A esemény valószínűsége tehát:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{\binom{r}{m}}=\frac{1}{\binom{10}{6}}=\frac{1}{\frac{10!}{6!\,4!}}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{210}.$$

Vagyis a meghatározott elosztás valószínűsége $\frac{1}{210}$.

4. Egy moziban 20 sor van. A pénztárnál 6 ember akar ugyanarra az előadásra jegyet váltani. Ha a nézők mindegyik sort ugyanolyan gyakran szokták választani, akkor mi a valószínűsége annak, hogy mind a 6 ember egyazon kiválasztott sorba kér jegyet?

A feladatból következik, hogy a Maxwell—Boltzmann-statisztikát kell használnunk, mégpedig a jegyvásárlók száma $m=6$, a sorok száma $r=20$. Tehát

$$\mathbf{P}(A_{20,0,\dots,0})=\frac{6!}{6!\,0!\,0!\dots 0!}\cdot\frac{1}{20^6}=\frac{1}{20^6}.$$

5. Egy ruhatári fogassoron 8 kabátot helyeztek el egymás utáni számozással. Mi a valószínűsége annak, hogy a kabátok közül előbb a páratlan számmal jelölteket váltják ki?

Ha az első négy vendég által leadott ruhatári jegyeket „golyóknak" tekintjük, a rajtuk feltüntetett sorszámú fogast pedig a „doboznak", ahová kerülnek, akkor nyilván Fermi—Dirac-statisztikáról van szó, ahol $r=8$ és $m=4$, és egyetlen golyóelhelyezés valószínűségét keressük. Vagyis

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{\binom{r}{m}}=\frac{1}{\binom{8}{4}}=\frac{1}{\frac{8!}{4!\,4!}}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{70}.$$

Tehát $\frac{1}{70}$ a valószínűsége annak, hogy a páratlan számmal jelölt kabátokat váltják ki előbb.

6. Egy háromemeletes szállodának emeletenként 12 szobája van. Egy időpontban éppen 10 szobában vannak vendégek. Ha minden új vendég számára véletlenszerűen választanak ki egyet az éppen üres szobák közül, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az első emeleten minden szoba üres?

A feladatból következik, hogy a Fermi—Dirac-statisztikát kell használnunk. Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A szállodai szobák száma $r=36$. A foglalt szobák száma $m=10$. Az összes lehetőségek száma:

$$n=\binom{r}{m}=\binom{36}{10}.$$

Az A esemény szempontjából azok az elhelyezések kedvezők, amikor a 10 foglalt szobát a 2. és 3. emeleten levő 24 szobából választjuk; ezeknek száma:

$$k = \binom{24}{10}.$$

Az A esemény valószínűsége így

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{24}{10}}{\binom{36}{10}} \approx 0{,}0077.$$

Tehát kb. 0,0077 a valószínűsége annak, hogy a szálloda első emeletén minden szoba üres.

7. Egy úszómedence végén 8 rajtkő van. A versenyen 6 úszó indul, és sorsolással döntik el, hogy ki melyik rajtkőről indul. Mi a valószínűsége annak, hogy a hármas kőről nem indul versenyző?

Mivel a 8 rajtkő közül 6-ot úgy választanak ki, hogy bármely választás egyenlően valószínű, nyilván Fermi—Direc-statisztikáról van szó, mégpedig $r=8$ és $m=6$. A vizsgált eseményt jelöljük A-val. Először az összes lehető választások számát határozzuk meg, ami

$$n = \binom{r}{m} = \binom{8}{6}.$$

Ezután a kedvező eseteket tekintjük. Ekkor a hármas kő üres, vagyis a felhasználható rajtkövek száma $r-1 = 7$. Így a 6 versenyző elhelyezkedési lehetőségeinek száma:

$$k = \binom{r-1}{m} = \binom{7}{6}.$$

Az A esemény valószínűségét most már felírhatjuk:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{7}{6}}{\binom{8}{6}} = \frac{7!}{6!\,1!}\cdot\frac{6!\,2!}{8!} = \frac{1}{4}.$$

Tehát $\frac{1}{4}$ a valószínűsége annak, hogy a versenyzők üresen hagyják a hármas rajtkövet.

8. Egy orvosi rendelőintézetben 10 különböző szakrendelés van. A rendelési idő kezdetétől számítva fél óra alatt 20 beteg érkezik. Mi a valószínűsége annak, hogy éppen kétféle szakrendelést nem vesznek igénybe ezek a betegek, ha az eddigi tapasztalatok azt mutatják, hogy a

betegek elosztása a rendelések között a Bose—Einstein-statisztika szerint megy végbe?

Bose—Einstein statisztikáról van szó, ahol $r=10$ és $m=20$. A különböző elosztások száma:

$$n = \binom{m+r-1}{r-1} = \binom{20+10-1}{10-1} = \binom{29}{9}.$$

A vizsgált A esemény szempontjából kedvező minden olyan eset, ahol kétféle szakrendelésre nincs jelentkező. E kettő a 10-féle szakrendelésből $C_{10}^2 = \binom{10}{2}$-féleképpen választható ki. Ekkor a többi szakrendelés száma $s = r-2 = 8$, amelyeknek mindegyikére legalább egy beteg jut, s ezen az egy betegen kívül még $t = m-s = 20-8 = 12$ beteg oszlik el közöttük; ez pedig

$$\binom{t+s-1}{s-1} = \binom{12+8-1}{8-1} = \binom{19}{7}$$

féleképpen lehetséges. Így a kedvező esetek száma:

$$k = \binom{10}{2}\binom{19}{7}.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{10}{2}\binom{19}{7}}{\binom{29}{9}} \approx 0{,}23.$$

A vizsgált betegeloszlás valószínűsége tehát kb. 0,23.

9. Egy építészeti pályázatra 30 jeligés pályamű érkezik. Ezeket beérkezésük sorrendjében megszámozzák. A bíráló bizottság 8 tagú. Mindegyik zsüritag egy-egy pályaműre szavaz az értékeléskor. Mi a valószínűsége annak, hogy öten a 14-es, ketten a 29-es és egy zsüritag a 6-os sorszámúra szavaznak, ha feltehetjük, hogy a szavazatok minden lehetséges eloszlása a pályázók között egyformán valószínű?

A feladat feltételeiből következően a Bose—Einstein-statisztikával számolunk.

Az adott értékelésnek megfelelő egyetlen szavazatelosztást jelöljük A-val. A pályaművek száma $r=30$; a zsüritagok száma $m=8$. A meghatározott A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{\binom{m+r-1}{m}} = \frac{1}{\binom{8+30-1}{8}} = \frac{1}{\binom{37}{8}} \approx 2{,}6\cdot 10^{-8}.$$

Tehát az adott szavazatmegoszlás valószínűsége kb. $2{,}6\cdot 10^{-8}$.

10. Egy lóverseny valamely futamában 6 ló indul. Összesen 22 fogadást kötnek a futam győztesére. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödik helyen induló lóra legfeljebb egy fogadást kötnek, ha a tapasztalat szerint a Bose—Einstein-statisztikával kell számolnunk?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A fogadások száma $m=22$, az induló lovak száma $r=6$. Az összes lehetséges elosztások száma:

$$n = \binom{m+r-1}{r-1} = \binom{22+6-1}{6-1} = \binom{27}{5}.$$

Most a számunkra kedvező elosztásokat vizsgáljuk. Az A esemény létrejöhet úgy, hogy egyetlen fogadást sem kötnek az ötödik lóra. Ekkor $s = r-1 = 5$ lóra $m=22$ fogadás történik. A fogadások különböző megoszlásainak száma ez esetben:

$$k_1 = \binom{m+s-1}{s-1} = \binom{22+5-1}{5-1} = \binom{26}{4}.$$

Az A esemény úgy is bekövetkezhet, hogy éppen egy fogadást kötnek az ötödik ló győzelmére. Ekkor $s = r-1 = 5$ lóra $t = m-1 = 21$ fogadást kötnek. Ebben az esetben a lehetséges különböző megoszlások száma:

$$k_2 = \binom{t+s-1}{s-1} = \binom{21+5-1}{5-1} = \binom{25}{4}.$$

Az A esemény szempontjából kedvező esetek teljes száma tehát:

$$k = k_1+k_2 = \binom{26}{4}+\binom{25}{4}.$$

Mivel mindegyik fogadáselosztás egyenlően valószínű, az A esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{26}{4}+\binom{25}{4}}{\binom{27}{5}} \approx 0{,}34.$$

Tehát kb. 0,34 a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy fogadást kötnek az ötödik ló győzelmére.

11. Egy üdülőben 4 család nyaral. Egyik nap a postás 5 levelet hoz. Mi a valószínűsége annak az A eseménynek, hogy az összes levelet egy családnak írták ha feltehetjük, hogy *a)* mindegyik érkező levél egyforma valószínűséggel szól bármely családnak; *b)* a leveleknek a családok közti megoszlása a Bose—Einstein-statisztikát követi?

a) Ez esetben a feladatból következően Maxwell—Boltzmann-statisztikáról van szó. Négy különböző megoszlása a leveleknek kedvező számunkra: az összes levelet az első család, a második, a harmadik,

negyedik család kapja. Ezek mindegyikének nyilván egyenlő a valószínűsége, ezért

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_{5,0,0,0})+\mathbf{P}(A_{0,5,0,0})+\mathbf{P}(A_{0,0,5,0})+\mathbf{P}(A_{0,0,0,5}) =$$

$$= 4\cdot\frac{5!}{5!0!0!0!}\cdot\frac{1}{4^5} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}.$$

Tehát $\frac{1}{256}$ a valószínűsége annak, hogy egyetlen család kapja az összes levelet.

b) Most Bose—Einstein-statisztikával kell számolnunk. Az összes lehetséges levélmegoszlások száma:

$$n = \binom{m+r-1}{r-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}.$$

Az A esemény szempontjából kedvező eset, amikor valamely család kapja az összes levelet. Így a kedvező esetek száma:

$$k=4.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{\frac{8!}{3!5!}} = \frac{4\cdot3\cdot2}{8\cdot7\cdot6} = \frac{1}{14}.$$

Tehát $\frac{1}{14}$ a valószínűsége annak, hogy egyetlen családnak jut az összes levél.

12. Egy felvonó a földszintről 7 személlyel indul felfelé. Az épület 10 emeletes. Ha minden emeleten egyforma számú szoba van, és mindenkit lifttel szállítanak, akkor feltehető, hogy az utasok azonos valószínűséggel szállnak ki bármelyik emeleten. Mi a valószínűsége ez esetben annak, hogy e 7 utas közül egyik emeleten sem száll ki egynél több?

Mivel többen is kiszállhatnak egy emeleten, és mindegyik azonos valószínűséggel száll ki bármely emeleten, a Maxwell—Boltzmann-statisztika alapján számolunk. Jelöljük a vizsgált eseményt A-val, az utasok száma $m=7$, az emeletek száma $r=10$. Az A esemény bekövetkezik, ha 7 emeleten egy-egy utas száll ki, a többin pedig egy sem. Ez a 7 emelet a 10 emeletből $\binom{10}{7}$-féleképpen választható meg. Nyilván minden ilyen eseménynek egyforma a valószínűsége, hiszen egy emelet és egy utas sincs kitüntetve (az $A_{l_1, l_2, \ldots, l_r}$ esemény valószínűségének képletében csak a nevező tényezőinek sorrendje cserélődik fel.) Így elegendő csak egyiküket kiszámítani. Vagyis pl.

$$\mathbf{P}(A) = \binom{10}{7}\mathbf{P}(A_{1,1,1,1,1,1,1,0,0,0}) =$$

$$= \frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{1!1!\dots1!0!0!0!}\cdot\frac{1}{10^7} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{10^6} = \frac{3\cdot7\cdot9}{5^5}.$$

4. Geometriai valószínűségi mező

Ha egy kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg úgy, hogy az egyes események valószínűsége az eseményhez rendelt részhalmaz geometriai mértékével arányos, akkor az események valószínűségei geometriai valószínűségi mezőt alkotnak; a valószínűségeket *geometriai valószínűségeknek* nevezzük.

Legyen A egy ilyen kísérlettel kapcsolatos esemény. A kísérlettel kapcsolatban szóba jövő teljes geometriai alakzat mértéke legyen M, az A eseménynek megfelelő részalakzat mértéke pedig m; ekkor tehát az A esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{M}.$$

Gyakorló feladatok

1. Egy távbeszélőállomás és a központ közötti vezeték hossza 450 m. Mi annak a valószínűsége, hogy az első hiba a vezetéknek a központtól 180 m-nél távolabbi helyén lép fel, ha a vezeték mentén bárhol azonos a meghibásodás veszélye?

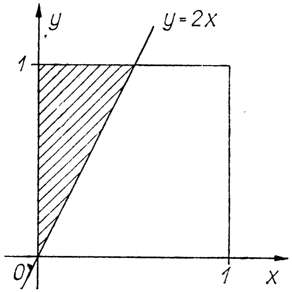
A feladatból következik, hogy a vezeték bármely szakaszán a meghibásodás valószínűsége arányos a szakasz hosszával. Tehát A-val jelölve a vizsgált eseményt, $\mathbf{P}(A):\mathbf{P}(\bar{A}) = (450-180):180$; de nyilván $\mathbf{P}(A)+ +\mathbf{P}(\bar{A}) = 1$. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{P}(A) = [1-\mathbf{P}(A)]\frac{270}{180} = \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathbf{P}(A);$$

$$\frac{5}{2}\mathbf{P}(A) = \frac{3}{2};\quad \mathbf{P}(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Tehát 0,6 a valószínűsége annak, hogy a központtól 180 m-nél távolabb van a hiba.

2. Egy l hosszúságú szakasz egyik végpontja P. Ezen a szakaszon két pontot választunk találomra, vagyis úgy, hogy a szakasz bármely részébe esés valószínűsége arányos a rész-szakasz hosszával. Legyenek ezek a Q és R pontok. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a Q pont közelebb van a P-hez, mint az R-hez!



16. ábra

A vizsgált eseményt jelöljük A-val. A példát átfogalmazzuk úgy, hogy az l hosszúságú szakasznak a (0, 1) intervallumot feleltetjük meg, a P végpontnak pedig az origót. A Q, ill. R pontnak a (0, 1) intervallum x, ill. y koordinátájú pontja felel meg úgy, hogy a távolságok aránya nem változik. Minthogy x és y megválasztása véletlenszerű a fenti értelemben, e két koordinátával tulajdonképpen a sík egységnégyzetének egyik (x, y) pontját választjuk ki véletlenszerűen (16. ábra), azaz úgy, hogy az egységnégyzet bármely résztartományába tartozás valószínűsége arányos e résztartomány területének nagyságával. Az egységnégyzet területe: $T=1$. Az A esemény teljesül, ha

$$x < y-x,$$

vagyis

$$2x < y.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek megfelel az egységnégyzetben a vonalkázott rész, melynek területe:

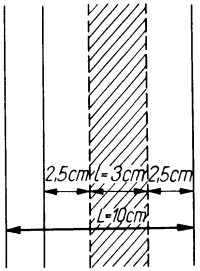
$$t = \frac{1}{4}.$$

Az A esemény valószínűsége e területrész aránya az egységnégyzet teljes területéhez, vagyis

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = \frac{1}{4}.$$

Tehát $\frac{1}{4}$ a valószínűsége annak, hogy a Q pont közelebb kerül a P-hez, mint az R-hez.

3. Párhuzamos egyenes vonalakat húzunk egy síklapra. A szomszédos vonalak közti távolság váltakozva 8 cm és 2 cm. Véletlenszerűen egy 2,5 cm sugarú körlapot ejtünk a lapra, vagyis úgy, hogy a kör középpontja a sík bármely résztartományába e tartomány nagyságával arányos valószínűséggel esik. Mi a valószínűsége annak, hogy a körlap egyetlen vonalszakaszt sem fed?



17. ábra

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Vegyünk fel három szomszédos vonalat (17. ábra). Elegendő ezt, ill. egy ezen vonalakra merőleges egyenest tekinteni és ezen vizsgálni a középpont véletlen elhelyezkedését. Ha a középpont a szélső szakaszok közti $L=10$ cm egyenesszakaszon helyezkedik el, akkor a körlap csak az esetben nem fedi egyik párhuzamost sem, ha középpontja a 8 cm távolságra levő párhuzamosok között középen elhelyezkedő $l=3$ cm széles szakaszra jutott. Az A esemény valószínűségét a szakaszok hányadosa adja:

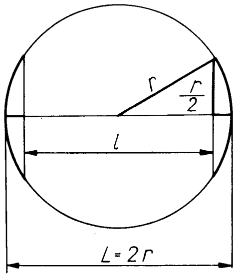
$$\mathbf{P}(A)=\frac{l}{L}=\frac{3}{10}.$$

Tehát $\frac{3}{10}$ a valószínűsége annak, hogy a körlap nem fed egyenesszakaszt.

4. Egy r sugarú körben adott iránnyal párhuzamos húrt veszünk fel. Mi a valószínűsége annak, hogy a húr hossza kisebb, mint a kör sugara, ha a húrt úgy választjuk, hogy *a)* meghúzzuk az adott irányra merőleges átmérőt és ezen vesszük fel véletlenszerűen a húr felezőpontját; *b)* a kör kerületén vesszük fel véletlenszerűen a húr egyik végpontját?

a) Legyen A a vizsgált esemény. Az r sugarú körben (18. ábra) meghúzzuk az adott irányra merőleges átmérőt, amelynek hossza $L=2r$. A felvett húr ezt az átmérőt a húr felezőpontjában metszi. Az $\bar{A}$ esemény következik be, ha a húr az átmérőt az

$$l=2\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=2\sqrt{\frac{3r^2}{4}}=r\sqrt{3}$$



18. ábra

hosszúságú, a középpontra szimmetrikus szakaszán metszi. Az $\bar{A}$ esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A})=\frac{l}{L}=\frac{r\sqrt{3}}{2r}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az ellentett események valószínűségeire vonatkozó összefüggés szerint:

$$\mathbf{P}(A)=1-\mathbf{P}(\bar{A})=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1-0{,}87=0{,}13.$$

Tehát kb. 0,13 a valószínűsége annak, hogy az ily módon véletlenül választott húr hossza kisebb a sugárnál.

b) Az A esemény akkor következik be, ha a húr kiválasztott végpontja két olyan köríven fekszik, amelyeknek mindegyikéhez 60°-os középponti szög tartozik; ezek szerint az A esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}=\frac{1}{3}.$$

Mint ebből a példából is látható, az ilyen jellegű feladatoknál mindig gondosan tisztázni kell, mit értünk „véletlenszerű" megválasztáson, vagyis milyen geometriai valószínűségi mezőről van szó.

5. Egy 10 km hosszú útszakasz két végpontján egy-egy óra van. Ezeken a mutatók kerek percenként ugranak. Egy gépkocsi az egyik végponttól olyankor indul, amikor itt az órán 12 óra 0 perc van. A másik végpont felé halad 70 km/óra sebességgel. Mi a valószínűsége annak, hogy az érkezés időpillanatában az ottani óra már 12 óra 9 percet mutat?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Kiszámítjuk a gépkocsi menet-idejét. Ha az út hossza $s=10$ km és a sebesség $v=70$ km/óra, akkor a menetidő:

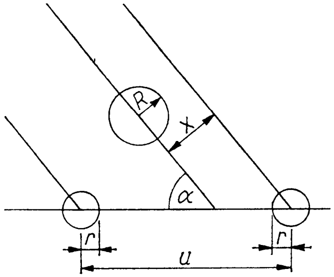
$$\frac{s}{v}=\frac{10\,\text{km}}{70\,\text{km/óra}}=\frac{1}{7}\,\text{óra}=\frac{60}{7}\,\text{perc}=8\frac{4}{7}\,\text{perc}.$$

Az indulás 12 óra és 12 óra 1 perc között történhet és ennek az 1 perces időköznek semmilyen része nincs kitüntetve. Az A esemény akkor következik be, ha a kocsi 12 óra $\frac{3}{7}$ perc és 12 óra 1 perc között indul, vagyis $l=\frac{4}{7}$ perces időközön belül. Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{4}{7}.$$

Tehát $\frac{4}{7}$ annak a valószínűsége, hogy a gépkocsi érkezésekor az ottani óra 12 óra 9 percet mutat.

6. A vízszintes sík egy egyenesén egymástól u távolságra r sugarú hengerek alapkörének középpontjai helyezkednek el. A hengerek magassága h. A síknak az adott egyenessel α szöget képező, de egyébként véletlenül választott valamely másik egyenesén R ($R<h$) sugarú golyó gurul az adott egyenes felé. Mi a valószínűsége annak, hogy a golyó valamely hengerbe ütközik?



19. ábra

Jelöljük a szóban forgó eseményt A-val. Vegyük szemügyre az adott egyenes két szomszédos középpont közötti szakaszát (19. ábra). Tegyük fel, hogy e szakaszon metszi a golyó útja az egyenest. Legyen x a golyó pályájának a hengerek középpontján átmenő, vele párhuzamos egyenesektől való távolságai közül a kisebb. Az x távolság lehetséges értékei az ábra szerint

$$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}u\sin\alpha.$$

Az A esemény bekövetkezik, ha

$$0\leqq x\leqq R+r.$$

Jelöljük az x lehetséges értékeit adó számköz hosszát L-lel, vagyis

$$L=\frac{1}{2}u\sin\alpha.$$

Az x-nek A szempontjából kedvező szakaszának hosszát jelöljük l-lel, erre fennáll tehát

$$l=R+r.$$

Az A esemény, vagyis az ütközés valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\begin{cases}\dfrac{l}{L}=\dfrac{2(R+r)}{u\sin\alpha}, & \text{ha } l\leqq L;\\[2ex] 1, & \text{ha } l>L.\end{cases}$$

7. A Duna egyik szakaszán jégtorlasz keletkezett. Bombákkal robbantják a jeget. A robbanás akkor hatásos, ha olyan pontra esik a bomba, ahol a jég 8 cm-nél vékonyabb. A jég teljes felülete 3000 m², és 500 m² területen vékonyabb 8 cm-nél. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy, a jégtorlaszra eső bomba robbanása hatásos?

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt. Az egész jég felülete $T=3000\text{ m}^2$. Az A esemény bekövetkezése szempontjából kedvező rész területe $t=500\text{ m}^2$. Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{500}{3000}=\frac{1}{6}.$$

Tehát $\frac{1}{6}$ a valószínűsége annak, hogy egy, a jégtorlaszra eső bomba robbanása hatásos.

8. Kör alakú, r sugarú céltáblára lövünk. Annak a valószínűsége, hogy a találat a céltábla valamely kijelölt részére esik, arányos a kijelölt rész területével. A céltáblát koncentrikus körökkel öt részre akarjuk bontani úgy, hogy az egyes részek eltalálásának valószínűsége ugyanakkora legyen. Hogyan kell a körök sugarait megválasztani?

A céltábla területe: $T=r^2\pi$. Egy-egy részbe való találat valószínűsége $\frac{1}{5}$. A részterületek aránya az egész területhez:

$$\frac{t}{T}=\frac{1}{5},$$

ebből

$$t=\frac{T}{5}=\frac{r^2\pi}{5}.$$

A belülről számított k-adik kör sugara legyen r_k. Az r_k sugarú körlap területe egy részterület k-szorosa:

$$r_k^2\pi = kt,$$

vagyis

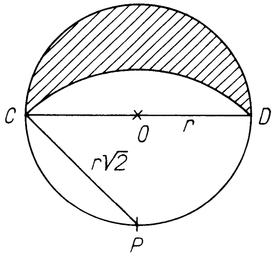
$$r_k^2\pi = k\frac{r^2\pi}{5}.$$

Ebből egyszerűsítés és gyökvonás után azt kapjuk, hogy

$$r_k = r\sqrt{\frac{k}{5}}.$$

Tehát az eredeti sugár $\sqrt{\frac{k}{5}}$ számmal való szorzása ($k=1, 2, 3, 4$) adja a keresett sugarakat.

9. Egy r sugarú kör kerületén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találomra választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $r\sqrt{2}$?



20. ábra

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Az O középpont körül rajzolt r sugarú körön megjelöljük a P pontot (20. ábra). A kör OP-re merőleges átmérője CD. A P pontból $PC=r\sqrt{2}$ sugárral körívet húzunk C és D között. Ha a találomra választott pont a vonalkázott részben van, akkor teljesül az A esemény. A teljes körlapon választhatjuk a pontot, amelynek területe:

$$T = r^2\pi.$$

A be nem vonalkázott rész területét számítjuk ki. Ennek egyik része a félkör, amelynek területe

$$t_1 = \frac{r^2\pi}{2};$$

másik része egy körszelet, amelynek területét úgy kapjuk, hogy a $CP=r\sqrt{2}$ sugarú negyedkör területéből kivonjuk a CDP háromszög területét:

$$t_2 = \frac{(r\sqrt{2})^2\pi}{4} - \frac{(r\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2r^2\pi}{4} - \frac{2r^2}{2} = \frac{r^2\pi}{2} - r^2.$$

A be nem vonalkázott rész területe:

$$t_1 + t_2 = \frac{r^2\pi}{2} + \frac{r^2\pi}{2} - r^2 = r^2\pi - r^2.$$

Az esemény szempontjából kedvező, bevonalkázott rész területe:

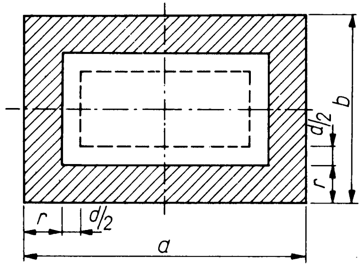
$$t = T - (t_1 + t_2) = r^2\pi - (r^2\pi - r^2) = r^2.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = \frac{r^2}{r^2\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Tehát $\frac{1}{\pi}$ a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $r\sqrt{2}$.

10. Egy téglalap alakú vízszintes hálós rács kör keresztmetszetű acélhuzalokból készült. A huzalok sugara $r=2$ cm. A szomszédos huzalok tengelyei között egyik irányban $a=15$ cm, a másik irányban $b=10$ cm a távolság. A rácsra merőlegesen egy $d=1$ cm átmérőjű golyót ejtünk véletlenszerűen a hálóra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a golyó a rács valamelyik huzaljába ütközik?



21. ábra

Jelöljük A-val a szóban forgó eseményt. Vegyük szemügyre a háló egyik — szomszédos huzalok tengelyei közti — téglalap alakú részét (21. ábra). Ez mindkét irányban egy „periódus”, ezért elegendő ezt a részt vizsgálni. Tegyük tehát fel, hogy erre ejtjük a golyót. E téglalap területe:

$$T = ab = 15\cdot 10 = 150\ \text{cm}^2.$$

A golyó akkor nem ütközik a huzalba, ha a középpontja e téglalap középső, ugyancsak téglalap alakú részére jut. A kisebb téglalap területe:

$$(a-2r-d)(b-2r-d).$$

Az A esemény szempontjából kedvező terület:

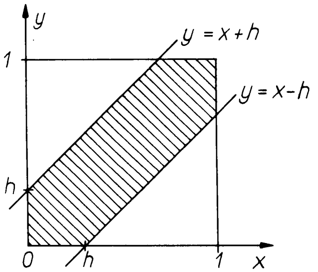
$$t = ab-(a-2r-d)(b-2r-d) =$$
$$= 15\cdot 10-(15-2\cdot 2-1)(10-2\cdot 2-1) =$$
$$= 150-10\cdot 5 = 150-50 = 100\ \text{cm}^2.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}.$$

Tehát $\frac{2}{3}$ a valószínűsége annak, hogy a golyó valamelyik huzalba ütközik.

11. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kijelölünk két pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a köztük levő távolság kisebb, mint egy adott h hossz, ahol $0<h<1$?



22. ábra

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A kijelölt pontoknak a szakasz egyik végpontjától mért távolsága legyen x, ill. y. A két pont felvétele azzal ekvivalens, hogy a sík egységnégyzetének egyik (x, y) pontját választjuk ki véletlenszerűen (22. ábra). Az egységnégyzet területe: $T=1$. Az A esemény teljesül, ha

$$|y-x| < h.$$

Ezen egyenlőtlenségnek megfelelnek az egységnégyzetnek az $y = x+h$ és $y = x-h$ egyenesek közti (az ábrán vonalkázott) részbe eső pontjai. A vonalkázott rész területe:

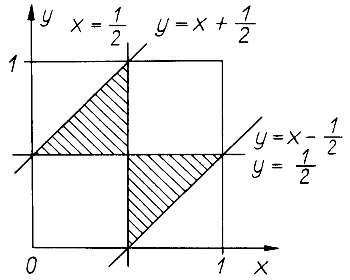
$$t = 1-(1-h)^2 = h(2-h).$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = h(2-h).$$

Tehát $h(2-h)$ annak a valószínűsége, hogy a megjelölt pontok távolsága kisebb, mint h.

12. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Így a szakaszt három részre bontottuk. Mi a valószínűsége annak, hogy ezek a szakaszok egy háromszög három oldalát alkothatják?



23. ábra

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A választott pontoknak az egységnyi szakasz egyik végpontjától mért távolsága legyen x, ill. y. A két pont megjelölése a sík egységnégyzete (x, y) pontjának véletlenszerű kiválasztásával ekvivalens (23. ábra). A pont koordinátái (x, y). Az egységnégyzet területe: $T=1$.

A három szakaszból akkor alkotható háromszög, ha közülük bármelyik kettő hosszának összege nagyobb a harmadik hosszánál. Két esetet különböztethetünk meg:

a) ha $x<y$, akkor a három szakasz: x; $y-x$; $1-y$. Ezekre fenn kell állnia a háromszög-egyenlőtlenségeknek:

$$1-x>x, \quad \text{vagyis} \quad x<\frac{1}{2};$$
$$x+1-y>y-x, \quad \text{vagyis} \quad y<x+\frac{1}{2};$$
$$y>1-y, \quad \text{vagyis} \quad y>\frac{1}{2}.$$

b) ha $y<x$, ez esetben x és y szerepet cserél, tehát a következő egyenlőtlenségeknek kell egyidejűleg teljesülniök:

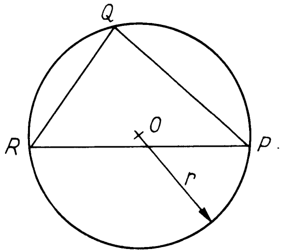
$$y<\frac{1}{2}; \quad y>x-\frac{1}{2}; \quad x>\frac{1}{2}.$$

A két eset egyenlőtlenség-rendszereinek eleget tevő pontok a vonalkázott részbe esnek, amelynek területe: $t=\frac{1}{4}$. Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{1}{4}.$$

Tehát $\frac{1}{4}$ a valószínűsége annak, hogy a véletlen szakaszokból háromszög alkotható.

13. Egy r sugarú körön három pontot találomra kijelölünk. A körön pozitív körüljárási irányba indulunk el az egyikből. Ezt jelöljük P-vel, a másik kettő sorban Q és R legyen. E pontokat összekötve, egy háromszöget kapunk (24. ábra). Mi a valószínűsége annak, hogy a háromszög hegyesszögű?



24. ábra

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A körön pozitív körüljárási irányban haladva, a P ponttól Q-ig megtett ív hossza legyen x, a P ponttól R-ig haladó ív hossza pedig legyen y; ily módon x és y a $(0, 2\pi r)$ számközbe eső egy-egy szám. Ezeknek megfeleltethető a sík $2\pi r$ oldalú négyzetének (x, y) koordinátájú pontja.

Az A esemény teljesül, vagyis a háromszög hegyesszögű, ha a szögekhez mint kerületi szögekhez tartozó körívеknek mindegyike a félkörnél kisebb. Két esetet különböztetünk meg:

a) ha $x<y$, ekkor a következő egyenlőtlenségeknek kell egyidejűleg teljesülniök:

Az R csúcshoz tartozó x körívre $x<\pi r$;
A P ponthoz tartozó $y-x$ körívre $y-x<\pi r$, vagyis $y<x+\pi r$;
A Q ponthoz tartozó $2\pi r-y$ körívre $2\pi r-y<\pi r$, vagyis $y>\pi r$.

b) ha $y<x$, ebben az esetben az előzőkhöz képest x és y szerepet cserél, ennélfogva a következő egyenlőtlenségeknek kell egyidejűleg fennállniok:

$y<\pi r$;

$x-y<\pi r$, vagyis $y>x-\pi r$;

$2\pi r-x<\pi r$, vagyis $x>\pi r$.

A két eset egyenlőtlenség-rendszereinek megfelelő pontokat a sík $2\pi r$ oldalú négyzetében találhatjuk meg. Ha hasonlósági transzformációval a négyzetet a sík egységnégyzetébe (23. ábra) visszük át, akkor az A szempontjából kedvező terület $t=\frac{1}{4}$, az egész terület pedig $T=1$. Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{1}{4}.$$

Tehát $\frac{1}{4}$ a valószínűsége annak, hogy a három pont hegyesszögű háromszög csúcsa.

14. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a keletkezett három rész egyike sem hosszabb, mint egy adott $d\left(\frac{1}{3}\leq d\leq 1\right)$ hosszúság! Rajzoljuk fel e valószínűségnek mint d függvényének görbéjét!

Legyen A a vizsgált esemény. A választott pontoknak az egységnyi szakasz egyik végpontjától mért távolságát jelöljük x-szel, ill. y-nal. A két pont kiválasztását úgy is elvégezhetjük, hogy a sík egységnégyzetének (x, y) koordinátájú pontját választjuk ki véletlenszerűen. Az egységnégyzet területe: $T=1$. Az egységnégyzet A eseménynek megfelelő pontjait keressük. Két esetet különböztetünk meg:

a) $x<y$.

Ekkor a következő egyenlőtlenségeknek kell egyidejűleg teljesülniük:

$x<d$;

$y-x<d$; vagyis $y<x+d$;

$1-y<d$; vagyis $y>1-d$.

b) $y<x$.

Ez esetben egyidejűleg fenn kell állnia a következő egyenlőtlenségeknek:

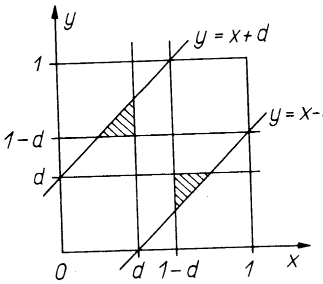
$y<d$;

$x-y<d$; vagyis $y>x-d$;

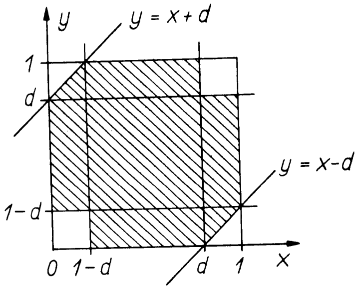
$1-x<d$; vagyis $x>1-d$.

Mindkét esetben két további alesetet kell megkülönböztetnünk d értéke szerint. Az $\frac{1}{3}\leq d\leq\frac{1}{2}$ esetben (25. ábra) az A esemény szempontjából kedvező vonalkázott terület:

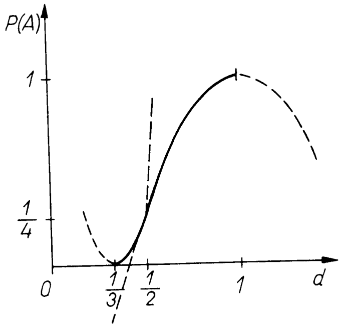
$$t=(3d-1)^2.$$



25. ábra



26. ábra



27. ábra

Az $\frac{1}{2} \leqq d \leqq 1$ esetben (26. ábra) az A esemény szempontjából kedvező, vonalkázott terület:

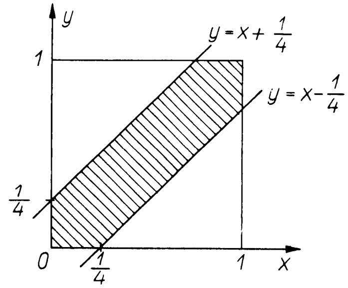
$$t = 1-3(1-d)^2.$$

Az A esemény valószínűsége tehát:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = \begin{cases} (3d-1)^2, & \text{ha } \frac{1}{3} \leqq d \leqq \frac{1}{2}; \\ 1-3(1-d)^2, & \text{ha } \frac{1}{2} \leqq d \leqq 1. \end{cases}$$

Az A esemény valószínűségét a d változó függvényében két, egymáshoz csatlakozó parabolaszakaszból álló görbe (27. ábra) szemlélteti.

15. Két személy megbeszéli, hogy délelőtt 10 és 11 óra között egy adott helyen találkoznak. Érkezésük a megbeszélt időn belül véletlenszerű. Mi a valószínűsége annak, hogy az előbb jövőnek nem kell egy negyed óránál többet várnia a másikra?



28. ábra

Jelöljük a szóban forgó eseményt A-val. Érkezzék az egyik személy x, a másik személy y idővel (órában kifejezve) 10 óra után. E két időmennyiségnek feleltessük meg a sík egységnégyzetének (x, y) koordinátájú pontját (28. ábra). Az egységnégyzet területe: $T=1$. Az A esemény teljesül, ha

$$|y-x| \leqq \frac{1}{4}.$$

Ebből két összefüggés adódik, melyeket az A szempontjából kedvező pontok koordinátáinak egyidejűleg ki kell elégíteniök:

$$y \geqq x-\frac{1}{4} \quad \text{és} \quad y \leqq x+\frac{1}{4}.$$

Az A esemény szempontjából kedvező, bevonalkázott rész területe:

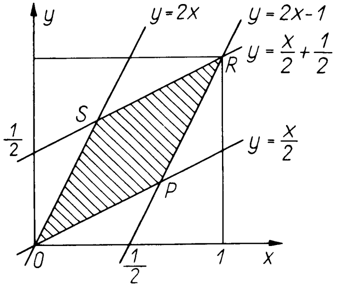
$$t = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Tehát az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{7}{16}.$$

Tehát $\frac{7}{16}$ a valószínűsége annak, hogy a találkozón az előbb érkező nem vár negyed óránál többet a később jövőre.

16. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint bármelyik a végpontokhoz?



29. ábra

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A választott pontoknak az egységnyi hosszúságú szakasz egyik végpontjától mért távolsága legyen x, ill. y.

Belátható, hogy a két pont kiválasztását megfeleltethetjük a sík egységnégyzete (x, y) koordinátájú pontja kiválasztásának (29. ábra), mert a megfelelő eseményekhez ugyanazokat a valószínűségeket rendelik hozzá. Az egységnégyzet területe: $T=1$.

Az egységnégyzetnek azokat a pontjait keressük, amelyekben az A esemény teljesül. Két esetet különböztetünk meg:

a) $x<y$.

Ekkor a következő egyenlőtlenségeknek kell egyidejűleg teljesülniök:

$y-x<x$, vagyis $y<2x$;

$y-x<1-y$, vagyis $y<\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

b) $y<x$.

Ez esetben a következő egyenlőtlenségeknek kell egyidejűleg fennállniok:

$x-y<y$, vagyis $y>\frac{x}{2}$;

$x-y<1-x$, vagyis $y>2x-1$.

Az A esemény szempontjából kedvező, bevonalkázott rész területét számítjuk ki. Ez rombusz, így területe az átlók szorzatának fele:

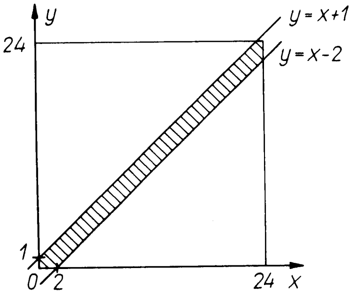
$$t=\frac{\overline{OR}\cdot\overline{PS}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}{2}=\frac{1}{3}.$$

Tehát az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{1}{3}.$$

Azt kaptuk, hogy $\frac{1}{3}$ valószínűséggel lesz a két pont közelebb egymáshoz, mint a végpontokhoz.

17. Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban két hajó érkezik. Az előbb érkezőn rögtön megkezdik a rakodást, mely az egyiken egy órát, a másikon két órát vesz igénybe. Ha a második hajó akkor érkezik, amikor a másikon még rakodnak, úgy várakoznia kell a rakodás befejeztéig. Mi a valószínűsége annak, hogy valamelyik hajónak várakoznia kell a rakodásra?



30. ábra

A vizsgált eseményt jelöljük A-val. A 24 órás időtartam kezdetétől számítva az egyórás rakodóidejű hajó érkezéséig eltelt idő legyen x, a kétórás rakodóidejű hajó érkezéséig y (órában kifejezve). E két időintervallumnak feleltessük meg a felvázolt 24 egységnyi oldalhosszúságú négyzet (x, y) koordinátájú pontját (30. ábra). A négyzet területe:

$$T=24^2=576.$$

Az A eseménynek megfelelő pontok helyét keressük.

Két esetet különböztetünk meg:

a) $x<y$.

Ekkor az A esemény úgy teljesül, ha

$$y-x<1, \quad \text{vagyis} \quad y<x+1.$$

b) $y<x$.

Ez esetben akkor teljesül az A esemény, ha

$$x-y<2, \quad \text{vagyis} \quad y>x-2.$$

Az egyenlőtlenségeknek eleget tevő pontok a bevonalkázott részbe esnek. Az A esemény szempontjából kedvező terület:

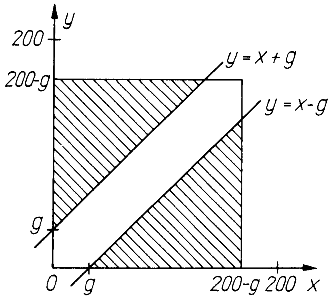
$$t=576-\left(\frac{22^2}{2}+\frac{23^2}{2}\right)=69{,}5.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{69{,}5}{576}\approx 0{,}12.$$

Tehát kb. 0,12 a valószínűsége annak, hogy a kikötőben valamelyik hajónak várakoznia kell a rakodásra.

18. 200 m hosszú magnetofonszalag mindkét sávjának egy-egy azonos hosszúságú szakaszára híranyagot akarunk felvenni. Milyen hosszú szakaszt kell választanunk ahhoz, hogy 0,5 valószínűséggel ne kerüljenek még részben sem egymás mellé a sávok híranyagot tartalmazó, véletlenszerűen választott szakaszai?



31. ábra

Jelöljük g-vel a keresett hosszúságot. A g hosszúságú szakasz kezdőpontja legyen a szalag elejétől az egyik sávon x méter, a másikon y méter. E két távolságnak megfeleltethető a derékszögű koordinátarendszerben alkalmasan elhelyezett $200-g$ oldalú négyzet (x, y) koordinátájú pontja (31. ábra). A szalagon történő véletlen kiválasztásnak pedig megfelel egy pont véletlen választása a négyzetben. A négyzet területe:

$$T=(200-g)^2.$$

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a g $(g<100)$ hosszúságú híranyagot tartalmazó szakaszok részben sem kerülnek egymás mellé. (Ha ui. $g\geqq 100$, akkor e szakaszok egyes részei biztosan egymás mellé kerülnek.) Az A esemény teljesül, ha

$$|x-y|>g.$$

Ez vagy úgy jöhet létre, hogy

$$x-y>g, \quad \text{vagyis} \quad y<x-g,$$

vagy pedig úgy, hogy

$$x-y<-g, \quad \text{vagyis} \quad y>x+g.$$

Ezen egyenlőtlenségek valamelyikének eleget tevő pontok a bevonalkázott részbe esnek. Az A esemény szempontjából kedvező rész területe:

$$t=(200-2g)^2.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{(200-2g)^2}{(200-g)^2}.$$

Minthogy a feltétel szerint $\mathbf{P}(A)=0{,}5$, g-re a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{(200-2g)^2}{(200-g)^2}=\frac{1}{2}.$$

Mindkét oldalon négyzetgyököt vonunk. Csak a pozitív gyök adhat megoldást.

$$\frac{200-2g}{200-g}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rendezzük és megoldjuk az egyenletet.

$$200\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,g=200-g;$$

$$(2\sqrt{2}-1)g=200(\sqrt{2}-1);$$

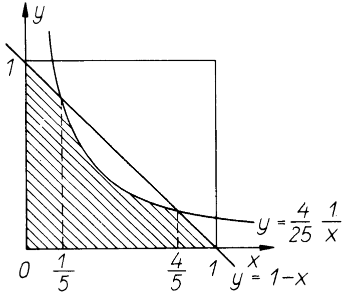
$$g=200\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1}\approx 45.$$

Tehát a szalag egyes sávjain kb. 45 m hosszúságú szakaszokat kell választanunk.

19. Két számot választunk találomra a (0, 1) számközben. Mi a valószínűsége annak, hogy összegük 1-nél, szorzatuk pedig $\frac{4}{25}$-nél kisebb?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A két választott x és y számnak a sík egységnégyzetének (x, y) koordinátájú pontját feleltetjük meg (32. ábra). Az A esemény fennáll, ha az

$$x+y<1 \quad \text{és az} \quad xy<\frac{4}{25}$$



32. ábra

egyenlőtlenségek egyidejűleg teljesülnek. Az ezeknek az egyenlőtlenségeknek eleget tevő pontok a négyzet bevonalkázott részére esnek. Tehát a bevonalkázott rész területét kell kiszámítanunk. Meghatározzuk az

$$x+y=1 \quad \text{egyenes és az} \quad xy=\frac{4}{25} \quad \text{hiperbola}$$

metszéspontjait. Ehhez az egyenletrendszert megoldjuk. Az első egyenletből kifejezzük y-t, és a második egyenletbe helyettesítjük a kapott kifejezést:

$$y=1-x;$$

$$x(1-x)=\frac{4}{25};$$

$$x-x^2=\frac{4}{25};$$

$$x^2-x+\frac{4}{25}=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}}{2}=\frac{1\pm\frac{3}{5}}{2},$$

$$x_1=\frac{4}{5}; \quad x_2=\frac{1}{5}.$$

A megfelelő ordinátákat visszahelyettesítéssel kapjuk:

$$y_1=\frac{1}{5}; \quad y_2=\frac{4}{5}.$$

A bevonalkázott részben a $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ és a $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$ abszcisszák közé eső darabok együttesen $\frac{1}{5}$ nagyságú területet adnak.

A középső szakaszon az $y=\frac{4}{25}\cdot\frac{1}{x}$ hiperbola alatti darab területe:

$$\frac{4}{25}\int_{1/5}^{4/5}\frac{1}{x}\,dx=\frac{4}{25}[\ln x]_{1/5}^{4/5}=\frac{4}{25}\left(\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{25}\ln 4.$$

Az A esemény szempontjából kedvező rész területe:

$$t=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}\ln 4.$$

Az A esemény valószínűsége (mivel az egységnégyzet területe egységnyi):

$$\mathbf{P}(A)=\frac{t}{T}=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}\ln 4\approx 0{,}42.$$

Tehát kb. 0,42 a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen választott számok kielégítik a feltételeket.

20. Egységnyi hosszúságú szakaszt két részre bontunk egy találomra választott ponttal, majd a két rész közül a hosszabbikon még egy pontot választunk és ezzel ezt is kettéosztjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kapott három darabból háromszög alkotható?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Legyen az első pont megválasztása után keletkezett hosszabb rész x hosszúságú. Fennáll

$$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1.$$

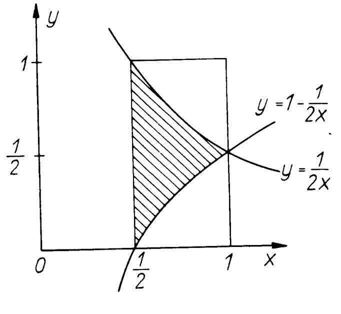
Az x hosszúságú szakaszon felvesszük a másik pontot. Ennek a szakasz egyik végpontjától mért távolságát célszerű xy-nal jelölni. Fennáll

$$0\leqq y\leqq 1.$$

A kapott x és y értékeknek megfeleltetjük a sík (x, y) koordinátájú pontját.

Az ily módon nyerhető pontok egy téglalapra esnek (33. ábra), melynek területe:

$$T = \frac{1}{2}.$$



33. ábra

Az A esemény teljesül, vagyis a részekből háromszög alkotható, ha az eredetileg hosszabb szakasz részei sem nagyobbak $\frac{1}{2}$-nél, hiszen ekkor mindhárom szakasz rövidebb, mint $\frac{1}{2}$, és mivel összegük 1, tehát bármely kettő összege nagyobb $\frac{1}{2}$-nél, így a háromszög-egyenlőtlenségek teljesülnek. Ekkor

$$x - \frac{1}{2} \leqq xy \leqq \frac{1}{2}.$$

Ebből x-szel végigosztva adódik:

$$1 - \frac{1}{2x} \leqq y \leqq \frac{1}{2x}.$$

Ezen egyenlőtlenségeknek eleget tevő pontok a bevonalkázott részbe esnek, amelynek területe:

$$t = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = [\ln x - x]_{1/2}^{1} =$$

$$= -1 - \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Az A esemény valószínűsége $\left(\text{mivel } T = \frac{1}{2}\right)$:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}38.$$

Tehát kb. 0,38 annak a valószínűsége, hogy a részekből háromszög alkotható.

21. Egy vízszintes síkon, egymástól két egységnyi távolságra párhuzamos egyenesek futnak. Egységnyi hosszúságú tűt ejtünk véletlenszerűen a síkra, amit itt úgy értünk, hogy a tű középpontjának a legközelebbi egyenestől mért távolságát és a tűnek az egyenesekkel alkotott kisebb szögét véletlenszerűen választjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a tű valamelyik egyenest metszi?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val, a tű és a párhuzamos egyenesek közötti kisebb szöget pedig φ-vel. Erre fennáll

$$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Legyen a tű középpontjának a legközelebbi egyenestől való távolsága x. Ennek értéke:

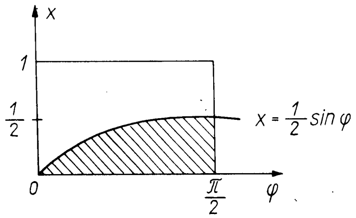
$$0 \leqq x \leqq 1.$$

A tű véletlenszerű „ejtésével" a sík egy téglalapjának (φ, x) koordinátájú pontját szemeljük ki (34. ábra). A téglalap területe:

$$T = \frac{\pi}{2}.$$

Az A esemény bekövetkezik, vagyis a tű metszi az egyik egyenest, ha

$$x < \frac{1}{2}\sin\varphi.$$



34. ábra

Az ezen egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok a téglalap bevonalkázott részébe esnek. Az A esemény szempontjából kedvező terület:

$$t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}[-\cos\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}.$$

Tehát $\frac{1}{\pi}$ a valószínűsége annak, hogy a tű az egyik egyenest metszeni fogja.

22. Az $x^2+2gx+h = 0$ másodfokú egyenlet g és h együtthatóit válasszuk véletlenszerűen a $(-u, u)$, ill. $(-v, v)$ számközből, ahol u és v adott pozitív számok. E kikötések mellett mi a valószínűsége annak, hogy az egyenlet gyökei valós számok lesznek?

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt. Az egyenletben szereplő g és h értékeinek véletlen megválasztását a sík egy $2u$, ill. $2v$ oldalú téglalapja (g, h) koordinátájú pontjának véletlen kiválasztásával is nyerhetjük. E téglalap területe:

$$T = 4uv.$$

Keressük meg most e téglalapnak azokat a pontjait, amelyeknek kiválasztása esetén az A esemény teljesül. A másodfokú egyenlet gyökeit a megoldóképletből kapjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-2g \pm \sqrt{4g^2-4h}}{2} = -g \pm \sqrt{g^2-h}.$$

A gyökök valósak, ha a négyzetgyök alatti mennyiség — a diszkrimináns — nem negatív, vagyis ha

$$g^2 - h \geqq 0.$$

Azaz fenn kell állnia a

$$h \leqq g^2$$

összefüggésnek.

Két esetet különböztetünk meg:

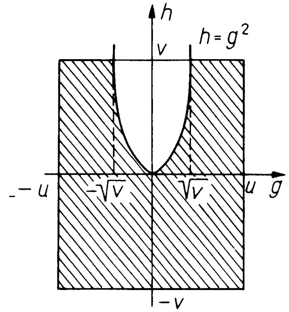
a) $v \leqq u^2$.

Ez esetben a téglalap $h=v$ egyenesre eső oldala metszi a $h=g^2$ parabola szárait (35. ábra). A metszéspontok abszcisszái: $-\sqrt{v}$ és $\sqrt{v}$. Az A esemény szempontjából kedvező bevonalkázott rész területe ekkor:

$$t = 2uv + 2v(u-\sqrt{v}) + \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} g^2 \, dg = 4uv - 2v\sqrt{v} + \left[\frac{g^3}{3}\right]_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} =$$

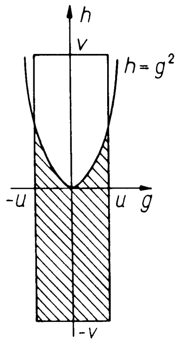
$$= 4uv - 2v\sqrt{v} + \frac{2}{3}(\sqrt{v})^3 = 4uv - \frac{4}{3}v\sqrt{v}.$$

b) $v > u^2$.



35. ábra

Ekkor a téglalap $g = -u$ és $g=u$ egyenesekre eső oldalai metszik a $h=g^2$ parabola szárait (36. ábra). Az A eseményt teljesítő pontokból álló bevonalkázott rész területe:



36. ábra

$$t = 2uv + \int_{-u}^{u} g^2\,dg = 2uv + \left[\frac{g^3}{3}\right]_{-u}^{u} = 2uv + \frac{2}{3}u^3.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy az A esemény teljesül, vagyis hogy a másodfokú egyenlet valós gyököket ad:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{t}{T} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt{v}}{3u}, & \text{ha} \quad v \leqq u^2; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{u^2}{6v}, & \text{ha} \quad v > u^2. \end{cases}$$

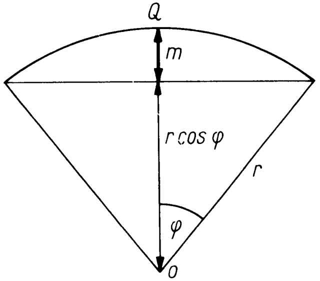
23. Az r sugarú gömbfelületen egy Q pontot rögzítünk. Ezután egy R másik pontot választunk a gömbfelületen véletlenszerűen. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pontba mutató sugarak által bezárt szög kisebb egy adott φ ($\varphi < \pi$) szögnél?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A választott Q pont az r sugarú gömbfelületen helyezkedik el, ennek felszíne:

$$F = 4\pi r^2.$$

Az A esemény szempontjából kedvezően választott pontok egy gömbsüvegen feküsznek. Ennek magassága — miként a gömb O középpontján és a rögzített Q ponton átmenő síkmetszeten (37. ábra) látható

$$m = r - r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi) = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$



37. ábra

Így a gömbsüveg felszíne:

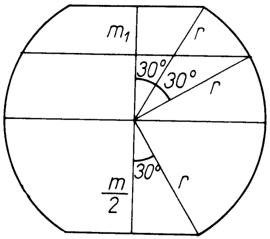
$$f = 2\pi r m = 2\pi r \cdot 2r\sin^2\frac{\varphi}{2} = 4\pi r^2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{f}{F} = \frac{4\pi r^2 \cdot \sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{4\pi r^2} = \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Tehát $\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ a valószínűsége annak, hogy a gömbön felvett pontokba mutató sugarak hajlásszöge φ-nél kisebb.

24. Egy mesterséges égitest kering a Föld körül úgy, hogy a 60°-os északi és a 60°-os déli szélességi kör között bárhol leszállhat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 60°-os és a 30°-os északi szélességi kör között ér le, ha a gömbfelület egy darabjára történő leszállás valószínűsége a felületdarab felszínével arányos?



38. ábra

A vizsgált eseményt jelöljük A-val. Teljesülése esetén a leszállás az r sugarú gömbnek tekintett Föld egy gömbövére történik. Ennek magassága a tengelyen átmenő síkmetszeten (38. ábra) látható:

$$m = 2r\cos 30° = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

Így a leszálláskor szóba jövő gömböv felszíne:

$$F = 2\pi r m = r^2\pi \cdot 2\sqrt{3}.$$

Az A esemény szempontjából kedvező leszállási pontok ugyancsak egy gömbövön vannak, amelynek az ábrán látható magassága:

$$m_1 = r\cos 30° - r\cos 60° = r\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = r\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Ennek a kisebb gömbövnek a felszíne:

$$f = 2\pi r m_1 = r^2\pi(\sqrt{3}-1).$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{f}{F}=\frac{r^2\pi(\sqrt{3}-1)}{r^2\pi\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\approx 0{,}21.$$

Tehát kb. 0,21 a valószínűsége annak, hogy a mesterséges égitest az északi félteke 30°-os és 60°-os szélességi köre között ér le.

25. Egy részecskeszámláló berendezés falában x távolságra a belső falsíktól elemi részecskék keletkeznek. A keletkezett részecskék véletlen irányú egyenes mentén átlagosan r úthosszt tesznek meg. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy átlagos úthosszú részecske a számláló belsejébe jut, ha $x<r^2$.

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt. Ha a részecske végig a falban haladna, akkor egy r sugarú gömbfelület valamely pontjához érne. Ennek felszíne:

$$F=4\pi r^2.$$

Az $x<r$ esetben a gömbfelületnek az A esemény szempontjából kedvező része a belső falsíkon belüli gömbsüveg. A gömbsüveg magassága: $r-x$, így felszíne:

$$f=2\pi r(r-x).$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{f}{F}=\frac{2\pi r(r-x)}{4\pi r^2}=\frac{r-x}{2r}=\frac{1}{2}-\frac{x}{2r}.$$

26. Három egyenesszakaszt választunk véletlenszerűen a $(0, d)$ intervallumból. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három szakaszból háromszög alkotható?

A vizsgált eseményt jelöljük A-val. A három kiválasztott szakasz hossza legyen rendre x, y, z. E számhármas véletlen kiválasztásának megfeleltethető a térben egy d élű kocka egy (x, y, z) koordinátájú pontjának véletlen kiszemelése. A lehetséges pontokat tartalmazó kocka térfogata:

$$V=d^3.$$

Az A esemény a kocka azon pontjainak kiválasztásakor nem következik be, amelyeknek koordinátái között az alábbi összefüggések valamelyike teljesül:

$$x+y<z;$$

$$y+z<x;$$

$$x+z<y.$$

Ezek egy-egy tetraéder pontjait adják, mely tetraéderek a d élű kocka egy-egy síkkal való metszésével adódnak. A tetraéderek három, egy csúcsból kiinduló, egymásra páronként merőleges éle d hosszúságú, így térfogatuk egyenként:

$$\frac{d^3}{6}.$$

Ha e három tetraédert lehasítjuk a kockáról, akkor a megmaradó test pontjaiban az A esemény teljesül. A maradék test térfogata:

$$v=d^3-3\frac{d^3}{6}=\frac{d^3}{2}.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=\frac{v}{V}=\frac{\frac{d^3}{2}}{d^3}=\frac{1}{2}.$$

Tehát $\frac{1}{2}$ a valószínűsége annak, hogy a három szakaszból háromszög alkotható.

27. 200 mm hosszúságú fémrúd egyik alkotója mentén találomra három helyet választunk. E helyeken a rudat elfűrészeljük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pontok közötti rúdszakaszokból kapott darabok közül legalább az egyik 10 mm-nél rövidebb?

Jelöljük A-val a vizsgált eseményt. A három kiválasztott helynek az alkotó egyik végpontjától mért távolságát jelölje x, y, z. E három távolság véletlen megválasztásának megfeleltethető egy 200 egységnyi élhosszúságú kocka valamely (x, y, z) pontjának véletlenszerű kiszemelése. E kocka térfogata:

$$V=200^3.$$

Az A esemény szempontjából kedvező pontok koordinátáira fennáll a következő egyenlőtlenségeknek valamelyike:

$$|x-y|<10;\quad |x-z|<10;\quad |y-z|<10.$$

Azok a pontok, amelyeknek koordinátáira ezeknek az egyenlőtlenségeknek egyike sem áll fenn, a kocka hat különálló részének valamelyikébe esnek. E részekből egy 180 egységnyi élhosszúságú kockatest tehető össze, amelynek térfogata: 180^3. Az A esemény szempontjából kedvező pontok az eredeti kockának az előbb kapott hat, különálló részen kívüli részében vannak, amelynek térfogata:

$$v=200^3-180^3.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{v}{V} = \frac{200^3 - 180^3}{200^3} = 1 - \left(\frac{180}{200}\right)^3 =$$
$$= 1 - 0{,}9^3 = 1 - 0{,}729 = 0{,}271.$$

Tehát 0,271 annak a valószínűsége, hogy a rúd darabjai között van 10 mm-nél rövidebb.

28. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egységnyi hosszúságnál rövidebb, találomra választott élhosszúságú téglatest testátlója az egységnél kisebb?

A vizsgált eseményt jelöljük A-val. A téglatest élei legyenek x, y, z hosszúak. E távolságok véletlenszerű kiválasztásának a (0, 1) intervallumban megfeleltethető az egységkocka egy (x, y, z) pontjának véletlen választása. A kockának az A esemény szempontjából kedvező pontjaira fenn kell állnia az

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

egyenlőtlenségnek. Azt kaptuk így, hogy a kockának az origó középpontú, egységsugarú gömbbe eső pontjai felelnek meg. Ezek egy nyolcadgömbben helyezkednek el, amelynek térfogata:

$$v = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{v}{V} = \frac{\pi}{6}.$$

Tehát $\frac{\pi}{6}$ a valószínűsége annak, hogy a testátló kisebb az egységnél.

IV. FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG

1. A feltételes valószínűség fogalma

Legyen A és B egy kísérlettel kapcsolatos két esemény, ahol a B esemény valószínűsége nem 0, vagyis

$$\mathbf{P}(B) \neq 0.$$

Az A eseménynek a B feltétel melletti $\mathbf{P}(A|B)$ feltételes valószínűsége szemléletesen az A esemény bekövetkezésének a valószínűségét jelenti, feltéve hogy a B esemény bekövetkezett. Definíció szerint:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ebből két esemény szorzatának valószínűsége így számítható:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B).$$

Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, ezek szorzatának valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) =$$
$$= \mathbf{P}(A_n|A_1 \ldots A_{n-1})\mathbf{P}(A_{n-1}|A_1 \ldots A_{n-2}) \ldots \mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1).$$

Például legyen egy dobozban 5 fehér és 5 piros golyó, és számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a harmadik húzásra fehér golyót veszünk ki, ha előbb kétszer egymás után visszatevés nélkül fehéret húzunk. Legyen A az az esemény, hogy a harmadik húzás fehér, B pedig jelentse azt, hogy az első két kihúzott golyó fehér. Az A esemény valószínűségét a B teljesülése esetén vizsgáljuk. Tekintsük a golyók megoszlását a harmadik húzás előtt. Ekkor 3 fehér és 5 piros golyó van a dobozban. Az A esemény szempontjából kedvező esetek száma:

$$k = 3.$$

Az összes lehetőségek száma:

$$n=8.$$

Az A esemény B feltétel melletti valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{k}{n} = \frac{3}{8}.$$

Tehát $\frac{3}{8}$ a valószínűsége annak, hogy harmadik húzásra is fehér golyót veszünk ki.

Másik példaként tekintsük a következőt. Egy követségi fogadásra 5 lengyel, 8 román és 3 bolgár diplomata hivatalos. Egyenként érkeznek, véletlenszerű időpontokban. Meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy közülük elsőnek egy lengyel, másodiknak egy román, harmadiknak egy bolgár diplomata érkezik meg a követségre. Jelentse A_1 azt az eseményt, hogy az első érkező lengyel, A_2 azt, hogy a második román, A_3 pedig azt, hogy a harmadik bolgár. A három esemény együttes bekövetkezésének, vagyis szorzatuk, $A_1A_2A_3$ valószínűségét kell meghatároznunk. Felhasználjuk az események szorzatának valószínűségére vonatkozó összefüggést, mely szerint:

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \mathbf{P}(A_3|A_1A_2)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1).$$

A jobb oldalon álló tényezőket számítjuk ki. Az A_1 esemény szempontjából kedvező esetek száma $k_1=5$, mert 5 lengyel diplomata hivatalos, az összes lehetőség elsőnek érkezésre $n_1=16$, hiszen 16 diplomatából kerülhet ki ez a személy. Így azt kapjuk, hogy:

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{k_1}{n_1} = \frac{5}{16}.$$

Az A_2-nek A_1 feltétel melletti bekövetkezésére a kedvező lehetőségek száma $k_2=8$, mert a 8 román diplomatából érkezhet valamelyik másodiknak, az összes eset pedig $n_2=15$. A feltételes valószínűség így:

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{k_2}{n_2} = \frac{8}{15}.$$

Ezután még az A_3 eseményt tekintjük A_1A_2 bekövetkezése mellett. A kedvező esetek száma $k_3=3$, mert a 3 bolgár meghívottból jöhet szóba egy és $n_3=14$, hiszen ennyien nem érkeztek még meg a három ország küldöttségéből. Ezek alapján:

$$\mathbf{P}(A_3|A_1A_2) = \frac{k_3}{n_3} = \frac{3}{14}.$$

A kapott valószínűségeket behelyettesítjük:

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \frac{3}{14}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{16} = \frac{1}{28}.$$

Tehát $\frac{1}{28}$ annak a valószínűsége, hogy az első három érkezőre az előírt feltételek teljesüljenek.

Gyakorló feladatok

1. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B esetén fennáll a következő egyenlőség, ha feltételezzük, hogy $\mathbf{P}(B)\neq 0$:

$$\mathbf{P}(\bar{A}|B) = 1-\mathbf{P}(A|B).$$

Induljunk ki a bal oldalon álló kifejezésből és alakítsuk át:

$$\mathbf{P}(\bar{A}|B) = \frac{\mathbf{P}(\bar{A}B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

A számlálóban álló mennyiséget akarjuk más alakban írni. A B esemény valószínűsége — minthogy AB és $\bar{A}B$ kizárják egymást — így írható:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(\bar{A}B).$$

Ebből átrendezéssel adódik $\mathbf{P}(\bar{A}B)$-re:

$$\mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB).$$

Ezt helyettesítjük a számlálóban:

$$\mathbf{P}(\bar{A}|B) = \frac{\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = 1-\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = 1-\mathbf{P}(A|B).$$

A kiinduló egyenlőség jobb oldalán álló kifejezést kaptuk meg, így kimutattuk, hogy a felírt egyenlőség valóban azonosság.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre — hacsak $\mathbf{P}(C)\neq 0$ — fennáll a következő egyenlőség:

$$\mathbf{P}([A+B]|C) = \mathbf{P}(A|C)+\mathbf{P}(B|C)-\mathbf{P}(AB|C).$$

A bal oldalon álló kifejezést alakítjuk át:

$$\mathbf{P}([A+B]|C) = \frac{\mathbf{P}([A+B]C)}{\mathbf{P}(C)}.$$

A számlálóban álló mennyiséget a disztributív törvény és az események összegének valószínűségére az előző fejezetben megadott összefüggés alapján átírjuk:

$$\mathbf{P}([A+B]C) = \mathbf{P}(AC+BC) = \mathbf{P}(AC)+\mathbf{P}(BC)-\mathbf{P}(ABC).$$

Ezt írjuk a számláló helyébe, majd a számláló minden tagját a feltételes valószínűség képlete szerint átalakítjuk úgy, hogy az egyes tagokban a C esemény legyen a feltétel:

$$\mathbf{P}([A+B]|C) = \frac{\mathbf{P}(AC)+\mathbf{P}(BC)-\mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(C)} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}(A|C)\mathbf{P}(C)+\mathbf{P}(B|C)\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(AB|C)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(C)} =$$

$$= \mathbf{P}(A|C)+\mathbf{P}(B|C)-\mathbf{P}(AB|C).$$

A jobb oldalon álló kifejezést kaptuk, tehát igazoltuk, hogy az egyenlőség valóban azonosság.

3. Mennyi az A és a B esemény valószínűsége, ha $\mathbf{P}(A|B) = \frac{7}{10}$, $\mathbf{P}(B|A) = \frac{1}{2}$ és $\mathbf{P}(A|\bar{B}) = \frac{1}{5}$? A feltételes valószínűség definíciója alapján az A és B események szorzatának valószínűségét kétféleképpen fejezhetjük ki az egymásra vonatkozó feltételes valószínűségeikkel:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B);$$

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A).$$

A jobb oldalak egyenlőségét felírva:

$$\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A).$$

Ebből — a feltételes valószínűségek számértékeit behelyettesítve — $\mathbf{P}(A)$-t kifejezhetjük $\mathbf{P}(B)$ segítségével:

$$\frac{7}{10}\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(A), \quad \mathbf{P}(A) = \frac{7}{5}\mathbf{P}(B).$$

Ezután az ismeretlenekre egy olyan összefüggést keresünk, melyben ki tudjuk majd azt is használni, hogy $\mathbf{P}(A|\bar{B})$ értéke ismert. Ebből a célból az A eseményt két, egymást kizáró esemény összegére bontjuk a következő módon:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB+A\bar{B}) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B}) =$$

$$= \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{7}{10}\mathbf{P}(B)+\frac{1}{5}[1-\mathbf{P}(B)].$$

A $\mathbf{P}(A)$-ra előzőleg kapott kifejezést behelyettesítve:

$$\frac{7}{5}\mathbf{P}(B) = \frac{7}{10}\mathbf{P}(B)+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\mathbf{P}(B).$$

Ebből

$$\mathbf{P}(B) = \frac{2}{9}.$$

Ezt $\mathbf{P}(A)$ első kifejezésébe visszahelyettesítjük:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{7}{5}\mathbf{P}(B) = \frac{7}{5}\cdot\frac{2}{9} = \frac{14}{45}.$$

Tehát $\frac{14}{45}$ az A és $\frac{2}{9}$ a B esemény valószinűsége.

4. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{5}$ és $\mathbf{P}(B) = \frac{9}{10}$, akkor

$$\frac{7}{9} \leqq \mathbf{P}(A|B) \leqq \frac{8}{9}.$$

Először a bal oldalon álló egyenlőtlenséget mutatjuk ki. A feltételes valószínűség értelmezése szerint:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

A $\mathbf{P}(AB)$ valószínűséget az A és B esemény összegének valószínűsége segítségével fejezzük ki, majd alsó korlátot adunk rá:

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-P(AB),$$

ebből

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A+B),$$

amit a számlálóba helyettesítünk:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A+B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ha a számlálóban $\mathbf{P}(A+B)$ helyébe egyet teszünk, akkor a jobb oldal nem növekedhet, így

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \frac{\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-1}{\mathbf{P}(B)}.$$

A számértékeket behelyettesítve:

$$\mathbf{P}(A|B) \geqq \frac{\frac{4}{5}+\frac{9}{10}-1}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}.$$

Ezután a jobb oldalon álló egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Itt is felírjuk a feltételes valószínűség definícióját, majd felső korlátot adunk:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Mivel az A esemény valószínűsége nem lehet kisebb, mint AB valószínűsége, tehát

$$\mathbf{P}(A|B) \leqq \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

A számértékeket behelyettesítve:

$$\mathbf{P}(A|B) \leqq \frac{\frac{4}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}.$$

Tehát mindkét egyenlőtlenséget igazoltuk.

5. A 32-lapos magyar kártyából 3 lapot húzunk egymás után, visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első kihúzott lap hetes, a második kilences, a harmadik ismét hetes?

Legyen A_1 az az esemény, hogy az első lap hetes. Az A_2 jelentse azt, hogy a második kihúzott lap kilences. Azt az eseményt, hogy a harmadiknak választott lap hetes, jelöljük A_3-mal. Az $A_1A_2A_3$ szorzatnak, vagyis a három esemény együttes bekövetkezésének valószínűségét kell kiszámítanunk. Erre felhasználható a következő összefüggés:

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \mathbf{P}(A_3|A_1A_2)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_1).$$

A jobb oldalon álló tényezőket számítjuk ki. Az A_1 esemény szempontjából kedvező esetek száma $k_1=4$, mert négy hetes van a kártyacsomagban.

Az összes lehetőségek száma az első húzásra $n_1=32$. Az A_1 esemény valószínűsége tehát

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{k_1}{n_1} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

A_1 teljesülése esetén az A_2 eseménynek a megvalósulására a kedvező esetek száma $k_2=4$, mert elsőre nem húztunk kilencest. Az összes esetek száma a második lap húzásakor $n_2=31$. Ezekből azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{k_2}{n_2} = \frac{4}{31}.$$

Az A_1A_2 esemény bekövetkezését feltételezve, vizsgáljuk az A_3 eseményt. A kedvező esetek száma ekkor $k_3=3$, mert egy hetest már előzőleg kihúztunk. Az összes lehetőség száma a harmadik húzásra $n_3=30$. Így a feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(A_3|A_1A_2) = \frac{k_3}{n_3} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

A kapott számértékeket helyettesítjük:

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{31}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{620}.$$

Tehát $\frac{1}{620}$ a valószínűsége annak, hogy a három lap kihúzására az előírt feltételek teljesülnek.

6. Ha nagyon sok kétgyermekes család közül véletlenszerűen választunk egyet, és megtudjuk, hogy legalább az egyik gyermek leány, mennyi akkor annak valószínűsége, hogy van fiú is a családban?

Egy kétgyermekes családban négyféle egyenlően valószínű eset fordulhat elő a gyermekek nemét illetően, mivel mind az első, mind a második gyermek egyenlő valószínűséggel lehet fiú vagy leány. Az idősebb gyermeket elsőnek írva és a leányt l, a fiút f betűvel jelölve, ezek a következők:

ll, lf, fl, ff.

Legyen A az az esemény, hogy legalább az egyik gyermek leány, B pedig jelentse azt, hogy van fiú a családban. Az A teljesülése mellett kell a B esemény valószínűségét meghatároznunk. Ez a feltételes valószínűség átalakítható a következőképpen:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Az AB esemény a négy lehetőségből kettőben áll fenn, így

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Az A esemény, vagyis hogy legalább egy leány van a családban, három esetben teljesül a négy lehetőség közül, így:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}.$$

A számértékeket helyettesítve:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Tehát $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy van fiú a kétgyermekes családban, ha tudjuk, hogy legalább az egyik gyermek leány.

7. Ejtőernyős ugrást hajtanak végre 1500 m²-es területre. Sikeres az ugrása annak, aki a terepen kijelölt 10 m oldalú négyzeten belül ér földet. Külön díjat kap az, aki a négyzet közepén megrajzolt 2 m sugarú körben ér le. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy sikeres ugrást végrehajtó ejtőernyős külön díjat is kap, ha a négyzeten belül a leérkezés bármely helyre egyenlő esélyű?

Legyen A az az esemény, hogy külön díjat kap az ugró. A B esemény jelentse azt, hogy az ugró sikeres ugrást végez. Az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűségét keressük. A B teljesülése esetén szóba jövő egész terület:

$$T = 10^2 = 100\,\text{m}^2.$$

A vizsgált esemény szempontjából kedvező, a négyzet közepén levő kör területe:

$$t = 2^2\pi = 4\pi\ \text{m}^2.$$

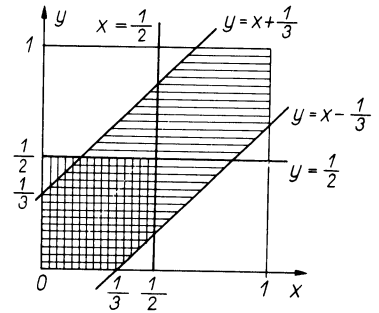
A feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{t}{T} = \frac{4\pi}{100} \approx 0{,}13.$$

Tehát kb. 0,13 a valószínűsége annak, hogy egy sikeres ugrást teljesítő versenyző külön jutalmat is kap.

8. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra két pontot választunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét pont a szakasznak egyik előre kijelölt végpontjához van közelebb, ha a két választott pont egymástól való távolsága kisebb, mint $\frac{1}{3}$?

Legyen A az az esemény, hogy a pontok a szakasz kijelölt végpontjához vannak közelebb. Jelentse B azt, hogy a két választott pont egymástól való távolsága $\frac{1}{3}$-nál kisebb. Tehát az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűségét keressük.



39. ábra

A választott pontoknak a szakasz előre kijelölt végétől mint kezdőponttól mért távolsága legyen x, ill. y. A két pont találomra való választásának megfelel az, hogy a sík egységnégyzetének egyik (x, y) koordinátájú pontját szemeljük ki véletlenszerűen (39. ábra). A B esemény teljesül, ha

$$|y-x| < \frac{1}{3},$$

tehát vagy

$$y > x - \frac{1}{3},$$

vagy pedig

$$y < x + \frac{1}{3}$$

teljesül. Ezeknek az egyenlőtlenségeknek eleget tesznek az egységnégyzet vízszintesen vonalkázott részébe eső pontjainak koordinátái. A vízszintesen vonalkázott rész területe:

$$t_1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Mivel az egységnégyzet területe is egységnyi, így

$$\mathbf{P}(B) = \frac{t_1}{T} = \frac{5}{9}.$$

Az A esemény teljesül, ha az egységnégyzet kiszemelt pontjának koordinátáira fennáll

$$x < \frac{1}{2}$$

és

$$y < \frac{1}{2}.$$

Az ezen egyenlőtlenségeknek megfelelő pontok az egységnégyzet függőlegesen vonalkázott negyedébe esnek. Az AB esemény bekövetkezése szempontjából kedvező pontok az egységnégyzet kétszeresen bevonalkázott részébe esnek, amelynek területe:

$$t_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Tehát az AB esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{t_2}{T} = \frac{2}{9}.$$

Az A esemény B feltétel melletti feltételes valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}.$$

Tehát $\frac{2}{5}$ a valószínűsége annak, hogy mindkét kiválasztott pont, amelynek távolsága $\frac{1}{3}$-nál kisebb, a szakasz előre megjelölt felébe esik.

2. A teljes valószínűség tétele

Ha a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak és $\mathbf{P}(B_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor tetszőleges A esemény valószínűségére érvényes a következő összefüggés.

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(A_2|B_2)\mathbf{P}(B_2) + \ldots +$$

$$+ \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i).$$

Ez a teljes valószínűség tétele.

Gyakorló feladatok

1. Egy műhelyben három műszakban termelnek azonos fajta árut. Egy napon az összes termelt áruból az első műszakban 40%, a másodikban és a harmadikban 30—30% készült. Az első műszakban készült áruk 5%-a, a másodikban gyártottak 7%-a, a harmadikban termeltek 10%-a hibás. A három műszakban elkészült teljes mennyiségből a minőségi ellenőr egy darabot találomra kiválaszt és megvizsgál. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez hibátlan áru?

Legyen A az az esemény, hogy hibátlan arut választ az ellenőr. B_i $(i = 1, 2, 3)$ jelentse azt, hogy az i-edik műszakban készült a kiválasztott darab. A B_i események valószínűségei rendre:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{40}{100}; \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{30}{100}; \quad \mathbf{P}(B_3) = \frac{30}{100}.$$

Az A esemény feltételes valószínűségét írjuk fel B_i $(i = 1, 2, 3)$ feltételek mellett, vagyis azt, hogy milyen valószínűséggel választunk hibátlant az i-edik műszakban gyártott darabokból. E valószínűségek rendre:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{95}{100}; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{93}{100}; \quad \mathbf{P}(A|B_3) = \frac{90}{100}.$$

A teljes valószínűség tételét alkalmazzuk:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \frac{95}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{93}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{90}{100} \cdot \frac{30}{100} =$$

$$= \frac{3800 + 2790 + 2700}{10000} = \frac{9290}{10000} = 0{,}929.$$

Tehát 0,929, vagyis 92,9% a valószínűsége annak, hogy hibátlan darabot választ ki az ellenőr.

2. Televízió-képcsövek kísérleti gyártását végzik egy gyárban. Három tétel készül el. Az első két tétel a teljes mennyiség egy-egy negyedét, a harmadik tétel a felét adja. A vizsgálat során kiderül, hogy az előírt működési óraszámot az első tételnek csak a 10%-a, a másodiknak 20%-a, a harmadiknak 25%-a éri el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy, a teljes mennyiségből találomra kiszemelt képcső az előírt ideig működik?

Az A esemény jelentse azt, hogy a kiszemelt képcső az előírt ideig üzemel. Legyen B_i $(i=1, 2, 3)$ az az esemény, hogy a kiválasztott darab az i-edik tételből való. A B_i események valószínűségei rendre:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(B_3) = \frac{1}{2}.$$

Felírjuk az A eseménynek a B_i $(i=1, 2, 3)$ feltételek melletti valószínűségét, vagyis azt, hogy az egyes tételekből választott képcsövek milyen valószínűséggel üzemelnek a megfelelő ideig. Ezek rendre:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{10}{100}, \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{20}{100}, \quad \mathbf{P}(A|B_3) = \frac{25}{100}.$$

A teljes valószínűség tételét alkalmazzuk:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \frac{10}{100}\cdot\frac{1}{4}+\frac{20}{100}\cdot\frac{1}{4}+\frac{25}{100}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= 0{,}025+0{,}05+0{,}125 = 0{,}2.$$

Tehát 0,2, azaz 20% a valószínűsége annak, hogy a találomra választott képcső az előírt ideig működik.

3. Egy egyetemi vizsgán az A-szakos hallgatók 60%-a, a B-szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az A-szakos hallgatók az évfolyam 15%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázik?

Legyen a vizsgált esemény jele A. A C_1 esemény jelentse azt, hogy a kiszemelt hallgató A-szakos, a C_2 pedig azt, hogy B-szakos hallgatót választottunk ki. A-szakos hallgató kiválasztására $\mathbf{P}(C_1) = \frac{15}{100}$, B-szakos hallgató kiválasztására $\mathbf{P}(C_2) = \frac{85}{100}$ az esély. Írjuk fel ezután a sikeres vizsgázás valószínűségét az A-szakos és a B-szakos hallgatóknál. Az A esemény feltételes valószínűsége C_1 feltétel mellett $\mathbf{P}(A|C_1) = \frac{60}{100}$, C_2 feltétel mellett $\mathbf{P}(A|C_2) = \frac{80}{100}$.

Használjuk fel a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|C_1)\mathbf{P}(C_1)+\mathbf{P}(A|C_2)\mathbf{P}(C_2) =$$

$$= \frac{60}{100}\frac{15}{100}+\frac{80}{100}\cdot\frac{85}{100} = \frac{900+6800}{10000} = \frac{7700}{10000} = 0{,}77.$$

Azt kaptuk, hogy 0,77, azaz 77% annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen szerepel a vizsgán.

4. Azonos fajta árukból két tételünk van. Az első tétel 15, a második tétel 20 darabból áll. Mindkét tételben egy-egy hibás darab van. Az első tételből egy véletlenszerűen választott darabot átteszünk a másodikba. Ezután a második tételből választunk találomra egyet és ezt megvizsgáljuk. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a darab selejtes?

Legyen A az az esemény, hogy a második tételből selejtest húzunk. B jelentse azt, hogy az első tételből jót, $\bar{B}$ pedig azt, hogy hibásat tettünk át a másodikba. Ezeknek az eseményeknek a valószínűségei:

$$\mathbf{P}(B) = \frac{14}{15}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{1}{15}.$$

Ha B következett be, akkor a második tételben 21 darab között csak egy selejtes van és az A esemény feltételes valószínűsége $\mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{21}$. Ha viszont $\bar{B}$ következett be, akkor két selejtes darab van a második tételben és ez esetben A feltételes valószínűsége $\mathbf{P}(A|\bar{B}) = \frac{2}{21}$. Alkalmazzuk most a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B}) =$$

$$= \frac{1}{21}\cdot\frac{14}{15}+\frac{2}{21}\frac{1}{15} = \frac{16}{315}.$$

Tehát $\frac{16}{315}$ annak a valószínűsége, hogy a második tételből selejtest húzunk.

5. Egy céllövöldében három rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben három puska van, ezekkel 0,5 a találat valószínűsége. A második rekeszben egy puska található, ezzel 0,7 valószínűségű a találat. A harmadik rekesz két puskájával 0,8 valószínűséggel találunk célba. Mennyi a találat valószínűsége, ha valaki találomra választ ki egy puskát?

Legyen A a vizsgált esemény. Jelölje B_i $(i=1, 2, 3)$ azt az eseményt, hogy az i-edik rekeszből választunk puskát. A B_i események valószínűségei sorban:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{3}{6}; \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{6}; \quad \mathbf{P}(B_3) = \frac{2}{6}.$$

Felírjuk az A esemény bekövetkezésének valószínűségét az i-edik ($i=1, 2, 3$) rekesz kiválasztását feltételezve. Ezek a feltételes valószínűségek sorban:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = 0{,}5, \quad \mathbf{P}(A|B_2) = 0{,}7, \quad \mathbf{P}(A|B_3) = 0{,}8.$$

Alkalmazzuk a teljes valószínűség tételét:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = 0{,}5\frac{3}{6}+0{,}7\frac{1}{6}+0{,}8\frac{2}{6} =$$

$$= \frac{15}{60}+\frac{7}{60}+\frac{16}{60} = \frac{38}{60} \approx 0{,}63.$$

Tehát egy találomra választott puskával kb. 0,63 a találat valószínűsége.

6. Négy termelőtől egy tehergépkocsival szállítanak almát egy üzletbe. Az első termelőtől való a mennyiség $\frac{1}{10}$ része, melyből 40% elsőosztályú. A második termelőtől szállítják a tétel $\frac{1}{4}$ részét, amely 50%-ban elsőosztályú. A harmadiktól rendelték meg a mennyiség $\frac{2}{5}$ részét, ebből 20% elsőosztályú áru. A többi gyümölcs a negyedik termelőtől kerül az üzletbe és mind elsőosztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az üzletben e szállítmányból találomra kiválasztva egy almát, az elsőosztályú?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) esemény jelentse azt, hogy az i-edik termelőtől való az alma. A B_i események valószínűségei rendre a következők:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{10}, \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(B_3) = \frac{2}{5};$$

$$\mathbf{P}(B_4) = 1-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{4}.$$

Ezután az A eseménynek a B_i események melletti feltételes valószínűségét írjuk fel. Ezek rendre a következők:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2};$$

$$\mathbf{P}(A|B_3) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}; \quad \mathbf{P}(A|B_4) = 1.$$

A teljes valószínűség tételét alkalmazzuk:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{25}+\frac{1}{8}+\frac{2}{25}+\frac{1}{4} = \frac{99}{200} = 0{,}495.$$

Tehát 0,495, azaz 49,5% annak a valószínűsége, hogy a szállítmányból az üzletben véletlenül választva egy almát, elsőosztályú almát választunk.

7. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a harmadiknak kivett golyó piros?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. A harmadik húzás előtt a dobozban levő piros golyók száma lehet 0, ez legyen a B_1 esemény, lehet 1, ez legyen a B_2 esemény; végül lehet 2, ez pedig legyen a B_3 esemény. Legyen továbbá C_1 az az esemény, hogy az első húzásra pirosat veszünk ki, C_2 az az esemény, hogy a második húzásra piros golyót választunk. Mivel $B_1 = C_1C_2$, ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(C_1C_2) = \mathbf{P}(C_2|C_1)\mathbf{P}(C_1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{21}.$$

Mivel B_2-re fennáll a $B_2 = C_1\bar{C}_2+\bar{C}_1C_2$ egyenlőség, ahol $C_1\bar{C}_2$ és $\bar{C}_1C_2$ egymást kizáró események, így a B_2 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_2) = \mathbf{P}(C_1\bar{C}_2+\bar{C}_1C_2) = \mathbf{P}(C_1\bar{C}_2)+\mathbf{P}(\bar{C}_1C_2) =$$

$$= \mathbf{P}(\bar{C}_2|C_1)\mathbf{P}(C_1)+\mathbf{P}(C_2|\bar{C}_1)\mathbf{P}(\bar{C}_1) =$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{7} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}.$$

A B_3 eseményre teljesül, hogy $B_3 = \bar{C}_1\bar{C}_2$, így B_3 valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_3) = \mathbf{P}(\bar{C}_1\bar{C}_2) = \mathbf{P}(\bar{C}_2|\bar{C}_1)\mathbf{P}(\bar{C}_1) = \frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7} = \frac{10}{21}.$$

Ha az A esemény feltételes valószínűségét számítjuk ki a B_i ($i=1, 2, 3$) események mindegyike mellett, akkor a következőket kapjuk:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = 0; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{1}{5}; \quad \mathbf{P}(A|B_3) = \frac{2}{5}.$$

A teljes valószínűség tételét alkalmazzuk:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = 0\cdot\frac{1}{21}+\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{21}+\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{21} = \frac{3\cdot 10}{5\cdot 21} = \frac{2}{7}.$$

Tehát $\frac{2}{7}$ annak a valószínűsége, hogy a harmadik húzásra piros golyót veszünk ki a dobozból.

8. Izzólámpákat 100 db-os csomagolásban szállítanak. Az előző megfigyelésekből ismert, hogy a tételek között azonos arányban fordul elő 0, 1, 2, 3, 4 hibás darabot tartalmazó. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy tételből véletlenszerűen 3 égőt kiválasztva, mindhárom hibátlan lesz?

A vizsgált esemény legyen A. Jelöljük B_i-vel $(i=0,1,2,3,4)$ azt az eseményt, hogy a tételben, amelyből egy darabot húzunk, i darab égő hibás. Ezeknek az eseményeknek a valószínűségei azonosak, mégpedig:

$$\mathbf{P}(B_i) = \frac{1}{5} \qquad (i=0,1,2,3,4).$$

Most állapítsuk meg az A esemény feltételes valószínűségét B_i bekövetkezése mellett. A 3 izzólámpa kiválasztására a 100 darabos tételből az összes lehetőségek száma:

$$n = C_{100}^3 = \binom{100}{3}.$$

A kedvező lehetőségek száma 3 jó izzólámpa kiválasztására, ha a tételben i darab hibás van:

$$k = C_{100-i}^3 = \binom{100-i}{3}.$$

Így a feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(A|B_i) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{100-i}{3}}{\binom{100}{3}} \qquad (i=0,1,2,3,4).$$

A teljes valószínűség tétele szerint:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \sum_{i=0}^{4} \frac{\binom{100-i}{3}}{\binom{100}{3}} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{5\binom{100}{3}} \sum_{i=0}^{4} \binom{100-i}{3} \approx 0{,}94.$$

Tehát kb. 0,94 annak a valószínűsége, hogy a tételből 3 hibátlan izzólámpát választunk.

9. Egy rekeszben 15 labda van, melyek közül 9 új. Az első játékhoz találomra 3 labdát veszünk ki és ezeket a játék után visszatesszük. A második játékhoz ismét 3 labdát veszünk ki találomra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az utóbb kivett labdák mind újak lesznek?

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a másodszorra kivett labdák mind újak. Legyen B_i $(i=0,1,2,3)$ az az esemény, hogy az először választott három labda közül i darab új. A B_i esemény valószínűségét kiszámítjuk. Három labda kiválasztására az összes esetek száma:

$$n = C_{15}^3 = \binom{15}{3}.$$

A kedvező esetek száma három olyan labda kiválasztására, amelyekből éppen i darab új (vagyis ahogyan a 9 új labdából i darabot, és a 6 nem új labdából $3-i$ darabot választhatunk):

$$k_1 = C_9^i C_6^{3-i} = \binom{9}{i}\binom{6}{3-i}.$$

Ezek alapján B_i valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_i) = \frac{k_1}{n} = \frac{\binom{9}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{15}{3}} \qquad (i=0,1,2,3).$$

Ezután az A esemény feltételes valószínűségét határozzuk meg a B_i feltétel mellett. Ha először i darab új labdát választottunk, akkor másodszorra három új labdát már csak $9-i$ új labda közül választhatunk. A kedvező választások száma:

$$k_2 = C_{9-i}^3 = \binom{9-i}{3}.$$

A feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(A|B_i) = \frac{k_2}{n} = \frac{\binom{9-i}{3}}{\binom{15}{3}} \qquad (i=0,1,2,3).$$

A teljes valószínűség tétele szerint

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\binom{9-i}{3}}{\binom{15}{3}} \frac{\binom{9}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{15}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{15}{3}^2} \sum_{i=0}^{3} \binom{9-i}{3}\binom{9}{i}\binom{6}{3-i} =$$

$$= \frac{1}{455^2}(20\cdot 84 + 9\cdot 15\cdot 56 + 36\cdot 6\cdot 35 + 84\cdot 20) \approx 0{,}089.$$

Tehát kb. 0,089 a valószínűsége annak, hogy másodszorra 3 új labdát veszünk ki.

10. $m+1$ doboz mindegyikében $m+2$ darab golyó van, amelyek közül rendre $2, 3, \ldots, m+2$ számú fehér. Találomra választunk egy dobozt, majd abból találomra választunk egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a golyó fehér?

Legyen a vizsgált esemény A. Jelentse B_i $(i=2, 3, \ldots, m+2)$ esemény azt, hogy a húzásra kiválasztott dobozban i darab fehér golyó van. B_i valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_i) = \frac{1}{m+1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m+2).$$

Az A esemény B_i feltétel melletti valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A|B_i) = \frac{i}{m+2} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m+2).$$

A teljes valószínűség tételét használjuk:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=2}^{m+2} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \sum_{i=2}^{m+2} \left(\frac{i}{m+2} \cdot \frac{1}{m+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{(m+2)(m+1)} \sum_{i=2}^{m+2} i =$$

$$= \frac{1}{(m+2)(m+1)} (m+1) \frac{m+4}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m+4}{m+2}.$$

Tehát $\frac{1}{2} \cdot \frac{m+4}{m+2}$ annak a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk a dobozból.

3. Bayes tétele

Ha a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, és $\mathbf{P}(B_i) \neq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, továbbá A tetszőleges esemény, melyre $\mathbf{P}(A) \neq 0$, akkor

$$\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)}.$$

Ez Bayes tétele.

Gyakorló feladatok

1. Két város közötti távíróösszeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$-e vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$-a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és a vonalak aránya 5:3. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy ha a vevőoldalon pontot kapnak, akkor az adó pontot továbbított!

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a vevőoldalon pontot kapnak. Jelentse B_1 azt, hogy pontot továbbít az adó, B_2 pedig azt, hogy vonást küld. A leadott jelek arányából a B_1 és B_2 események valószínűsége

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{5}{8}; \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{3}{8}.$$

Az A esemény feltételes valószínűsége a B_1 és a B_2 feltételek mellett szintén adott:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{3}{5}; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{1}{3}.$$

A B_1 esemény A feltétel melletti valószínűsége ennek segítségével *Bayes* tétele alapján felírható:

$$\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1)}{\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1)+\mathbf{P}(A|B_2)\mathbf{P}(B_2)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} = \frac{3}{4}.$$

Tehát $\frac{3}{4}$ a valószínűsége annak, hogy az adó valóban pontot továbbított, ha a vevő pontot észlelt.

2. 10 azonos alakú doboz közül az első 9-ben 4—4 golyó van, mégpedig 2 fehér és 2 kék. A tizedik dobozban 5 fehér és 1 kék golyó van. Az egyik találomra választott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a tizedik dobozból való, ha a kivett golyó fehér?

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy fehéret húztunk. Legyen B_j az az esemény, hogy a j-edik dobozból választottunk. A B_j események valószínűségei azonosak:

$$\mathbf{P}(B_j) = \frac{1}{10}.$$

10*

Az A esemény B_j feltétel melletti feltételes valószínűségére a következő áll fenn:

$$\mathbf{P}(A|B_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{ha } j = 1, 2, \ldots, 9; \\[2mm] \dfrac{5}{6}, & \text{ha } j = 10. \end{cases}$$

A B_{10} esemény A feltétel melletti feltételes valószínűségét a Bayes-tétellel kapjuk meg:

$$\mathbf{P}(B_{10}|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_{10})\mathbf{P}(B_{10})}{\sum\limits_{j=1}^{10} \mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)} =$$

$$= \frac{\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{10}}{\dfrac{1}{10}\left(9\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}\right)} = \frac{\dfrac{5}{6}}{\dfrac{9}{2}+\dfrac{5}{6}} = \frac{5}{32},$$

Tehát $\dfrac{5}{32}$ annak a valószínűsége, hogy egy fehér golyót éppen a tizedik dobozból húzunk.

3. Tegyük fel, hogy a férfiak 5%-a és a nők 0,25%-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiből álló csoportból 1 személyt találomra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy nőt választottunk ki?

Legyen A az az esemény, hogy a kiválasztott személy színvak. A B_1 esemény jelentése legyen az, hogy a kiválasztott személy nő, B_2 pedig jelentse azt, hogy férfit választottunk ki. A B_1, ill. B_2 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}; \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

Az A esemény feltételes valószínűsége B_1, ill. B_2 feltétel mellett:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{25}{10000}; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{5}{100}.$$

A B_1 esemény A feltétel melletti feltételes valószínűségét a Bayes-tétellel számítjuk ki:

$$\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1)}{\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1)+\mathbf{P}(A|B_2)\mathbf{P}(B_2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{25}{10000}\cdot\dfrac{4}{5}}{\dfrac{25}{10000}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{100}\cdot\dfrac{1}{5}} = \frac{\dfrac{1}{500}}{\dfrac{1}{500}+\dfrac{1}{100}} = \frac{1}{6}.$$

Tehát $\dfrac{1}{6}$ a valószínűsége annak, hogy a csoportból kiválasztott színvak személy nő.

4. Egy forgácsoló üzemben készült munkadarabok 96%-a felel meg a súlyszabványnak. A minőségellenőrzés során az elkészült munkadarabok egy részét megvizsgálják, a súly szempontjából szabványos darabok 98%-a bizonyul alakra jónak, a nem szabványos súlyú darabokból pedig 5%-ot nyilvánítanak alakra jónak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy darab, amely a minőségellenőrzésen alakra jónak bizonyul, megfelel a súlyszabványnak?

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy egy munkadarab alakra jónak bizonyul a minőségellenőrzésen. Legyen B az az esemény, hogy a vizsgált darab súlya szabványos; a $\bar{B}$ esemény pedig jelentse azt, hogy a darab súlya nem szabványos. A B és $\bar{B}$ események valószínűségei a következők:

$$\mathbf{P}(B) = 0{,}96; \quad \mathbf{P}(\bar{B}) = 0{,}04.$$

Az A esemény B, ill. $\bar{B}$ esemény melletti feltételes valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A|B) = 0{,}98; \quad \mathbf{P}(A|\bar{B}) = 0{,}05.$$

A B esemény valószínűségét keressük az A esemény teljesülése esetén. Ezt a feltételes valószínűséget *Bayes* tételével számítjuk ki:

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B})} =$$

$$= \frac{0{,}98\cdot 0{,}96}{0{,}98\cdot 0{,}96+0{,}05\cdot 0{,}04} = \frac{0{,}9408}{0{,}9428} \approx 0{,}998.$$

Tehát kb. 0,998, azaz kb. 99,8% a valószínűsége annak, hogy a minőségellenőrzésen alakra jónak bizonyult darab súlya megfelel a szabványnak.

5. Egy biológiai kísérlet során 100 egyedet három — 20, 30, ill. 50 egyedből álló — csoportba osztanak, és az első csoport 20 egyedét gyenge, a második csoport 30 egyedét közepes erősségű, a harmadik csoport

50 egyedét erős hatóanyaggal oltják be. A csoportokat ezután külön-külön tárolják. Megállapítják, hogy az oltás hatására az első csoportból 3, a másodikból 10, a harmadikból 39 megy keresztül valamilyen meghatározott változáson. Ezután a csoportok elkülönítését megszüntetik. Ha az összes egyedből egy egyedet találomra kiválasztunk és ennek vizsgálata azt mutatja, hogy nem ment keresztül változáson, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott egyed a második csoportból való? (Itt is a választás sokszori megismétlése esetén értendő a valószínűség.)

Legyen A az az esemény, hogy a kiválasztott egyed nem megy keresztül változáson, A B_j $(j=1,2,3)$ esemény jelentse azt, hogy a kiválasztott egyed a j-edik csoportból való. A B_j események valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_1)=\frac{20}{100};\quad \mathbf{P}(B_2)=\frac{30}{100};\quad \mathbf{P}(B_3)=\frac{50}{100}.$$

Az A esemény feltételes valószínűsége a B_j $(j=1,2,3)$ feltétel mellett:

$$\mathbf{P}(A|B_1)=\frac{17}{20};\quad \mathbf{P}(A|B_2)=\frac{2}{3};\quad \mathbf{P}(A|B_3)=\frac{11}{50}.$$

A B_2 esemény A feltétel melletti feltételes valószínűségét a Bayes-tétel alkalmazásával számítjuk ki:

$$\mathbf{P}(B_2|A)=\frac{\mathbf{P}(A|B_2)\mathbf{P}(B_2)}{\sum_{j=1}^{3}\mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)}=$$

$$=\frac{\frac{20}{30}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{17}{20}\cdot\frac{20}{100}+\frac{20}{30}\cdot\frac{30}{100}+\frac{11}{50}\cdot\frac{50}{100}}=\frac{\frac{20}{100}}{\frac{17}{100}+\frac{20}{100}+\frac{11}{100}}=\frac{20}{48}=\frac{5}{12}.$$

Tehát $\frac{5}{12}$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed a második csoportból való.

6. Tudjuk, hogy egy gyakorlatban résztvevő 18 lövész négy csoportba sorolható úgy, hogy közülük öten 0,8, heten 0,7, négyen 0,6 és ketten 0,5 valószínűséggel találnak a céltáblára. Véletlenül meglátunk közülük egy lövészt, aki egy lövést ad le, de ez nem talál a céltáblára. Melyik csoporthoz tartozik a legnagyobb valószínűséggel ez a lövész és mennyi ez a valószínűség?

Legyen A az az esemény, hogy a lövész nem talál a céltáblára. A B_i $(i=1,2,3,4)$ esemény legyen az, hogy a lövész a i-edik csoportba tartozik. A B_i események valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_1)=\frac{5}{18};\quad \mathbf{P}(B_2)=\frac{7}{18};\quad \mathbf{P}(B_3)=\frac{4}{18};\quad \mathbf{P}(B_4)=\frac{2}{18}.$$

Az A esemény B_i $(i=1,2,3,4)$ feltételek melletti feltételes valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A|B_1)=0{,}2;\quad \mathbf{P}(A|B_2)=0{,}3;\quad \mathbf{P}(A|B_3)=0{,}4;\quad \mathbf{P}(A|B_4)=0{,}5.$$

A B_i események A feltétel melletti feltételes valószínűségét *Bayes* tételével számoljuk ki:

$$\mathbf{P}(B_i|A)=\frac{\mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{4}\mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)}\qquad (i=1,2,3,4).$$

A $\mathbf{P}(B_i|A)$ $(i=1,2,3,4)$ számok közül a legnagyobbat keressük. Ez az összefüggések jobb oldalán álló számlálók legnagyobb értékénél adódik, mert a nevező mind a négy esetben azonos. A számlálókat sorban kiszámítjuk:

$$\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1)=0{,}2\frac{5}{18}=\frac{10}{180};\quad \mathbf{P}(A|B_2)\mathbf{P}(B_2)=0{,}3\frac{7}{18}=\frac{21}{180};$$

$$\mathbf{P}(A|B_3)\mathbf{P}(B_3)=0{,}4\frac{4}{18}=\frac{16}{180};\quad \mathbf{P}(A|B_4)\mathbf{P}(B_4)=0{,}5\frac{2}{18}=\frac{10}{180}.$$

Azt kaptuk, hogy a másodiknak a legnagyobb a számlálója. A B_2 eseménynek az A feltétel melletti feltételes valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_2|A)=\frac{\mathbf{P}(A|B_2)\mathbf{P}(B_2)}{\sum_{j=1}^{4}\mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)}=\frac{\frac{21}{180}}{\frac{10}{180}+\frac{21}{180}+\frac{16}{180}+\frac{10}{180}}=\frac{21}{57}=\frac{7}{19}.$$

Tehát a kiválasztott lövész a legnagyobb valószínűséggel a második csoportból való, és ez a valószínűség $\frac{7}{19}$.

7. 10—10 televízió-készülékből álló tételekben az előző tapasztalatok szerint 0, 1, 2, 3 darab azonos eséllyel lehet hibás. Kettőt találomra kiválasztunk egy tételből, ezeket megvizsgáljuk és hibátlannak találjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ekkor egy hibás darab van a készülékek között?

Legyen A az az esemény, hogy két hibátlan készüléket választunk és B_j ($j=0, 1, 2, 3$) az az esemény, hogy éppen j számú hibás van a 10 televízió-készülék között. A B_j események valószínűsége azonos, mégpedig:

$$\mathbf{P}(B_j) = \frac{1}{4} \quad (j=0, 1, 2, 3).$$

Az A esemény B_j feltétel melletti feltételes valószínűségét számítjuk ki. Az összes lehetőségek száma két készülék kiválasztására a 10-ből:

$$n = C_{10}^2 = \binom{10}{2}.$$

A kedvező lehetőségek száma két jó készülék kiválasztására, ha 10 közül j darab hibás:

$$k = C_{10-j}^2 = \binom{10-j}{2}.$$

Így a feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(A|B_j) = \frac{k}{n} = \frac{\binom{10-j}{2}}{\binom{10}{2}} \quad (j=0, 1, 2, 3).$$

A B_1 esemény A feltétel melletti feltételes valószínűségét *Bayes* tételével határozzuk meg:

$$\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1)}{\sum_{j=0}^{3}\mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)} =$$

$$= \frac{\frac{\binom{10-1}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{1}{4}}{\sum_{j=0}^{3}\frac{\binom{10-j}{2}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\binom{9}{2}}{\sum_{j=0}^{3}\binom{10-j}{2}} = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}+\binom{9}{2}+\binom{8}{2}+\binom{7}{2}} =$$

$$= \frac{36}{45+36+28+21} = \frac{36}{130} \approx 0{,}277.$$

Tehát kb. 0,277 a valószínűsége annak, hogy a 10 televízió-készülékből éppen egy hibás.

8. Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyek közül rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6 golyó fehér. Egy találomra választott dobozból három golyót húzunk egymás után, mindig visszatevéssel. Azt találjuk, hogy mindhárom húzásra fehér golyót vettünk ki. Mennyi ez esetben annak a valószínűsége, hogy a 6 golyó közül éppen kettő fehér?

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy három fehér golyót húztunk egymás után visszatevéssel. A B_j ($j=1, \ldots, 6$) esemény jelentse azt, hogy j darab fehér golyó van a dobozban. Mindegyik B_j esemény valószínűsége

$$\mathbf{P}(B_j) = \frac{1}{6} \quad (j=1, \ldots, 6).$$

Az A esemény B_j feltétel melletti feltételes valószínűségét számítjuk ki. Az összes lehetőségek száma három golyó kiválasztására, visszatevéssel — minthogy esetenként 6-ból választhatunk:

$$n = V_6^{3,i} = 6^3.$$

A kedvező lehetőségek száma, minthogy j számú fehér golyó van a dobozban, és így esetenként j-ből választhatunk egyet,

$$k = V_j^{3,i} = j^3.$$

A feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}(A|B_j) = \frac{k}{n} = \frac{j^3}{6^3} = \left(\frac{j}{6}\right)^3 \quad (j=1, \ldots, 6).$$

A B_2 esemény A feltétel melletti feltételes valószínűségét *Bayes* tételével határozzuk meg:

$$\mathbf{P}(B_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_2)\mathbf{P}(B_2)}{\sum_{j=1}^{6}\mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j)} = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^3\frac{1}{6}}{\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{j}{6}\right)^3\frac{1}{6}} = \frac{2^3}{\sum_{j=1}^{6}j^3} =$$

$$= \frac{8}{1+8+27+64+125+216} = \frac{8}{441}.$$

Tehát $\frac{8}{441}$ a valószínűsége annak, hogy a 6 golyó közül éppen kettő fehér.

4. Események függetlensége

Az A eseményt a B eseménytől függetlennek nevezzük, ha teljesül, hogy

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A).$$

Ha az A esemény a B eseménytől független, akkor a B esemény is független A-tól. Két esemény, A és B egymástól való függetlenségét fejezi ki a következő összefüggés is:

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események (teljesen) függetlenek, ha közülük bárhogyan kiválasztva k $(k=2, 3, \ldots, n)$ számú $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ eseményeket, ezekre fennáll:

$$\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2})\ldots\mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Tehát kettőnél több esemény függetlenségéhez nem elég, ha páronként függetlenek, mert összességükben még fennállhat közöttük kapcsolat!

Két vagy több kísérletet függetlennek nevezünk, ha mindegyik kísérletnek egy-egy tetszőleges eseményét kiválasztva, az így kapott események függetlenek.

Ha A és B független események, akkor A és $\bar{B}$, valamint $\bar{A}$ és B és $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is függetlenek egymástól. Példaként igazoljuk az első állítást.

Az A és B események függetlensége azt jelenti, hogy fennáll:

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Az A eseményt két, egymást kizáró esemény összegeként írjuk fel:

$$A = AB+A\bar{B}.$$

Így A valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B}).$$

Ebből $\mathbf{P}(A\bar{B})$-t kifejezzük és $\mathbf{P}(AB)$-t a fentiek szerint helyettesítjük:

$$\mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) =$$
$$= \mathbf{P}(A)[1-\mathbf{P}(B)] = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B}).$$

Felhasználtuk azt, hogy ellentétes események valószínűségének összege 1. Így azt kaptuk, hogy A és $\bar{B}$ függetlenek, mert

$$\mathbf{P}(A\bar{B})=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B}).$$

Például egy elektromos készülék három különálló kapcsolási eleme egymástól függetlenül 0,2, 0,6, 0,4 valószínűséggel megy tönkre, ha a készülék az adott hőfokhatárt túllépi. A készülék nem működik tovább, ha a három kapcsolási elem közül egy is elromlik. Kiszámítjuk annak a valószínűségét, hogy a készülék az adott hőfokhatárt túllépve még jól működik. Legyen A_i $(i=1, 2, 3)$ az az esemény, hogy az i-edik kapcsolási elem a hőfokhatárt túllépve nem megy tönkre. Az A_i események valószínűsége sorban:

$$\mathbf{P}(A_1) = 0{,}8; \qquad \mathbf{P}(A_2) = 0{,}4; \qquad \mathbf{P}(A_3) = 0{,}6.$$

A készülék akkor működik továbbra is jól, ha mindhárom eleme még jó, vagyis az $A_1A_2A_3$ esemény áll fenn. Ennek a szorzatnak a valószínűsége, minthogy tényezői függetlenek:

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)=0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}192.$$

Tehát 0,192 a valószínűsége annak, hogy a készülék az adott hőfokhatárt túllépve még működik.

Gyakorló feladatok

1. Igazoljuk, hogy ha A és B független események, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is függetlenek egymástól!

Az A és a $\bar{B}$ eseményeket két, egymást kizáró esemény összegére bontjuk:

$$A = AB+A\bar{B}; \quad \bar{B} = A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}.$$

A két esemény valószínűségét ennek alapján egy-egy kéttagú összeggel is megadhatjuk:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B}); \quad \mathbf{P}(\bar{B}) = \mathbf{P}(A\bar{B})+\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}).$$

Az első egyenlőségből kivonjuk a másodikat és $\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B})$-t kifejezzük:

$$\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(\bar{B}) = \mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}); \quad \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{B}).$$

Az A és a B események függetlenek egymástól, tehát fennáll:

$$\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Ezt helyettesítjük és az ellentétes események valószínűségei közti összefüggést felhasználjuk:

$$\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{B}) = -\mathbf{P}(A)[1-\mathbf{P}(B)]+\mathbf{P}(\bar{B}) =$$
$$= -\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B})+\mathbf{P}(\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{B})[1-\mathbf{P}(A)] = \mathbf{P}(\bar{B})\mathbf{P}(\bar{A}).$$

A kapott egyenlőség:

$$\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(\bar{B}).$$

Ez az összefüggés $\bar{A}$ és $\bar{B}$ egymástól való függetlenségét jelenti.

2. Igazoljuk, hogy ha az A, B és C események páronként függetlenek, és A független a $B+C$ eseménytől, akkor A, B és C teljesen független események!

Tekintve, hogy az A, B és C események páronként függetlenek, még azt kell kimutatnunk, hogy szorzatuk valószínűsége megegyezik valószínűségeik szorzatával. Ezért az ABC esemény valószínűségét igyekszünk a független események valószínűségeivel kifejezni. Az A-nak $B+C$ eseménytől való függetlensége alapján felírhatjuk:

$$\mathbf{P}(A[B+C]) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B+C).$$

Mindkét oldalt külön átalakítjuk úgy, hogy felhasználjuk az összeg valószínűségére vonatkozó összefüggést és a szereplő három esemény A, B és C páronkénti függetlenségét, és hogy az egyik oldalon az ABC esemény valószínűsége is fellépjen:

$$\mathbf{P}(A[B+C]) = \mathbf{P}(AB+AC) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(ABC) =$$
$$= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(ABC);$$
$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B+C) = \mathbf{P}(A)[\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(BC)] =$$
$$= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

A két átalakított kifejezés is megegyezik egymással, aminek következtében azt kapjuk:

$$\mathbf{P}(ABC)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

Ez az összefüggés és a feltételek közt szereplő páronkénti függetlenség a három esemény teljes függetlenségét jelenti.

3. Ketten lőnek céltáblára. A találat valószínűsége az első személy esetében 0,7, a második esetében 0,6. A találatok egymástól függetlenek. Ha mindketten egy-egy lövést adnak le, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egy találat van a céltáblán?

Legyen A az az esemény, hogy az első személy talál, és B jelentse azt, hogy a második találatot ér el. Az $A+B$ esemény jelenti azt, hogy legalább egy találat van a céltáblán, ennek a valószínűségét keressük. Felírjuk az összeg valószínűségére vonatkozó összefüggést és felhasználjuk, hogy az A és B események függetlenek:

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) =$$
$$= 0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6 = 1{,}3-0{,}42 = 0{,}88.$$

Tehát 0,88 a valószínűsége annak, hogy a céltáblán legalább egy találat van.

4. Három szabályos kockát dobunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kockán a felülre kerülő pontérték legalább öt?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Egy kocka esetén az 5-ös és a 6-os dobás valószínűsége külön-külön $\frac{1}{6}$. Ezek a lehetőségek egymást kizárják, így annak a valószínűsége, hogy egy kockával vagy ötöst vagy hatost dobunk, vagyis a két esemény összegének valószínűsége:

$$2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

A három kockán kapott pontértékek egymástól teljesen függetlenek. Annak valószínűsége, hogy az A esemény következik be, azaz a kockák mindegyikén az 5-ös és 6-os pontértékek valamelyike kerül felülre, a független események szorzatára vonatkozó összefüggés alapján:

$$\mathbf{P}(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Tehát $\frac{1}{27}$ a valószínűsége annak, hogy legalább öt a felül látható pontérték az egyes kockákon.

5. Két, egymástól függetlenül dolgozó szerszámgépen azonos fajta alkatrészeket gyártanak. Az első gépen 0,8, a második gépen 0,7 valószínűséggel kapunk elsőosztályú alkatrészeket, az ugyanazon a gépen gyártott alkatrészek is függetlenek egymástól. Az első gép gyártmányaiból 3, a második gép gyártmányaiból pedig 2 alkatrészt választunk találomra és ezeket megvizsgáljuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind az 5 elsőosztályú?

Legyen A a szóban forgó esemény. A függetlenség alapján

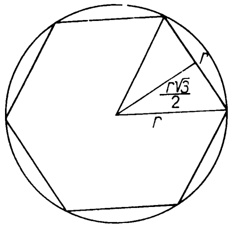
$$\mathbf{P}(A) = 0{,}8^3\cdot 0{,}7^2 \approx 0{,}251.$$

Tehát kb. 0,251 a valószínűsége annak, hogy a vizsgált alkatrészek mind elsőosztályúak.

6. Egy r sugarú körbe szabályos hatszöget rajzolunk (40. ábra). Ezután a körlapon négy pontot választunk találomra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mind a négy pont a hatszög belsejébe esik?

Jelöljük a vizsgált eseményt A-val. Először annak valószínűségét állapítsuk meg, hogy a körlapon véletlenszerűen választott egyetlen pont a hatszög belsejébe esik. Ez a valószínűség a hatszög és a kör területének aránya. A körlap területe:

$$T=r^2\pi.$$



40. ábra

A beírt hatszög területe:

$$t = 6\frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2 3\sqrt{3}}{2}.$$

A négy, találomra választott pont helyzete egymástól független. Az A esemény valószínűsége ennek alapján:

$$\mathbf{P}(A) = \left(\frac{t}{T}\right)^4 = \left(\frac{\frac{r^2 3\sqrt{3}}{2}}{r^2\pi}\right)^4 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^4 \approx 0{,}48.$$

Tehát kb. 0,48 a valószínűsége annak, hogy mind a négy választott pont a hatszög belsejébe esik.

7. Kétféle gyártási eljárással készülhetnek azonos fajta alkatrészek. Az első eljárás alkalmazása esetén az alkatrész három különböző technológiai folyamaton megy végig, amelyeknek során rendre 0,2, 0,3 és 0,2 valószínűséggel hibásodhat meg. A második eljárásban két különböző technológiai folyamaton megy át, és ezek mindegyikében 0,3 valószínűséggel léphet fel hiba. Az első módszer szerinti gyártáskor egy hibátlan alkatrész 0,9, a második módszer szerinti termelés során 0,8 valószínűséggel lesz elsőosztályú. Melyik gyártási módszer előnyösebb abból a szempontból, hogy nagyobb valószínűséggel ad a nyersáruból elsőosztályú terméket?

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy az első gyártási módszerrel készült termék elsőosztályú, és legyen B az az esemény, hogy a második módszerrel gyártott alkatrész elsőosztályú. Az egyes technológiai folyamatok során bekövetkező meghibásodások egymástól függetlenek. A független kísérletek eseményei szorzatának valószínűségére vonatkozó összefüggést használjuk fel az A és a B esemény valószínűségének kiszámításakor.

Az első gyártási módszer esetében annak a valószínűsége, hogy az egyes technológiai folyamatok során nem lép fel hiba, rendre 0,8, 0,7 és 0,8. Figyelembe véve, hogy itt 0,9 valószínűséggel lesz elsőosztályú a hibátlan termék, az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9 \approx 0{,}403.$$

Ha a második gyártási módszert használják, akkor a két technológiai eljárás során egyaránt 0,7 a valószínűsége annak, hogy nem hibásodik meg az alkatrész. Itt 0,8 a valószínűsége annak, hogy elsőosztályú árut kapunk. Ezek alapján a B esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B) = 0{,}7\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}392.$$

Tehát kimutattuk, hogy az első gyártási módszer az előnyösebb, ha a nyersáruból több elsőosztályú alkatrészt akarunk kapni.

8. Két dobozban golyók vannak, amelyek csak színeikben különböznek egymástól. Az első dobozban 5 fehér, 11 fekete és 8 piros, a másodikban 10 fehér, 8 fekete és 6 piros golyó van. Mindkét dobozból találomra kiveszünk egy-egy golyót. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két kiválasztott golyó azonos színű?

Azt az eseményt jelöljük A-val, hogy a két kiválasztott golyó azonos színű. Az egyes dobozokból való húzások egymástól független kísérletek. Háromféle, egymást kizáró esemény összegeként adódik az A, mégpedig mindkét dobozból fehéret, feketét vagy piros golyót választva. E lehetőségek valószínűségeit a független kísérletek eseményeinek valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján kiszámítjuk, majd összeadjuk. Az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{24}\cdot\frac{10}{24}+\frac{11}{24}\cdot\frac{8}{24}+\frac{8}{24}\cdot\frac{6}{24} \approx 0{,}32.$$

Tehát kb. 0,32 a valószínűsége annak, hogy a két dobozból azonos színű golyót húzunk.

9. Gábor és Péter a következő feltételek mellett játszanak önálló játszmákat. Gábor kezdi a játékot, 0,3 valószínűséggel nyerhet az első játszmában. Ha győz, a játék véget ér. Ha nem nyeri meg az első játszmát, akkor Péter következik és ebben a második játszmában 0,5 valószínűséggel győzhet. Ha győz, akkor a játék befejeződik. Ha azonban Péter veszít, akkor ismét Gábor következik és 0,2 valószínűséggel nyerheti meg a harmadik játszmát. Ha Gábor a harmadik játszmában veszít, a játék döntetlenül ér véget. Melyik játékosnak van nagyobb esélye a győzelemre a játékban?

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy Gábor nyeri a játékot és B-vel azt az eseményt, hogy Péter a győztes. Az egyes játszmák eredményeit független kísérletek eseményeinek tekintjük, ennélfogva együttes bekövetkezésük valószínűsége az egyes események valószínűségének szorzata.

Az A esemény két, egymást kizáró esemény összegére bontható, mégpedig az egyik azt jelenti, hogy Gábor az első játszmát, a másik azt, hogy a harmadik játszmát nyeri. Az utóbbi esemény három, teljesen független esemény szorzata. Ezek alapján A valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2 = 0{,}3+0{,}07 = 0{,}37.$$

A B esemény úgy jön létre, hogy Gábor az első játszmában veszít, Péter pedig a másodikban győz. Ezek az események is függetlenek, és B valószínűségét így valószínűségeik szorzata adja:

$$\mathbf{P}(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35.$$

Az A esemény valószínűsége nagyobb, mint a B eseményé.

Tehát a két játékos közül Gábor esélye a győzelemre nagyobb, mint Péteré.

10. Hárman játszanak: Meghatározott sorrendben dobnak egy szabályos érmét egymás után. Az a játékos nyer, amelyik először dob fejet. Mennyi az egyes játékosok nyerési valószínűsége?

I. Megoldás:

Legyen A_1 az az esemény, hogy a kezdő nyer, A_2 az, hogy a második, A_3 pedig az, hogy a harmadik dobó nyer. Az egyes dobások független kísérleteket jelentenek. Először számítsuk ki a B_1, B_2 és B_3 események valószínűségeit, mely események jelentsék azt, hogy az első három dobás során az első, a második, ill. a harmadik dobó javára dől el a verseny.

A B_1 esemény teljesül, ha az első dobó fejet dob, így

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{2}.$$

A B_2 esemény teljesül, ha az első játékos írást, a második pedig fejet dob, vagyis

$$\mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A B_3 akkor következik be, ha az első és a második írást, a harmadik viszont fejet dob. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Tekintettel arra, hogy ha nem dőlt el a játék az első három dobás alatt, akkor ugyanilyen sorrendben folytatják a részvevők, és az egyes dobók esélyének arányai nem változnak a további hármas dobássorozatokban az első három dobás során levő esélyek arányaihoz képest, ezért ez A_1, A_2, A_3 események valószínűségeinek aránya a B_1, B_2, B_3 események valószínűségeinek arányával egyező. Nyilván fennáll

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) = 1.$$

Az előbbiek alapján sorban adódik:

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{\mathbf{P}(B_1)}{\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{4}{7},$$

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{\mathbf{P}(B_2)}{\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{2}{7},$$

$$\mathbf{P}(A_3) = \frac{\mathbf{P}(B_3)}{\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \mathbf{P}(B_3)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}.$$

II. Megoldás:

A játék során a játékosok egymás után dobják fel az érmét mindaddig, amíg a dobás eredménye fej nem lesz. Az eredmény szempontjából közömbös, melyik játékos dobja fel az érmét; képzelhetjük úgy is, hogy a játékot egy negyedik játékos vezeti, ő dobja fel egymás után az érmét és dönti el a dobások alapján, hogy az első három közül melyik nyert. Jelöljük B_k-val azt az eseményt, hogy a k-adik dobásra kapunk először fejet; tehát az első $(k-1)$ dobás eredménye írás, a k-adiké fej. Ennek a valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_k) = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

Az első játékos akkor nyer, ha az első fejdobás az 1., 4., 7., ... stb. dobás eredménye, azaz

$$A_1 = B_1 + B_4 + B_7 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} B_{3j+1}.$$

Mivel ezek az események egymást kizárják, az A_1 esemény valószínűsége a B_{3j+1} események valószínűségének az összegével egyenlő:

$$\mathbf{P}(A_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_{3j+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3j+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7},$$

hiszen egy végtelen mértani sort kellett összegeznünk, amelyben az első tag $\frac{1}{2}$ és a tagok hányadosa $\frac{1}{2}$. Hasonló módon kapjuk, hogy

$$A_2 = B_2 + B_5 + B_8 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} B_{3j+2};$$

$$\mathbf{P}(A_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_{3j+2}) = \frac{1}{2^{3j+2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7},$$

ill.

$$A_3 = B_3+B_6+B_9+\dots = \sum_{j=0}^{\infty} B_{3j+3};$$

$$\mathbf{P}(A_3) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(B_{3j+3}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3j+3}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{7}.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a játékosok közül a kezdő, a második, ill. a harmadik nyer, rendre

$$\frac{4}{7},\quad \frac{2}{7},\quad \text{ill.}\quad \frac{1}{7}.$$

11. Ketten felváltva lőnek egy céltáblára az első találatig. A kezdő találatának valószínűsége 0,2, a másodiké 0,3. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kezdőé lesz az első találat?

I. Megoldás:

Legyen A az az esemény, hogy a kezdő ér el először találatot. Az egyes lövések egymástól független kísérletek. A B_1 esemény jelentse azt, hogy a kezdő azonnal talál, a B_2 pedig azt, hogy a kezdő első lövése célt téveszt, viszont a másodiknak az első lövése talál. A B_1 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_1)=0,2.$$

A B_2 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_2) = 0,8\cdot 0,3 = 0,24.$$

A kezdőnek és a másodiknak az első két lövéskor meglevő találati esélyeinek aránya a továbbiakban történő két-két egymás utáni lövésre is megmarad. Így az A esemény valószínűségét megkapjuk, ha az egységet $\mathbf{P}(B_1)$ és $\mathbf{P}(B_2)$ arányában osztjuk fel, és a $\mathbf{P}(B_1)$-gyel arányos részt kiszámítjuk:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{P}(B_1)}{\mathbf{P}(B_1)+\mathbf{P}(B_2)} = \frac{0,2}{0,2+0,24} = \frac{0,2}{0,44} \approx 0,45.$$

II. Megoldás:

A kezdő úgy találhat először célba, hogy vagy első lövése talál, vagy első lövése nem talál, de a második célbalövő első lövése sem talál, és az ő következő lövése talál, vagy újra nem talál egyikük sem, és ő harmadszorra talál stb. Ezeknek az egymást kizáró eseményeknek a valószínűségei rendre

$$0,2;\quad 0,8\cdot 0,7\cdot 0,2;\quad 0,8\cdot 0,7\cdot 0,8\cdot 0,7\cdot 0,2;\ \dots .$$

Így egy mértani sorozat adódik, melynek első tagja 0,2, kvóciense pedig

$0,8\cdot 0,7 = 0,56$. Annak valószínűsége, hogy a kezdő talál először, e sorozat tagjainak összege, vagyis

$$\mathbf{P}(A) = 0,2\,\frac{1}{1-0,56} = \frac{0,2}{0,44} \approx 0,45.$$

Tehát kb. 0,45 a valószínűsége annak, hogy a kezdő éri el az első találatot.

12. Négy azonos jellegű egyidejű és független kísérlet során az egyes kísérletek valamely A eseményét vizsgáljuk. Azt tapasztaljuk, hogy 0,6 annak a valószínűsége, hogy az A esemény a négy kísérlet közül legalább az egyikben bekövetkezik. Számítsuk ki az A bekövetkezésének valószínűségét egyetlen ilyen kísérlet végzése esetén!

Az A esemény valószínűsége egy kísérlet végzése esetén $\mathbf{P}(A)$. Annak a valószínűsége, hogy négy független kísérlet során az A esemény legalább az egyikben bekövetkezik, ellentett eseménye annak, hogy egyszer sem következik be; utóbbi valószínűsége

$$[1-\mathbf{P}(A)]^4.$$

Tehát a következő összefüggés áll fenn:

$$1-[1-\mathbf{P}(A)]^4 = 0,6.$$

Ebből

$$[1-\mathbf{P}(A)]^4 = 0,4;$$

$$1-\mathbf{P}(A) = \sqrt[4]{0,4};$$

$$\mathbf{P}(A) = 1-\sqrt[4]{0,4} \approx 1-0,79 = 0,21.$$

Tehát egy kísérlet végzésekor kb. 0,21 az A esemény valószínűsége.

13. Az összes számjegyet egyenként felírjuk tíz lapra. A lapok közül találomra választunk egyet, megnézzük a rajta levő számjegyet és visszatesszük a többi közé. Legalább hányszor kell így húznunk lapokat, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legyen a kihúzott számok között legalább egy páros szám?

A húzások eredményei egymástól függetlenek. Egyszerűbb az ellentett esemény — vagyis hogy egyetlen páros számot sem húzunk — valószínűségét meghatározni. Az A esemény jelentse azt, hogy egy húzáskor páratlan szám áll a lapon. Az A esemény valószínűsége, mivel öt lapon van páratlan szám:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Annak a valószínűsége, hogy n húzás során mindannyiszor páratlan számot választunk:

$$0{,}5^n.$$

Az ellentétes események valószínűségére vonatkozó összefüggés alapján annak a valószínűsége, hogy az n húzás alatt legalább egy ízben páros számot találunk egy lapon:

$$1-0{,}5^n.$$

Ebből kell azt a legkisebb n egész számot kifejeznünk, amelyre az egyenlőtlenség még teljesül.

$$0{,}5^n<0{,}1;$$

$$n \lg 0{,}5<\lg 0{,}1;$$

$$n>\frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}5}=\frac{-1}{\lg \frac{1}{2}}=\frac{1}{\lg 2}\approx 3{,}2.$$

Tehát legalább négyszer kell húznunk, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legalább egyszer páros számot kapjunk.

14. Egy könyvtárban csak műszaki és matematikai könyvek vannak. Annak valószínűsége, hogy valamelyik olvasó műszaki, ill. matematikai könyvet választ, 0,7, ill. 0,3. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy 5 olvasó egymás után vagy csupa műszaki vagy csupa matematikai könyvet kölcsönöz, ha mindegyikük csak egy könyvet visz el.

Legyen a szóban forgó esemény A. Jelöljük B-vel azt az eseményt, hogy egymás után öten egy-egy műszaki könyvet kölcsönöznek, és C jelentse azt, hogy öt olvasó sorban egy-egy matematikai művet vesz ki. Minthogy B és C egymást kizárják, továbbá $A = B+C$, ezért fennáll:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B+C) = \mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C).$$

Egy műszaki könyv kölcsönzésének valószínűsége 0,7, így öt egymás utáni esetre:

$$\mathbf{P}(B) = 0{,}7^5.$$

Egy matematikai könyv választásának valószínűsége 0,3, így öt azonos esetre:

$$\mathbf{P}(C) = 0{,}3^5.$$

Ezeket helyettesítve:

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}7^5+0{,}3^5 \approx 0{,}17.$$

Tehát kb. 0,17 annak a valószínűsége, hogy 5 műszaki vagy 5 matematikai könyvet kölcsönöz 5 olvasó egymás után.

15. Két izzólámpát sorbakapcsolunk. Ha a feszültség a hálózatban a névleges érték fölé emelkedik, akkor az izzólámpák egyenként 0,4 valószínűséggel kiégnek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a névleges hálózati feszültség fölött a kapcsolásban szakadás következik be?

Az izzólámpák elromlása egymástól független. Az A esemény jelentse azt, hogy a kapcsolásban a feszültségemelkedés következtében szakadás lép fel. Annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos izzólámpa nem ég ki a magasabb feszültségen:

$$1-0{,}4 = 0{,}6;$$

annak a valószínűsége pedig, hogy egyik sem romlik el:

$$0{,}6^2 = 0{,}36.$$

Így az A eseménynek, vagyis annak a valószínűsége, hogy legalább egyik izzólámpa elromlik és emiatt a kapcsolásban szakadás következik be:

$$\mathbf{P}(A) = 1-0{,}36 = 0{,}64.$$

Tehát 0,64 a valószínűsége annak, hogy a kapcsolásban a névlegesnél magasabb feszültségen szakadás lép fel.

16. Egy automatizált gépsor egy gyártási ciklusban 10 gépet gyárt, amelyeknek mindegyike 0,01 valószínűséggel hibás. Hány ciklus alatt készül 0,8-nál nagyobb valószínűséggel legalább egy hibás gép?

A gépek hibássá válása egymástól függetlenül következik be. Legyen A az az esemény, hogy egy gép hibássá válik; ekkor az A valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}01.$$

Ha n-nel jelöljük a szükséges ciklusok keresett számát, akkor $10n$ számú gép készül addig el. Annak a valószínűsége, hogy $10n$ számú gép közül egy sem hibás:

$$[1-\mathbf{P}(A)]^{10n}.$$

Annak a valószínűségére, hogy a $10n$ gép között legalább egy hibás gép van, a következő összefüggésnek kell teljesülnie:

$$1-[1-\mathbf{P}(A)]^{10n} > 0{,}8.$$

Behelyettesítjük $\mathbf{P}(A)$ értékét, és n-et kifejezzük az egyenlőtlenségből:

$$1-[1-0{,}01]^{10n} > 0{,}8;$$

$$0{,}99^{10n} < 0{,}2$$

$$10n \lg 0{,}99 < \lg 0{,}2$$

$$n > \frac{1}{10}\cdot\frac{\lg 0{,}2}{\lg 0{,}99} \approx 15{,}9.$$

Tehát 16 vagy több gyártási ciklus alatt készül 0,8-nál nagyobb valószínűséggel legalább egy selejtes gép.

5. Vegyes feladatok

1. Két dobozban 10—10 golyó van. Az elsőben 7 fehér és 3 fekete, a másodikban 4 fehér és 6 fekete. Mindkét dobozból találomra egy-egy golyót veszünk ki, azután a két kihúzott golyóból véletlenszerűen választunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ez a golyó fehér?

I. Megoldás:

Legyen A az az esemény, hogy az utóbb választott golyó fehér. Az egyes dobozokból való húzások egymástól függetlenek. Jelöljük B_1-gyel azt az eseményt, hogy mindkét dobozból fehéret veszünk ki, a B_2 jelentse azt, hogy az első dobozból fehéret, a másodikból feketét veszünk ki, a B_3 esemény pedig jelentse azt, hogy az első dobozból feketét, a másodikból fehéret veszünk ki. Kiszámítjuk a B_i $(i=1, 2, 3)$ események valószínűségét:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{7}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{28}{100}; \quad \mathbf{P}(B_2) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{10} = \frac{42}{100};$$

$$\mathbf{P}(B_3) = \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{12}{100}.$$

Az A esemény B_i feltételek melletti feltételes valószínűségei a következők:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = 1; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{P}(A|B_3) = \frac{1}{2}.$$

Az A esemény valószínűségét a teljes valószínűség tételével határozzuk meg:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) =$$

$$= 1\cdot\frac{28}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{42}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{100} = \frac{28+21+6}{100} = \frac{55}{100} = 0{,}55.$$

II. Megoldás:

Vegyük észre, hogy ezzel az eljárással minden egyes golyónak egyenlő esélye van arra, hogy végül a kiválasztott legyen. Tehát ez a húzási módszer egyenértékű azzal, hogy ha először az összes golyót egy dobozba öntjük össze, majd ebből húzunk ki egy golyót. Utóbbi esetben a dobozban 20 golyó van, közülük 11 fehér és 9 fekete, tehát a fehér golyó húzásának valószínűsége $\frac{11}{20} = 0{,}55$.

Tehát 0,55 a valószínűsége annak, hogy az utóbb kiválasztott golyó fehér.

2. Hárman lőnek egymás után egy céltáblára. A résztvevők találati valószínűsége sorrendben: $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. Ketten érnek el találatot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a második hibázta el a lövést?

Legyen A az az esemény, hogy ketten érnek el találatot, B_j $(j=1, 2, 3)$ pedig jelentse azt, hogy a j-edik résztvevő talál. Az A esemény akkor következik be, ha B_1, B_2, B_3 események közül pontosan kettő teljesül:

$$A = B_1B_2\bar{B}_3+B_1\bar{B}_2B_3+\bar{B}_1B_2B_3,$$

ahol a jobb oldal eseményei páronként kizárják egymást. Feladatunk a $\mathbf{P}(\bar{B}_2|A)$ feltételes valószínűség meghatározása. Definíció szerint

$$\mathbf{P}(\bar{B}_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A\bar{B}_2)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Az A esemény fenti előállítását $\bar{B}_2$-vel szorozva kapjuk, hogy $A\bar{B}_2=B_1\bar{B}_2B_3$. Mivel a B_i események függetlenek,

$$\mathbf{P}(B_1B_2\bar{B}_3) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(\bar{B}_3) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{12}{60};$$

$$\mathbf{P}(B_1\bar{B}_2B_3) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{60};$$

$$\mathbf{P}(\bar{B}_1B_2B_3) = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{6}{60}.$$

Ezek alapján

$$\mathbf{P}(\bar{B}_2|A) = \frac{\mathbf{P}(B_1\bar{B}_2B_3)}{\mathbf{P}(B_1B_2\bar{B}_3)+\mathbf{P}(B_1\bar{B}_2B_3)+\mathbf{P}(\bar{B}_1B_2B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{8}{60}}{\frac{12}{60}+\frac{8}{60}+\frac{6}{60}} = \frac{4}{13}.$$

Tehát $\frac{4}{13}$ a valószínűsége annak, hogy adott esetben a második résztvevő hibázta el a lövést.

3. Három tétel áruból az elsőnek $\frac{1}{3}$ része, a másodiknak $\frac{1}{2}$ része, a harmadik teljesen elsőosztályú. Egy tételt választunk találomra, és abból egy darabot kiveszünk ugyancsak találomra. Erről megállapítjuk, hogy elsőosztályú. Visszadobjuk és ugyanabból a tételből találomra ismét kiveszünk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy megint elsőosztályú árut választunk ki?

A feladat megoldásához először azt kell megállapítanunk, hogy ha a tételek véletlen megválasztásával elsőosztályú árut kapunk, akkor az milyen valószínűséggel származik az első, második, ill. harmadik tételből. Ennek ismeretében ui. már a keresett valószínűséget könnyen meghatározhatjuk.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

A = elsőosztályú áru húzása első alkalommal;
A^* = elsőosztályú áru húzása második alkalommal;
B_j = húzás a j-edik tételből.

Tehát először a $\mathbf{P}(B_j|A)$ valószínűségeket akarjuk kiszámítani. Mivel a $\mathbf{P}(A|B_j)$, továbbá $\mathbf{P}(B_j)$ valószínűségek adottak, *Bayes* tétele alkalmazható. Írjuk fel az abban előforduló valószínűségeket:

$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{P}(A|B_3) = 1;$$

$$\mathbf{P}(B_j) = \frac{1}{3} \qquad (j=1,2,3),$$

tehát

$$\mathbf{P}(A|B_1)\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{9}; \quad \mathbf{P}(A|B_2)\mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{6};$$

$$\mathbf{P}(A|B_3)\mathbf{P}(B_3) = \frac{1}{3}; \quad \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(A|B_j)\mathbf{P}(B_j) = \frac{11}{18}.$$

Így

$$\mathbf{P}(B_1|A) = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{18}} = \frac{2}{11}; \quad \mathbf{P}(B_2|A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{18}} = \frac{3}{11};$$

$$\mathbf{P}(B_3|A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{18}} = \frac{6}{11}.$$

Ennek alapján a második húzásra a teljes valószínűség tételéből felírható, figyelembe véve, hogy $\mathbf{P}(A|B_j) = \mathbf{P}(A^*|B_jA)$:

$$\mathbf{P}(A^*|A) = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{P}(A^*|B_jA)\mathbf{P}(B_j|A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{11} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11} + 1\cdot\frac{6}{11} = \frac{49}{66}.$$

Tehát $\frac{49}{66}$ a valószínűsége annak, hogy egy tételből másodszorra is elsőosztályú árut húzunk, feltéve hogy az első áru elsőosztályú volt.

4. Két, egymástól független kísérletet hajtunk végre. Az A esemény mindegyik kísérletben 0,4 valószínűséggel következik be. A két kísérlet után a B esemény biztosan bekövetkezik, ha A kétszer teljesült, B 0,7 valószínűséggel történik meg, ha az A éppen egy esetben következett be, és végül B nem teljesül, ha A egyszer sem jött létre. Számítsuk ki a B esemény valószínűségét!

Jelölje A_i $(i=0, 1, 2)$ azt az eseményt, hogy a két kísérlet során az A esemény pontosan i-szer következett be. Először az A_i események valószínűségeit határozzuk meg:

$$\mathbf{P}(A_0) = 0{,}6^2 = 0{,}36; \quad \mathbf{P}(A_1) = 2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}48;$$

$$\mathbf{P}(A_2) = 0{,}4^2 = 0{,}16.$$

A B esemény A_i feltételek melletti valószínűségei

$$\mathbf{P}(B|A_0) = 0; \quad \mathbf{P}(B|A_1) = 0{,}7, \quad \mathbf{P}(B|A_2) = 1.$$

A B esemény valószínűségét a teljes valószínűség tételével számítjuk ki:

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i) = 0\cdot 0{,}36 + 0{,}7\cdot 0{,}48 + 1\cdot 0{,}16 = 0{,}496.$$

Tehát a B esemény 0,496 valószínűséggel teljesül.

5. Egy elektronikus berendezésben három tranzisztor működik. A megengedettnél magasabb feszültségen az első tranzisztor 0,1, a második 0,2, a harmadik 0,3 valószínűséggel tönkremegy. A berendezés egy, két, ill. három tranzisztor elromlása esetén 0,25, 0,6, ill. 0,9 valószínűséggel használhatatlanná válik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a megengedettnél nagyobb feszültségen az elektronikus berendezés a tranzisztorok hibája következtében használhatatlanná válik?

Az A esemény jelentse azt, hogy a berendezés a megengedettnél magasabb feszültségen használhatatlanná válik. A B_i $(i=0, 1, 2, 3)$ események jelentsék azt, hogy i számú tranzisztor hibásodik meg a feszültségemelkedés következtében. Az egyes tranzisztorok elromlása egymástól független, ennélfogva a B_i események valószínűségei:

$$\mathbf{P}(B_0) = 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}504;$$

$$\mathbf{P}(B_1) = 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 + 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 + 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 =$$

$$= 0{,}056 + 0{,}126 + 0{,}216 = 0{,}398;$$

$$\mathbf{P}(B_2) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 + 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 =$$

$$= 0{,}014 + 0{,}024 + 0{,}054 = 0{,}092;$$

$$\mathbf{P}(B_3) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}006.$$

Az A esemény B_i feltételek melletti feltételes valószínűségei

$$\mathbf{P}(A|B_0) = 0; \quad \mathbf{P}(A|B_1) = 0{,}25; \quad \mathbf{P}(A|B_2) = 0{,}6; \quad \mathbf{P}(A|B_3) = 0{,}9.$$

Az A esemény valószínűségét a teljes valószínűség tételével számítjuk ki:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) =$$

$$= 0 \cdot 0{,}504 + 0{,}25 \cdot 0{,}398 + 0{,}6 \cdot 0{,}092 + 0{,}9 \cdot 0{,}006 =$$

$$= 0{,}0995 + 0{,}0552 + 0{,}0054 = 0{,}1601 \approx 0{,}16.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a megengedettnél magasabb feszültségen kb. 0,16 valószínűséggel válik használhatatlanná a berendezés.

6. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Ketten felváltva húznak egy-egy találomra választott golyót, amelyet mindig visszatesznek. Ezt addig folytatják, amíg csak valamelyikük piros golyót nem húz. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kezdő húz először piros golyót?

I. Megoldás:

Legyen A az az esemény, hogy a kezdő húz először piros golyót. Az egyes húzások eredményei egymástól függetlenek. Jelöljük B_1-gyel azt, hogy az első húzáskor a kezdő pirosat húz és B_2-vel azt, hogy a kezdő első húzásra fehéret és a másodiknak húzó pirosat választ. A B_1 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{2}{7}.$$

A B_2 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{10}{49}.$$

Ha az első húzáskor mindketten fehéret húztak, akkor belátható, hogy két-két egymás utáni húzás során a két fél esélyeinek aránya a továbbiakban is azonos marad a két első húzáskor adódott valószínűségek arányával. Mivel 1 valószínűséggel véges számú lépés után a két személy egyike pirosat húz, az A esemény valószínűségét megkapjuk, ha az egységet $\mathbf{P}(B_1)$ és $\mathbf{P}(B_2)$ arányában felosztjuk, és a $\mathbf{P}(B_1)$-gyel arányos részt vesszük:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{P}(B_1)}{\mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7} + \frac{10}{49}} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}.$$

II. Megoldás:

A kezdő az első húzáskor $\frac{2}{7}$ valószínűséggel húz pirosat és $\frac{5}{7}$ valószínűséggel fehéret. Utóbbi eset bekövetkezésekor a másik személy ugyanolyan pozícióba került, mint a kezdő volt első húzása előtt. Ha tehát $\mathbf{P}(A)$ jelöli azt az eseményt, hogy először a kezdő húz pirosat, és $\mathbf{P}(B)$ azt, hogy a másik személy, akkor

$$\mathbf{P}(B) = \frac{5}{7}\mathbf{P}(A).$$

Nyilván fennáll az is, hogy

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 1.$$

E két összefüggésből $\mathbf{P}(A) + \frac{5}{7}\mathbf{P}(A) = 1$, vagyis

$$\mathbf{P}(A) = \frac{7}{12} \quad \text{és} \quad \mathbf{P}(B) = \frac{5}{12}.$$

Tehát $\frac{7}{12}$ a valószínűsége annak, hogy a kezdő húz először piros golyót.

7. Egy dobozban 10 fehér és 1 fekete golyó van. Egyesével húzunk golyókat a dobozból találomra, és a kihúzott golyót mindig visszadobjuk. Legalább hányszor kell húznunk ahhoz, hogy 0,5-nél nagyobb valószínűséggel legalább egy fekete golyót is kihúzzunk?

Legyen A az az esemény, hogy fehér golyót húzunk. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{10}{11}.$$

Az egyes húzások eredményei egymástól függetlenek. Annak a valószínűsége, hogy n-szer egymás után fehéret veszünk ki:

$$\left(\frac{10}{11}\right)^n.$$

Annak valószínűsége, hogy n húzás során legalább egy feketét is kiveszünk:

$$1 - \left(\frac{10}{11}\right)^n.$$

Olyan n számot keresünk, amelyre

$$1-\left(\frac{10}{11}\right)^n > 0{,}5.$$

Ezt az egyenlőtlenséget n-re megoldjuk:

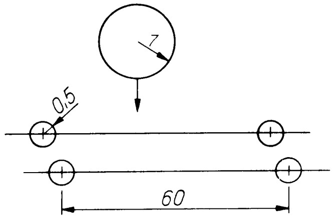
$$\left(\frac{10}{11}\right)^n < 0{,}5;$$

$$n \lg \frac{10}{11} < \lg \frac{1}{2};$$

$$n > \frac{\lg 2}{\lg 11-1} \approx \frac{0{,}3}{1{,}04-1} \approx 7{,}5.$$

Tehát legalább 8 húzásra van szükség ahhoz, hogy a kihúzott golyók között 0,5-nél nagyobb valószínűséggel fekete golyó is előforduljon.

8. Egy síkon felvett párhuzamos egyeneseken egymástól 60 cm távolságban levő pontok körül 0,5 cm sugarú köröket húzunk. Az egyes egyeneseken a körök helyzetét egymástól függetlenül választjuk meg. Ezekre az egyenesekre merőlegesen egy 7 cm sugarú kör mozog (41. ábra). Hány párhuzamos egyenest kell felvennünk ahhoz, hogy a mozgó kör 0,9-nél nagyobb valószínűséggel valamelyik körrel ütközzék?



41. ábra

Mindegyik egyenes tetszőleges 60 cm-es szakaszának egy 15 cm-es része olyan, hogy ha a mozgó kör középpontja itt halad át, akkor ennek az egyenesnek az egyik köre metszi. Azt, hogy egy egyenes egyik körével sem történik ütközés, jelölje A. A fentiek szerint

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4}.$$

Az egyes párhuzamos egyenesek köreivel való ütközések egymástól függetlenek. Így annak valószínűsége, hogy a mozgó kör n egyenes köreivel nem ütközik,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Annak valószínűsége pedig, hogy n párhuzamost metszve, legalább egy körrel ütközik,

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Az n-t úgy kell megválasztani, hogy fennálljon

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}9.$$

Ezt az egyenlőtlenséget n-re megoldjuk:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0{,}1;$$

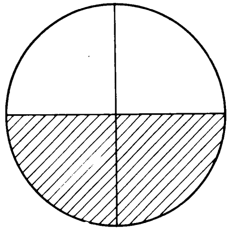
$$n \lg \frac{3}{4} < \lg \frac{1}{10};$$

$$n > -\frac{1}{\lg \frac{3}{4}} = \frac{1}{\lg 4 - \lg 3} \approx 8{,}004.$$

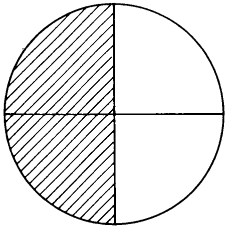
Tehát legalább kilenc párhuzamos egyenest kell felvennünk.

9. Egy kör alakú céltáblát egy vízszintes és egy függőleges átmérővel négy negyedre osztunk. Tegyük fel, hogy a találat véletlenszerűen eshet a kör bármely pontjára és hogy biztosan a céltáblára jut (vagyis csak azokat a lövéseket vesszük figyelembe, amelyek elérik a céltáblát). Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy egy találat a kör alsó felébe esik (42. ábra), B-vel azt, hogy a bal oldali félbe jut. (43. ábra), a C esemény pedig jelentse azt, hogy két „szemközti" negyed, mégpedig a bal alsó és a jobb felső valamelyikébe találnak (44. ábra). Igazoljuk, hogy az A, B és C események páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek!

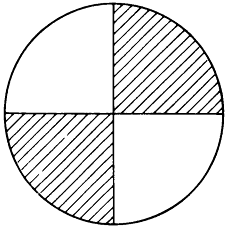
Először igazoljuk, hogy az adott események páronként függetlenek. Az A, B és C események mindegyike a céltábla területének felét fedi le,



42. ábra



43. ábra



44. ábra

így valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}.$$

Az adott események páronként vett szorzata azt az eseményt jelenti, hogy a találat közös részükbe jut; ez a közös rész mindegyik pár esetében a bal alsó körnegyed. Ennek valószínűsége: $\frac{1}{4}$.

Így fennállnak a következő összefüggések:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(BC) = \frac{1}{4}.$$

Ebből az előbbi következtében:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B); \quad \mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C); \quad \mathbf{P}(BC) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

A három esemény együttes bekövetkezése szintén azt jelenti, hogy a találat a bal alsó körnegyedbe jut. Ennek valószínűsége tehát:

$$\mathbf{P}(ABC) = \frac{1}{4}.$$

Az egyes események valószínűségeinek szorzata:

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Vagyis:

$$\mathbf{P}(ABC) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

Tehát igazoltuk, hogy az adott események páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek.

10. Háromgyermekes családok esetén vizsgáljuk meg, hogy a következő két esemény független-e. Az egyik esemény, hogy legfeljebb egy leány van a családban; a másik, hogy leány és fiú is van a családban.

A háromgyermekes családoknál 8 egyenlően valószínű lehetőség adódik a fiúk és leányok megoszlására (a születési sorrendet figyelembe véve), ui. az első, a második és a harmadik gyerek mindegyike $^1/_2$—$^1/_2$ valószínűséggel fiú, ill. leány. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy legfeljebb egy leány van a családban. Erre 4 kedvező eset van, mégpedig ha az összes gyermek fiú és ha az első, a második, ill. a harmadik leány, a többi pedig fiú. Így az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Legyen a B esemény az, hogy leány és fiú is van a családban. Ez azon két eset kivételével következik be, amikor vagy mindhárom gyermek leány, vagy mind a három fiú. A B esemény valószínűsége tehát:

$$\mathbf{P}(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Vizsgáljuk meg most az AB eseményt, amely azt jelenti, hogy legfeljebb egy leány van a családban, de van leány is és fiú is. Ez 3 esetben teljesül, mégpedig vagy ha az első vagy ha a második vagy ha a harmadik gyerek leány, a többi pedig fiú. Így

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{3}{8}.$$

Az A és B valószínűségeinek szorzatára:

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

A két utóbbi egyenlőségből adódik:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Tehát A és B független események.

11. Vizsgáljuk meg négygyermekes családok esetén azt, hogy a következő két esemény független-e. Az egyik esemény, hogy legfeljebb egy leány van a családban, a másik, hogy leány és fiú is van a családban.

A négygyermekes családoknál 16 egyenlően valószínű lehetőség adódik a gyermekek nem szerinti sorrendjére. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy legfeljebb egy leány van a családban. Erre 5 kedvező lehetőség van: ha az összes gyermek fiú és ha az első, a második, a harmadik, vagy a negyedik gyermek leány, a többi három pedig fiú. Így az A esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{5}{16}.$$

Legyen a B esemény, hogy leány is, fiú is van a családban. Ez azon két eset kivételével következik be, amikor vagy mind a négy gyermek leány, vagy mind a négy fiú. A B esemény valószínűsége tehát:

$$\mathbf{P}(B) = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

Vizsgáljuk meg most az AB eseményt, amely azt jelenti, hogy legfeljebb egy leány van a családban, de van leány is, fiú is. Ez 4 esetben következik be — ha az első, a második, a harmadik, ill. a negyedik gyerek leány és a többi három fiú. Így az AB esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Az A és B események valószínűségeinek szorzata:

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \frac{5}{16}\cdot\frac{7}{8} = \frac{35}{128}.$$

A két utóbbi egyenlőségből látható, hogy:

$$\mathbf{P}(AB) \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Tehát az A és B események nem függetlenek.

V. A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ ÉS JELLEMZŐI

1. A valószínűségi változó fogalma. A diszkrét valószínűségi változó és eloszlása

Egy T eseménytér elemi eseményeihez egy-egy számértéket rendelünk, így egy függvényt értelmezünk, amelyet valószínűségi változónak nevezünk és ξ-vel jelölünk.

Ha a ξ valószínűségi változó értékkészlete a véges vagy végtelen $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ sorozat, akkor a ξ-t *diszkrét eloszlású valószínűségi változónak* vagy rövidebben *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük. Legyen A_k a T eseménytér azon elemi eseményeinek a részhalmaza, amelyekhez ξ az x_k értéket rendeli; akkor a

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = x_k) = \mathbf{P}(A_k)$$

valószínűségeket a ξ változó *eloszlásának* nevezzük, és azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó az x_k értéket p_k valószínűséggel veszi fel. Az A_k események teljes eseményrendszert alkotnak, ezért a megfelelő valószínűségek összege:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = 1.$$

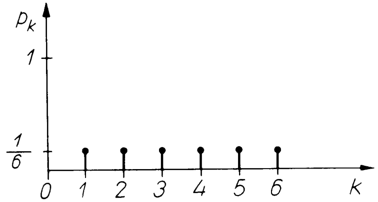
Például legyen a valószínűségi változó értéke kockadobás esetén a kockán felül levő pontszám. Meghatározzuk és ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlását.

A kockadobás szabályos kocka esetében hat azonos valószínűségi elemi eseményt eredményez. Vagyis a ξ diszkrét valószínűségi változó a k $(k=1, \dots, 6)$ értéket a következő valószínűséggel veszi fel:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = k) = \frac{1}{6} \qquad (k=1, \dots, 6).$$

Ennek alapján ξ eloszlását ábrázolhatjuk (45. ábra).

Másik példaként kétszer dobunk fel egy szabályos érmét egymás után. Minden fej dobásakor 1 Ft-ot nyerünk, és minden



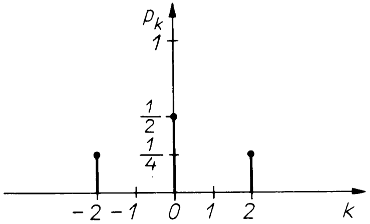
45. ábra

írás dobáskor 1 Ft-ot vesztünk. A ξ valószínűségi változó jelentse pénznövekedésünket a dobások után. Megállapítjuk ξ eloszlását és ábrázoljuk.

Két dobás négy azonosan valószínű esetet eredményezhet. Legyen f a fej, í az írás dobásának jele, így a lehetséges változatok:

ff, fí, íf, íí.

Az első esetben $\xi=2$; ennek valószínűsége $\mathbf{P}(\xi=2)=\frac{1}{4}$. A második és harmadik esetben $\xi=0$, itt $\mathbf{P}(\xi=0)=\frac{1}{2}$. Végül az utolsó esetben $\xi=-2$, ekkor $\mathbf{P}(\xi=-2)=\frac{1}{4}$. Az eloszlás most már ábrázolható (46. ábra).



46. ábra

Gyakorló feladatok

1. Egy útvonalon az autókat három, egymás utáni jelzőlámpa állíthatja meg. Bármely időpontban mindegyik $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ valószínűséggel jelez szabad vagy tilos utat. Legyenek a ξ valószínűségi változó értékei azon jelzőlámpák száma, amelyek egy autónak az útvonalon tilosat mutatnak. Adjuk meg a valószínűségi változó eloszlását és ábrázoljuk!

Az egyes jelzőlámpák állására 8 különböző lehetőség van. Ha s-sel jelöljük a szabad, t-vel a tilos jelzést, akkor ezek a következők:

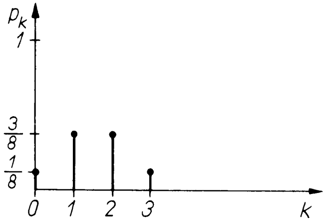
sss, sst, sts, tss, stt, tst, tts, ttt.

Minthogy egy lámpa valamely helyzetet $\frac{1}{2}$ valószínűséggel jelez, mind a 8 eset azonosan $\frac{1}{8}$ valószínűséggel következik be. A ξ valószínűségi változó egyenlő a tilost mutató lámpák számával, így lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3. Az egyes értékeket ξ a következő valószínűséggel veszi fel:

$$p_0=\mathbf{P}(\xi=0)=\frac{1}{8};\quad p_1=\mathbf{P}(\xi=1)=\frac{3}{8};$$

$$p_2=\mathbf{P}(\xi=2)=\frac{3}{8};\quad p_3=\mathbf{P}(\xi=3)=\frac{1}{8}.$$

Ezzel megkaptuk a ξ diszkrét valószínűségi változó eloszlását és ezt ábrázoljuk (47. ábra).



47. ábra

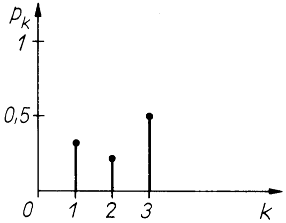
2. Három készüléket választunk ki megbízhatósági vizsgálathoz. A készülékek egymás után kerülnek vizsgálatra, de a vizsgálat megszakad, mihelyt valamelyik készülék nem felel meg a követelményeknek. Egy-egy készülék 0,7 valószínűséggel felel meg. Legyen a valószínűségi változó értéke a megvizsgált készülékek száma. Adjuk meg és ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlását!

A ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei a $k=1, 2, 3$ számok. Megállapítjuk, hogy ezeket milyen valószínűséggel veszi fel. Felhasználjuk, hogy az egyes vizsgálatok eredményei egymástól függetlenek:

$$p_1=\mathbf{P}(\xi=1)=0{,}3;\quad p_2=\mathbf{P}(\xi=2)=0{,}7\cdot 0{,}3=0{,}21;$$

$$p_3=\mathbf{P}(\xi=3)=0{,}7^2=0{,}49.$$

Az egyes valószínűségek ismeretében ξ eloszlását ábrázolhatjuk (48. ábra).



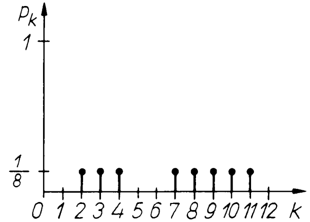
48. ábra

3. Egy csomag magyar kártyából találomra kihúzunk egy lapot. A valószínűségi változó ennek pontértékét vegye fel. A pontértékek legyenek a következők: a számozott lapok saját pontszámukat, az alsó 2, a felső 3, a király 4, az ász 11 pontot kapjon. Ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlását!

A ξ diszkrét valószínűségi változó a $k=2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11$ értékeket veheti fel. Mivel mindegyik értékből négy lap van a 32-lapos csomagban, az egyes értékek valószínűségei azonosak, mégpedig:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Az eloszlást ezután ábrázoljuk (49. ábra).



49. ábra

4. Egy rekeszben 3 jó és 2 hibás alkatrész van. Hármat választunk ki közülük találomra. Legyen a valószínűségi változó értéke a kivett jó alkatrészek száma. Írjuk fel és ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlását!

A ξ diszkrét valószínűségi változó értékei az $x_k=k$ $(k=1, 2, 3)$ számok lehetnek. A $\xi=k$ eset valószínűsége, vagyis azon eseménye, hogy k darab jó alkatrészt veszünk ki a rekeszből:

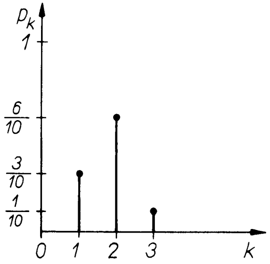
$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}} \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Az egyes valószínűségek a következők:

$$p_1 = \mathbf{P}(\xi=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}; \quad p_2 = \mathbf{P}(\xi=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10};$$

$$p_3 = \mathbf{P}(\xi=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}.$$

Most már ábrázolhatjuk az eloszlást (50. ábra).



50. ábra

5. Két kosárlabdajátékos felváltva dob kosárra. Ha egyikük dobása sikeres, akkor a játékot abbahagyják. A dobást kezdő 0,5, a másik 0,6 valószínűséggel talál egy dobás alkalmával a kosárba. Írjuk fel és szemléltessük annak a valószínűségi változónak az eloszlását, melynek értékei azon kosárra-dobások száma, amelyet a játékosok a sikeres dobással együtt végeznek!

Az egyes dobások a többi dobásoktól függetlenek. A ξ valószínűségi változó értékei az $x_k=k$ $(k=1, 2, \ldots)$ számok. A $k = 2n-1$ $(n=1, 2, \ldots)$ esetben a kezdő játékos dobása sikeres, míg a $k=2n$ $(n=1, 2, \ldots)$ esetek a másik játékos sikeres dobását jelentik. Vizsgáljuk először az első játékos sikeres dobása esetén bekövetkező $\xi = 2n-1$ esemény valószínűségét. Minthogy ekkor a kezdő és a második dobó egyaránt $n-1$ sikertelen és a kezdő végül egy sikeres dobást végez,

$$p_{2n-1} = \mathbf{P}(\xi=2n-1) = 0{,}5^{n-1}\cdot 0{,}4^{n-1}\cdot 0{,}5 = 0{,}2^{n-1}\cdot 0{,}5.$$

Most nézzük a második játékos sikeres dobása esetén teljesülő $\xi=2n$ esemény valószínűségét. Ekkor az első és a második játékos is n dobást végez, közülük az első összes dobása sikertelen, a másodiknak $n-1$ dobása sikertelen és az utolsó sikeres. Az egyes események függetlensége következtében

$$p_{2n} = \mathbf{P}(\xi=2n) = 0{,}5^{n}\cdot 0{,}4^{n-1}\cdot 0{,}6 = 0{,}2^{n-1}\cdot 0{,}3.$$

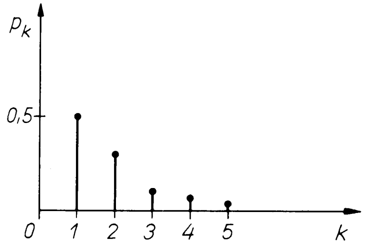
Ezek alapján ξ eloszlása a következő:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = \begin{cases} 0{,}2^{n-1}\cdot 0{,}5, & \text{ha } k = 2n-1. \\ 0{,}2^{n-1}\cdot 0{,}3, & \text{ha } k = 2n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Az első öt k értékre kiszámítjuk a valószínűségeket és ezeket szemléltetjük (51. ábra):

$$p_1 = 0{,}5; \quad p_2 = 0{,}3; \quad p_3 = 0{,}2\cdot 0{,}5 = 0{,}1;$$

$$p_4 = 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}06; \quad p_5 = 0{,}2^2\cdot 0{,}5 = 0{,}02.$$



51. ábra

6. Egy műszerhez egy darab speciális tulajdonságú tranzisztor szükséges. Rendelkezésre áll 10 darab tranzisztor, amelyeket sorban megvizsgálnak abból a szempontból, hogy alkalmasak-e a műszerhez, mindaddig, amíg egy ilyen speciális tulajdonságú tranzisztorra nem akadnak, vagy míg mind a 10 darabot meg nem vizsgálják. Annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott tranzisztor ilyen speciális tulajdonságú, 0,4. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a vizsgálat befejezése után ki nem próbált tranzisztorok száma. Írjuk fel e valószínűségi változó eloszlását!

A ξ diszkrét valószínűségi változó értékei az $x_k=k$ $(0, 1, \ldots, 9)$ számok. A $\xi=k$ események valószínűségét keressük. Az egyes vizsgálatok egymástól függetlenek. Ha k $(k=1, 2, \ldots, 9)$ darab a végül próbára nem kerülő tranzisztorok száma, akkor $10-k$ darabot megvizsgáltak már, és a vizsgálatok közül az utolsó sikeres volt. Ezen $9-k$ sikertelen és egy sikeres vizsgálat egyenkénti valószínűségeinek szorzatát kell képeznünk, így

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = 0{,}6^{9-k}\cdot 0{,}4 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 9).$$

Ha viszont minden tranzisztor vizsgálatra kerül, vagyis $k=0$, akkor 9 egymás utáni sikertelen próbának kellett történnie (a tizedik vizsgálat eredménye a valószínűségi változó értéke szempontjából lényegtelen). Ennek valószínűsége:

$$p_0 = \mathbf{P}(\xi=0) = 0{,}6^9.$$

Most már felírhatjuk ξ eloszlását:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=x_k) = \begin{cases} 0{,}6^9, & \text{ha } k = 0; \\ 0{,}6^{9-k}\cdot 0{,}4, & \text{ha } k = 1, \ldots, 9. \end{cases}$$

7. Egy űrrakéta három különálló egységét jelöljük b, c, d betűkkel. Ha valamelyik egységbe akárcsak egy kozmikus részecske jut, annak az egységnek a működése megszűnik. A b, c, d egységek kozmikus részecske következtében végbemenő meghibásodását jelölje rendre a B, C, D esemény. Az egész űrrakéta tönkremegy, ha az $A = B+CD$ esemény teljesül. Legyen a valószínűségi változó értéke az űrrakétába jutó azon kozmikus részecske sorszáma, amelytől a rakéta már tönkremegy, ha az űrrakétába jutó mindegyik kozmikus részecske a b, c, d egységek közül csak az egyikbe jut, mégpedig rendre $\mathbf{P}(B)=0{,}5$, $\mathbf{P}(C)=0{,}3$, $\mathbf{P}(D)=0{,}2$ valószínűséggel. Határozzuk meg e valószínűségi változó eloszlását!

A ξ diszkrét valószínűségi változó az $x_k=k$ $(k=1, 2, \ldots)$ értékeket veheti fel. Az egyes kozmikus részecskék becsapódása egymástól független. Az első becsapódó kozmikus részecske csak akkor teheti tönkre az űrrakétát, ha b-be jut, vagyis $\mathbf{P}(B)=0{,}5$ valószínűséggel; így

$$p_1 = \mathbf{P}(\xi=1) = 0{,}5.$$

Most tekintsük azokat az eseteket, amikor k $(k=2, 3, \ldots)$ kozmikus részecske közül az utolsó pusztítja el az űrrakétát. Ez a következőképpen lehetséges: az első $k-1$ részecske c-be jut és a k-adik vagy b-be, vagy d-be; vagy pedig az első $k-1$ részecske d-be jut és az utolsó vagy b-be vagy c-be. Ezek az esetek egymást kizárják, így valószínűségeik összeadódnak:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) =$$

$$= [\mathbf{P}(C)]^{k-1}[\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(D)]+[\mathbf{P}(D)]^{k-1}[\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)] =$$

$$= 0{,}3^{k-1}(0{,}5+0{,}2)+0{,}2^{k-1}(0{,}5+0{,}3) = 0{,}7\cdot 0{,}3^{k-1}+0{,}8\cdot 0{,}2^{k-1}$$

$$(k = 2, 3, \ldots).$$

A ξ valószínűségi változó eloszlása tehát a következő:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = \begin{cases} 0{,}5, & \text{ha } k = 1; \\ 0{,}7\cdot 0{,}3^{k-1}+0{,}8\cdot 0{,}2^{k-1}, & \text{ha } k = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

2. Eloszlásfüggvény. Folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Egy ξ valószínűségi változó $F(x)$ *eloszlásfüggvénye* azt adja meg, hogy milyen valószínűséggel vesz fel a ξ az x-nél kisebb értéket:

$$F(x)=\mathbf{P}(\xi<x).$$

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény tulajdonságai:

a) monoton növekvő, azaz

$$F(x_2) \geqq F(x_1), \quad \text{ha} \quad x_2>x_1;$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0;$$

c) $$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1;$$

d) minden helyen balról folytonos, azaz

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0).$$

Az A esemény jelentse azt, hogy a ξ értékére fennáll $a\leqq\xi<b$; ekkor

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(a\leqq\xi<b) = F(b)-F(a).$$

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye lépcsős függvény.

Egy ξ valószínűségi változó *sűrűségfüggvényének* nevezzük az $f(x)$ függvényt, ha ezzel a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye így adható meg:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ha ξ-nek létezik sűrűségfüggvénye, akkor $F(x)$ folytonos; ilyenkor ξ-t *folytonos (eloszlású) valószínűségi változónak* nevezzük. Ez esetben fennáll:

$$F'(x)=f(x).$$

Az $f(x)$ sűrűségfüggvény tulajdonságai:

a) nemnegatív, azaz

$$f(x) \geqq 0;$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Az A esemény jelentse azt, hogy $a\leqq\xi<b$ teljesül a ξ valószínűségi változó felvett értékére. Legyen továbbá ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$; akkor

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(a\leqq\xi<b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Például egy szabályos kockával végzett kockadobás alkalmával vegye fel a ξ valószínűségi változó a dobott szám értékét.

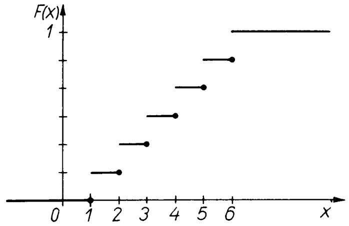
Elkészítjük ξ eloszlásfüggvényét. A ξ valószínűségi változó az $x_k=k$ $(k=1, \ldots, 6)$ értékeket veheti fel, mégpedig azonos valószínűséggel:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = \frac{1}{6} \qquad (k = 1, \ldots, 6).$$

Minthogy ξ diszkrét valószínűségi változó, az $F(x)$ eloszlásfüggvény lépcsős függvény (52. ábra), mely így adható meg:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi<x) = \sum_{k<x} p_k = \sum_{k<x} \frac{1}{6} \qquad (k = 1, \ldots, 6).$$

Másik példaként tekintsünk egy ejtőernyős ugróversenyt, ahol az ugrók mind egy r sugarú kör belsejébe érnek le. A körön belül bármely kijelölt területre esés valószínűsége csak a terület



52. ábra

mérőszámával arányos, tehát geometriai valószínűségi mezőről van szó. Legyen a ξ valószínűségi változó a kör középpontjának és a leérkezés pontjának a távolsága. Meghatározzuk a valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Vizsgáljuk meg, mennyi a valószínűsége annak, hogy a kör középpontjától $x(0 \leqq x < r)$ távolságnál közelebb érkezik le egy versenyző. Az x és az r sugarú körök területének hányadosát kell vennünk:

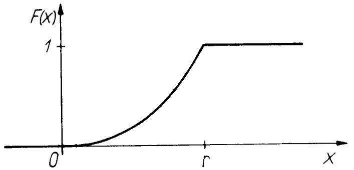
$$\mathbf{P}(\xi < x) = \frac{x^2\pi}{r^2\pi} = \frac{x^2}{r^2} \qquad (0 \leqq x < r).$$

Ennek alapján ξ eloszlásfüggvénye (53. ábra) felírható:

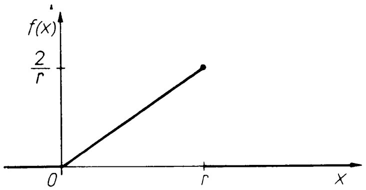
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0; \\ \dfrac{x^2}{r^2}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq r; \\ 1, & \text{ha} \quad x > r. \end{cases}$$

Szakaszonkénti deriválással kapjuk ξ sűrűségfüggvényét (54. ábra):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0; \\ \dfrac{2x}{r^2}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq r; \\ 0, & \text{ha} \quad x > r. \end{cases}$$



53. ábra



54. ábra

Gyakorló feladatok

1. Három ember között először 100, majd 200 és végül 300 forintot sorsolnak ki; az egyes sorsolások eredménye független egymástól. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke egy előre kiszemelt részvevőnek a sorsolás alapján jutó százasok száma. Határozzuk meg és ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét, és adjuk meg annak valószínűségét, hogy az illető 300 forintnál kevesebbet nyer, ill. hogy 350 forintnál kevesebbet nyer.

Jelölje A_i $(i = 1, 2, 3)$ azt az eseményt, hogy a kiszemelt részvevő az i-edik sorsoláson nyer. Az A_i események valószínűsége azonosan

$$\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{3} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Most a diszkrét valószínűségi változó egyes lehetséges értékeinek valószínűségét számítjuk ki. Az egyes sorsolások eredményei egymástól függetlenek. ξ az $x_k = k$ $(k = 0, 1, \dots, 6)$ értékeket veheti fel a következő eloszlással:

$$p_0 = \mathbf{P}(\xi=0) = \mathbf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2)\mathbf{P}(\bar{A}_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

$$p_1 = \mathbf{P}(\xi=1) = \mathbf{P}(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2)\mathbf{P}(\bar{A}_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27};$$

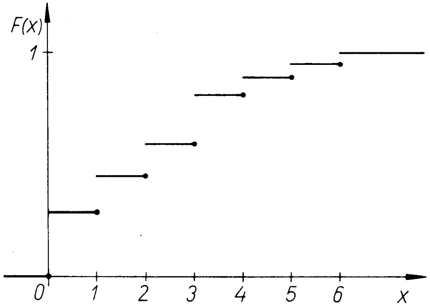
$$p_2 = \mathbf{P}(\xi=2) = \mathbf{P}(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) = \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(\bar{A}_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27};$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \mathbf{P}(\xi=3) = \\ &= \mathbf{P}(A_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = \mathbf{P}(A_1A_2\bar{A}_3) + \mathbf{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = \\ &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(\bar{A}_3) + \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2)\mathbf{P}(A_3) = \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3} = \frac{2}{27} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27}; \end{aligned}$$

$$p_4 = \mathbf{P}(\xi=4) = \mathbf{P}(A_1\bar{A}_2A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2)\mathbf{P}(A_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} = \frac{2}{27};$$

$$p_5 = \mathbf{P}(\xi=5) = \mathbf{P}(\bar{A}_1A_2A_3) = \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27};$$

$$p_6 = \mathbf{P}(\xi=6) = \mathbf{P}(A_1A_2A_3) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$



55. ábra

Ezután felírjuk és ábrázoljuk (55. ábra) a lépcsős eloszlásfüggvényt:

$$F(x) = \sum_{k<x} p_k \qquad (k = 0, \ldots, 6).$$

A 300 forintnál kevesebb össznyereménynek $\xi<3$ felel meg, ennek valószínűsége: $\mathbf{P}(\xi<3)=F(3)=\frac{16}{27}$; a 350 forintnál kisebb össznyereménynek $\xi<3{,}5$ felel meg, melynek valószínűsége $P(\xi<3{,}5)=F(3{,}5)=\frac{22}{27}$

2. Egy garázsból csoportonként kikerülő 10—10 teherautó közül 0, 1, 2 vagy 3 darab műszakilag hibás, mégpedig egyenlő eséllyel fordul elő e hibaszámok bármelyike. Két teherautót találomra kiválasztanak egy csoportból és megvizsgálnak. Legyen a valószínűségi változó értéke e két kiválasztott járműből a műszakilag hibásak száma. Készítsük el az eloszlásfüggvényt!

A B_i $(i=0, 1, 2, 3)$ esemény jelentse azt, hogy i darab hibás jármű van tíz között. A B_i események valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_i) = \frac{1}{4} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Legyen A_k $(k=0, 1, 2)$ az az esemény, hogy a valószínűségi változó az $x_k=k$ $(0, 1, 2)$ értéket veszi fel. Az A_k események B_i feltétel melletti feltételes valószínűségét közvetlenül ki tudjuk számítani:

$$\mathbf{P}(A_k|B_i) = \begin{cases} \dfrac{\binom{i}{k}\binom{10-i}{2-k}}{\binom{10}{2}}, & \text{ha } k \leq i; \\ 0, & \text{ha } k > i. \end{cases}$$

Az A_k $(k=0, 1, 2)$ események p_k valószínűségét a teljes valószínűség tételével adjuk meg. Ezzel ξ eloszlását is meghatározzuk:

$$p_0 = \mathbf{P}(\xi=0) = \mathbf{P}(A_0) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(A_0|B_i)\mathbf{P}(B_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{3} \frac{\binom{i}{0}\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4\binom{10}{2}} \left[\binom{10}{2}+\binom{9}{2}+\binom{8}{2}+\binom{7}{2}\right] =$$

$$= \frac{45+36+28+21}{4 \cdot 45} = \frac{130}{180};$$

$$p_1 = \mathbf{P}(\xi=1) = \mathbf{P}(A_1) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(A_1|B_i)\mathbf{P}(B_i) =$$

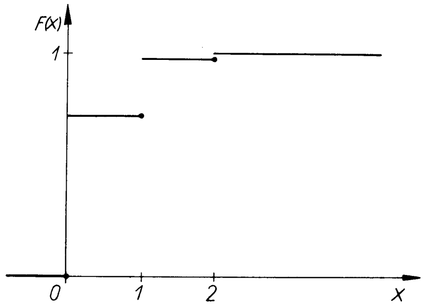
$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{\binom{i}{1}\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9+16+21}{4 \cdot 45} = \frac{46}{180};$$

$$p_2 = \mathbf{P}(\xi=2) = \mathbf{P}(A_2) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(A_2|B_i)\mathbf{P}(B_i) =$$

$$= \sum_{i=2}^{3} \frac{\binom{i}{2}\binom{10-i}{0}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1+3}{4 \cdot 45} = \frac{4}{180}.$$

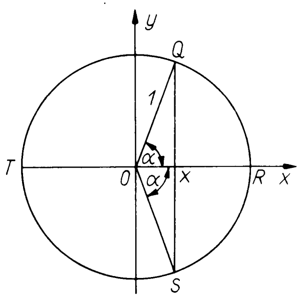
Az $F(x)$ eloszlásfüggvény (56. ábra) lépcsős függvény, amely így írható fel:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi<x) = \sum_{k<x} p_k \qquad (k = 0, 1, 2).$$



56. ábra

3. Az origó körüli egységsugarú kör kerületén véletlenszerűen választunk egy pontot. Legyen a ξ valószínűségi változó a pont abszcisszája. Írjuk fel eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Határozzuk meg, milyen valószínűséggel esik a valószínűségi változó értéke a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ intervallumba!



57. ábra

A kör kerülete $L=2\pi$. A körkerület azon pontjai, melyeknek abszcisszája x-nél kisebb, a QTS köríven (57. ábra) fekszenek. Ennek hossza legyen l. A QRS ív hossza:

$$2\alpha = 2 \arccos x,$$

ahol a szög természetesen radiánban értendő. Ebből a QTS ív hossza:

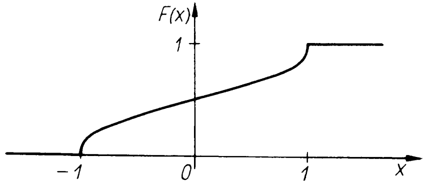
$$l = 2\pi - 2 \arccos x.$$

Annak valószínűsége, hogy a körön mozgó pont abszcisszája, vagyis a ξ valószínűségi változó adott x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ számnál kisebb, a megfelelő ív hosszának és a teljes kör kerületének aránya:

$$\mathbf{P}(\xi < x) = \frac{l}{L} = \frac{2\pi - 2\arccos x}{2\pi} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos x \quad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

Ennek alapján a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye (58. ábra):

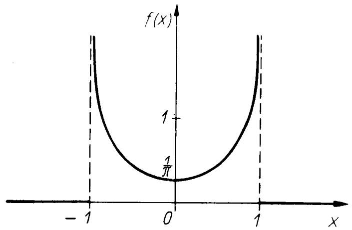
$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq -1; \\ 1 - \dfrac{1}{\pi} \arccos x, & \text{ha } -1 < x \leqq 1; \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$



58. ábra

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény szakaszonkénti differenciálásával kapjuk az $f(x)$ sűrűségfüggvényt (59. ábra):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -1; \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{ha } -1 < x < 1; \\ 0, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$



59. ábra

Az eloszlásfüggvény ismeretében kiszámítjuk, hogy mekkora valószínűséggel esik ξ a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ számközbe:

$$\mathbf{P}\left(0 \leqq \xi < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arccos 0 - \arccos \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

4. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ ax^2 e^{-2x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg az a együttható értékét! Írjuk fel ezután a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki, hogy milyen valószínűséggel esik ξ a $[0, 1)$ intervallumba!

Az a együttható meghatározására a sűrűségfüggvénynek azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ezt alkalmazzuk az adott függvényre:

$$\int_{0}^{\infty} ax^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ebből

$$a = \frac{1}{\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x}.$$

A nevezőben levő integrált parciális integrálással számítjuk ki. Az $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ integrálban $u=x^2$ és $v'=e^{-2x}$ jelöléssel $u'=2x$ és $v=\frac{e^{-2x}}{-2}$ adódik. Ennek alapján:

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[x^2\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} 2x\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Az $\int_{0}^{\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$ integrálban az $u=x$, $v'=e^{-2x}$ jelöléssel $u'=1$ és $v=\frac{e^{-2x}}{-2}$ függvényeket kapunk. Ismét parciálisan integrálunk:

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} 1\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Azt kaptuk, hogy

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Ezt visszahelyettesítjük:

$$a = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Ezután az eloszlásfüggvényt számítjuk ki. Legyen $x>0$, ekkor

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} 4t^2 e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 4\int_{0}^{x} t^2 e^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

Az $u=t^2$, $v'=e^{-2t}$ jelöléssel ismét parciálisan integrálunk. Ekkor $u'=2t$, $v=\frac{e^{-2t}}{-2t}$ adódik, amit felhasználunk:

$$4\int_{0}^{x} t^2 e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 4\left\{\left[t^2\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{x} - \int_{0}^{x} 2t\frac{e^{-2t}}{-2}\,\mathrm{d}t\right\} =$$

$$= 4\left\{-\frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \int_{0}^{x} te^{-2t}\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Az $\int_{0}^{x} te^{-2t}\,\mathrm{d}t$ integrálban $u=t$, $v'=e^{-2t}$ jelölést használunk. Ekkor $v'=1$, $v=\frac{e^{-2t}}{-2}$ adódik, és parciálisan integrálunk:

$$\int_{0}^{x} te^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{x} - \int_{0}^{x} 1\frac{e^{-2t}}{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-2t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{x} = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{4}.$$

Ezt visszahelyettesítjük:

$$4\int_0^x t^2 e^{-2t}\,dt =$$

$$= 4\left\{-\frac{x^2 e^{-2x}}{2}-\frac{xe^{-2x}}{2} = -\frac{e^{-2x}}{4}+\frac{1}{4}\right\} = -e^{-2x}(2x^2+2x+1)+1.$$

Ennek alapján felírhatjuk ξ eloszlásfüggvényét:

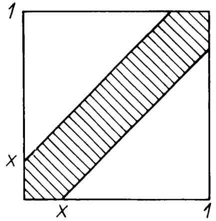
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\leqq 0;\\ 1-e^{-2x}(2x^2+2x+1), & \text{ha } x>0.\end{cases}$$

Végül az eloszlásfüggvény ismeretében kiszámítjuk, mekkora valószínűséggel esik a ξ a $[0, 1)$ számközbe:

$$\mathbf{P}(0\leqq\xi<1) = F(1)-F(0) = 1-5e^{-2} =$$

$$= 1-\frac{5}{e^2} \approx 1-\frac{5}{2{,}72^2} \approx 0{,}32.$$

5. Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül két pontot választunk találomra. Legyen a valószínűségi változó a két választott pont távolsága. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a két pont távolsága legalább $\frac{3}{4}$!



60. ábra

Először annak valószínűségét keressük, hogy két választott pont távolsága x-nél kisebb. Ezt az egységnégyzet bevonalkázott részének (60. ábra) t területe és az egész négyzet $T=1$ területének aránya adja meg, ha $0<x<1$. A bevonalkázott rész területe:

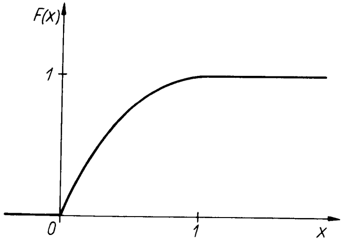
$$t = 1-(1-x)^2 = 2x-x^2.$$

Ennek alapján:

$$\mathbf{P}(\xi<x) = \frac{t}{T} = 2x-x^2, \quad \text{ha} \quad 0<x<1.$$

A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (61. ábra) a következő:

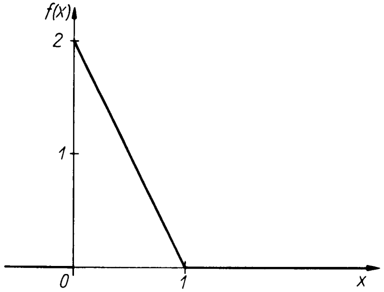
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\leqq 0;\\ 2x-x^2, & \text{ha } 0<x\leqq 1;\\ 1, & \text{ha } x>1.\end{cases}$$



61. ábra

A valószínűségi változó sűrűségfüggvényét (62. ábra) az $F(x)$ eloszlásfüggvény szakaszonkénti deriválásával kapjuk:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\leqq 0;\\ 2-2x, & \text{ha } 0<x\leqq 1;\\ 0, & \text{ha } x>1.\end{cases}$$



62. ábra

Annak a valószínűségét, hogy két kiválasztott pont távolsága legalább $\frac{3}{4}$, az eloszlásfüggvény ismeretében így számítjuk ki:

$$\mathbf{P}\left(\xi\geqq\frac{3}{4}\right) = 1-\mathbf{P}\left(\xi<\frac{3}{4}\right) = 1-F\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$= 1-\left[2\cdot\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = 1-\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{16}\right) = 1-\frac{15}{16} = \frac{1}{16}.$$

6. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 2; \\ \dfrac{a}{x^3}, & \text{ha} \quad x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg az a együttható értékét. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki, milyen x értéken adódik a $\xi \geqq x$ valószínűségére $\frac{1}{2}$!

Felhasználjuk a sűrűségfüggvénynek azt a tulajdonságát, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Ez az adott $f(x)$ függvényre:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{a}{x^3}\,dx = 1.$$

Ebből

$$a = \frac{1}{\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^3}}.$$

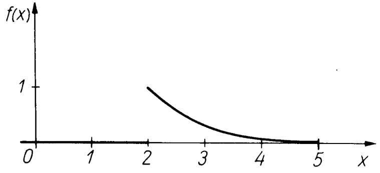
A nevezőben levő integrált kiszámítjuk:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \int_{2}^{\infty} x^{-3}\,dx = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_2^{\infty} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{8}.$$

Ezt visszahelyettesítjük:

$$a = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8.$$

A sűrűségfüggvényt most már ábrázolhatjuk (63. ábra). Ezután az eloszlás-



63. ábra

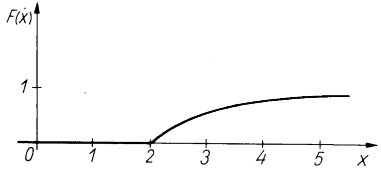
függvényt számítjuk ki. Legyen $x > 2$, ekkor

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{2}^{x} \frac{8}{t^3}\,dt = 8\int_{2}^{x} t^{-3}\,dt = 8\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_2^{x} =$$

$$= 8\left[-\frac{1}{2t^2}\right]_2^{x} = 8\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{4}{x^2}.$$

Ennek alapján felírhatjuk a ξ eloszlásfüggvényét (64. ábra):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 2; \\ 1 - \dfrac{4}{x^2}, & \text{ha} \quad x > 2. \end{cases}$$



64. ábra

Az eloszlásfüggvény ismeretében meghatározzuk azt az x értéket, amelyre $\xi \geqq x$ valószínűsége $\frac{1}{2}$; vagyis amelyre $F(x) = 1 - F(x) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{2}; \quad x^2 = 8; \quad x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Tehát

$$\mathbf{P}(\xi \geqq 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2}.$$

7. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0; \\ axe^{-2x^2}, & \text{ha} \quad x > 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg az a együttható értékét. Írjuk fel a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki, melyik x helyen kapunk a $\xi<x$ valószínűségére $\frac{1}{2}$ értéket!

A sűrűségfüggvényre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

így

$$\int_{0}^{\infty} axe^{-2x^2}\,dx = 1,$$

ebből

$$a = \frac{1}{\int_{0}^{\infty} xe^{-2x^2}\,dx}.$$

A nevezőben levő integrált kiszámítjuk:

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} (-4x)e^{-2x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4}[e^{-2x^2}]_0^{\infty} = -\frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{4}.$$

Ezt visszahelyettesítjük:

$$a = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Ezután ξ eloszlásfüggvényét határozzuk meg. Legyen $x>0$, ekkor

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 4te^{-2t}\,dt = -[e^{-2t^2}]_{-\infty}^{x} = -(e^{-2x^2}-1) =$$

$$= 1-e^{-2x^2}.$$

Ennek alapján a valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ 1-e^{-2x^2}, & \text{ha } x>0. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény ismeretében kiszámítjuk, milyen x-re lesz $\xi<x$ valószínűsége $\frac{1}{2}$:

$$F(x) = \frac{1}{2};$$

$$1-e^{-2x^2} = \frac{1}{2};$$

$$e^{-2x^2} = \frac{1}{2};$$

$$-2x^2 = \ln\frac{1}{2};$$

$$x^2 = \frac{\ln 2}{2};$$

$$x = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}.$$

Tehát

$$\mathbf{P}\left(\xi<\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

8. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{a}{x^2+4} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

Határozzuk meg az a állandó értékét! Írjuk fel és szemléltessük a sűrűségfüggvényt és az eloszlásfüggvényt! Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy ξ a $[0, 2)$ intervallumba esik!

A sűrűségfüggvényre felírjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+4}\,dx = 1.$$

Ebből az állandó:

$$a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}}.$$

A nevezőben levő integrált kiszámítjuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\left[2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} =$$

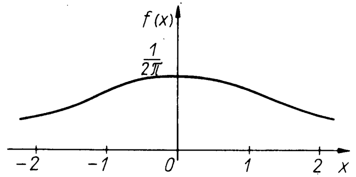
$$= \frac{1}{4}\left(2\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ezt visszahelyettesítjük:

$$a = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Így a sűrűségfüggvény (65. ábra):

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+4} \qquad (-\infty<x<\infty).$$



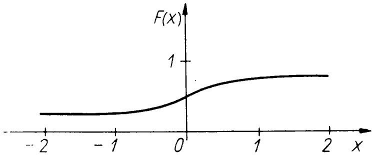
65. ábra

Ezután ξ eloszlásfüggvényét (66. ábra) határozzuk meg:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{t^2+4}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[2 \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2\pi}\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}+2\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} \qquad (-\infty<x<\infty).$$



66. ábra

Végül az eloszlásfüggvény ismeretében kiszámítjuk annak valószínűségét, hogy ξ a $[0, 2)$ számközbe esik:

$$\mathbf{P}(0\leq\xi<2) = F(2)-F(0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}.$$

9. Egy autóbusz egységnyi hosszúságúnak tekintett útvonala mentén bárhol fel lehet szállni a járműre. A ξ valószínűségi változó legyen egy utas felszállási helyének távolsága az útvonal kezdőpontjától. Tegyük fel, hogy az útvonal mentén a forgalmi adatokra vonatkozó tapasztalatok alapján ξ sűrűségfüggvénye — kielégítő közelítéssel — a következő alakúnak tekinthető:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x\leq 0; \\ ax(1-x)^2, & \text{ha } 0<x\leq 1; \\ 0, & \text{ha } x>1. \end{cases}$$

Határozzuk meg az a együttható értékét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy utas az útvonal első felében száll fel!

A sűrűségfüggvényre felírjuk:

$$\int_0^1 ax(1-x)^2\, dx = 1.$$

Az a együtthatót kifejezzük:

$$a = \frac{1}{\int_0^1 x(1-x)^2\, dx}.$$

A nevezőben levő integrált kiszámítjuk:

$$\int_0^1 x(1-x)^2\, dx = \int_0^1 (x-2x^2+x^3)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ennek alapján

$$a=12.$$

Most annak valószínűségét számítjuk ki, hogy egy utas az útvonal első felében száll fel:

$$\mathbf{P}\left(0\leq\xi<\frac{1}{2}\right) = 12\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-x)^2\, dx = \frac{9}{16}.$$

Tehát $\frac{9}{16}$ annak a valószínűsége, hogy egy utas az útvonal első felében száll fel az autóbuszra.

10. Egy autóbusz egységnyi hosszúságú útvonala mentén bárhol fel lehet szállni a járműre, és bárhol le lehet szállni róla. Legyen a ξ valószínűségi változó egy olyan utas leszállási helyének távolsága az útvonal kezdőpontjától, aki a kezdőponttól u távolságra szállt fel a járműre. Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényére következő alakú közelítés használható:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq u; \\ a(x-u)^2, & \text{ha } u < x \leqq 1; \\ 0, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Határozzuk meg az a együttható értékét. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy utas a felszállási helytől a végállomásig hátralevő útnak legalább a felét teszi meg a járműn. Függ-e ez a valószínűség attól, hogy hol száll fel az utas?

A sűrűségfüggvényre

$$\int_u^1 a(x-u)^2\,dx = 1.$$

Ebből:

$$a = \frac{1}{\int_u^1 (x-u)^2\,dx}.$$

A nevezőben levő integrált kiszámítjuk:

$$\int_u^1 (x-u)^2\,dx = \left[\frac{(x-u)^3}{3}\right]_u^1 = \frac{(1-u)^3}{3}.$$

Ezért

$$a = \frac{3}{(1-u)^3}.$$

Ha az utas a kezdőponttól u távolságra szállt fel, akkor a hátralevő út fele a kezdőponttól $\frac{1+u}{2}$ távolságra van; annak valószínűsége, hogy ξ az $\left(\frac{1+u}{2}, 1\right)$ számközbe esik,

$$\mathbf{P}\left(\frac{1+u}{2} \leqq \xi < 1\right) = \int_{\frac{1+u}{2}}^1 \frac{3}{(1-u)^3}(x-u)^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{(1-u)^3}\left[\frac{(x-u)^3}{3}\right]_{\frac{1+u}{2}}^1 = \frac{3}{(1-u)^3}\left[\frac{(1-u)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1+u}{2}-u\right)^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{3}{(1-u)^3}\left[\frac{(1-u)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1-u}{2}\right)^3}{3}\right] = \frac{3}{(1-u)^3}\left[\frac{(1-u)^3}{3} - \frac{(1-u)^3}{3\cdot 8}\right] =$$

$$= \frac{3}{(1-u)^3}\,\frac{7(1-u)^3}{3\cdot 8} = \frac{7}{8}.$$

Tehát u-tól függetlenül $\frac{7}{8}$ a valószínűsége annak, hogy egy utas a felszállási helytől a végállomásig hátralevő útnak legalább a felét teszi meg az autóbuszon.

3. A várható érték

Ha egy valószínűségi változóval kapcsolatban független kísérleteket hajtunk végre, akkor a valószínűségi változó ezek során felvett értékei általában egy meghatározott számérték körül ingadoznak. Ha a felvett értékek számtani közepét képezzük, akkor ez ugyanezen érték körül ingadozik, mégpedig minél több értékből képezünk átlagot, annál kisebbé válik az ingadozás. Ezt az — elméleti — értéket, mely körül a tapasztalati értékek ingadoznak, *várható értéknek* nevezik. Léteznek olyan valószínűségi változók is, amelyeknek nincs várható értékük!

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, mely az x_k $(k=1, 2, \ldots)$ értékeket p_k $(k=1, 2, \ldots)$ valószínűséggel veszi fel, akkor ξ várható értéke

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum p_k x_k.$$

Ha ξ végtelen sok diszkrét értéket vehet fel, akkor a várható értéket csak akkor értelmezzük, ha a fenti sor abszolút konvergens, vagyis

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty.$$

Ha ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor várható értéke

$$\mathbf{M}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x,$$

feltéve hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, \mathrm{d}x$ konvergens.

Ellenkező esetben a diszkrét, ill. folytonos valószínűségi változónak nincs várható értéke.

Például egy szabályos kockával végzett kockadobás alkalmával, ha a ξ valószínűségi változó a dobott szám értékével egyenlő, vagyis az

$$x_k = k \qquad (k = 1, \dots, 6)$$

értékeket azonosan

$$p_k = \frac{1}{6} \qquad (k = 1, \dots, 6)$$

valószínűséggel veszi fel, akkor a várható érték:

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=1}^{6} p_k x_k = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} k = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k =$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Másik példa:

Ha egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ \sin x, & \text{ha } 0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{ha } x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

akkor várható értéke:

$$\mathbf{M}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} x \sin x\, \mathrm{d}x.$$

Parciálisan integrálunk $u = x$, $v' = \sin x$ választással. Ekkor $u' = 1$, $v = -\cos x$ adódik. Ezeket felhasználva:

$$\int_{0}^{\pi/2} x \sin x\, \mathrm{d}x = [-x \cos x]_0^{\pi/2} - \int_{0}^{\pi/2} (-\cos x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Gyakorló feladatok

1. Egy sorsjátékon 1 darab 5000 Ft-os, 10 darab 500 Ft-os és 50 darab 100 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen egy jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

I. Megoldás:

A ξ valószínűségi változó vegye fel az egyes nyereményösszegek x_k értékét. Annak valószínűsége, hogy ξ éppen x_k-t veszi fel, legyen p_k. Ekkor

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=1}^{4} p_k x_k.$$

Ennek kétszerese a jegy ára:

$$2\mathbf{M}(\xi) = 2 \sum_{k=1}^{4} p_k x_k =$$

$$= 2\left(\frac{1}{10000}\, 5000 + \frac{10}{10000}\, 500 + \frac{50}{10000}\, 100\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Tehát egy jegynek 3 Ft-ba kell kerülnie.

II. Megoldás:

A megadott feltétel annyit jelent, hogy „átlagosan” a sorsjegyek árának felét fizetik vissza nyeremény formájában, a másik felét pedig a sorsjáték hasznaként visszatartják. Mivel a nyereményekre fordítandó teljes pénzösszeg $1 \cdot 5000 + 10 \cdot 500 + 50 \cdot 100 = 15\,000$, a 10 000 sorsjegyből összesen 30 000 Ft-ot kell bevenni, vagyis egy sorsjegy árát 3 Ft-ban kell megállapítani.

2. Két játékos közül az első egyszerre három darab forintos érmét dob fel, a második egyszerre két darab forintos érmét, Az nyer, aki több fejet dobott és nyereségként megkapja a másik játékos feldobott érméit. Ha a fejek száma azonos, a játékot addig folytatják, amíg valamelyikük nem nyer. Mekkora az első játékos pénznyereségének várható értéke? (A veszteséget negatív „nyereségnek” tekintjük!)

Az egyes játékosok dobási eredményei függetlenek. Számítsuk ki az egyes játékosok nyerésének valószínűségét! Először a két játékos egy-egy dobását tekintsük. Az első játékos lehetséges fejdobásainak száma 3, 2, 1, 0, a megfelelő valószínűségek $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. A második játékos esetében ugyanezek a lehetőségek két érmével 2, 1, 0, a hozzájuk tartozó valószínűségek $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Legyen A_1 az az esemény, hogy az első játékos az első dobások alapján nyer. Ez bekövetkezik, ha 3 fejdobása van, vagy ha 2 fejdobása van és a másodiknak 2-nél kevesebb, vagy ha 1 fejdobása van és a másodiknak egy sem. Ezek az esetek egymást kizárják, így az A_1 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{4+9+3}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Jelöljük B_1-gyel azt az eseményt, hogy a második játékos nyer az első dobások alapján. Ez akkor teljesül, ha a másodiknak 2 fejdobása van és az elsőnek 2-nél kevesebb, vagy 1 fejdobása van és az elsőnek egy sem. Ezek az esetek is kizárják egymást, ennélfogva a B_1 esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{2+1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Ha a játék az első dobások alapján nem dől el, újra dobnak mindketten, amíg csak valamelyik játszmában az egyik játékos nem nyer. A további játszmák során mindkét fél nyerési esélye ugyanannyi marad, mint az első dobások alkalmával. Jelöljük A-val az első játékos győzelmét és B-vel a másodikét. Minthogy

$$\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B) = 1,$$

továbbá

$$\mathbf{P}(A):\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1):\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{2}:\frac{3}{16} = \frac{8}{3},$$

e két összefüggésből

$$p_1 = \mathbf{P}(A) = \frac{8}{11} \quad \text{és} \quad p_2 = \mathbf{P}(B) = \frac{3}{11}.$$

A ξ valószínűségi változó az $x_1=2$ értéket veszi fel, ha az A esemény teljesül és az $x_2 = -3$ értéket, ha a B következik be. Várható értéke

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=1}^{2} p_k x_k = \frac{8}{11}\cdot 2+\frac{3}{11}(-3) = \frac{16}{11}-\frac{9}{11} = \frac{7}{11}.$$

Tehát $\frac{7}{11}$ az első játékos várható pénznyeresége.

3. Egy automata gépsor jó beállítás esetén csupa hibátlan gyártmányt állít elő. A beállítás bármely darab gyártása közben 0,05 valószínűséggel megváltozhat és akkor a gép már selejtes gyártmányt gyárt. Az elkészült darabok mindegyikét ellenőrzik, és ha egy selejtes gyártmány készül, a gépsort azonnal leállítják és megjavítják. Mennyi a két javítás között készülő darabok számának várható értéke?

A ξ valószínűségi változó jelölje két gépbeállítás között elkészülő áruk darabszámát; ennek lehetséges értékei:

$$x_k=k \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Ha p-vel jelöljük a selejtes és q-val a jó áru gyártásának valószínűségét, akkor a $\xi=k$ esemény valószínűsége

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = q^{k-1}p,$$

mert ekkor a két beállítás között először $k-1$ jó, majd egy selejtes áru készül. A ξ diszkrét valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}pk = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

A $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$ összeget számítjuk ki. Ehhez felhasználjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ geometriai sor $|q|<1$ esetén konvergens és összege

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}-1.$$

Ez a sor q szerint tagonként deriválható, s így

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}-1\right) = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Ezt helyettesítve, és figyelembe véve, hogy $p = 1-q$,

$$\mathbf{M}(\xi) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Minthogy $p=0{,}05$, ezt beírva:

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{1}{0{,}05}=20.$$

Tehát a gépsoron két javítás között készülő gyártmányok várható száma 20.

4. Két rádióállomás között kétoldalú kapcsolatot kell létesíteni. A hívóállomás jeleit mindenkor 0,2 valószínűséggel veszi a másik. A hívóállomás 5 másodpercenként ad le jeleket addig, amíg a másik állomás nem ad választ, amelyet a hívó már biztosan vesz. A hívás kezdetétől az első vételig legalább 16 másodperc szükséges. Mennyi a hívójelek számának várható értéke a kétoldalú kapcsolat megteremtéséig?

Az egyes hívójelek vétele egymástól független. Jelöljük annak valószínűségét, hogy egy hívójelet vesznek, p-vel és annak valószínűségét, hogy nem észlelik, q-val. A hívóállomásra az első jel adásától számítva legkorábban 16 másodperc múlva érkezhet válasz. A hívó a válaszig tehát legalább 4 jelet továbbít. A ξ valószínűségi változó értéke a kétoldalú kapcsolat létesítéséig leadott hívójelek száma, amely tehát az

$$x_k=k+3 \qquad (k=1,2,\dots)$$

értékeket veheti fel. Annak valószínűsége, hogy $\xi=x_k$:

$$p_k=\mathbf{P}(\xi=x_k)=q^{k-1}p \qquad (k=1,2,\dots).$$

A ξ diszkrét valószínűségi változó várható értéke (mivel ha a hívott fél elsőként a k-adik jelet észleli, akkor míg erre leadott válaszjele a hívóhoz beérkezik, az még további 3 jelet lead):

$$\mathbf{M}(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}p_kx_k=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p(k+3)=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}+3p\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}.$$

Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p^2}, \quad \text{ha} \quad |q|<1;$$

továbbá

$$\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}, \quad \text{ha} \quad |q|<1.$$

Ezeket figyelembe véve:

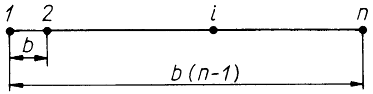
$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{1}{p}+3.$$

A $p=0{,}2$ értéket beírjuk:

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{1}{0{,}2}+3=8.$$

Tehát a kétoldalú kapcsolat megteremtéséig leadott hívójelek számának várható értéke 8.

5. Egy munkás n azonos munkagépet kezel, amelyek egy sorban, egymástól b távolságra vannak (67. ábra). A gépek az üzemzavart azonnal jelzik. Feltehető, hogy egyszerre csak egy gép hibásodik meg, és hogy annak kijavítása után bármelyik gép (tehát az éppen javított is) egyforma valószínűséggel hibásodhat meg. Ha valamely gép kezelését a munkás befejezte, akkor ahhoz a géphez megy, amely a következő jelzést adta. Számítsuk ki a munkás egy-egy útja hosszának — tehát két, egymás után kezelendő gép távolságának — várható értékét.



67. ábra

Jelöljük a munkás egy útjának a hosszát ξ-vel; tehát ξ lehetséges értékei $x_k=kb$ $(k=0,1,\dots,n-1)$. Legyen A_i az az esemény, hogy a munkás az i-edik gépet javította és B_j az, hogy a j-edik gép adja a következő hibajelet. Feltevésünk szerint

$$\mathbf{P}(A_i)=\mathbf{P}(B_j)=\frac{1}{n} \qquad (i,j=1,2,\dots,n)$$

és az A_i, B_j események függetlenek. A ξ változó értéke akkor egyenlő kb-vel, ha az

$$A_1B_{k+1},\ A_2B_{k+2},\ \dots,\ A_{n-k}B_n,$$

ill. az

$$A_{k+1}B_1,\ A_{k+2}B_2,\ \dots,\ A_nB_{n-k}$$

események egyike bekövetkezik. Ha $k\neq0$, ezek különböző események; $k=0$ mellett a felső és az alsó eseménysorozat azonos. Ezek alapján

$$\mathbf{P}(\xi=x_k)=\begin{cases}\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}, & \text{ha} \quad k=0;\\[2ex] \dfrac{2(n-k)}{n^2}, & \text{ha} \quad k=1,2,\dots,n-1.\end{cases}$$

A ξ változó várható értéke tehát:

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \mathbf{P}(\xi = x_k) = 0\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} kb\frac{2(n-k)}{n^2} =$$

$$= \frac{2b}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2b}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2b}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} - \frac{2b}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$

$$= \frac{b}{3n}[3n^2 - 3n - 2n^2 + 3n - 1] = b\frac{n^2-1}{3n}.$$

Tehát a munkás egy-egy útjának várható hosszúsága $b\dfrac{n^2-1}{3n}$.

6. Két pontot választunk találomra egy egységnyi hosszúságú szakaszon. Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét!

Jelölje a ξ folytonos valószínűségi változó a két pont távolságát. Az előző fejezetben láttuk (l. **5.** feladat, 194. oldal), hogy ξ sűrűségfüggvénye ekkor:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ 2-2x, & \text{ha } 0 < x \leqq 1; \\ 0, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

várható értéke tehát:

$$\mathbf{M}(\xi) = \int_0^1 x(2-2x)\,dx = \int_0^1 (2x-2x^2)\,dx =$$

$$= \left[2\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Azt kaptuk, hogy a két pont távolságának várható értéke $\dfrac{1}{3}$.

7. Gázmolekulák sebességét tekintjük ξ valószínűségi változónak, amelynek sűrűségfüggvénye a Maxwell-eloszlás szerint:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0, \\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2} \quad (h = \text{állandó}), & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki a sebesség várható értékét!

A várható érték:

$$\mathbf{M}(\xi) = \int_0^\infty x\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2}\,dx = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^2(-2h^2xe^{-h^2x^2})\,dx.$$

Ekkor az integrandusban $u = x^2$, $v' = -2h^2xe^{-h^2x^2}$ választással $u' = 2x$, $v = e^{-h^2x^2}$ adódik. Ezeket alkalmazva, parciálisan integrálunk:

$$\mathbf{M}(\xi) = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\left\{[x^2e^{-h^2x^2}]_0^\infty - \int_0^\infty 2xe^{-h^2x^2}\,dx\right\} =$$

$$= -\frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^\infty (-2h^2xe^{-h^2x^2})\,dx = -\frac{2}{h\sqrt{\pi}}[e^{-h^2x^2}]_0^\infty = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}.$$

Ennek során felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-h^2x^2} = 0$, ugyanis az analízisből ismert, hogy x növekedése esetén e^x gyorsabban tart a végtelenhez (tehát e^{-x} a nullához), mint x bármilyen hatványa, ami e^{x^2}-re természetesen még inkább fennáll.

Tehát a gázmolekulák sebességének várható értéke $\dfrac{2}{h\sqrt{\pi}}$.

8. Egy ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & \text{ha } x \leqq 0; \\ 0, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy ξ-nek nem létezik várható értéke!

Folytonos valószínűségi változó esetén a várható érték akkor létezik, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx$$

konvergens. Az adott sűrűségfüggvényt helyettesítve:

$$\int_{-\infty}^{0} |x|\frac{2}{\pi(1+x^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{0} (-x)\frac{2}{\pi(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{\pi}[\ln(1+x^2)]_{-\infty}^{0} = \infty.$$

Mivel a fenti integrál nem konvergens, ξ várható értéke nem létezik.

14*

4. A szórás

A valószínűségi változó várható értéke körüli ingadozását, „szóródását" méri a *szórás*. Ennek négyzete, az ún. *szórásnégyzet*, ξ és $\mathbf{M}(\xi)$ eltérése négyzetének várható értéke. A $\mathbf{D}^2(\xi)$ jelöléssel tehát

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}\{[\xi - \mathbf{M}(\xi)]^2\}.$$

A szórást $\mathbf{D}(\xi)$-vel jelöljük, ez a szórásnégyzet négyzetgyöke. A szórásnégyzet — és így a szórás is — csak akkor van értelmezve, ha a szóban forgó várható értékek léteznek.

A szórásnégyzetre fennáll a következő összefüggés, amelynek segítségével általában egyszerűbben számítható ki:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}(\xi^2) - [\mathbf{M}(\xi)]^2.$$

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, mely az x_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ értékeket p_k $(k=1, 2, \ldots)$ valószínűséggel veszi fel, akkor ξ szórásnégyzete — amennyiben létezik — így számítható ki:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k\right)^2.$$

Ha ξ folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor ξ szórásnégyzete — amennyiben létezik — így számítható ki:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

Például ha egy kockával dobunk, és a ξ valószínűségi változó a dobott számot jelenti, akkor lehetséges értékei $x_k = k$ $(k=1, \ldots, 6)$, így ξ^2 lehetséges értékei $x_k^2 = k^2$ $(k=1, \ldots, 6)$. Minden egyes értéket ezek a valószínűségi változók

$$p_k = \mathbf{P}(\xi = x_k) = \mathbf{P}(\xi^2 = x_k^2) = \frac{1}{6} \qquad (k = 1, \ldots, 6)$$

valószínűséggel vesznek fel.

$$\mathbf{M}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{6} x_k^2 p_k = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6},$$

és

$$[\mathbf{M}(\xi)]^2 = \left[\sum_{k=1}^{6} x_k p_k\right]^2 = \left[\sum_{k=1}^{6} k \frac{1}{6}\right]^2 = \left[\frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{6^2}(1+2+3+4+5+6)^2 = \frac{21^2}{6^2} = \frac{49}{4}.$$

Ezek alapján a szórásnégyzet:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

A szórást négyzetgyökvonással kapjuk:

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71.$$

Tehát a valószínűségi változó szórása kb. 1,71.

Másik példaként legyen ξ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

Ekkor

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

A jobb oldalon álló integrálok értékét számítsuk ki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

mert az integrandus páros függvény.

Az $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$ integrálban legyen $u=x^2$, $v'=e^{-x}$. Ekkor $u'=2x$ és $v=-e^{-x}$. Ezeket felhasználva, parciálisan integrálunk:

$$\int\limits_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = [-x^2e^{-x}]_0^\infty - \int\limits_0^\infty (-2x)e^{-x}\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,dx.$$

Az $\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,dx$ integrálban legyen $u=x$, $v'=e^{-x}$. Ekkor $u'=1$, $v=-e^{-x}$ adódik. Ismét parciálisan integrálunk:

$$2\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,dx = 2[-xe^{-x}]_0^\infty - 2\int\limits_0^\infty (-e^{-x})\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 2[-e^{-x}]_0^\infty = 2.$$

Azt kaptuk, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^\infty x^2 f(x)\,dx = 2.$$

A másik integrál:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty xf(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^\infty xe^{-|x|}\,dx = 0,$$

mert az integrandus páratlan függvény, és az integrál létezik. Az integrálokra kapott értékeket helyettesítve, a szórásnégyzet:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = 2.$$

Ebből ξ szórása:

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{2}.$$

Gyakorló feladatok

1. Egy dobozban $a=4$ darab fehér és $b=6$ darab fekete golyó van. Találomra húzunk egy-egy golyót, amíg fehéret nem választunk. A kihúzott golyókat azonnal visszadobjuk. Határozzuk meg a kihúzott golyók számának szórását!

A ξ diszkrét valószínűségi változó a kihúzott golyók számát jelenti, tehát ξ az $x_k=k$ $(k=1,2,\ldots)$ értékeket veheti fel.

Annak valószínűségét, hogy fehéret húzunk, jelölje p, annak valószínűségét, hogy feketét választunk, jelölje q. Ekkor:

$$p=\frac{a}{a+b}=0{,}4;\quad q=\frac{b}{a+b}=0{,}6.$$

E jelölésekkel felírható annak valószínűsége, hogy ξ a k értéket veszi fel,

$$p_k=\mathbf{P}(\xi=k)=q^{k-1}p\quad (k=1,2,\ldots).$$

A ξ diszkrét valószínűségi változó szórásnégyzete:

$$\mathbf{D}^2(\xi)=\mathbf{M}(\xi^2)-[\mathbf{M}(\xi)]^2=\sum_{k=1}^\infty k^2p_k-\left(\sum_{k=1}^\infty kp_k\right)^2.$$

A $\sum\limits_{k=1}^\infty k^2p_k$ kifejezésbe k és p_k értékét behelyettesítve:

$$\sum_{k=1}^\infty k^2p_k=\sum_{k=1}^\infty k^2q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^\infty k^2q^{k-1}.$$

A $\sum\limits_{k=1}^\infty k^2q^{k-1}$ sor összegét kell meghatároznunk.

A $\sum\limits_{k=1}^\infty q^{k+1}$ geometriai sor konvergens, ha $|q|<1$, és ekkor tagonként elvégezhető kétszeres deriválása:

$$\frac{d^2}{dq^2}\sum_{k=1}^\infty q^{k+1}=\sum_{k=1}^\infty (k+1)kq^{k-1}=\sum_{k=1}^\infty k^2q^{k-1}+\sum_{k=1}^\infty kq^{k-1}.$$

Ebből és az előző fejezetben végzett számítások alapján a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=1}^\infty k^2q^{k-1}=\frac{d^2}{dq^2}\sum_{k=1}^\infty q^{k+1}-\sum_{k=1}^\infty kq^{k-1}=$$

$$=\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q^2}{1-q}\right)-\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Ezt visszahelyettesítve kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = p\,\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Ezután a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kp_k$ kifejezésbe helyettesítjük p_k értékét:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2}.$$

Itt is felhasználtuk az előző fejezetben végzett számításokat. A kiszámított összegeket visszahelyettesítjük, majd p és q értékét is figyelembe vesszük:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = p\frac{1+q}{(1-q)^3} - \left[\frac{p}{(1-q)^2}\right]^2 = p\frac{1+q}{p^3} - \left(\frac{p}{p^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}6}{0{,}4^2} = 3{,}75.$$

Ebből a szórás:

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{3{,}75} \approx 1{,}94.$$

Tehát a kihúzott golyók számának szórása kb. 1,94.

2. Egy céllövés során minden találat egy $r = 18$ cm sugarú körlapra jut. A lövés a kör bármely pontjára egyenlő eséllyel találhat. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a találat helyének a kör középpontjából való távolsága. Számítsuk ki ξ szórását!

A folytonos eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, ill. sűrűségfüggvényét kell először meghatározni. Minthogy geometriai valószínűségi mezőről van szó, valamely $x\,(0 < x \leq r)$ esetén

$$\mathbf{P}(\xi < x) = \frac{x^2\pi}{r^2\pi} = \frac{x^2}{r^2}.$$

Ennek alapján az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{r^2}, & \text{ha } 0 < x \leq r; \\ 1, & \text{ha } x > r. \end{cases}$$

Ebből ξ sűrűségfüggvénye szakaszonként deriválással adódik:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \dfrac{2x}{r^2}, & \text{ha } 0 < x \leq r; \\ 0, & \text{ha } x > r. \end{cases}$$

A ξ folytonos valószínűségi változó szórásnégyzete tehát:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right]^2 =$$

$$= \frac{2}{r^2}\int_0^r x^3\,dx - \left[\frac{2}{r^2}\int_0^r x^2\,dx\right]^2 = \frac{2}{r^2}\cdot\frac{r^4}{4} - \frac{4}{r^4}\cdot\frac{r^6}{9} =$$

$$= \frac{r^2}{2} - \frac{4r^2}{9} = \frac{r^2}{18} = 18.$$

Ebből:

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{18} \approx 4{,}24 \text{ cm}.$$

Tehát a találatok középponttól való távolságának szórása kb. 4,24 cm.

3. Egy folytonos eloszlású ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1; \\ \dfrac{3}{x^4}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Számítsuk ki a valószínűségi változó szórását!

A szórásnégyzet:

$$\mathbf{D}^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right]^2 =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{3}{x^2}\,dx - \left[\int_1^{\infty} \frac{3}{x^3}\,dx\right]^2 = \left[3\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty} - \left(\left[3\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{\infty}\right)^2 =$$

$$= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Ebből a szórás:

$$D(\xi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866.$$

4. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 1; \\ \dfrac{2}{x^3}, & \text{ha} \quad x > 1, \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változónak nem létezik szórása!

A szórásnégyzet — feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrálok abszolút konvergensek —

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx\right]^2 =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2}{x}\,dx - \left[\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx\right]^2 = 2[\ln x]_1^{\infty} - \left(\left[2\frac{-1}{x}\right]_1^{\infty}\right)^2 = \infty.$$

Minthogy az első integrál nem konvergens, a második pedig konvergens, a kettő különbsége sem konvergens, tehát a valószínűségi változónak nem létezik szórása.

VI. FONTOSABB ELOSZLÁSOK

1. Binomiális eloszlás

Legyen egy kísérlet valamely A eseményének valószínűsége $P(A) = p$, és az $\bar{A}$ ellentett eseményé $P(\bar{A}) = 1-p = q$. A kísérletet n-szer egymástól függetlenül megismételjük. Ilyen kísérletsorozatokban legyen a ξ valószínűségi változó értéke az A esemény bekövetkezéseinek száma. Annak valószínűsége, hogy egy kísérletsorozatban a ξ valószínűségi változó az $x_k = k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ értéket veszi fel,

$$p_k = P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Az ilyen eloszlást *binomiális eloszlásnak* nevezzük.

A binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = np, \qquad D(\xi) = \sqrt{npq}.$$

Gyakorló feladatok

1. Egy tétel áru harmadrésze elsőosztályú. Négy darabot kiválasztunk a tételből találomra. A kiválasztás egyenként megy végbe, és a választott árut rögtön — a következő kiválasztása előtt — visszatesszük a többi közé. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a kiválasztott elsőosztályú darabok száma. Írjuk fel és ábrázoljuk e valószínűségi változó eloszlását! Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!

A ξ valószínűségi változó binomiális eloszlású. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy egy találomra kiválasztott darab elsőosztályú. Az A esemény valószínűsége:

$$P(A) = p = \frac{1}{3}.$$

Az $\bar{A}$ valószínűsége:

$$P(\bar{A}) = q = 1-p = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Minthogy négy darabot veszünk ki, $n=4$. Meghatározzuk annak valószínűségét, hogy ξ az $x=k$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$ értéket vegye fel:

$$p_k = \mathbf{P}(\xi=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{4-k} = \binom{4}{k}\frac{2^{4-k}}{3^4} \qquad (k=0, 1, 2, 3, 4).$$

Az eloszlás tagjait úgy kapjuk, hogy k lehetséges értékeit behelyettesítjük:

$$p_0 = \binom{4}{0}\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81};$$

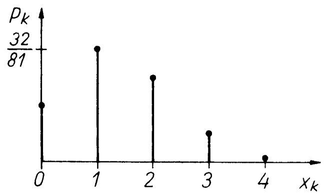
$$p_1 = \binom{4}{1}\frac{2^3}{3^4} = \frac{32}{81};$$

$$p_2 = \binom{4}{2}\frac{2^2}{3^4} = \frac{24}{81};$$

$$p_3 = \binom{4}{3}\frac{2}{3^4} = \frac{8}{81};$$

$$p_4 = \binom{4}{4}\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}.$$

Ábrázoljuk az eloszlást (68. ábra)!



68. ábra

A ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$\mathbf{M}(\xi) = np = 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3};$$

szórása pedig:

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{npq} = \sqrt{4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

2. Egy kockával háromszor dobunk egymás után. A ξ valószínűségi változó értéke jelentse a hatos dobások számát. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy ξ értéke legalább annyi, mint várható értéke!

Annak az A eseménynek a valószínűsége, hogy egy dobás hatos:

$$\mathbf{P}(A) = p = \frac{1}{6}.$$

Az $\bar{A}$ esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = q = 1-p = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

A dobások száma $n=3$. A ξ valószínűsége változó az $x_k=k$ $(k=0, 1, 2, 3)$ értéket veheti fel, mégpedig a következő valószínűséggel:

$$\mathbf{P}(\xi=x_k) = p_k = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\frac{5^{3-k}}{6^3} \qquad (k=0, 1, 2, 3).$$

Az egyes valószínűségeket kiszámítjuk:

$$\mathbf{P}(\xi=0) = p_0 = \binom{3}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216};$$

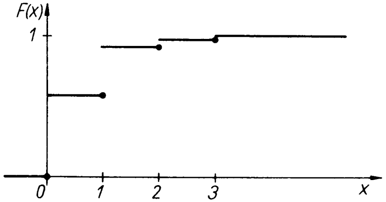
$$\mathbf{P}(\xi=1) = p_1 = \binom{3}{1}\frac{5^2}{6^3} = \frac{75}{216};$$

$$\mathbf{P}(\xi=2) = p_2 = \binom{3}{2}\frac{5}{6^3} = \frac{15}{216};$$

$$\mathbf{P}(\xi=3) = p_3 = \binom{3}{3}\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}.$$

Az eloszlásfüggvény (69. ábra):

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi<x) = \sum_{k<x} k = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi \leqq 0, \\ \frac{125}{216}, & \text{ha } 0<\xi\leqq 1, \\ \frac{200}{216}, & \text{ha } 1<\xi\leqq 2, \\ \frac{215}{216}, & \text{ha } 2<\xi\leqq 3, \\ 1, & \text{ha } 3<\xi. \end{cases}$$



69. ábra

A várható érték:

$$\mathbf{M}(\xi) = np = 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

A valószínűségi változó szórása:

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{npq} = \sqrt{3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{15}}{6} \approx 0{,}648.$$

Annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke legalább annyi, mint a várható értéke, az eloszlásfüggvény ismeretében:

$$\mathbf{P}\left(\xi \geqq \frac{1}{2}\right) = 1-F\left(\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

3. Fej vagy írás játékkal kapcsolatos két eseményt tekintünk. Az egyik esemény: négy dobásból 3 fej, a másik: nyolc dobásból 5 fej. Állapítsuk meg, hogy melyik esemény valószínűsége nagyobb, szabályos pénzdarab használata esetén.

Jelöljük C_1-gyel azt az eseményt, hogy négy dobásból 3 a fej és C_2-vel azt, hogy nyolc dobásból 5 a fej. Egy dobás esetén fej dobásának valószínűsége

$$p = \frac{1}{2},$$

és írás dobásának valószínűsége

$$q = \frac{1}{2}.$$

A C_1 esemény valószínűségét számítjuk ki először. A ξ_1 valószínűségi változó jelentse a fej dobások számát $n=4$ dobás esetén. ξ_1 binomiális eloszlású. A C_1 esemény akkor következik be, ha ξ_1 a 3 értéket veszi fel. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(C\ ) = \mathbf{P}(\xi_1=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Ezután a C_2 esemény valószínűségét határozzuk meg. A ξ_2 binomiális eloszlású valószínűségi változó értéke legyen $n=8$ dobás esetén a fejdobások száma. A C_2 esemény akkor teljesül, ha ξ_2 az 5 értéket veszi fel. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(C_2) = \mathbf{P}(\xi_2=5) = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{8}{3}\frac{1}{2^8} = \frac{8\cdot7\cdot6}{2\cdot3\cdot2^8} = \frac{7}{2^5} = \frac{7}{32}.$$

Azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{P}(C_1) > \mathbf{P}(C_2),$$

tehát nagyobb az esélye annak, hogy négy dobásból háromszor dobunk fejet, mint annak, hogy nyolc dobásból ötször.

4. Egy tétel áru 1% selejtet tartalmaz. Hány darabot kell találomra kivennünk és megvizsgálnunk, hogy a megvizsgált darabok között legalább 0,95 valószínűséggel selejtes is legyen, ha az egyes kiválasztott darabokat vizsgálatuk után azonnal visszatesszük?

Legyen A az az esemény, hogy selejtes darabot választunk. Ekkor

$$\mathbf{P}(A)=p=0{,}01 \quad \text{és} \quad \mathbf{P}(\bar{A})=q=0{,}99.$$

A ξ valószínűségi változó értéke legyen az n darab kiválasztása során kivett selejtes áruk száma; ξ binomiális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy az n darab egyike sem selejtes, vagyis $\xi=0$:

$$\mathbf{P}(\xi=0) = \binom{n}{0}p^0q^n = 0{,}99^n.$$

Annak valószínűsége, hogy legalább egy selejtes darab van az n megvizsgált között,

$$1-\mathbf{P}(\xi=0) = 1-0{,}99^n.$$

Fenn kell n-re állnia a következő egyenlőtlenségnek, amelyből n értékét kifejezhetjük:

$$1-0{,}99^n \geqq 0{,}95;$$

$$0{,}99^n \leqq 0{,}05;$$

$$n \lg 0{,}99 \leqq \lg 0{,}05;$$

$$n \geqq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}99} \approx 295{,}7.$$

Azt kaptuk, hogy legalább 296 darabot kell visszatevéssel megvizsgálnunk, hogy a kiválasztottak között 0,95-nél nagyobb valószínűséggel legyen selejtes darab is.

5. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első autónak, amellyel találkozunk, a rendszáma legalább két hetes számjegyet tartalmaz? A rendszámok négyjegyű számok, és minden számjegy bármely helyen egyenlő eséllyel fordulhat elő (az utolsó, befejezetlen sorozat által okozott torzítást elhanyagoljuk).

Annak az A eseménynek a valószínűsége, hogy az egyik helyen hetes számjegy áll,

$$\mathbf{P}(A)=p=0{,}1; \quad \mathbf{P}(\bar{A})=q=0{,}9.$$

A ξ valószínűségi változó értéke legyen a 4 különböző helyen szereplő hetesek száma. A ξ valószínűségi változó binomiális eloszlású, mely az $x_k=k$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$ értékeket veheti fel. Annak valószínűsége, hogy $\xi=k$:

$$\mathbf{P}(\xi=k) = p_k = \binom{4}{k} 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{4-k} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

A vizsgált eseménynek, vagyis hogy legalább két hetes szerepel a rendszámtáblán, az az esemény az ellentettje, hogy legfeljebb egy hetes van a táblán. Ez két, egymást kizáró esemény összege, melyek közül az egyik az, hogy nincs hetes a táblán, vagyis $\xi=0$, a másik pedig az, hogy éppen egy hetes van rajta, vagyis $\xi=1$. A két, egymást kizáró esemény összegének valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\xi=0)+\mathbf{P}(\xi=1) = p_0+p_1.$$

A vizsgált esemény valószínűsége tehát:

$$1-(p_0+p_1) = 1-\left[\binom{4}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4+\binom{4}{1} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3\right] =$$

$$= 1-(0{,}9^4+4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3) \approx 1-0{,}948 = 0{,}052.$$

Tehát kb. 0,052 a valószínűsége annak, hogy az autó rendszámtábláján legalább két hetest találunk.

6. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha egy családban tíz gyermek születik, akkor közülük éppen 5 fiú lesz (a fiú születésének a valószínűségét $\frac{1}{2}$-nek vesszük)?

Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy fiú születik:

$$\mathbf{P}(A) = p = \frac{1}{2},$$

lány születésének valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = q = 1-p = \frac{1}{2}.$$

A ξ valószínűségi változó értéke jelentse az $n=10$ gyermek közül a fiúk számát; ξ binomiális eloszlású. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy $\xi=5$:

$$\mathbf{P}(\xi=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5!5!2^{10}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{10}} = \frac{63}{256} \approx 0{,}246.$$

Tehát kb. 0,246 annak a valószínűsége, hogy éppen 5 fiú lesz a tíz gyermek közül.

7. Valaki találomra tölt ki egy totószelvényt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első hét mérkőzéshez az 1, 2, x lehetőségek közül legalább öt helyre egyest választ?

Azt az eseményt, hogy a szelvényt kitöltő egy mérkőzéshez 1-est ír, jelöljük A-val. Ennek a valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = p = \frac{1}{3},$$

így

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = q = 1-p = \frac{2}{3}.$$

A ξ valószínűségi változó értéke jelentse az $n=7$ darab kiválasztott mérkőzés mellé írt egyesek számát. ξ binomiális eloszlású és az $x_k=k$ $(k=0, 1, \dots, 7)$ értékeket veheti fel. Annak valószínűsége, hogy ξ a k értéket veszi fel,

$$\mathbf{P}(\xi=k) = p_k = \binom{7}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{7-k} = \binom{7}{k}\frac{2^{7-k}}{3^7} \qquad (k = 0, 1, \dots, 7).$$

Az az esemény, hogy az első hét mérkőzéshez legalább öt helyre 1-es kerül, három, egymást kizáró esemény összegeként írható fel: éppen öt, hat, ill. hét helyre ír egyest a fogadó. Ezen események összegének valószínűsége az egyes események valószínűségének összege, vagyis:

$$p_5+p_6+p_7 = \binom{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{7}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{7}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^0 =$$

$$= \frac{7!}{5!2!}\frac{2^2}{3^7}+7 \cdot \frac{2}{3^7}+\frac{1}{3^7} = \frac{1}{3^7}(84+14+1) =$$

$$= \frac{99}{3^7} = \frac{11}{3^5} = \frac{11}{243} \approx 0{,}045.$$

Tehát kb. 0,045 a valószínűsége annak, hogy legalább öt helyre egyes kerül.

2. Hipergeometrikus eloszlás

Legyen m elemünk, amelyből s darabot megkülönböztetünk a többi $m-s$ darabtól. Ezután találomra kiválasztunk az m elemből n darabot visszatevés nélkül, ahol $n \leqq s$ és $n \leqq m-s$. Legyen ξ az a valószínűségi változó, amelynek értéke az n kiválasztott darab között levő megkülönböztetett elemek száma. ξ az $x_k = k$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ értéket a következő valószínűséggel veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k = \frac{\binom{s}{k}\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

A ξ diszkrét valószínűségi változót ez esetben hipergeometrikus eloszlásúnak mondjuk.

Az

$$\frac{s}{m} = p$$

jelöléssel a hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = np; \quad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{m-1}\right)}.$$

Gyakorló feladatok

1. Egy dobozban 9 golyó van, ebből 4 barna. Találomra egyszerre 3 golyót kiveszünk. A ξ valószínűségi változó értéke a kivett golyók között levő barnák száma. Adjuk meg a valószínűségi változó eloszlását! Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!

A ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású. Annak valószínűsége, hogy $m=9$ golyóból, mely között $s=4$ a barna, $n=3$ golyót egyszerre kiválasztva, a kihúzottak között k számú barna legyen, vagyis hogy ξ az $x_k = k$ $(k=0, 1, 2, 3)$ értéket vegye fel:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k = \frac{\binom{4}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{9}{3}} \qquad (k=0, 1, 2, 3).$$

Az egyes k értékeket behelyettesítve, ξ eloszlásának tagjait kapjuk meg:

$$p_0 = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{5!6!}{9!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{42};$$

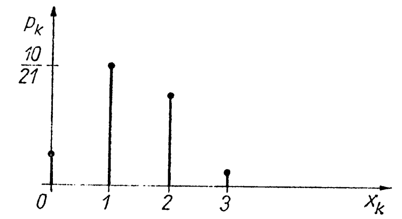
$$p_1 = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 \cdot \frac{5!}{2!3!}}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{4 \cdot 5!6!}{9!2!} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{10}{21};$$

$$p_2 = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{4!}{2!2!} \cdot 5}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6!3!}{9! \cdot 4!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{14};$$

$$p_3 = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{\frac{9!}{6!3!}} = \frac{4 \cdot 6!3!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{21}.$$

Ábrázoljuk az eloszlást (70. ábra)! A ξ valószínűségi változó várható értékét és szórását számítjuk ki. Minthogy $p = \frac{s}{m} = \frac{4}{9}$, a várható érték

$$\mathbf{M}(\xi) = np = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3};$$



70. ábra

a szórás pedig

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{m-1}\right)} = \sqrt{3 \cdot \frac{4}{9}\left(1 - \frac{4}{9}\right)\left(1 - \frac{3-1}{9-1}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{9}\left(1 - \frac{2}{8}\right)} = \sqrt{\frac{20}{27} \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. Próbagyártás során 20 gép készül el, amelyek közül 5 javításra szorul. A teljes mennyiségből 4 találomra kiszemelt gépet küldenek felülvizsgálatra. A gyártás akkor indulhat meg, ha a felülvizsgált gépek közül legfeljebb egy szorul javításra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy megindulhat a gyártás?

Jelölje $x_k=k$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$ a felülvizsgálatra küldött gépek között levő hibás darabok számát. A ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó ezeket a k értékeket veheti fel. A teljes mennyiség $m=20$, a javításra szorulók száma ebből $s=5$. A felülvizsgálatra küldött gépek száma $n=4$. Így annak a valószínűsége, hogy a ξ valószínűségi változó a k értéket veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi=x_k) = p_k = \frac{\binom{5}{k}\binom{15}{4-k}}{\binom{20}{4}} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

A gyártás megindulhat, ha legfeljebb egy hibás akad a felülvizsgálatra küldött négy gép között. Ez két módon állhat elő: ha mind a négy gép hibátlan, vagy ha pontosan egy hibás van köztük. Ezek az esetek egymást kizárják, ennélfogva valószínűségeik összege adja a vizsgált esemény valószínűségét:

$$p_0+p_1 = \frac{\binom{5}{0}\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}}+\frac{\binom{5}{1}\binom{15}{3}}{\binom{20}{4}} =$$

$$= \frac{\dfrac{15!}{4!\,11!}}{\dfrac{20!}{4!\,16!}}+\frac{5\dfrac{15!}{3!\,12!}}{\dfrac{20!}{4!\,16!}} = \frac{15!\,16!}{11!\,20!}+\frac{5\cdot 15!\,4!\,16!}{3!\,12!\,20!} =$$

$$= \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}+\frac{15\cdot 14\cdot 13}{19\cdot 18\cdot 17} = \frac{15\cdot 14\cdot 13}{19\cdot 18\cdot 17}\left(\frac{3}{5}+1\right) =$$

$$= \frac{15\cdot 14\cdot 13}{19\cdot 18\cdot 17}\cdot\frac{8}{5} = \frac{7\cdot 13\cdot 8}{19\cdot 3\cdot 17} = \frac{728}{969} \approx 0{,}75.$$

Tehát kb. 0,75 a valószínűsége annak, hogy a felülvizsgálat eredménye alapján megindulhat a gyártás.

3. Bridzsjátékhoz az 52-lapos kártyacsomagot a négy játékos között egyenlően osztják szét. (Az 52-lapos csomag négyfajta — pikk, kör, káró, treff — lapot tartalmaz, mindegyik fajtából 13 darabot.) Legyen a ξ valószínűségi változó értéke az egyik előre kiszemelt játékoshoz kerülő pikklapok száma, ha a kártyákat találomra osztják szét. Írjuk fel a ξ valószínűségi változó eloszlását, és számítsuk ki várható értékét és szórását!

A ξ valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású, amely az $x_k=k$ $(0, 1, \dots, 13)$ értékeket veheti fel. Az összes lapok száma $m=52$, ebből $s=13$ pikk. Az előre kiszemelt játékos $n=13$ lapot kap. Ezek alapján annak valószínűsége, hogy ξ a k értéket veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi=k) = p_k = \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{13-k}}{\binom{52}{13}} \qquad (k = 0, 1, \dots, 13).$$

A k értékeit a kifejezésbe helyettesítve, ξ eloszlásának tagjait kapjuk meg. Az egyes valószínűségek három tizedes pontossággal a következők:

$p_0=0{,}013$; $p_1=0{,}080$; $p_2=0{,}206$;

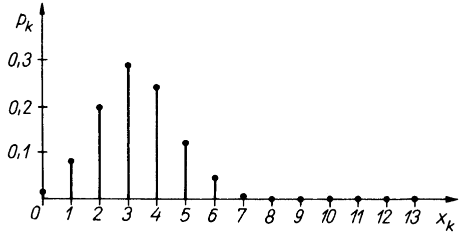
$p_3=0{,}286$; $p_4=0{,}239$; $p_5=0{,}125$;

$p_6=0{,}042$; $p_7=0{,}009$; $p_8=0{,}001$;

$p_9=p_{10}=p_{11}=p_{12}=p_{13}=0.$

Ábrázoljuk az eloszlást (71. ábra)! Ezután ξ várható értékét és szórását számítjuk ki. Minthogy

$$p = \frac{s}{m} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},$$



71. ábra

a várható érték

$$\mathbf{M}(\xi) = np = 13\cdot\frac{1}{4} = 3{,}25;$$

a szórás pedig

$$\mathbf{D}(\xi) = \sqrt{np(1-p)\left(1-\frac{n-1}{m-1}\right)} = \sqrt{13\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{13-1}{52-1}\right)} =$$

$$= \sqrt{13\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\left(1-\frac{12}{51}\right)} = \sqrt{\frac{39}{4^2}\cdot\frac{39}{51}} = \frac{39}{4\sqrt{51}} \approx 1{,}31.$$

3. Negatív binomiális eloszlás és geometriai eloszlás

Legyen egy kísérlet valamely A eseményének valószínűsége

$$\mathbf{P}(A)=p,$$

az ellentett esemény valószínűsége pedig:

$$\mathbf{P}(\bar{A})=q=1-p.$$

Tekintsünk ilyen kísérletekből álló független kísérletsorozatot. A ξ valószínűségi változó vegye fel adott r pozitív egész szám esetén az $x_k=k+r$ $(k=0,1,2,\ldots)$ értéket, ha a kísérletsorozatban az A esemény r-edszer éppen az $(r+k)$-adik kísérletben következik be. Ekkor a megelőző $r+k-1$ kísérlet során az A eseménynek $(r-1)$-szer és az $\bar{A}$ eseménynek k-szor kellett bekövetkeznie. Annak valószínűsége, hogy ξ a $k+r$ értéket veszi fel ,

$$\mathbf{P}(\xi=k+r)=p_k=\binom{k+r-1}{r-1}p^r q^k \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

A ξ valószínűségi változót ebben az esetben *r-edrendű negatív binomiális eloszlásúnak nevezzük.* A negatív binomiális eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{r}{p}, \qquad \mathbf{D}(\xi)=\frac{\sqrt{rq}}{p}.$$

Ha $r=1$, akkor

$$\mathbf{P}(\xi=x_k)=p_k=pq^k \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

és a ξ valószínűségi változót *geometriai eloszlásúnak* nevezzük. (Tehát a geometriai eloszlás elsőrendű negatív binomiális eloszlás.) A geometriai eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{1}{p}, \qquad \mathbf{D}(\xi)=\frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Gyakorló feladatok

1. Egy dobozban 6 fehér és 4 kék golyó van. Egyenként húzunk találomra választott golyókat. A golyók színét megnézzük és azonnal visszadobjuk azokat. A dobozból addig veszünk ki golyót, amíg a fehér húzások száma el nem éri a hármat. Legyen ξ az ehhez szükséges húzások száma. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlását! Határozzuk meg a ξ várható értékét és szórását! Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy ξ értéke legfeljebb 6 lesz.

A ξ diszkrét valószínűségi változó negatív binomiális eloszlású. Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy fehér golyót húzunk. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=p=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Az $\bar{A}$ esemény a kék golyó kiválasztását jelenti, aminek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A})=q=1-p=\frac{2}{5}.$$

Mivel $r=3$, így a ξ valószínűségi változó az $x_k=k+3$ $(k=0,1,2,\ldots)$ értékeket veheti fel. Az adatok ismeretében felírhatjuk a ξ eloszlását, vagyis annak valószínűségét, hogy ξ az x_k értéket veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi=x_k)=p_k=\binom{k+r-1}{r-1}p^r q^k=$$

$$=\binom{k+2}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^k \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

A k egyes lehetséges értékeit helyettesítve, a ξ negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó eloszlásának tagjait kapjuk. Néhány tagot felírunk és ábrázolunk (72. ábra):

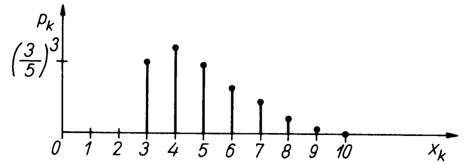
$$p_0=\left(\frac{3}{5}\right)^3;$$

$$p_1=\binom{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{2}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{6}{5};$$

$$p_2=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^3 6\cdot\frac{4}{25}=\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{24}{25};$$

$$p_3=\binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^3=\left(\frac{3}{5}\right)^3 10\cdot\frac{8}{125}=\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{16}{25};$$

$$p_4=\binom{6}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^4=\left(\frac{3}{5}\right)^3 15\cdot\frac{16}{625}=\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{48}{125};$$



72. ábra

$$p_5=\binom{7}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^5=\left(\frac{3}{5}\right)^3 21\cdot\frac{32}{3125}=\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{672}{3125};$$

$$p_k<\frac{1}{50},\quad \text{ha}\quad k\geqq 6.$$

Ezután ξ várható értékét és szórását számítjuk ki:

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{r}{p}=\frac{3}{\frac{3}{5}}=5;$$

$$\mathbf{D}(\xi)=\frac{\sqrt{rq}}{p}=\frac{\sqrt{3\cdot\frac{2}{5}}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{3}\approx 1{,}83.$$

Végül annak az eseménynek a valószínűségét számítjuk ki, hogy legfeljebb 6 húzással elérjük a harmadik fehér golyót. Ez az esemény bekövetkezhet úgy, hogy 3, 4, 5 vagy 6 húzás szükséges (vagyis a kihúzott kék golyók száma 0, 1, 2 vagy 3). Ezek a lehetőségek egymást kizárják, így a vizsgált esemény valószínűsége ezek valószínűségeinek összege:

$$p_0+p_1+p_2+p_3=\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(1+\frac{6}{5}+\frac{24}{25}+\frac{16}{25}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{95}{25}\approx 0{,}82.$$

Tehát kb. 0,82 a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 6 húzás szükséges.

2. Egy pénzdarabot dobálunk mindaddig, amíg másodszor kapunk fejet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak négy vagy több dobásból álló sorozattal érjük ezt el?

Az A esemény jelentse azt, hogy egy dobás eredménye fej. Ennek valószínűsége (szabályos pénzdarab esetén)

$$\mathbf{P}(A)=p=\frac{1}{2}.$$

Az $\bar{A}$ esemény azt jelenti, hogy írást dobunk. $\bar{A}$ valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A})=q=\frac{1}{2}.$$

A vizsgált dobássorozatokban az utolsó dobásban kapunk másodszor fejet, ennélfogva a fejek száma $r=2$. A ξ valószínűségi változó jelentse a szükséges dobások számát. ξ negatív binomiális eloszlású és az $x_k=k+2$ $(k=0,1,\ldots)$ értéket a következő valószínűséggel veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi=k+2)=p_k=\binom{k+r-1}{r-1}p^r q^k=\binom{k+2-1}{2-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^k=$$

$$=(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}\qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Annak az eseménynek a valószínűségét keressük, hogy az adott tulajdonságú dobássorozat négy vagy több dobásból áll. Ennek az eseménynek az ellentettje, hogy négynél kevesebb dobásból álló sorozattal érjük el az eredményt. Ez kétféleképpen lehetséges: két dobással vagy három dobással. E lehetőségek egymást kizárják, így összegük valószínűsége a két tag valószínűségének összege:

$$p_0+p_1.$$

Az ellentett események valószínűségei közötti összefüggés alapján a vizsgált esemény valószínűsége:

$$1-(p_0+p_1)=1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Tehát $\frac{1}{2}$ a valószínűsége annak, hogy csak négy vagy több dobásból álló sorozattal kapunk két fejdobást.

3. Egy motor bekapcsolásakor 0,02 valószínűséggel kiég. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma. Határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását!

Az A esemény jelentse azt, hogy a motor a bekapcsoláskor kiég. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=p=0{,}02.$$

Az $\bar{A}$ jelentése, hogy a motor nem ég ki bekapcsoláskor. Az $\bar{A}$ valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A})=q=1-p=0{,}98.$$

A ξ valószínűségi változó geometriai eloszlású; $x_k=k+1$ $(k=0,1,2,\ldots)$ a motor kiégéséig végbemenő bekapcsolások számát jelenti. Annak a valószínűsége, hogy ξ az x_k értéket veszi fel, vagyis ξ eloszlása:

$$\mathbf{P}(\xi=x_k)=p_k=pq^k=0{,}02\cdot 0{,}98^k\qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

A ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}02} = 50;$$

$$\mathbf{D}(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p} = \frac{\sqrt{0{,}98}}{0{,}02} = 50\sqrt{0{,}98} \approx 50 \cdot 0{,}995 = 49{,}75.$$

4. Poisson-eloszlás

Ha a ξ valószínűségi változó az $x_k = k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ értékeket veheti fel és

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges adott valós szám, akkor ξ eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük.

A Poisson-eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = \lambda, \qquad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\lambda}.$$

A Poisson-eloszlás tagjai bizonyos esetekben megfelelő paraméter választásával jól megközelítik a binomiális eloszlás tagjait: ha nagy a binomiális eloszlásban n értéke k-hoz képest, és p értéke kicsi, akkor a $\lambda = np$ számot választva paraméternek, fennáll a következő összefüggés

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Poisson-eloszlást követhet ezen kívül egy adott időszakban bekövetkezett bizonyos véletlen eseményeknek — mint pl. izzólámpák kiégésének, kozmikus részecskék becsapódásának — a száma, vagy bizonyos véletlen pontelhelyezkedések — mint pl. az esőcseppek — esetén egy adott tartományba jutó pontok száma.

Ha pl. annak valószínűsége, hogy valamilyen intervallumban pontosan k esemény következik be $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, csakis az intervallum hosszától függ (tehát sem az intervallum kezdő időpontjától, sem az előző események bekövetkezési időpontjaitól), akkor a bekövetkező események száma Poisson-eloszlású. Hasonló a helyzet, ha egy tartományba eső pontok száma csak a tartomány nagyságától függ.

Gyakorló feladatok

1. Egy elektronikus műszer 1000 alkatrészből áll. Egy alkatrész a többitől függetlenül 0,001 valószínűséggel romlik el egy év alatt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább két alkatrész elromlik egy év alatt?

Tulajdonképpen binomiális eloszlással kellene számolnunk. Mivel azonban az alkatrészek száma, $n = 1000$ eléggé nagy, egy alkatrész elromlásának $p = 0{,}001$ valószínűsége pedig eléggé kicsi, bevezetjük a

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$$

paramétert, és a binomiális eloszlás tagjait a megfelelő Poisson-eloszlásból kapott tagokkal közelítjük. A vizsgált esemény ellentettje, hogy kettőnél kevesebb alkatrész romlik el egy év alatt, vagyis hogy vagy egyetlen alkatrész sem romlik el, vagy pontosan egy alkatrész megy tönkre. Mivel ezek az esetek egymást kizárják, összegük valószínűségét valószínűségeik összege adja:

$$p_0 + p_1.$$

Ebből kapjuk annak valószínűségét, hogy az év során legalább két alkatrész elromlik:

$$1 - (p_0 + p_1) = 1 - (e^{-1} + e^{-1}) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264.$$

Tehát kb. 0,264 a valószínűsége annak, hogy a műszer alkatrészei közül legalább kettő elromlik egy év alatt.

2. Egy ξ valószínűségi változó Poisson-eloszlású, $\lambda = 2{,}5$ paraméterrel. Határozzuk meg ξ eloszlását, várható értékét és szórását! Számítsuk ki, milyen valószínűséggel vesz fel ξ várható értékénél kisebb értéket!

A Poisson-eloszlású ξ valószínűségi változó, melynek $\lambda = 2{,}5$ a paramétere, az $x_k = k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ értéket a következő valószínűséggel veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = p_k = \frac{2{,}5^k}{k!} e^{-2{,}5} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

A megadott eloszlás egyes tagjait k értékeinek behelyettesítésével kapjuk:

$$p_0 = e^{-2,5} \approx 0{,}082; \qquad p_1 = 2{,}5\,e^{-2,5} \approx 0{,}205;$$

$$p_2 = \frac{2{,}5^2}{2!}e^{-2,5} \approx 0{,}258; \qquad p_3 = \frac{2{,}5^3}{3!}e^{-2,5} \approx 0{,}215;$$

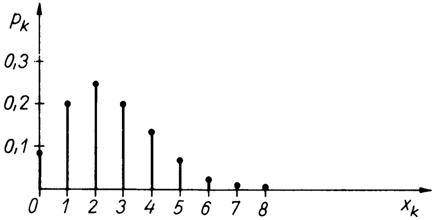
$$p_4 = \frac{2{,}5^4}{4!}e^{-2,5} \approx 0{,}135; \qquad p_5 = \frac{2{,}5^5}{5!}e^{-2,5} \approx 0{,}067;$$

$$p_6 = \frac{2{,}5^6}{6!}e^{-2,5} \approx 0{,}028; \qquad p_7 = \frac{2{,}5^7}{7!}e^{-2,5} \approx 0{,}010;$$

$$p_k < 0{,}01, \quad \text{ha} \quad k \geqq 8.$$

Az eloszlást ábrázoljuk (73. ábra). A ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = \lambda = 2{,}5; \quad \mathbf{D}(\xi) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58.$$



73. ábra

Annak valószínűsége, hogy ξ várható értékénél kisebb értéket vesz fel:

$$\mathbf{P}(\xi < 2{,}5) = p_0 + p_1 + p_2 \approx 0{,}082 + 0{,}205 + 0{,}258 = 0{,}545.$$

3. Egy telefonközponthoz 600 előfizető tartozik. Tegyük fel, hogy 0,005 a valószínűsége annak, hogy valamelyik előfizető egy meghatározott órában kapcsolást kér. Mennyi a valószínűsége annak, hogy abban az órában éppen 4 előfizető kér vonalat?

Mivel binomiális eloszlással kellene számolnunk, de $n=600$ eléggé nagy és $p=0{,}005$ eléggé kicsi, ezért bevezetjük a

$$\lambda = np = 600 \cdot 0{,}005 = 3$$

paramétert és a binomiális eloszlást Poisson-eloszlással közelítjük. A ξ valószínűségi változó az $x_k = k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ értékeket veheti fel, ahol x_k a megadott órában kapcsolást kérők számát jelöli. Annak valószínűsége, hogy ξ pontosan az x_4 értéket veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi=4) = \frac{3^4}{4!}e^{-3} \approx 0{,}17.$$

Tehát az adott órában kb. 0,17 valószínűséggel kér éppen 4 előfizető kapcsolást.

4. Egy rádiókészülék meghibásodásainak átlagos száma 10 000 működési óra alatt 10. A meghibásodások eloszlása csak a vizsgált időtartam hosszától függ. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a készülék 200 működési óra alatt elromlik!

A ξ valószínűségi változó értéke legyen a 200 óra alatt bekövetkező meghibásodások száma. ξ Poisson-eloszlású, amelynek paramétere a 200 működési óra alatti meghibásodások várható értéke:

$$\lambda = 200\frac{10}{10000} = 0{,}2.$$

ξ az $x_k = k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ értéket a következő valószínűséggel veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi=k) = p_k = \frac{0{,}2^k}{k!}e^{-0,2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Annak valószínűsége, hogy a rádiókészülék 200 működési óra alatt nem hibásodik meg, vagyis hogy $\xi=0$:

$$\mathbf{P}(\xi=0) = p_0 = e^{-0,2}.$$

Annak valószínűsége, hogy a készülék 200 működési óra alatt meghibásodik:

$$1 - p_0 = 1 - e^{-0,2} \approx 0{,}18.$$

Tehát kb. 0,18 a valószínűsége annak, hogy a vizsgált rádiókészülék 200 működési óra alatt meghibásodik.

5. Egy nyomdai korrektúrában 400 oldalon átlagosan 400 sajtóhiba van. A tapasztalat szerint egy anyagrészben levő hibák számának eloszlása csak az anyagrész hosszától függ. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiemelt oldalon legalább három sajtóhiba van?

A ξ valószínűségi változó vegye fel az egy oldalon levő sajtóhibák számát. ξ Poisson-eloszlású, paramétere az egy oldalra eső hibák várható értéke:

$$\lambda = \frac{400}{400} = 1.$$

Így a ξ valószínűségi változó eloszlása:

$$\mathbf{P}(\xi=k) = p_k = \frac{e^{-1}}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy oldalon legalább három hiba van, az ellentett események valószínűségei közötti összefüggés alapján számítjuk ki. Háromnál kevesebb sajtóhiba egy kiszemelt oldalon úgy következhet be, hogy ξ a 0, 1 vagy 2 értéket veszi fel. Ezek az esetek egymást kizárják, így összegük valószínűsége:

$$p_0 + p_1 + p_2.$$

Ebből a vizsgált esemény valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\xi \geqq 3) = 1-(p_0+p_1+p_2) = 1-\left(e^{-1}+e^{-1}+\frac{e^{-1}}{2}\right) = 1-\frac{5}{2e} \approx 0{,}08.$$

Tehát kb. 0,08 a valószínűsége annak, hogy egy kiszemelt oldalon legalább három sajtóhiba van.

6. Televízió-készülékek gyártásakor 200 készülékre átlagban 100 hiba jut. Az előző tapasztalatokból tudjuk, hogy a hibák Poisson-eloszlásúak. Legfeljebb hány legyártott készüléket választhatunk ki egyszerre úgy, hogy a kiválasztott készülékek legalább 0,1 valószínűséggel mind hibátlanok legyenek?

A ξ valószínűségi változó értéke jelentse az (egyelőre ismeretlen) n számú televízió-készülék kiválasztásakor a bennük levő összes hibák számát. ξ Poisson-eloszlású valószínűségi változó, paramétere az n kiválasztott készülékekre eső hibák várható száma:

$$\lambda = \frac{100}{200}n = \frac{n}{2}.$$

ξ eloszlását a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!}e^{-\frac{n}{2}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Annak az eseménynek, hogy n kiválasztott televízió-készülék közül egy sem hibás, vagyis $\xi=0$, a valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\xi=0) = e^{-\frac{n}{2}}.$$

Erre fenn kell állni a következő egyenlőtlenségnek, melyből n értéke kiszámítható:

$$e^{-\frac{n}{2}} > 0{,}1,$$

$$-\frac{n}{2}\lg e > \lg 0{,}1$$

$$n < \frac{-2\lg 0{,}1}{\lg e} \approx \frac{2}{0{,}434} \approx 4{,}6.$$

Ebből látható, hogy legfeljebb négy televízió-készüléket választhatunk ki úgy, hogy legalább 0,1 valószínűséggel mind a négy hibátlan legyen.

7. Egy orsózógépen 100 munkaóra alatt átlagban 3 szakadás következik be. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen időtartam alatt a szakadások száma nem lépi túl az átlagot? Az általános tapasztalat alapján feltehető, hogy a szakadások Poisson-eloszlás szerint következnek be.

A vizsgált időtartam alatt végbemenő szakadások számát vegye fel a ξ valószínűségi változó értéke. A ξ diszkrét valószínűségi változó Poisson-eloszlású; paramétere a vizsgált időtartam alatti szakadások átlagos száma, vagyis:

$$\lambda = \mathbf{M}(\xi) = 3.$$

A ξ valószínűségi változó a k értéket a következő valószínűséggel veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi=k) = p_k = \frac{3^k}{k!}e^{-3} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Annak valószínűsége, hogy ξ értéke nem lépi túl az $\mathbf{M}(\xi)=3$ várható értéket:

$$\mathbf{P}(\xi \leqq 3) = \sum_{k=0}^{3} p_k = \sum_{k=0}^{3}\frac{3^k}{k!}e^{-3} = e^{-3}\sum_{k=0}^{3}\frac{3^k}{k!} =$$

$$= e^{-3}\left(1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right) = e^{-3}\left(4+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right) = 13e^{-3} \approx 0{,}65.$$

Tehát kb. 0,65 a valószínűsége annak, hogy a vizsgált 100 órás időtartam alatt nem következik be háromnál több szakadás.

8. Egy készülék szavatossági ideje egy év. A készülék 2000 darab azonos, különlegesen megbízható elemet tartalmaz, amelyek a szavatossági idő alatt egymástól függetlenül 0,0005 valószínűséggel romlanak el. A szavatosság alapján a gyártó vállalat az egy éven belül bekövetkezett meghibásodások javítására esetenként a teljes ár $\frac{1}{4}$ részét fizeti vissza. Ha a javítások száma az év során eléri az ötöt, akkor a gyártó vállalat a már kifizetett négy javítási költségen felül a teljes árat is visszafizeti. Számítsuk ki, hogy előreláthatólag az eredeti vételár hány százaléka marad a gyártó vállalatnál!

A meghibásodások száma binomiális eloszlást követ. Mivel azonban $n=2000$, elég nagy és $p=0{,}0005$ eléggé kicsi, továbbá $k=5$ is kicsi, tehát használhatunk Poisson-közelítést, melynek paramétere

$$\lambda = np = 2000 \cdot 0{,}0005 = 1.$$

A ξ valószínűségi változó az egy év során bekövetkezett meghibásodások számát jelenti. A ξ valószínűségi változó eloszlása:

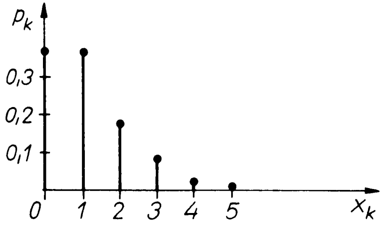
$$\mathbf{P}(\xi=k) = p_k = \frac{e^{-1}}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Az eloszlás első 6 tagjára van szükségünk, ezeket kiszámítjuk és ábrázoljuk (74. ábra):

$$p_0 \approx 0{,}368; \quad p_1 \approx 0{,}368;$$

$$p_2 \approx 0{,}184; \quad p_3 \approx 0{,}061;$$

$$p_4 \approx 0{,}015; \quad p_5 \approx 0{,}003.$$



74. ábra

A vételárat egységnek tekintve, egy-egy készülékből a szavatossági idő lejártával a gyártó vállalatnak $+1$, $+\frac{3}{4}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{4}$, 0, -1 bevétele lehet, a felmerült javítások számától függően. Az átlagos bevételt megkapjuk, ha kiszámítjuk ezek súlyozott átlagát (várható értékét), a megfelelő valószínűségekkel, mint súlyokkal:

$$\mathbf{M}(\xi) \approx 1 \cdot 0{,}368 + \frac{3}{4} 0{,}368 + \frac{1}{2} 0{,}184 +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot 0{,}061 + 0 \cdot 0{,}015 + (-1)\, 0{,}005 \approx 0{,}746.$$

Tehát a szavatossági kötelezettség teljesítésére a gyártó vállalat eladott készülékei árának kb. 25%-át fordítja.

9. Legalább hány darab kétjegyű számot kell találomra választanunk 00-tól 99-ig, mindig az összes számból választva, hogy egy előre megjelölt kétjegyű szám 0,9-nél nagyobb valószínűséggel szerepeljen a kiválasztott számok között?

Minthogy a különböző kétjegyű számok száma az adott esetben 100, ezekből n darabot véletlenszerűen kiválasztva, bármelyik előfordulásának átlagos száma:

$$\lambda = \frac{n}{100}.$$

Ezt az értéket paraméternek vezetjük be a ξ Poisson-eloszlású valószínűségi változónál. A ξ az $x_k = k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ értéket veheti fel, és itt az

x azt jelenti, hogy valamely megjelölt kétjegyű szám a kiválasztottak között k-szor fordul elő. A ξ eloszlása, amellyel a binomiális eloszlás tagjait közelítjük;

$$\mathbf{P}(\xi = x_k) = p_k = \frac{\left(\frac{n}{100}\right)^k}{k!} e^{-\frac{n}{100}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Annak a valószínűsége, hogy egy előre megjelölt kétjegyű szám legalább egyszer előfordul az n darab kiválasztott között:

$$1 - p_0 = 1 - e^{-\frac{n}{100}}.$$

A következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, amelyből n értéke meghatározható:

$$1 - e^{-\frac{n}{100}} > 0{,}9;$$

$$e^{-\frac{n}{100}} < 0{,}1;$$

$$-\frac{n}{100} \lg e < \lg 0{,}1;$$

$$n > -100 \cdot \frac{\lg 0{,}1}{\lg e} \approx 230.$$

Azt kaptuk, hogy 230-nál több kétjegyű szám kiválasztása szükséges.

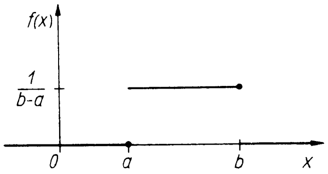
5. Egyenletes eloszlás

Egy ξ folytonos valószínűségi változót az (a, b) intervallumon *egyenletes eloszlásúnak* mondunk, ha sűrűségfüggvénye (75. ábra):

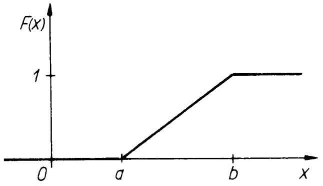
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b; \\ 0, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy eloszlásfüggvénye (76. ábra):

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b; \\ 1, & \text{ha } x > b; \end{cases}$$



75. ábra



76. ábra

ξ bármely (a', b') részintervallumba $(a' \geqq a,\ b' \leqq b)$ esésének valószínűsége egyenlő a részintervallum hosszának és a teljes (a, b) intervallum hosszának hányadosával, vagyis

$$\mathbf{P}(a' \leqq \xi < b') = \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx = \frac{b'-a'}{b-a}.$$

ξ várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad \mathbf{D}(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Gyakorló feladatok

1. Egy műszer számlapján a beosztások 1°-onként következnek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a leolvasási hiba legfeljebb $\pm 10'$, ha csak egész fokokat olvasunk le?

A mutató helyéhez legközelebbi egész foknál olvasunk le. A leolvasás hibája abszolút értékben $0'$ és $30'$ között van. A ξ valószínűségi változó értéke jelentse a leolvasás abszolút hibáját. ξ nyilván egyenletes eloszlású a (0, 30) intervallumban, így annak valószínűsége, hogy $10'$-nél nem nagyobb,

$$\frac{b'-a'}{b-a} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Tehát $\frac{1}{3}$ a valószínűsége annak, hogy a leolvasási hiba legfeljebb $\pm 10'$.

2. Egy egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása adott:

$$\mathbf{M}(\xi) = 3; \quad \mathbf{D}(\xi) = 2.$$

Írjuk fel és ábrázoljuk a ξ valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a valószínűségi változó negatív értéket vesz fel!

Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{a+b}{2}; \quad \mathbf{D}(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

A várható érték és a szórás adott számadatait behelyettesítve, egyenletrendszert kapunk, amelyet megoldunk:

$$\frac{a+b}{2} = 3;$$

$$\frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 2;$$

$$a+b = 6,$$

$$b-a = 4\sqrt{3}.$$

Az egyenleteket összeadjuk:

$$2b = 6+4\sqrt{3};$$

$$b = 3+2\sqrt{3};$$

$$a = 6-b = 3-2\sqrt{3}.$$

A ξ valószínűségi változó tehát a $(3-2\sqrt{3},\ 3+2\sqrt{3})$ intervallumban egyenletes eloszlású. Sűrűségfüggvénye (77. ábra):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 3-2\sqrt{3}; \\ \dfrac{1}{4\sqrt{3}}, & \text{ha } 3-2\sqrt{3} < x \leqq 3+2\sqrt{3}; \\ 0, & \text{ha } x > 3+2\sqrt{3}; \end{cases}$$

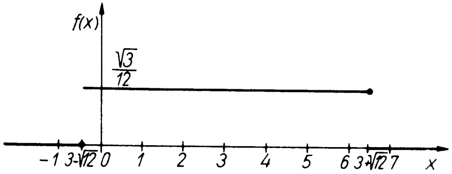
eloszlásfüggvénye (78. ábra):

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 3-2\sqrt{3}; \\ \dfrac{x-3+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}, & \text{ha } 3-2\sqrt{3} < x \leqq 3+2\sqrt{3}; \\ 1, & \text{ha } x > 3+2\sqrt{3}. \end{cases}$$

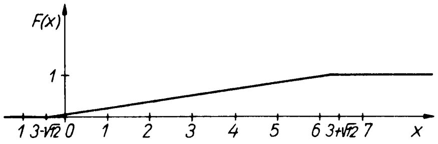
Ha ξ negatív értéket vesz fel, akkor a $(3-2\sqrt{3},\ 0)$ intervallumba esik. Ennek hossza $0-3+2\sqrt{3} \approx -3+2\cdot 1{,}732 = 0{,}464$; a teljes intervallum hossza $3+2\sqrt{3}-(3-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928$, így annak valószínűsége, hogy ξ értéke negatív

$$\mathbf{P}(\xi < 0) \approx \frac{0{,}464}{6{,}928} \approx 0{,}07.$$

Tehát kb. 0,07 a valószínűsége annak, hogy az egyenletes eloszlású ξ negatív értéket vesz fel.



77. ábra



78. ábra

3. Egy ξ valószínűségi változó, amely egy A esemény bekövetkezésének időpontját jelenti, egyenletes eloszlású a $(0, b)$ intervallumon, ahol $b > 1$, de pontos értéke ismeretlen. Ismeretes azonban annak valószínűsége, hogy az A esemény a $(0, 1)$ intervallumba esik, mégpedig

$$\mathbf{P}(0 < \xi \leqq 1) = \frac{3}{4}.$$

Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét! Számítsuk ki várható értékét és szórását!

A $(0\ \ 1)$ részintervallumra felírva a megfelelő $\dfrac{b'-a'}{b-a}$ valószínűséget:

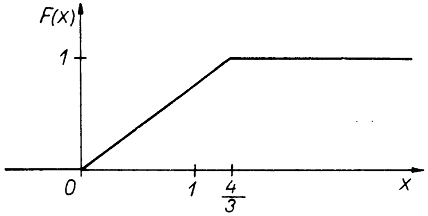
$$\frac{1-0}{b-0} = \frac{3}{4}, \quad \text{vagyis} \quad b = \frac{4}{3} \text{ adódik.}$$

A ξ valószínűségi változó tehát a $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$ intervallumon egyenletes eloszlású. Az eloszlásfüggvény (79. ábra):

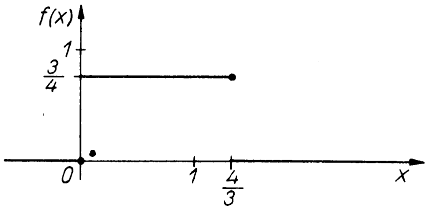
$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ \dfrac{3}{4}x, & \text{ha } 0 < x \leqq \dfrac{4}{3}; \\ 1, & \text{ha } x > \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény (80. ábra):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ \dfrac{3}{4}, & \text{ha } 0 < x \leqq \dfrac{4}{3}; \\ 0, & \text{ha } x > \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$



79. ábra



80. ábra

A várható érték:

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3},$$

és a szórás

$$\mathbf{D}(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

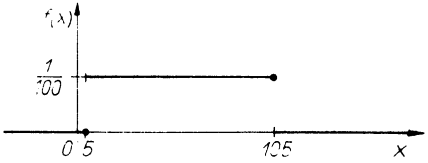
4. Telefonhívás alkalmával a tárcsázás befejezésétől a kapcsolásig eltelt időt tekintsük valószínűségi változónak. Tegyük fel, hogy ez a valószínűségi változó egyenletes eloszlású, és a kapcsolás időtartama 5 mp-től 105 mp-ig terjedhet. Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a várható értéket és a szórást! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy legalább egy percig kell várnunk a kapcsolásra!

ξ egyenletes eloszlású az (5, 105) intervallumban. Sűrűségfüggvénye (81. ábra):

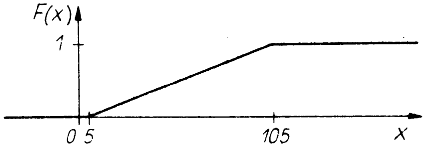
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\leqq 5;\\ \dfrac{1}{100}, & \text{ha } 5<x\leqq 105;\\ 0, & \text{ha } x>105.\end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye (82. ábra):

$$F(x)=\mathbf{P}(\xi<x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\leqq 5;\\ \dfrac{x-5}{100}, & \text{ha } 5<x\leqq 105;\\ 1, & \text{ha } x>105.\end{cases}$$



81. ábra



82. ábra

A valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi)=\frac{a+b}{2}=\frac{5+105}{2}=55\text{ mp},$$

$$\mathbf{D}(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{105-5}{2\sqrt{3}}=\frac{100}{2\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{3}}{3}\approx 28{,}8\text{ mp}.$$

Annak a valószínűsége, hogy a kapcsolási idő legalább 1 perc = 60 mp:

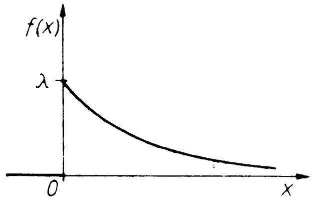
$$\mathbf{P}(\xi\geqq 60)=\frac{105-60}{105-5}=\frac{45}{100}=0{,}45.$$

Tehát 0,45 a valószínűsége annak, hogy legalább egy percet kell várnunk kapcsolásra.

6. Exponenciális eloszlás

Egy ξ folytonos valószínűségi változót exponenciális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvényének alakja (83. ábra):

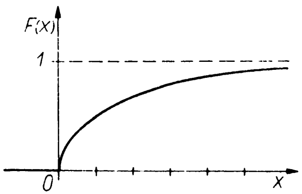
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\leqq 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x>0,\end{cases}$$



83. ábra

ahol λ tetszőleges pozitív szám lehet, amelyet az eloszlás paraméterének nevezünk. ξ eloszlásfüggvénye (84. ábra):

$$F(x)=\mathbf{P}(\xi<x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\leqq 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{ha } x>0.\end{cases}$$



84. ábra

Az exponenciális eloszlású, λ paraméterű valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{1}{\lambda}; \quad \mathbf{D}(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ha a ξ valószínűségi változó valamilyen esemény bekövetkezéséig eltelt *időtartamot* jelöl, és ξ olyan tulajdonságú, hogy ha a kiinduló időponttól tetszőleges T időpontig még nem következett be az esemény, akkor tekinthető ez a T időpont is kiinduló időpontnak, vagyis

$$\mathbf{P}(\xi \geqq T+t \mid \xi \geqq T) = \mathbf{P}(\xi \geqq t),$$

akkor ξ exponenciális eloszlású. Ez esetben kis Δt értékekre az esemény bekövetkezésének feltételes valószínűsége, feltéve, hogy a Δt időszakasz kezdetéig az esemény nem következett be:

$$\mathbf{P}(\xi < T+\Delta t \mid \xi \geqq T) = \lambda \Delta t.$$

Vagyis az esemény bekövetkezésének esélye az idő múlásával nem nő — az exponenciális eloszlású változó „nem öregszik".

Ilyen tulajdonságúak szoktak lenni pl. bizonyos alkatrészek, berendezések meghibásodásai a berendezés, ill. alkatrész élettartamának viszonylag hosszú szakaszában; exponenciális eloszlásúak a radioaktív bomlási folyamatok is.

Gyakorló feladatok

1. Egy ξ valószínűségi változó jelentse annak az útnak a hosszát, amelyet egy gépkocsi az első műszaki hibáig megtesz. Tegyük fel, hogy ξ exponenciális eloszlású és várható értéke 500 km. Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki, mennyi a valószínűsége annak, hogy a valószínűségi változó a várható értéknél kisebb értéket vesz fel!

Mivel ξ várható értéke 500, tehát az eloszlás paramétere:

$$\lambda = \frac{1}{500}.$$

A paraméter ismeretében felírhatjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{500}}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó a várható értéknél kisebb értéket vesz fel,

$$\mathbf{P}(\xi < 500) = F(500) = 1 - e^{-\frac{500}{500}} = 1 - \frac{1}{e} \approx 1 - 0{,}368 = 0{,}632.$$

Tehát kb. 0,632 a valószínűsége annak, hogy a gépkocsi első műszaki hibája 500 km megtétele előtt következik be.

2. Egy radioaktív anyag bomlását vizsgáljuk. Legyen a valószínűségi változó értéke egy tetszőleges atom bomlásáig eltelt idő, és annak valószínűsége, hogy az anyag egy tetszőleges atomja x éven belül elbomlik:

$$\mathbf{P}(\xi < x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}.$$

Határozzuk meg a valószínűségi változó várható értékét, szórását, valamint a bomlás felezési idejét!

A ξ exponenciális valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

A ξ várható értéke, valamint szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{D}(\xi) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ év}.$$

A bomlás felezési idejét x azon értéke adja, amelyre:

$$F(x) = \frac{1}{2}.$$

Ebből a felezési idő meghatározható:

$$1-e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2};$$

$$e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2};$$

$$-\frac{x}{2}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2.$$

$$x=2\ln 2\approx 2\cdot 0{,}69=1{,}38 \text{ év}.$$

3. Bizonyos típusú izzólámpák tönkremeneteléig eltelt égési időtartam hosszát tekintsük ξ valószínűségi változónak. Megállapították, hogy ξ exponenciális eloszlású és szórása 1000 óra. Határozzuk meg ξ várható értékét! Írjuk fel a ξ valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy kiszemelt izzólámpa 3000 órán belül még nem megy tönkre!

Mivel ξ szórása — ennélfogva várható értéke is —

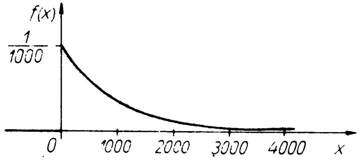
$$\mathbf{D}(\xi)=\mathbf{M}(\xi)=1000 \text{ óra},$$

ezért az eloszlás paramétere:

$$\lambda=\frac{1}{1000}.$$

A sűrűségfüggvény (85. ábra):

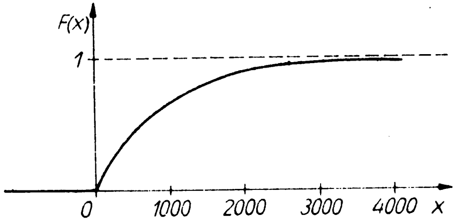
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\leq 0;\\ \dfrac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}, & \text{ha } x>0.\end{cases}$$



85. ábra

Az eloszlásfüggvény (86. ábra):

$$F(x)=\mathbf{P}(\xi<x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\leq 0;\\ 1-e^{-\frac{x}{1000}}, & \text{ha } x>0.\end{cases}$$



86. ábra

Az az esemény, hogy egy izzólámpa 3000 órán belül nem megy tönkre, azt jelenti, hogy $\xi\geq 3000$. Ennek a valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\xi\geq 3000)=1-\mathbf{P}(\xi<3000)=1-F(3000)=$$

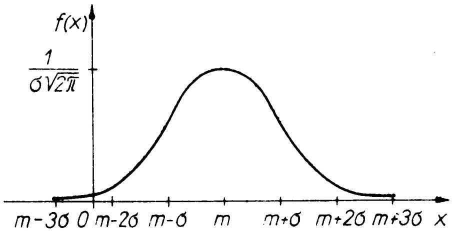
$$=1-\left(1-e^{-\frac{3000}{1000}}\right)=e^{-3}\approx 0{,}05.$$

Tehát kb. 0,05 annak a valószínűsége, hogy egy izzólámpa legalább 3000 órán át hibátlanul világít.

7. Normális eloszlás

Egy ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye (87. ábra):

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

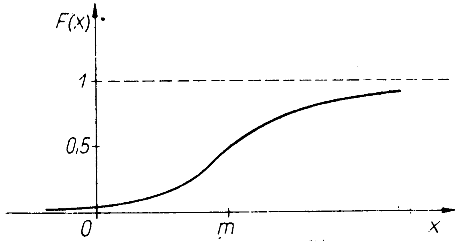


87. ábra

ahol az m tetszőleges valós szám lehet és a σ tetszőleges pozitív szám lehet; m és σ az eloszlás két paramétere.

ξ eloszlásfüggvénye (88. ábra):

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$



88. ábra

A ξ várható értéke és szórása:

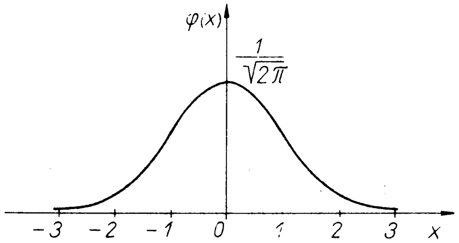
$$M(\xi) = m; \quad D(\xi) = \sigma.$$

Ha a normális eloszlású ξ valószínűségi változó paraméterei $m=0$ és $\sigma=1$, akkor sűrűségfüggvénye (89. ábra):

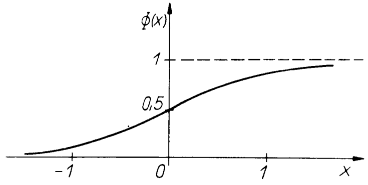
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

az eloszlásfüggvénye (90. ábra):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$



89. ábra



90. ábra

Ezt *standard normális eloszlásnak* nevezzük. A $\varphi(x)$ és $\Phi(x)$ függvények értékei táblázatokban megtalálhatók. Néhány értéket az alábbiakban adunk meg:

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,5000
0,50	0,3521	0,6915
1,00	0,2420	0,8413
1,50	0,1295	0,9332
2,00	0,0540	0,9772
2,50	0,0175	0,9938
3,00	0,0046	0,9986
3,50	0,0009	0,9997

E függvényekkel az m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye így fejezhető ki:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

A normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus a várható értékre. Így fennállnak a következő összefüggések:

$$\varphi(-x) = \varphi(x); \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

ebből következően a standard normális eloszlásra

$$\mathbf{P}(-x < \xi \leqq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) =$$
$$= 2\Phi(x) - 1.$$

Ezt az összefüggést a gyakorlatban gyakran lehet felhasználni, ha ui. a várható érték körüli szimmetrikus intervallumba tartozás valószínűségét keressük.

A binomiális eloszlás egyes tagjait nagy n esetén megközelítően kiszámíthatjuk a $\varphi(x)$ függvény felhasználásával:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

ezért

$$\sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \Phi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

A természettudományokban és a technikában igen sokszor találkozunk normális — vagy legalábbis jó közelítéssel normálisnak tekinthető — eloszlásokkal. Ilyenek pl. azonos korú iskolásgyerekek magasságeloszlásai, gyártási folyamatban fellépő méretingadozások, mérési hibák eloszlása stb.

Gyakorló feladatok

1. Távolságmérést végeznek terepen. A valódi és a mért hosszúság különbségét, vagyis a mérési hibát valószínűségi változónak tekintjük. Ez a ξ valószínűségi változó normális eloszlású, várható értéke -20 m, szórása 40 m. (Mivel a várható érték nem nulla, a mérési eredmény nem csak véletlen hibát tartalmaz, hanem szisztematikus torzítást is.) Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a hiba abszolút értéke 60 m-nél kevesebb!

A ξ normális eloszlású valószíní változó várható értéke és szórása ismert, mégpedig

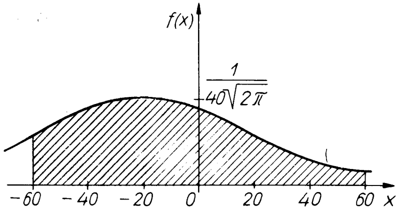
$$\mathbf{M}(\xi) = m = -20; \quad \mathbf{D}(\xi) = \sigma = 40.$$

Az eloszlás sűrűségfüggvénye (91. ábra):

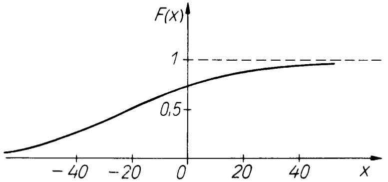
$$f(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+20)^2}{3200}}$$

eloszlásfüggvénye pedig (92. ábra):

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t+20)^2}{3200}} \, \mathrm{d}t.$$



91. ábra



92. ábra

Az az esemény, hogy a mérési hiba abszolút értéke 60 m-nél kevesebb azt jelenti, hogy $-60 < \xi < 60$. Ennek az eseménynek a valószínűsége (melyet az ábrán bevonalkázott terület szemléltet):

$$\mathbf{P}(-60<\xi<60) = F(60) - F(-60) =$$

$$= \Phi\left(\frac{60+20}{40}\right) - \Phi\left(\frac{-60+20}{40}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - [1-\Phi(1)] =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0{,}977 + 0{,}841 - 1 = 0{,}818.$$

Tehát kb. 0,818 a valószínűsége annak, hogy a távolságmérés abszolút hibája 60 m-nél kevesebb.

2. Egy gyártmány mérethibája — azaz eltérése a névleges mérettől — egy normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke 0. Megállapítottuk, hogy a mérethiba abszolút értéke 0,8 valószínűséggel nem éri el a 20 mm-es határt, amelyen belül a gyártmány még elfogadható minőségű. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét! A termék első osztályúnak minősül, ha a mérethiba abszolút értéke a 10 mm-t nem haladja meg. Mennyi a valószínűsége ennek egy találomra kiválasztott gyártmány esetén?

ξ eloszlásfüggvénye, ha $\mathbf{M}(\xi) = m = 0$, a következő alakú:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t.$$

Annak valószínűsége, hogy a mérethiba abszolút értéke 20 mm-nél kisebb:

$$\mathbf{P}(-20<\xi<20) = F(20)-F(-20) =$$

$$= \Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)-1.$$

Ennek a valószínűségnek adott az értéke, ennélfogva a σ ismeretlen szórást meghatározhatjuk:

$$2\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)-1 = 0,8;$$

$$\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0,9;$$

$$\frac{20}{\sigma} = 1,28;$$

$$\sigma = \frac{20}{1,28} = 15,5 \text{ mm}.$$

A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi<x) = \frac{1}{15,5\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2\cdot 15,5^2}}\,dt.$$

Egy termék elsőosztályú, ha $-10 < \xi < 10$. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(-10<\xi<10) = F(10)-F(-10) =$$

$$= \Phi\left(\frac{10}{15,5}\right)-\Phi\left(-\frac{10}{15,5}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{15,5}\right)-1 \approx$$

$$\approx 2\Phi(0,64)-1 \approx 2\cdot 0,739-1 = 0,478.$$

Tehát kb. 0,478 a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott gyártmány elsőosztályú.

3. Egy repülőgép pilótájával közlik a 100 m magasságú légifolyosó közepének földtől mért távolságát. A repülőgép repülési magasságának ettől való eltérése egy ξ valószínűségi változó, amely normális eloszlású, 20 m várható értékkel és 50 m szórással. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a repülőgép a légifolyosó alatt, a légifolyosóban, ill. a felett halad!

Eloszlása két paraméterének ismeretében felírjuk ξ eloszlásfüggvényét:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi<x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{50\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-20)^2}{2\cdot 50^2}}\,dt.$$

Először annak valószínűségét számítjuk ki, hogy a repülőgép a légifolyosó alatt repül, vagyis a $\xi<-50$ eseményét:

$$\mathbf{P}(\xi<-50) = F(-50) = \Phi\left(\frac{-50-20}{50}\right) =$$

$$= \Phi(-1,4) = 1-\Phi(1,4) = 1-0,919 = 0,081.$$

Ezután kiszámítjuk, milyen valószínűséggel halad a gép a légifolyosóban, vagyis azon eseményét, hogy $-50 < \xi < 50$:

$$\mathbf{P}(-50<\xi<50) = F(50)-F(-50) =$$

$$= \Phi\left(\frac{50-20}{50}\right)-\Phi\left(\frac{-50-20}{50}\right) = \Phi(0,6)-\Phi(-1,4) =$$

$$= \Phi(0,6)-[1-\Phi(1,4)] = \Phi(0,6)+\Phi(1,4)-1 =$$

$$= 0,726+0,919-1 = 0,645.$$

Végül a $\xi>50$ esemény, vagyis annak valószínűsége, hogy a repülőgép a légifolyosó felett halad:

$$\mathbf{P}(\xi>50) = 1-\mathbf{P}(\xi<50) = 1-F(50) =$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{50-20}{50}\right) = 1-\Phi(0,6) = 1-0,726 = 0,274.$$

Ellenőrzés: a három vizsgált esemény valószínűségének összege:

$$0,081+0,645+0,274 = 1.$$

Tehát rendre 0,081, 0,645, 0,274 azon események valószínűsége, hogy a gép a megadott légifolyosó alatt, a légifolyosóban, ill. a felett repül.

4. Valamely súlyméréskor a valódi és a mérleg által mutatott súly különbségét, vagyis a mérési hibát tekintjük valószínűségi változónak, mely normális eloszlású, várható értéke 0, szórása 60 g. Legalább hány mérést kell végezni, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legalább az egyik mérés hibájának abszolút értéke ne lépje túl a 7,5 g-ot?

ξ eloszlásfüggvénye a két paraméter ismeretében:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi<x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{60\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{7200}} dt.$$

Először annak az A eseménynek a valószínűségét számítjuk ki, hogy a súlymérés hibájának abszolút értéke nem lépi túl a 7,5 grammot:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(-7,5 \le \xi \le 7,5) = F(7,5) - F(-7,5) =$$

$$= \Phi\left(\frac{7,5}{60}\right) - \Phi\left(-\frac{7,5}{60}\right) = 2\Phi(0,125) - 1 = 2\cdot 0,55 - 1 = 0,1.$$

Az $\bar{A}$ esemény azt jelenti, hogy egy mérés alkalmával a hiba abszolút értéke 7,5 g-nál több. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Az egyes mérések eredményei egymástól függetlenek. Annak valószínűsége, hogy n számú mérés során a hiba abszolút értéke mindig nagyobb 7,5 g-nál:

$$[\mathbf{P}(\bar{A})]^n = 0,9^n.$$

Annak valószínűsége, hogy e mérések közül legalább egy esetben az A esemény bekövetkezik:

$$1 - 0,9^n.$$

Erre teljesülni kell a következő egyenlőtlenségnek, melyből n kifejezhető:

$$1 - 0,9^n > 0,9;$$

$$0,9^n < 0,1;$$

$$n \lg 0,9 < \lg 0,1;$$

$$n > \frac{\lg 0,1}{\lg 0,9} \approx \frac{-1}{0,954 - 1} \approx \frac{1}{0,046} \approx 21,7.$$

Azt kaptuk, hogy legalább 22 mérést kell végeznünk ahhoz, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel legalább az egyik esetben ne lépje túl a hiba abszolút értéke a 7,5 g-ot.

5. Egy szabályos érmét 100-szor dobunk fel egymás után. Írjuk fel és számítsuk ki megközelítően annak valószínűségét, hogy a fejdobások száma 40, 45, ill. 50!

Jelentse a ξ valószínűségi változó a fejdobások számát; ξ binomiális eloszlású. Annak az A eseménynek, hogy egy dobás fej, a valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = p = \frac{1}{2}.$$

Az $\bar{A}$ valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = q = \frac{1}{2}.$$

A dobások száma: $n=100$. Annak valószínűsége, hogy ξ az $x_k=k$ értéket veszi fel:

$$\mathbf{P}(\xi = x_k) = p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \qquad (k=0, 1, \ldots, 100).$$

Mivel n eléggé nagy, a binomiális eloszlás tagjait az np várható értékű és npq szórású normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényének k helyen vett értékével közelítjük. A sűrűségfüggvény értékeit a $\varphi(x)$ függvény felhasználásával számítjuk ki:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \varphi\left(\frac{k-100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{5}\varphi\left(\frac{k-50}{5}\right)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, 100).$$

A keresett valószínűségek:

$$p_{40} \approx \frac{1}{5}\varphi\left(\frac{40-50}{5}\right) = \frac{1}{5}\varphi(-2) = \frac{1}{5}\varphi(2) = \frac{1}{5}\cdot 0,054 = 0,0108;$$

$$p_{45} \approx \frac{1}{5}\varphi\left(\frac{45-50}{5}\right) = \frac{1}{5}\varphi(-1) = \frac{1}{5}\varphi(1) = \frac{1}{5}\cdot 0,242 = 0,0484;$$

$$p_{50} \approx \frac{1}{5}\varphi\left(\frac{50-50}{5}\right) = \frac{1}{5}\varphi(0) = \frac{1}{5}\cdot 0,399 = 0,0798.$$

Tehát annak valószínűsége, hogy 40, 45, ill. 50 a fejdobások száma, megközelítően 0,0108, 0,0484, ill. 0,0798.

6. Egy tétel áru 40%-a hibátlan. Egyenként választunk belőle véletlenszerűen 200 darabot, amelyeknek mindegyikét a kiválasztás után megvizsgáljuk és azonnal visszatesszük. Írjuk fel és számítsuk ki megközelítően annak a valószínűségét, hogy 100-nál kevesebb esetben vettünk ki hibásat!

Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a 200 darab kiválasztása során kapott hibás darabok száma, és A az az esemény, hogy egy kiválasztott darab hibás. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = p = 0{,}6 = \frac{3}{5}.$$

Az $\bar{A}$ esemény azt jelenti, hogy egy kivett darab hibátlan; valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = q = 0{,}4 = \frac{2}{5}.$$

Az egymástól független választások száma $n=200$. A ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó, amely az $x_k=k$ $(k=0, 1, \ldots, 200)$ értéket veheti fel. Annak valószínűségét, hogy $\xi<100$, ξ eloszlásfüggvényét felhasználva kapjuk:

$$\mathbf{P}(\xi<100) = \sum_{k<100} \binom{200}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{200-k}.$$

Ezt a valószínűséget az np várható értékű és $\sqrt{npq}$ szórású normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének $x=k=100$ helyen felvett értékével közelítjük. A számítást a $\Phi(x)$ függvény felhasználásával végezzük:

$$\sum_{k<100} \binom{200}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{200-k} = \Phi\left(\frac{100-200\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{200\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}}\right) =$$

$$= \Phi\left(-\frac{20}{4\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = 1-\Phi\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \approx 1-\Phi(2{,}88) =$$

$$= 0{,}0063.$$

Tehát kb. 0,0063 annak a valószínűsége, hogy 100-nál kevesebb hibásat választunk.

VII. A NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE

1. A Csebisev-egyenlőtlenség

Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó, melynek létezik szórása. Ekkor bármely $\varepsilon>0$ esetén

$$\mathbf{P}(|\xi-\mathbf{M}(\xi)| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2},$$

ahol az $\mathbf{M}(\xi)$, ill. $\mathbf{D}^2(\xi)$ mennyiségek a ξ valószínűségi változó várható értéke, ill. szórásnégyzete.

Ez az ún. Csebisev-egyenlőtlenség. Ha egy valószínűségi változó eloszlását nem ismerjük, de várható értékét és szórását igen, akkor a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével felső korlátot tudunk megadni a várható érték körüli szimmetrikus intervallumokba esés valószínűségeire. (Ha az eloszlást ismerjük, akkor természetesen e valószínűségek pontos értékét is meghatározhatjuk.)

Gyakorló feladatok

1. Egy ξ valószínűségi változó várható értéke $\mathbf{M}(\xi)=50$, szórása $\sigma=20$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel tér el a valószínűségi változó a várható értéktől abszolút értékben legalább 60 egységgel? Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha a valószínűségi változó normális eloszlású?

A Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazzuk; az $\varepsilon=60$ értéket helyettesítjük:

$$\mathbf{P}(|\xi-50| \geqq 60) \leqq \frac{400}{60^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111.$$

Tehát legfeljebb 0,1111 a valószínűsége annak, hogy a valószínűségi változó a várható értéktől abszolút értékben legalább 60 egységgel eltér.

Normális eloszlás esetében a valószínűség értéke:

$$\mathbf{P}(|\xi-50| \geqq 60) = F(-10)+[1-F(110)] =$$

$$= \Phi\left(\frac{-10-50}{20}\right)+\left[1-\Phi\left(\frac{110-50}{20}\right)\right] =$$

$$= \Phi(-3)+[1-\Phi(3)] = 2[1-\Phi(3)] = 2\cdot 0{,}0014 = 0{,}0028.$$

Tehát ekkor a valószínűség pontos értéke 0,0028, ami lényegesen kisebb, mint a minden eloszlásra érvényes 0,1111 felső korlát.

2. Egy ξ pozitív valószínűségi változó várható értéke és szórása:

$$\mathbf{M}(\xi) = 10; \quad \mathbf{D}(\xi) = 10.$$

Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel veszi fel a valószínűségi változó legalább az 55 értéket! Mekkora a valószínűség pontos értéke, ha az eloszlás exponenciális?

Ha ξ az 55 értéket eléri, akkor a várható értéktől 45-tel tér el. A ξ negatív intervallumokba jutásának valószínűsége 0, tehát a Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk $\varepsilon=45$ értékre:

$$\mathbf{P}(|\xi-10| \geqq 45) \leqq \frac{10^2}{45^2} = \frac{4}{81} \approx 0{,}05.$$

Azt kaptuk, hogy legfeljebb kb. 0,05 valószínűséggel veszi fel a valószínűségi változó legalább az 55 értéket.

Ha ξ exponenciális eloszlású, akkor eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{10}x}$$

és így a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\xi \geqq 55) = 1 - F(55) = e^{-\frac{55}{10}} = \frac{1}{e^{5,5}} \approx 0{,}004.$$

Tehát a kapott pontos érték 0,004, ami lényegesen kisebb, mint a 0,05 felső korlát.

3. Egy textilgyárban előállított vég szövet hosszának várható értéke 35 m, szórása 0,3 m. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vég hossza legalább 1 m-rel eltér a várható értéktől?

Az $\varepsilon=1$ értéket és a ξ valószínűségi változó adott jellemző adatait helyettesítjük a Csebisev-egyenlőtlenségbe:

$$\mathbf{P}(|\xi-35| \geqq 1) = \frac{0{,}3^2}{1^2} = 0{,}09.$$

Tehát legfeljebb 0,09 annak a valószínűsége, hogy a vég hosszúsága nem esik 34 m és 36 m közé.

4. Egy forgalmas útkereszteződésen egy óra alatt áthaladó gépkocsik száma legyen a ξ valószínűségi változó. A felmérésekből ismert, hogy ξ várható értéke 500, szórása 25. Legalább mekkora valószínűséggel esik 400 és 600 közé az útkereszteződésen egy óra alatt áthaladó gépkocsik száma?

A Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazzuk. Annak a valószínűsége, hogy az áthaladó járművek száma 400 és 600 közé esik, azt jelenti, hogy a ξ valószínűségi változó a várható értéktől $\varepsilon=100$-nál nagyobb értékkel nem tér el. Az ellentett események valószínűségei közötti összefüggés alapján:

$$\mathbf{P}(|\xi-500|<100) = 1-\mathbf{P}(|\xi-500| \geqq 100) \geqq$$

$$\geqq 1-\frac{25^2}{100^2} = 1-\frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

2. A nagy számok Bernoulli-féle törvénye

A nagy számok törvényei valószínűségi változók számtani közepének ingadozására vonatkozó törvényszerűségeket mondanak ki. Itt mi csak a nagy számok törvényeinek Bernoulli-féle alakjára térünk ki. (Ez tulajdonképpen a Csebisev-egyenlőtlenségből adódik, ha a binomiális eloszlásra alkalmazzuk.)

Legyen ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó, amely az $x_k=k$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ értéket veszi fel, ha az A esemény n kísérlet során k-szor következett be. A $\frac{k}{n}$ hányados az A esemény relatív gyakorisága. Az A esemény valószínűsége egy kísérletnél:

$$\mathbf{P}(A)=p;$$

az $\bar{A}$ eseményé:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 1-p=q.$$

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges szám; ekkor

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right| \geqq \varepsilon\right) \leqq \frac{pq}{\varepsilon^2 n}.$$

A jobb oldalon álló kifejezés — és így a bal oldalon álló valószínűség is — bármely rögzített $\varepsilon>0$ esetén nullához tart, ha $n\to\infty$. Ez a nagy számok Bernoulli-féle törvénye.

Gyakorló feladatok

1. Hányszor kell egy szabályos érmet feldobnunk, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől?

Az A esemény jelentse azt, hogy fejet dobunk.

Ennek valószínűsége:

$$p = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{2},$$

ekkor

$$q = \mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{1}{2}.$$

A nagy számok törvényét alkalmazzuk:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right| \geqq 0{,}1\right) \leqq \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{0{,}1^2\cdot n}.$$

A bal oldalon álló valószínűségnek 0,1-nél kevesebbnek kell lennie ahhoz, hogy a vizsgált — ezzel ellentétes — esemény legalább 0,9 valószínűséggel következzék be. A követelmény biztosan teljesül, ha még a jobb oldali kifejezésre is fennáll a következő egyenlőtlenség, melyből n meghatározható:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{0{,}1^2 n} < 0{,}1; \qquad \frac{1}{4} < 0{,}1^3 n; \qquad n < \frac{1}{4\cdot 0{,}1^3} = \frac{10^3}{4} = 250.$$

Tehát az érmével legalább 250 dobást kell végeznünk.

2. Hányszor kell egy szabályos kockát feldobnunk, hogy a 6-os dobás valószínűségét az esemény relatív gyakorisága legalább 0,8 valószínűséggel 0,1-nél kisebb hibával megközelítse?

Jelentse az A esemény a 6-os dobását. Az A és $\bar{A}$ események valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A) = p = \frac{1}{6}; \quad \mathbf{P}(\bar{A}) = q = 1-p = \frac{5}{6}.$$

Felírható:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{6}\right| \geqq 0{,}1\right) \leqq \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{0{,}1^2 n}.$$

Ha az egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezésre fennáll:

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{0{,}1^2 n} < 0{,}2,$$

akkor a bal oldalon álló valószínűségre még inkább teljesül. Az utóbbi egyenlőtlenséget n-re megoldjuk:

$$\frac{5}{36} < 0{,}002n;$$

$$n > \frac{5}{36\cdot 2\cdot 10^{-3}} = \frac{5000}{72} \approx 69{,}4.$$

Tehát 70 vagy több dobást kell végeznünk a dobókockával.

3. A gyártmányok 10%-a hibás. A minőségi ellenőrzés csak akkor találja elfogadhatónak a tételt, ha ebben legfeljebb 12% hibás. Mekkora legyen a tételben a gyártmányok darabszáma, hogy a hibás áruk relatív gyakorisága a megfelelő valószínűségtől legalább 0,95 valószínűséggel ne térjen el 0,02-nél nagyobb értékkel?

Az A esemény jelentse azt, hogy hibás árut választunk ki. Az A és az $\bar{A}$ események valószínűsége:

$$\mathbf{P}(A)=p=0{,}1; \quad \mathbf{P}(\bar{A}) = q = 1-p = 0{,}9.$$

Mivel:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-0{,}1\right| \geqq 0{,}02\right) \leqq \frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{0{,}02^2 n},$$

ezért ha az egyenlőtlenség jobb oldala 0,05-nél kisebb, akkor a bal oldalra ez még inkább teljesül. A következő egyenlőtlenségből n értékét kifejezzük:

$$\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{0{,}02^2 n} < 0{,}05;$$

$$n > \frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{0{,}02^2\cdot 0{,}05} = \frac{9\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{-2}} = \frac{90\,000}{20} = 4500.$$

Tehát 4500-nál nagyobb darabszámú tételt legalább 0,95 valószínűséggel átvesznek.

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Szűcs Péter igazgató
Felelős szerkesztő: Dr. Vas Györgyné okl. alk. matematikus
A 6. kiadást gondozta: Dr. Ráczné Nagy Borbála okl. villamosmérnök
A szedés a Műszaki Könyvkiadóban készült

Nyomta az Alföldi Nyomda, Debrecen
Felelős vezető: György Géza
Munkaszám: 8346.66-13-2

Műszaki vezető: Dornizs László
Műszaki szerkesztő: Ábrahám Julianna
A borítót tervezte: Kováts Tibor
A könyv formátuma: Fr5. Ívterjedelme: 13,625 (A5)
Ábrák száma: 92. Azonossági szám: 10 161/100
Készült az MSZ 5601—1983 és 5602—1983 szerint
Ez a könyv az 1985. évi kiadás változatlan utánnyomása

binomiális eloszlás:

$$\mathbf{P}(\xi=k)=p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\ldots,n) \qquad \mathbf{M}(\xi)=np \qquad \mathbf{D}(\xi)=\sqrt{npq}$$

hipergeometrikus eloszlás:

$$\mathbf{P}(\xi=k)=p_k=\frac{\binom{s}{k}\binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} \quad (k=0,1,\ldots,n) \qquad \mathbf{M}(\xi)=np \qquad \mathbf{D}(\xi)=\sqrt{np(1-p)\left(1-\frac{n-1}{m-1}\right)}$$

negatív binomiális eloszlás:

$$\mathbf{P}(\xi=k+r)=p_k=\binom{k+r-1}{r-1}p^r q^k \quad (k=0,1,2,\ldots) \qquad \mathbf{M}(\xi)=\frac{r}{p} \qquad \mathbf{D}(\xi)=\frac{\sqrt{rq}}{p}$$

Poisson-eloszlás:

$$\mathbf{P}(\xi=k)=p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\ldots) \qquad \mathbf{M}(\xi)=\lambda \qquad \mathbf{D}(\xi)=\sqrt{\lambda}$$

egyenletes eloszlás:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}, \text{ ha } a<x\leq b \qquad \mathbf{M}(\xi)=\frac{a+b}{2}$$

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}, \text{ ha } a<x\leq b \qquad \mathbf{D}(\xi)=\frac{b-a}{12}$$

exponenciális eloszlás:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, \text{ ha } x>0 \qquad \mathbf{M}(\xi)=\frac{1}{\lambda}$$

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}, \text{ ha } x>0 \qquad \mathbf{D}(\xi)=\frac{1}{\lambda}$$

normális eloszlás:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mathbf{M}(\xi)=m$$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \mathbf{D}(\xi)=\sigma$$

Csebisev-egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}(|\xi-\mathbf{M}(\xi)|\geq\varepsilon)\leq\frac{\mathbf{D}^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

nagy számok törvénye:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{pq}{\varepsilon^2 n}$$