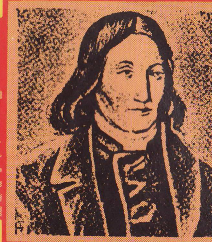
BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A csaknem 40 éve indult, igen sikeres Bolyai-könyvek példatárak sorozat újjászületését éli. Közülük elsőként az Integrálszámítást adjuk ki.
A sorozat könyveiben a szerzők a középiskolai tanulóknak, továbbá főiskolai és egyetemi hallgatóknak adnak szerencsésen választott, bőséges példát, kidolgozott feladatokat.
Kívánatos, hogy a feladatokat mindenki igyekezzék előbb önállóan megoldani, és csak utána hasonlítsa össze az eredményt és a megoldás menetét a könyvben található megoldásokkal.
A sorozat három témakört ölel fel: a matematikát, a fizikát és a kémiát.
E könyvben a szerző a határozott és határozatlan integrálokkal, az integrálási módszerekkel és gyakorlati alkalmazásukkal (pl. terület, ívhossz-számítás, forgástestek térfogatszámítása stb.) foglalkozik.
Ajánljuk a könyvet elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak és azoknak a középiskolás diákoknak, akik a reáltudományok terén kívánják folytatni tanulmányaikat.

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

BOLYAI-KÖNYVEK



BÁRCZY BARNABÁS

INTEGRÁL-SZÁMÍTÁS

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C$$

BÁRCZY BARNABÁS

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

PÉLDATÁR

6. kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1992

Lektorálta

SCHARNITZKY VIKTOR
tanszékvezető tanár

ETO: 517.3
ISBN 963 10 3752 5 (első kiadás)
ISBN 963 10 9731 5

TARTALOM

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

I. ALAPFOGALMAK

1. A határozatlan integrál fogalma és főbb tulajdonságai

Valamely adott függvény határozatlan integrálja minden olyan függvény, amelynek deriváltja az adott függvény.

Legyen egy függvény deriváltja $2x$. Határozzuk meg az eredeti függvényt! Mint előző tanulmányainkból tudjuk, az eredeti függvény, amit differenciáltunk, lehetett pl. $y=x^2$. Ha bármely olyan függvényt differenciálunk, amely ettől csak egy konstans összeadandóban különbözik, a derivált szintén $2x$. Belátható, hogy az összes olyan függvény, amelynek deriváltja $2x$, csak $y=x^2+C$ alakú lehet, ahol C tetszőleges valós szám. (A valós értéket azért kötjük ki, mert e könyvben csak valós változójú és értékű függvényekkel foglalkozunk.)

Általában: Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény *primitív* függvényének *(határozatlan integráljának)* nevezzük az (a, b) véges vagy végtelen intervallumban, ha differenciálhányadosa (deriváltja) ezen intervallum minden pontjában $f(x)$. (Az (a, b) intervallum lehet $f(x)$ teljes értelmezési tartománya is.)

Jelölés:

$$\text{ha} \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x), \quad \text{akkor} \quad \int f(x)\,dx = F(x).$$

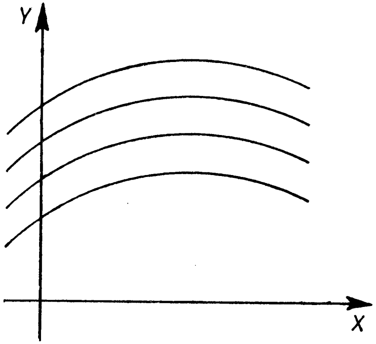
Az integráljel mögött álló függvény az *integrandus.*

Legyen az $f(x)$ függvény valamely primitív függvénye $F(x)$; akkor $F(x)+C$ is primitív függvénye $f(x)$-nek:

$$[F(x)+C]' = F'(x),$$

mert $\dfrac{dC}{dx} = 0$, konstans deriváltja nulla.

Valamely $f(x)$ függvény primitív függvényei koordinátarendszerben ábrázolva görbesereget határoznak meg (1. ábra). Az XY-sík bármely olyan pontján, amelynek abszcisszája $f(x)$ értelmezési tartományához tartozik, áthalad egy ilyen görbe.



1. ábra

E görbék egymásba párhuzamos eltolással átvihetők. Vagyis a görbesereg minden egyes görbéjének ugyanaz az értelmezési tartománya, értékkészlete pedig $F(x)$ értékkészletén kívül C értékétől is függ.

Figyelembe véve az utóbb elmondottakat, a primitív függvényt ezentúl a konstans feltüntetésével jelöljük:

$$y = \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Ha a primitív függvények közül egy bizonyosat keresünk, akkor annak egy pontját meg kell adnunk. Legyen ez a pont $P_0(x_0; y_0)$. A pont koordinátáinak ismeretében a C konstans értékét egyértelműen meg tudjuk határozni.

Legyen az $f(x)$ függvény primitív függvénye:

$$y = F(x)+C.$$

Ebbe P_0 koordinátáit helyettesítve, C az alábbi módon fejezhető ki:

$$y_0 = F(x_0)+C, \quad C = y_0 - F(x_0).$$

A feladat megoldása tehát:

$$y = F(x)+[y_0 - F(x_0)].$$

Igazolható, hogy ha egy függvény valamely $[a, b]$ intervallumban folytonos, akkor ott van primitív függvénye.

A határozatlan integrálás, vagy más szavakkal, a primitív függvények keresése, bizonyos értelemben a differenciálás megfordítása. A differenciálással szemben azonban itt általában nincs „rutin módszer”, amellyel adott függvény primitív függvényét megtalálhatjuk, sőt viszonylag egyszerű alakú függvényekre sem bizonyos, hogy létezik zárt alakú primitív függvényük (ilyen pl. $y=e^{-x^2}$). Viszont az elemi függvények differenciálhányadosának ismeretében, az integrálási szabályok és néhány gyakran célravezető fogás segítségével nagyon sok függvény primitív függvénye meghatározható.

A határozatlan integrál két fontos tulajdonságát említjük meg:

1. Ha egy (a, b) intervallumban — amely lehet véges vagy végtelen —

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C_1 \quad \text{és} \quad \int g(x)\,dx = G(x)+C_2,$$

akkor az (a, b) intervallumban a két függvény összege, ill. különbsége is integrálható, és

$$\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = F(x)\pm G(x)+C.$$

Az összegfüggvény tehát tagonként integrálható.

2. Legyen c tetszőleges szám, akkor

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

A c állandó szorzótényező az integráljel elé kiemelhető.

2. Alapintegrálok

Azokat az integrálokat, amelyeket valamilyen elemi függvény deriválásának megfordításakor kapunk, alapintegráloknak nevezzük.

a) $\int dx = x+C.$

b) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,$ ahol n bármilyen egész vagy tört lehet, de $n \neq -1$ (mert akkor $n+1=0$, és így a szabályt mechanikusan alkalmazva, értelmetlen kifejezést kapnánk).

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

Ellenőrizzük az integrál helyességét! Legyen $x>0$, akkor

$$[\ln|x|+C]' = [\ln x + C]' = \frac{1}{x};$$

ha $x<0$, akkor

$$[\ln|x|+C]' = [\ln(-x)+C]' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

d) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$

e) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ ahol $a>0$ és $a \neq 1$.

f) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

g) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar\,th} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C,$ ha $|x|<1$;

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar\,cth} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C, \quad \text{ha } |x|>1.$$

Az $\dfrac{1}{1-x^2}$ függvény tehát olyan függvény, amelynek 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb abszolút értékű számokra más a primitív függvénye. A kidolgozott példák tárgyalása során mindig megadjuk mind a két megoldást.

l) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

m) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

o) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

r) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{ar\,sh} x + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C.$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar\,ch} x + C = \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C.$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=x^5$ függvény összes primitív függvényét!

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Próba: $\left[\dfrac{x^6}{6} + C\right]' = \dfrac{6x^5}{6} = x^5.$

A továbbiakban a próba elvégzését az Olvasóra bízzuk.

2. $\displaystyle\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

3. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

4. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C.$

5. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

Az eddigiekben olyan függvények integrálját határoztuk meg, amelyek hatvány alakba írhatók voltak. Most olyan függvények integrálásával foglalkozunk majd, amelyek az előbbi típusok valamelyikére vezethetők vissza.

6. $\int \sqrt{x}\sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}\,dx = \int x^{\frac{3+2}{6}}\,dx =$

$$= \int x^{\frac{5}{6}}\,dx = \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}}+C = \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+C = \frac{6}{11}x\sqrt[6]{x^5}+C.$$

7. $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$. Az integrálandó függvényt előbb egyszerűbb alakra hozzuk és csak azután integráljuk.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{3-2}{6}} = x^{\frac{1}{6}}.$$

$$\int x^{\frac{1}{6}}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+C = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+C = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+C.$$

8. $y = \frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} = \frac{x}{x^{\frac{4}{5}}} = x^{\frac{1}{5}}.$

$$\int x^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}+C = \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x}+C.$$

9. $y = \sqrt{x\sqrt[3]{x}} = (x\cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}.$

$$\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C = \frac{3}{5}x\sqrt{x^2}+C.$$

10. $y = \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{(x\cdot x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{20}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{6}{20}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{9}{30}}}{x^{\frac{5}{30}}} = x^{\frac{4}{30}} = x^{\frac{2}{15}}.$

$$\int x^{\frac{2}{15}}\,dx = \frac{x^{\frac{17}{15}}}{\frac{17}{15}}+C = \frac{15}{17}\sqrt[15]{x^{17}}+C = \frac{15}{17}x\sqrt[15]{x^2}+C.$$

11. $y = 3x^4+\frac{4}{x^5} = 3x^4+4x^{-5}.$

Az integrandus összegfüggvény, ennek határozatlan integrálja a tagok határozatlan integráljának összege.

$$\int (3x^4+4x^{-5})\,dx = \frac{3x^5}{5}+4\frac{x^{-4}}{-4}+C = \frac{3}{5}x^5-\frac{1}{x^4}+C.$$

12. $y = \sqrt{2x}-3\sqrt{x} = (\sqrt{2}-3)\sqrt{x} = (\sqrt{2}-3)x^{\frac{1}{2}}.$

$$\int (\sqrt{2}-3)x^{\frac{1}{2}}\,dx = (\sqrt{2}-3)\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(\sqrt{2}-3)x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{2}-3)x\sqrt{x}+C.$$

Ha olyan törtfüggvényt kell integrálnunk, amelynek számlálója több tagú és nevezője egytagú, akkor a számláló minden tagját osztjuk a nevezővel, és az így kapott hatványfüggvényt integráljuk.

13. $y=\dfrac{x^3+4x^2}{\sqrt{x}}=\dfrac{x^3+4x^2}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{3}{2}}.$

$$\int\left(x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+4\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+\frac{8}{5}\sqrt{x^5}+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+C.$$

14. $y=\dfrac{x^4-4x^3+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}=\dfrac{x^{\frac{20}{5}}-4x^{\frac{15}{5}}+2x^{\frac{5}{15}}}{x^{\frac{4}{5}}}=x^{\frac{16}{5}}-4x^{\frac{11}{5}}+2x^{-\frac{7}{15}}.$

$$\int\left(x^{\frac{16}{5}}-4x^{\frac{11}{5}}+2x^{-\frac{7}{15}}\right)dx=\frac{x^{\frac{21}{5}}}{\frac{21}{5}}-4\frac{x^{\frac{16}{5}}}{\frac{16}{5}}+2\frac{x^{\frac{8}{15}}}{\frac{8}{15}}+C=$$

$$=\frac{5}{21}\sqrt[5]{x^{21}}-\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^{16}}+\frac{15}{4}\sqrt[15]{x^8}+C=\frac{5}{21}x^4\sqrt[5]{x}-\frac{5}{4}x^3\sqrt[5]{x}+\frac{15}{4}\sqrt[15]{x^8}+C.$$

A továbbiakban olyan feladatokat oldunk meg, amelyekben a keresett primitív függvény egy pontja adott, és az ezen a ponton áthaladó függvényt keressük.

15. $y=3x;\quad P_0(3;2).$

A feladat tehát a következő: Határozzuk meg az $y=3x$ függvény primitív függvényei közül azt, amelyik a koordinátarendszer $P_0(3;2)$ pontján halad át.

A függvény határoztalan integrálja:

$$\int 3x\,dx=\frac{3x^2}{2}+C.$$

A feltételt kielégítő függvény legyen:

$$f(x)=\frac{3x^2}{2}+C_0.$$

Mivel $f(3)=2$, ezért

$$2=\frac{3\cdot 3^2}{2}+C_0,$$

ebből

$$C_0=2-\frac{27}{2}=-\frac{23}{2}.$$

A feltételt is kielégítő megoldás tehát

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-11{,}5.$$

A függvény görbéje — mint erről behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk — átmegy a $P_0(3;2)$ ponton. Bármely más C értékre kapott primitív függvény görbéje nem megy át a P_0 ponton!

16. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}};\quad P_0(4;1).$

Az $y(4)=1$ feltételt kielégítő primitív függvényt $F_0(x)$-szel, a határozatlan integrált pedig $F(x)$-szel jelölve,

$$F(x)=\int\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x}+C.$$

Mivel $F_0(4)=1$, ezért $1=\sqrt{4}+C_0$, ebből

$$C_0=1-2=-1.$$

Tehát

$$F_0(x)=\sqrt{x}-1$$

a keresett primitív függvény.

17. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}};\quad P_0(-3;\ 4).$

A határozatlan integrál ismét az $F(x)=\sqrt{x}+C$ függvény lenne, de mivel sem az $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, sem az $F(x)=\sqrt{x}+C$ függvény nincs értelmezve negatív x értékekre, nem létezik a feltételt teljesítő primitív függvény.

Valamely integrálási feladatot tehát akkor tekinthetünk megoldottnak, ha azt is megadjuk, hogy a megoldásul kapott primitív függvénynek mi az értelmezési tartománya. Az értelmezési tartomány meghatározását általában az Olvasóra bízzuk.

Megemlítjük, hogy a független változót nem mindig x-szel, a függvényértéket pedig nem mindig y-nal jelöljük. Most egy fizikai feladatot oldunk meg, a fizikában szokásos jelöléseket használva.

18. Az egyenletesen változó, egyenes vonalú mozgás pillanatnyi sebességét megadó függvény $v=at$, ha a $t_0=0$ időpillanatban a testnek nincs kezdősebessége: $v=0$. Itt v a sebességet, a a gyorsulást, t az időt jelenti. Határozzuk meg a test által megtett s utat mint az idő függvényét! Legyen $s(t_0)=s_0=12$ m. Ez azt jelenti, hogy az időmérés megkezdésekor a test a vonatkozási ponttól — pl. a koordinátarendszer kezdőpontjától — 12 m távolságra van.

Az utat mint az idő függvényét, a sebesség—idő függvény határozatlan integrálja adja meg.

$$s=\int v\,dt=\int at\,dt=\frac{at^2}{2}+C.$$

A C konstans értékét a feltételből határozzuk meg:

$$12=\frac{a\cdot 0}{2}+C, \quad \text{vagyis} \quad C=12.$$

$$s=\frac{at^2}{2}+12.$$

Ez a függvény a tetszőleges a gyorsulással, de nulla kezdősebességgel, az origótól 12 m távolságból induló pont mozgását adja meg.

Ezután a többi alapintegrál felhasználásával megoldható feladatokat tárgyalunk.

19. $\displaystyle\int 5^x\,dx=\frac{5^x}{\ln 5}+C.$

20. $\displaystyle\int 2e^x\,dx=2\int e^x\,dx=2e^x+C.$

21. $\displaystyle\int (6\sin x+5\cos x)\,dx=6(-\cos x)+5\sin x+C=$

$=-6\cos x+5\sin x+C.$

22. $\displaystyle\int (5\cdot 2^x+4\sin x-3\cos x)\,dx=5\frac{2^x}{\ln 2}-4\cos x-3\sin x+C.$

23. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx=?$

A feladatot egy lépésben nem tudjuk megoldani, hiszen nem szerepel az alapintegrálok között. Ezért az integrandust ismert trigonometrikus összefüggések felhasználásával trigonometrikus vagy más alapintegrálokra igyekszünk visszavezetni.

$$\mathrm{tg}^2\,x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int dx=\mathrm{tg}\,x-x+C.$$

24. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2\,x\,dx=?$ Az integrandust átalakítjuk:

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx-\int dx=-\mathrm{ctg}\,x-x+C.$$

25. $$\int\frac{\cos^2 x-5}{1+\cos 2x}\,dx=\int\frac{\cos^2 x-5}{\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}\,dx=$$

$$=\int\frac{\cos^2 x-5}{2\cos^2 x}\,dx=\int\frac{dx}{2}-\int\frac{5}{2\cos^2 x}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\,\mathrm{tg}\,x+C.$$

26. $$\int\frac{1+\cos 2x}{\cos^2 x-1}\,dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}{-\sin^2 x}\,dx=$$

$$=-2\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx=-2\int\mathrm{ctg}^2\,x\,dx=$$

$$=-2[-\mathrm{ctg}\,x-x]+C=2\,\mathrm{ctg}\,x+2x+C.$$

27. $$\int\frac{5\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int\frac{5(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin x+\cos x}\,dx=$$

$$=5\int(\cos x-\sin x)\,dx=5\sin x+5\cos x+C.$$

A határozatlan integrál C konstansát nem szoktuk semmilyen számegyütthatóval megszorozni, hiszen C amúgy is tetszőleges konstans lehet.

28. $$\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{7}{5\sin^2 x}\right)dx=3\,\mathrm{tg}\,x+\frac{7}{5}\,\mathrm{ctg}\,x+C.$$

Most hiperbolikus függvények integrálját határozzuk meg úgy, hogy előbb — ha kell — az integrandust alapintegrállá alakítjuk át.

29. $\int (4\,\mathrm{sh}\,x+2\,\mathrm{ch}\,x)\,dx = 4\,\mathrm{ch}\,x+2\,\mathrm{sh}\,x+C.$

30. $\displaystyle\int \frac{5}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx = -5\,\mathrm{cth}\,x+C.$

31. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{ch}^2 x}\,dx = \sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x+C.$

32. $\int 5\,\mathrm{th}^2 x\,dx = ?$

Mivel $\mathrm{th}^2 x = \dfrac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}$, és $\mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x-1$, ezért

$$\int 5\,\mathrm{th}^2 x\,dx = 5\int \frac{\mathrm{ch}^2 x-1}{\mathrm{ch}^2 x}\,dx = 5\int dx-5\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} =$$

$$= 5x-5\,\mathrm{th}\,x+C.$$

33. $$\int \mathrm{cth}^2 x\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx = \int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}+\int dx = -\mathrm{cth}\,x+x+C.$$

34. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^2 x-2}{\mathrm{ch}\,2x+1}\,dx = ?$

Mivel $\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x = 1$ és $\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{sh}^2 x+\mathrm{ch}^2 x$, ezért

$$\int \frac{\mathrm{ch}^2 x-2}{(\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x)+(\mathrm{sh}^2 x+\mathrm{ch}^2 x)}\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2 x-2}{2\,\mathrm{ch}^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{2}-\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{x}{2}-\mathrm{th}\,x+C.$$

35. $$\int \frac{1}{\mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x}\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x}\,dx =$$

$$= \int (\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)\,dx = \mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x+C.$$

36. $\displaystyle\int \frac{-5}{2+2x^2}\,dx = ?$ Az integrandus — kiemeléssel — alapintegrállá alakítható.

$$-\frac{5}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\frac{5}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x+C.$$

37. $$\int \frac{1}{4\sqrt{5-5x^2}}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{5}}\arcsin x+C.$$

38. $$\int (6+6x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{6+6x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{ar\,sh}\,x+C = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\ln C_1\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

ahol a $C = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln C_1$ összefüggés felírásával a tetszőleges konstans tag helyett a logaritmus argumentumában tetszőleges szorzótényező lép fel.

39. $$\int \frac{5}{4-4x^2}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } |x|<1,\\ F_2(x), & \text{ha } |x|>1.\end{cases}$$

A függvény határozatlan integrálja két függvény.

$$F_1(x) = \frac{5}{4}\,\mathrm{ar\,th}\,x+C = \frac{5}{8}\ln\frac{1+x}{1-x}+C, \text{ ha } |x|<1;$$

$$F_2(x) = \frac{5}{4}\,\mathrm{ar\,cth}\,x+C = \frac{5}{8}\ln\frac{x+1}{x-1}+C, \text{ ha } |x|>1.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$F_1'(x) = \left[\frac{5}{8}\ln\frac{1+x}{1-x}+C\right]' = \frac{5}{8}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-x^2}.$$

Az $F_1(x)$ függvény deriváltja valóban $\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}$, de $F_1(x)$ csak $|x|<1$ értékekre van értelmezve, mivel különben a logaritmus argumentuma 0, ∞ vagy negatív.

Meghatározzuk az $F_2(x)$ függvény deriváltját. Természetes, hogy a derivált csak azokhoz az x értékekhez tartozhat, amelyekre $F_2(x)$ értelmezett.

$$F_2'(x) = \left[\frac{5}{8}\ln\frac{x+1}{x-1}+C\right]' = \frac{5}{8}\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{(x-1)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{5}{4}\cdot\frac{-1}{x^2-1} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-x^2}.$$

Tehát az $F_2(x)$ függvény deriváltja is $\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-x^2}$.

40. $\int\left(\frac{4x^2-4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2-4}}\, dx =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ar\,ch} x + C.$

41. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\, dx =$

$= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\, dx = x - \operatorname{arc\,tg} x + C.$

II. INTEGRÁLÁSI MÓDSZEREK

1. Bevezetés

Ha egy adott függvény integrálját — primitív függvényét — keressük, akkor feladatunk abból áll, hogy az integrálandó függvényt — ha az nem alapintegrál — igyekszünk azonos átalakításokkal, valamint az eddig ismertetett és a továbbiakban ismertetendő integrálási szabályok, módszerek felhasználásával úgy átalakítani, hogy egy vagy több alapintegrált kapjunk. Ezt a célt sokszor többféle módon is el lehet érni.

A legegyszerűbb esetek azok, amelyekben néhány azonos átalakítással érhetünk célt. Ilyen példákat már az előző fejezet tárgyalása során is megoldottunk.

2. $f(ax+b)$ alakú integrandus

Differenciálással ellenőrizhető, hogy

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C,$$

ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvényét jelöli.

Ugyanis — a közvetett (összetett) függvények differenciálási szabályát felhasználva —

$$\left[\frac{F(ax+b)}{a} + C\right]' = \frac{F'(ax+b)}{a}\, a = F'(ax+b) = f(ax+b).$$

Gyakorló feladatok

1. $\int (3x+2)^3\, dx = \frac{(3x+2)^4}{4\cdot 3} + C = \frac{1}{12}(3x+2)^4 + C.$

A megoldás helyességét differenciálással ellenőrizzük:

$$\left[\frac{1}{12}(3x+2)^4 + C\right]' = \frac{4(3x+2)^3\cdot 3}{12} = (3x+2)^3.$$

A továbbiakban az ellenőrzést az Olvasóra bízzuk!

2. $\int (5x-4)^5\,dx = \frac{(5x-4)^6}{6\cdot 5}+C = \frac{1}{30}(5x-4)^6+C.$

3. $\int \sqrt[4]{7x-16}\,dx = \int (7x-16)^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{(7x-16)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}\cdot 7}+C =$

$= \frac{4}{35}\sqrt[4]{(7x-16)^5}+C = \frac{4}{35}(7x-16)\sqrt[4]{7x-16}+C.$

4. $\int \frac{1}{(-3x+4)^4}\,dx = \int (-3x+4)^{-4}\,dx = \frac{(-3x+4)^{-3}}{-3(-3)}+C =$

$= \frac{1}{9}(-3x+4)^{-3}+C = \frac{1}{9(-3x+4)^3}+C.$

5. $\int e^{5x+4}\,dx = \frac{e^{5x+4}}{5}+C.$

6. $\int 3^{4x-7}\,dx = \frac{3^{4x-7}}{4\ln 3}+C.$

7. $\int 5^{2-3x}\,dx = \frac{5^{2-3x}}{-3\ln 5}+C = -\frac{5^{2-3x}}{3\ln 5}+C.$

8. $\int \sin(6x+4)\,dx = \frac{-\cos(6x+4)}{6}+C.$

9. $\int \cos(-4-5x)\,dx = \frac{\sin(-4-5x)}{-5}+C = -\frac{\sin(-4-5x)}{5}+C.$

10. $\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)}\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}(3x+2)}{3}+C = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+2)+C.$

11. $\int \frac{5}{\cos^2(-6x+4)}\,dx = \frac{5\operatorname{tg}(-6x+4)}{-6}+C = -\frac{5}{6}\operatorname{tg}(-6x+4)+C.$

12. $\int \operatorname{sh}(2-7x)\,dx = \frac{\operatorname{ch}(2-7x)}{-7}+C = -\frac{1}{7}\operatorname{ch}(2-7x)+C.$

3. $f^n(x)f'(x)$ alakú integrandus

Differenciáljuk az alábbi függvényt:

$$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C \quad (n\neq -1)!$$

$$\left[\frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C\right]' = \frac{(n+1)f^n(x)f'(x)}{n+1} = f^n(x)f'(x).$$

Ebből következik, hogy

$$\int f^n(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C \quad (n\neq -1).$$

Ennek speciális esete $n=1$, vagyis

$$\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{f^2(x)}{2}+C.$$

Először az utóbbira, azután az előbbire oldunk meg feladatokat. Sokszor gyakorlott szem kell annak megállapításához, hogy az integrandus ilyen alakú, ill. hogy egyszerű átalakításokkal ilyen alakra hozható.

Gyakorló feladatok

1. $\int x^2(2x^3+4)\,dx = ?$

Mivel $(2x^3+4)' = 6x^2$, tehát az alábbi átalakítást végezzük:

$$\int x^2(2x^3+4)\,dx = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+4)\,dx = \frac{1}{6}\frac{(2x^3+4)^2}{2}+C.$$

$$= \frac{1}{12}(2x^3+4)^2+C.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\left[\frac{1}{12}(2x^3+4)^2+C\right]' = \frac{2(2x^3+4)\cdot 6x^2}{12} = x^2(2x^3+4).$$

2. $\int \sin x\cos x\,dx = \int \sin x\cdot(\sin x)'\,dx = \frac{\sin^2 x}{2}+C.$

3. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int (\ln x)\frac{1}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2}+C.$

4. $\displaystyle\int (2x^3+4)^5 x^2\,dx = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+4)^5\,dx =$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{(2x^3+4)^6}{6}+C = \frac{1}{36}(2x^3+4)^6+C.$$

Ez már az általános esetre volt példa! Ellenőrizzük a megoldás helyességét:

$$\left[\frac{1}{36}(2x^3+4)^6+C\right]' = \frac{6(2x^3+4)^5\cdot 6x^2}{36} = x^2(2x^3+4)^5.$$

A többi feladatmegoldás helyességének ellenőrzését az Olvasóra bízzuk.

5. $\displaystyle\int x^2\sqrt{6x^3+4}\,dx = \frac{1}{18}\int 18x^2(6x^3+4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{18}\,\frac{(6x^3+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$

$$= \frac{1}{27}\sqrt{(6x^3+4)^3}+C = \frac{1}{27}(6x^3+4)\sqrt{6x^3+4}+C.$$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+6)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+6)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{x^2+6}+C.$$

7. $\displaystyle\int e^x(1-e^x)^3\,dx = -\int -e^x(1-e^x)^3\,dx = \frac{-(1-e^x)^4}{4}+C.$

8. $\displaystyle\int \sin^4 x \sin 2x\,dx = ?$

Itt először trigonometrikus összefüggés felhasználásával igyekszünk a kétszeres szöget kiküszöbölni.

$$\int \sin^4 x \sin 2x\,dx = \int \sin^4 x\, 2\sin x\cos x\,dx = 2\int \sin^5 x \cos x\,dx =$$

$$= 2\,\frac{\sin^6 x}{6}+C = \frac{1}{3}\sin^6 x+C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx = \int \sin x(\cos x)^{-\frac{2}{3}}\,dx =$

$$= -\int(-\sin x)(\cos x)^{-\frac{2}{3}}\,dx = -\left[\frac{(\cos x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C\right] = -3\sqrt[3]{\cos x}+C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\,dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6}+C.$

11. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}\,dx = \int (\operatorname{arc\,tg} x)^2\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^3}{3}+C.$

4. $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandus

Differenciáljuk a következő függvényt:

$$\ln|f(x)|+C.$$

$$[\ln|f(x)|+C]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ez egyszerűen belátható külön $f(x)>0$ és külön $f(x)<0$ esetére.

Ebből következik, hogy

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C.$$

Gyakorló feladatok

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+7}\,dx = \ln(x^2+7)+C.$

Ha a nevező bármely x-re pozitív, akkor felesleges kiírnunk az abszolút érték jelét!

2. $\int \frac{5x^2}{x^3+4}\,dx = ?$ A nevező deriváltja $3x^2$, ezért kiemeléssel, ill bővitéssel átalakítjuk az integrandust:

$$\int \frac{5x^2}{x^3+4}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+4}\,dx = \frac{5}{3}\ln|x^3+4|+C.$$

3. $$\int \frac{4\sin x}{5\cos x+4}\,dx = -\frac{4}{5}\int \frac{-5\sin x}{5\cos x+4}\,dx = -\frac{4}{5}\ln|5\cos x+4|+C.$$

4. $\int \frac{5\sin 2x}{\sin^2 x+12\pi}\,dx = ?$ A nevező deriváltja: $(\sin^2 x+12\pi)' = 2\sin x\cos x$. A számlálót átalakítva: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

$$\int \frac{5\sin 2x}{\sin^2 x+12\pi}\,dx = 5\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x+12\pi}\,dx = 5\ln(\sin^2 x+12\pi)+C.$$

5. $\int \frac{-\sin 2x}{5+\cos^2 x}\,dx = ?$ A nevező deriváltja: $(5+\cos^2 x)' = 2\cos x(-\sin x) = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$.

$$\int \frac{-\sin 2x}{5+\cos^2 x}\,dx = \ln(5+\cos^2 x)+C.$$

6. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x\,\mathrm{tg}\,x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}\,x}\,dx = \ln|\mathrm{tg}\,x|+C.$$

7. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x\,\mathrm{ctg}\,x} = -\int \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\mathrm{ctg}\,x}\,dx = -\ln|\mathrm{ctg}\,x|+C.$$

8. $$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|+C.$$

9. $$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x|+C.$$

10. $$\int \frac{1}{(x^2-1)\,\mathrm{ar\,th}\,x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x^2-1}}{\mathrm{ar\,th}\,x}\,dx = \ln|\mathrm{ar\,th}\,x|+C.$$

11. $$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \ln|e^{2x}+3|+C.$$

5. Integrálás helyettesítéssel

Differenciáljuk az $y = F[u(x)]$ közvetett függvényt x szerint!

$$y' = \frac{dF[u(x)]}{du(x)}\cdot\frac{du(x)}{dx},$$

ill. rövidebben felírva

$$y' = \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\,u', \text{ ahol } F'(x) = f(x).$$

Ebből következik, hogy

$$\int f[u(x)]u'(x)\,dx = \int \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du = F[u(x)]+C.$$

A fentiek alapján könnyen belátható a következő szabály: Ha egy olyan szorzatot kell integrálnunk, amelynek egyik tényezője egy közvetett függvény, másik tényezője pedig e közvetett függvény belső függvényének deriváltja, akkor a belső függvényt új változóval helyettesítjük, majd úgy integrálhatunk, mintha a belső függvényünk lett volna a független változó.

Sokszor nem látható közvetlenül, hogy az integrandus ilyen alakú, ill. átalakítással ilyen alakra hozható — és még ha ilyen alakra hozzuk, sem biztos, hogy integrálható függvényt kapunk —, mégis érdemes behelyettesítéssel próbálkoznunk, mivel az — főleg bizonyos gyakorlat szerzése után — számos esetben eredményre vezet.

Más esetekben bizonyos típusú helyettesítés *mindig* célra vezet. Ezeket később tárgyaljuk.

A helyettesítést az alábbi módon végezzük: Ha $u(x) = t$, akkor $\frac{dt}{dx} = u'(x)$, és így $u'(x)dx = dt$, vagyis

$$\int f[u(x)]u'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t)+C,$$

ahol most már visszahelyettesíthetjük $t = u(x)$-et.

Gyakorló feladatok

1. $\int (3x+2)^3\,dx = ?$

Ezt a feladatot már a 2. pontban is megoldottuk, de most alkalmazzuk a helyettesítés módszerét.

Mivel hatvány integrálása igen egyszerű, ezért legyen $3x+2=t$, vagyis $x=\frac{t-2}{3}$, tehát $dx=\frac{dt}{3}$.
Vagyis

$$\int (3x+2)^3\,dx = \frac{1}{3}\int t^3\,dt = \frac{1}{3\cdot 4}t^4+C = \frac{1}{12}(3x+2)^4+C.$$

2. $\int \sqrt[4]{7x-16}\,dx = ?$ A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg.

Legyen $7x-16=t$. vagyis $x=\frac{t+16}{7}$, ebből $dx=\frac{dt}{7}$,

$$\int \sqrt[4]{7x-16}\,dx = \frac{1}{7}\int \sqrt[4]{t}\,dt = \frac{1}{7}\int t^{\frac{1}{4}}\,dt = \frac{4}{7\cdot 5}t^{\frac{5}{4}}+C =$$

$$= \frac{4}{35}(7x-16)^{\frac{5}{4}}+C = \frac{4}{35}\sqrt[4]{(7x-16)^5}+C =$$

$$= \frac{4}{35}(7x-16)\sqrt[4]{7x-16}+C.$$

3. $\int \frac{1}{(-3x+4)^4}\,dx = ?$

Helyettesítés az előbbi módon: $-3x+4=t$; vagyis $x=\frac{t-4}{-3}=\frac{4-t}{3}$ és $dx=-\frac{dt}{3}$.

$$\int \frac{1}{(-3x+4)^4}\,dx = \int (-3x+4)^{-4}\,dx = -\int t^{-4}\frac{dt}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int t^{-4}dt = -\frac{1}{3}\frac{t^{-3}}{-3}+C = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{t^3}+C = \frac{1}{9}\frac{1}{(-3x+4)^3}+C.$$

4. $\int e^{5x+4}\,dx = ?$

Legyen $5x+4=t$, ekkor $x=\frac{t-4}{5}$ és $dx=\frac{dt}{5}$.

$$\int e^{5x+4}\,dx = \frac{1}{5}\int e^t\,dt = \frac{1}{5}e^t+C = \frac{1}{5}e^{5x+4}+C.$$

5. $\int 3^{4x-7}\,dx = ?$

Legyen $4x-7=t$, ebből $x=\frac{t+7}{4}$ és $dx=\frac{dt}{4}$.

$$\int 3^{4x-7}\,dx = \frac{1}{4}\int 3^t\,dt = \frac{1}{4}\frac{3^t}{\ln 3}+C = \frac{3^{4x-7}}{4\ln 3}+C.$$

6. $\int 5^{2-3x}\,dx = ?$

Legyen $2-3x=t$, ebből $x=\frac{t-2}{-3}=\frac{2-t}{3}$, és $dx=-\frac{dt}{3}$.

$$\int 5^{2-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int 5^t\,dt = -\frac{1}{3}\frac{5^t}{\ln 5}+C = \frac{-5^{2-3x}}{3\ln 5}+C.$$

7. $\int \sin(6x+4)\,dx = ?$

Legyen $6x+4=t$, ekkor $x=\frac{t-4}{6}$ és $dx=\frac{dt}{6}$.

$$\int \sin(6x+4)\,dx = \frac{1}{6}\int \sin t\,dt = -\frac{\cos t}{6}+C = -\frac{\cos(6x+4)}{6}+C.$$

8. $\int \cos(-4-5x)\,dx = ?$

Legyen $-4-5x=t$, ekkor $x=\frac{t+4}{-5}=-\frac{t+4}{5}$ és $dx=-\frac{dt}{5}$.

$$\int \cos(-4-5x)\,dx = -\frac{1}{5}\int \cos t\,dt = -\frac{\sin t}{5}+C =$$

$$= -\frac{1}{5}\sin(-4-5x)+C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)}\,dx = ?$

Legyen $3x+2 = t$, ebből $x = \dfrac{t-2}{3}$ és $dx = \dfrac{dt}{3}$.

$$\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg} t + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(3x+2) + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{5}{\cos^2(-6x+4)}\,dx = ?$

Legyen $-6x+4 = t$, ebből $x = \dfrac{4-t}{6}$ és $dx = \dfrac{-dt}{6}$.

$$\int \frac{5}{\cos^2(-6x+4)}\,dx = -\frac{5}{6}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{5}{6}\operatorname{tg} t + C =$$

$$= -\frac{5}{6}\operatorname{tg}(-6x+4) + C.$$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sh}(2-7x)\,dx = ?$

Legyen $2-7x = t$, ebből $x = \dfrac{2-t}{7}$ és $dx = -\dfrac{dt}{7}$.

$$\int \operatorname{sh}(2-7x)\,dx = -\frac{1}{7}\int \operatorname{sh}\,dt = -\frac{1}{7}\operatorname{ch} t + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{ch}(2-7x)}{7} + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{25+x^2} = ?$ Próbáljuk meg az integrandust $\dfrac{1}{1+t^2}$ alakra hozni! Ehhez előbb kiemeljük az integráljel elé a nevezőből a 25-öt:

$$\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{5}\right)^2}.$$

Most az $\dfrac{x}{5} = t$ helyettesítés vezet célhoz.

$$x = 5t \quad \text{és} \quad dx = 5\,dt.$$

$$\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{25}\int \frac{5\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{5} + C.$$

13. Az előbbi feladatot általánosan is megoldjuk:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = ?$$

a^2-et kiemeljük a nevezőből:

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}.$$

Legyen $\dfrac{x}{a} = t$, ebből $x = at$ és $dx = a\,dt$.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{36+16x^2} = ?$ Az integrandus nevezőjéből 36-ot kiemelünk, így érjük el azt, hogy a tört $\dfrac{1}{1+t^2}$ alakra hozható.

$$\int \frac{dx}{36+16x^2} = \frac{1}{36}\int \frac{dx}{1+\left(\dfrac{4x}{6}\right)^2} = \frac{1}{36}\int \frac{dx}{1+\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2}.$$

Legyen $\dfrac{2x}{3} = t$, ebből $x = \dfrac{3}{2}t$ és $dx = \dfrac{3}{2}dt$.

$$\int \frac{dx}{36+16x^2} = \frac{1}{36}\int \frac{\frac{3}{2}\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{24}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{24}\operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= \frac{1}{24}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{3} + C.$$

15. Az előző típusú feladatot általánosan is megoldjuk:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = ?$$

Az integrandust a^2 kiemelésével alakítjuk át:

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

Legyen $\frac{bx}{a} = t$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt$.

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{a}{b}dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{bx}{a} + C.$$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-16x^2}} = ?$ Tudjuk, hogy $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ alapintegrál. Úgy próbáljuk átalakítani az integrandust, hogy az új változóban ilyen alakú legyen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36-16x^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}.$$

Helyettesítsünk:

$$t = \frac{2x}{3}, \text{ ebből } x = \frac{3}{2}t \text{ és } dx = \frac{3}{2}dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36-16x^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{3}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\arcsin t + C = \frac{1}{4}\arcsin\frac{2x}{3} + C.$$

17. A fenti típusú általános feladat:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}.$$

Elvégezve az alábbi helyettesítést:

$$t = \frac{bx}{a}, \text{ ebből } x = \frac{a}{b}t, \text{ és } dx = \frac{a}{b}dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{a}{b}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{b}\arcsin t + C = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a} + C.$$

18. $$\int \frac{dx}{\sqrt{16+25x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{5x}{4}\right)^2}}.$$

Legyen $t = \frac{5x}{4}$, ebből $x = \frac{4}{5}t$ és $dx = \frac{4}{5}dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16+25x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{4}{5}dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{ar\,sh} t + C = \frac{1}{5}\operatorname{ar\,sh}\frac{5x}{4} + C = \frac{1}{5}\ln\left[\frac{5x}{4}+\sqrt{1+\left(\frac{5x}{4}\right)^2}\right] + C.$$

19. A fenti típusú feladat általános alakja:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}}.$$

Legyen $t = \frac{bx}{a}$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{a}{b}dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{b}\operatorname{ar\,sh} t + C = \frac{1}{b}\operatorname{ar\,sh}\frac{bx}{a} + C = \frac{1}{b}\ln\left[\frac{bx}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\right]+C.$$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-36}} = ?$ Reméljük, hogy az integrandus kiemeléssel és helyettesítéssel $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$ alapintegrállá alakítható. Ennek érdekében az alábbi átalakításokat és helyettesítést végezzük el:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-36}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5x}{6}\right)^2-1}}.$$

Legyen $t = \frac{5x}{6}$, ebből $x = \frac{6}{5}t$, és $dx = \frac{6}{5}dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-36}} = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{6}{5}dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{ar\,ch} t + C = \frac{1}{5}\operatorname{ar\,ch}\frac{5x}{6} + C = \pm\ln\left(\frac{5x}{6}+\sqrt{\frac{25}{36}x^2-1}\right)+C.$$

21. A fenti típusú feladat általános alakja:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2-1}}.$$

Legyen $t = \frac{bx}{a}$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{a}{b}dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{b}\operatorname{ar\,ch} t + C = \frac{1}{b}\operatorname{ar\,ch}\frac{bx}{a} + C = \pm\ln\left[\frac{bx}{a}+\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2-1}\right]+C.$$

22. $\int \frac{dx}{49-25x^2}$? Az integrandust igyekszünk $\frac{1}{1-t^2}$ alakra hozni:

$$\int \frac{dx}{49-25x^2} = \frac{1}{49}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{5x}{7}\right)^2}.$$

Legyen $t = \frac{5x}{7}$, ebből $x = \frac{7}{5}t$ és $dx = \frac{7}{5}dt.$

$$\int \frac{dx}{49-25x^2} = \frac{1}{49}\int \frac{\frac{7}{5}dt}{1-t^2} = \frac{1}{35}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \begin{cases} F_1(t) = \frac{1}{35}\operatorname{ar\,th} t + C_1 = \frac{1}{70}\ln\frac{1+t}{1-t}+C_1, \text{ ha } |t|<1. \\ F_2(t) = \frac{1}{35}\operatorname{ar\,cth} t + C_2 = \frac{1}{70}\ln\frac{t+1}{t-1}+C_2 \text{ ha } |t|>1. \end{cases}$$

Tehát

$$\int \frac{dx}{49-25x^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{70}\operatorname{ar\,th}\frac{5x}{7}+C_1 = \frac{1}{70}\ln\frac{1+\frac{5x}{7}}{1-\frac{5x}{7}}+C_1, \text{ ha } |x|<\frac{7}{5}; \\ \frac{1}{70}\operatorname{ar\,cth}\frac{5x}{7}+C_2 = \frac{1}{70}\ln\frac{\frac{5x}{7}+1}{\frac{5x}{7}-1}+C_2, \text{ ha } |x|>\frac{7}{5}. \end{cases}$$

23. A fenti feladattípus általános alakja:

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

Legyen $t = \frac{bx}{a}$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt.$

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{a}{b}\,dt}{1-t^2} = \frac{1}{ab}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \begin{cases} F_1(t) = \dfrac{1}{ab}\operatorname{ar\,th} t + C_1 = \dfrac{1}{2ab}\ln\dfrac{1+t}{1-t}+C_1, & \text{ha } |t|<1;\\[2ex] F_2(t) = \dfrac{1}{ab}\operatorname{ar\,cth} t + C_2 = \dfrac{1}{2ab}\ln\dfrac{t+1}{t-1}+C_2, & \text{ha } |t|>1. \end{cases}$$

Tehát

$$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{ab}\operatorname{ar\,th}\dfrac{bx}{a}+C_1 = \dfrac{1}{2ab}\ln\dfrac{1+\dfrac{bx}{a}}{1-\dfrac{bx}{a}}+C_1, & \text{ha } |x|<\dfrac{a}{b};\\[4ex] \dfrac{1}{ab}\operatorname{ar\,cth}\dfrac{bx}{a}+C_2 = \dfrac{1}{2ab}\ln\dfrac{\dfrac{bx}{a}+1}{\dfrac{bx}{a}-1}+C_2, & \text{ha } |x|>\dfrac{a}{b}. \end{cases}$$

24. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = ?$ Mivel e^t integrálása igen egyszerű, próbálkozzunk a $t=\sin x$ helyettesítéssel;

Itt az inverz függvény felírására és differenciálására nincs is szükség, mert ebből $\frac{dt}{dx}=\cos x$ és így $dt=\cos x\,dx$ az integrandusba közvetlenül behelyettesíthető:

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \int e^t\,dt = e^t+C = e^{\sin x}+C.$$

25. $\int 5^{\cos x}\sin x\,dx = ?$ Most helyettesítéssel a^t alakú kifejezést igyekszünk kapni az integrandusban.

Legyen $t=\cos x$, ebből $dt=-\sin x\,dx$ és

$$\int 5^{\cos x}\sin x\,dx = -\int 5^t\,dt = -\frac{5^t}{\ln 5}+C = -\frac{5^{\cos x}}{\ln 5}+C.$$

26. $\int (3x^2+2)\sin(x^3+2x-4)\,dx = ?$

Legyen $t = x^3+2x-4$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 3x^2+2$ és $dt = (3x^2+2)\,dx$.

$$\int (3x^2+2)\sin(x^3+2x-4)\,dx = \int \sin t\,dt = -\cos t+C =$$

$$= -\cos(x^3+2x-4)+C.$$

27. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = ?$

I. Megoldás:

Legyen $x=\ln t$, és így $dx=\frac{dt}{t}$.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{e^{2\ln t}}{1+e^{\ln t}}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t}{1+t}\,dt.$$

Az átalakítás során fehasználtuk az $e^{\ln t}=t$, ill. $e^{2\ln t}=t^2$ azonosságokat.

$$\int \frac{t}{1+t}\,dt = \int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt = \int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = t-\ln|1+t|+C.$$

A primitív függvény most még t függvénye, ezt x függvényévé kell alakítanunk.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = e^x-\ln|1+e^x|+C,$$

ugyanis $x=\ln t$-ből $t=e^x$.

II. Megoldás:

Ezt a feladatot megoldjuk még úgy is, hogy függvényt helyettesítünk új független változóval:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = ?$$

Legyen $t=e^x$, ekkor $\frac{dt}{dx}=e^x=t$ és így $dx=\frac{at}{t}$.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{t^2}{1+t}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{1+t}\,dt.$$

Látható, hogy most is az előbbi integrandust kaptuk, amelynek primitív függvénye $t-\ln|1+t|+C$, amint ezt az előbbiekben kiszámítottuk.

28. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$

Ha most az x független változó helyett a t-nek színuszát vagy koszinuszát vezetjük be, akkor a gyökkifejezés kiküszöbölhető.

I. Megoldás:

Legyen $x = \sin t$; $dx = \cos t\,dt$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos t \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt.$$

Mivel $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$, ezért

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

A primitív függvény a t változó függvénye. Ezt kell átalakítanunk az x változó függvényévé.

Mivel $x = \sin t$, ezért $t = \arcsin x$, ill. $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}$, így

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

II. Megoldás:

Oldjuk meg a feladatot $x = \cos t$ helyettesítéssel is:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$

Legyen $x = \cos t$, ebből $dx = -\sin t\,dt$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt = \int -\sin t \sin t\,dt =$$

$$= -\int \sin^2 t\,dt.$$

Mivel $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$, ezért

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \int \frac{\cos 2t - 1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{\sin 2t}{4} - \frac{1}{2}t + C.$$

Az eredményt ismét x változójúvá alakítjuk: $x = \cos t$, és ebből $t = \arccos x$;

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sqrt{1-\cos^2 t}\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{\arccos x}{2} + C.$$

A két módszerrel kapott primitív függvény alakja különbözik egymástól, mivel azonban $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, ezért

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin x}{2} + C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin x}{2} + C - \frac{\pi}{4}.$$

A két primitív függvény tehát csak a konstansban különbözik egymástól, vagyis lényegében megegyeznek.

29. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = ?$ Az integrandusban levő gyökkifejezés sokszor kiküszöbölhető, ha felhasználjuk a hiberbolikus függvényekre tanult néhány azonosságot, amelyek közül néhányat most felírunk:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1;$$

$$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x;$$

$$\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\,2x.$$

Ezekből kapható még:

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1+\mathrm{ch}\,2x}{2};$$

$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2}.$$

Legyen most $x=\operatorname{sh} t$, ugyanis ekkor a négyzetek különbségére vonatkozó azonosságot használhatjuk fel:

$$dx=\operatorname{ch} t\,dt;$$

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\,dt=\int\operatorname{ch}^2 t\,dt=$$

$$=\int\frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\operatorname{sh} 2t}{4}+C.$$

Visszaalakítjuk az eredményt x függvényévé: $x=\operatorname{sh} t$, ebből $t=\operatorname{ar\,sh} x$.

$$\operatorname{sh} 2t=2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t=2\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}=2x\sqrt{1+x^2}.$$

Így a feladat megoldása:

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{\operatorname{ar\,sh} x}{2}+\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2}+C.$$

30. $\int\sqrt{x^2-1}\,dx=?$ Most az $x=\operatorname{ch} t$ helyettesítés vezet célhoz, ugyanis $dx=\operatorname{sh} t\,dt$, és így

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}\operatorname{sh} t\,dt=\int\operatorname{sh}^2 t\,dt=$$

$$=\int\frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}\,dt=\frac{\operatorname{sh} 2t}{4}-\frac{t}{2}+C=\frac{2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t}{2}-\frac{t}{2}+C.$$

Az eredményt x függvényévé alakítjuk:

$$\operatorname{sh} 2t=2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t=2x\sqrt{x^2-1};\quad t=\operatorname{ar\,ch} x.$$

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}-\frac{\operatorname{ar\,ch} x}{2}+C.$$

31. $\int\sqrt{16-x^2}\,dx=?$ Ez az integrandus a **28.** feladatéra vezethető vissza.

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx=4\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\,dx.$$

Itt már függvényt helyettesítünk függvénnyel:

$$\frac{x}{4}=\sin t;\quad x=4\sin t;\quad dx=4\cos t\,dt.$$

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx=4\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,4\cos t\,dt=16\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=16\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=8\int dt+8\int\cos 2t\,dt=$$

$$=8t+8\frac{\sin 2t}{2}+C=8t+4\sin 2t+C.$$

$$t=\arcsin\frac{x}{4};\quad \sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{x}{4}\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}.$$

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx=8\arcsin\frac{x}{4}+2x\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}+C.$$

32. A típus általános alakja és megoldása:

$$\int\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx=a\int\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\,dx.$$

$$\frac{bx}{a}=\sin u;\quad x=\frac{a}{b}\sin u;\quad dx=\frac{a}{b}\cos u\,du.$$

$$\int\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx=a\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\frac{a}{b}\cos u\,du=\frac{a^2}{b}\int\cos^2 u\,du=$$

$$=\frac{a^2}{b}\int\frac{1+\cos 2u}{2}\,du=\frac{a^2}{b}\left[\frac{u}{2}+\frac{\sin 2u}{4}\right]+C.$$

$$u=\arcsin\frac{bx}{a};\quad \sin 2u=2\sin u\cos u=2\frac{bx}{a}\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

$$\int\sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx=\frac{a^2}{b}\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{bx}{a}+\frac{1}{2}\frac{bx}{a}\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\right]+C=$$

$$=\frac{a^2}{2b}\arcsin\frac{bx}{a}+\frac{ax}{2}\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}+C.$$

33. $\int\sqrt{25+x^2}\,dx=?$

$$\int\sqrt{25+x^2}\,dx=5\int\sqrt{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\,dx.$$

Legyen $\frac{x}{5}=\operatorname{sh} u$; vagyis $x=5\operatorname{sh} u$; így $dx=5\operatorname{ch} u\,du$.

$$\int\sqrt{25+x^2}\,dx = 5\int\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}\,\mathrm{ch}\,u\,du = 5\int \mathrm{ch}^2 u\,du =$$

$$= 5\int\frac{1+\mathrm{ch}\,2u}{2}\,du = 5\left[\frac{u}{2}+\frac{\mathrm{sh}\,2u}{4}\right]+C = \frac{5}{2}u+\frac{5}{4}\mathrm{sh}\,2u+C.$$

$$u=\mathrm{ar\,sh}\,\frac{x}{5};\quad \mathrm{sh}\,2u=2\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u=2\cdot\frac{x}{5}\sqrt{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}.$$

$$\int\sqrt{25+x^2}\,dx = \frac{5}{2}\mathrm{ar\,sh}\,\frac{x}{5}+\frac{1}{2}x\sqrt{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}+C.$$

34. A típus általános alakja és megoldása:

$$\int\sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx = a\int\sqrt{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\,dx.$$

Legyen $\frac{bx}{a}=\mathrm{sh}\,u$; vagyis $x=\frac{a}{b}\,\mathrm{sh}\,u$ és $dx=\frac{a}{b}\,\mathrm{ch}\,u\,du.$

$$\int\sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx = a\int\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u}\cdot\frac{a}{b}\,\mathrm{ch}\,u\,du = \frac{a^2}{b}\int\mathrm{ch}^2 u\,du =$$

$$= \frac{a^2}{b}\int\frac{1+\mathrm{ch}\,2u}{2}\,du = \frac{a^2}{b}\left[\frac{u}{2}+\frac{\mathrm{sh}\,2u}{4}\right]+C.$$

$$x=\mathrm{ar\,sh}\,\frac{bx}{a};\quad \mathrm{sh}\,2u=2\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u=2\,\frac{bx}{a}\sqrt{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

$$\int\sqrt{a^2+b^2x^2}\,dx = \frac{a^2}{b}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{ar\,sh}\,\frac{bx}{a}+\frac{bx}{2a}\sqrt{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}\right]+C =$$

$$= \frac{a^2}{2b}\,\mathrm{ar\,sh}\,\frac{bx}{a}+\frac{ax}{2}\sqrt{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}+C =$$

$$= \frac{a^2}{2b}\,\mathrm{ar\,sh}\,\frac{bx}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+b^2x^2}+C.$$

35. $\displaystyle\int\sqrt{x^2-16}\,dx = 4\int\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2-1}\,dx.$

Legyen $\frac{x}{4}=\mathrm{ch}\,t$; vagyis $x=4\,\mathrm{ch}\,t$; így $dx=4\,\mathrm{sh}\,t\,dt.$

$$\int\sqrt{x^2-16}\,dx = 4\int\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-1}\cdot 4\,\mathrm{sh}\,t\,dt = 16\int\mathrm{sh}^2 t\,dt =$$

$$= 16\int\frac{\mathrm{ch}\,2t-1}{2}\,dt = 8\int(\mathrm{ch}\,2t-1)\,dt = 8\,\frac{\mathrm{sh}\,2t}{2}-8t+C =$$

$$= 4\,\mathrm{sh}\,2t-8t+C.$$

$$t = \mathrm{ar\,ch}\,\frac{x}{4};\quad \mathrm{sh}\,2t = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t = 2\,\frac{x}{4}\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2-1}.$$

$$\int\sqrt{x^2-16}\,dx = 2x\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2-1}-8\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{x}{4}+C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{x}{4}+C.$$

36. A típus általános alakja és megoldása:

$$\int\sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx = a\int\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2-1}\,dx$$

$$\frac{bx}{a} = \mathrm{ch}\,t;\quad x = \frac{a}{b}\,\mathrm{ch}\,t;\quad dx = \frac{a}{b}\,\mathrm{sh}\,t\,dt.$$

$$\int\sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx = a\int\sqrt{\mathrm{ch}^2 u-1}\,\frac{a}{b}\,\mathrm{sh}\,t\,dt = \frac{a^2}{b}\int\mathrm{sh}^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{b}\int\frac{\mathrm{ch}\,2t-1}{2}\,dt = \frac{a^2}{b}\left[\frac{\mathrm{sh}\,2t}{4}-\frac{t}{2}\right]+C = \frac{a^2}{4b}\,\mathrm{sh}\,2t-\frac{a^2}{2b}\,t+C.$$

Mivel $t = \mathrm{ar\,ch}\,\frac{bx}{a}$ és $\mathrm{sh}\,2t = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t = 2\,\frac{bx}{a}\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2-1}$, ezért

$$\int\sqrt{b^2x^2-a^2}\,dx = \frac{a^2}{4b}\cdot\frac{2bx}{a}\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2-1}-\frac{a^2}{2b}\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{bx}{a}+C =$$

$$= \frac{ax}{2}\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2-1}-\frac{a^2}{2b}\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{bx}{a}+C =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{b^2x^2-a^2}-\frac{a^2}{2b}\,\mathrm{ar\,ch}\,\frac{bx}{a}+C.$$

6. Parciális integrálás

A parciális integrálás szabálya a szorzatfüggvény deriválási szabályából kapható az alábbi módon:

Legyen $u=u(x)$ és $v=v(x)$, akkor $(uv)' = u'v+uv'$.

Mivel $u'v = (uv)'-uv'$, ezért

$$\int u'v\,dx = \int (uv)'\,dx - \int uv'\,dx,$$

vagyis

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx.$$

A módszert általában akkor érdemes alkalmazni, ha az integrandus olyan szorzatként írható fel, melyben az egyik — u'-ként felfogott — tényező integrálja ismert, a másik — v-vel jelölt — tényező v' deriváltját könnyen meghatározhatjuk, és $\int uv'dx$ könnyebben meghatározható, mint $\int u'v\,dx$. Általános módszert nem adhatunk arra, hogy a szorzat melyik tényezőjét válasszuk u'-nek, ill. v-nek, de az egyes feladatok, ill. feladattípusok megoldásakor választásunkat megindokoljuk.

a) *Hatványfüggvénnyel szorzott exponenciális, trigonometrikus és hiperbolikus függvények parciális integrálása.* A deriválás a hatványfüggvény fokszámát csökkenti, az integrálás a trigonometrikus (csak szinusz és koszinusz), exponenicálís és hiperbolikus (csak a szinusz és koszinusz hiperbolikus) függvényekét nem változtatja. Pl.: $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ stb. Ebből következik, hogy az ilyen típusú integrandusok úgy alakíthatók át egyszerűbb alakra, hogy a hatványfüggvényt válaszjuk v-nek és az exponenciális, trigonometrikus, ill. hiperbolikus függvényt u'-nek.

Gyakorló feladatok

1. $\int xe^{kx}\,dx = ?$ (Itt és a továbbiakban k valós számot jelent.)

Legyen $v=x$ és $u'=e^{kx}$; ekkor $v'=1$ és $u=\frac{1}{k}e^{kx}$.

Így

$$\int xe^{kx}\,dx = \frac{xe^{kx}}{k} - \int \frac{e^{kx}\,dx}{k} = \frac{xe^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2} + C.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\left(\frac{xe^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2} + C\right)' = xe^{kx} + \frac{e^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k} = xe^{kx}.$$

A deriválás alkalmával vigyázzunk arra, hogy az első tag szorzatfüggvény! A többi feladat megoldásának ellenőrzését az Olvasóra bízzuk.

2. $\int 2x \sin 6x\,dx = ?$

Legyen $v=2x$; $u'=\sin 6x$; tehát $v'=2$; $u=\frac{-\cos 6x}{6}$. Így

$$\int 2x\sin 6x\,dx = \frac{-2x\cos 6x}{6} - \int \frac{-2\cos 6x}{6}\,dx =$$

$$= \frac{-x\cos 6x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 6x\,dx = \frac{-x\cos 6x}{3} + \frac{\sin 6x}{18} + C.$$

3. $\int 4x\cos 4x\,dx = ?$

Legyen $v=4x$; $u'=\cos 4x$; ekkor $v'=4$; $u=\frac{\sin 4x}{4}$.

$$\int 4x\cos 4x\,dx = x\sin 4x - \int \sin 4x\,dx = x\sin 4x + \frac{\cos 4x}{4} + C.$$

4. $\int 6x \operatorname{sh} 7x\,dx = ?$

Legyen $v=6x$; $u'=\operatorname{sh} 7x$; ekkor $v'=6$; $u=\frac{\operatorname{ch} 7x}{7}$.

$$\int 6x\operatorname{sh} 7x\,dx = \frac{6x\operatorname{ch} 7x}{7} - \int \frac{6\operatorname{ch} 7x}{7}\,dx = \frac{6x\operatorname{ch} 7x}{7} - \frac{6\operatorname{sh} 7x}{49} + C.$$

5. $\int 3x\operatorname{ch} 4x\,dx = ?$

Legyen $v=3x$; $u'=\operatorname{ch} 4x$; ekkor $v'=3$; $u=\frac{\operatorname{sh} 4x}{4}$.

$$\int 3x\operatorname{ch} 4x\,dx = \frac{3x\operatorname{sh} 4x}{4} - \int \frac{3\operatorname{sh} 4x}{4}\,dx = \frac{3x\operatorname{sh} 4x}{4} - \frac{3\operatorname{ch} 4x}{16} + C.$$

Ha a hatványfüggvényben x magasabb hatványa is szerepel, akkor a parciális integrálás módszerét szükség szerint ismételten alkalmazhatjuk. Most ilyen típusú feladatokat oldunk meg.

6. $\int x^2 e^{4x}\, dx = ?$

Legyen $v=x^2$; $u'=e^{4x}$; ekkor $v'=2x$; $u=\frac{e^{4x}}{4}$.

$$\int x^2 e^{4x}\, dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2}\int x e^{4x}\, dx.$$

A parciális integrálás módszerét alkalmazva, a második tagban integrandusként ismét szorzatfüggvényt kaptunk, de ebben a hatványfüggvény fokszáma már eggyel kisebb, mint előbb volt, az exponenciális tényező lényegében változatlan. Erre ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét.

$$\int x e^{4x}\, dx = ?$$

Legyen $v_1=x$; $u_1'=e^{4x}$; ekkor $v_1'=1$; $u_1=\frac{e^{4x}}{4}$.

$$\int x e^{4x}\, dx = \frac{x e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4}\, dx = \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + C.$$

A kapott eredményt visszahelyettesítve:

$$\int x^2 e^{4x}\, dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{8} x e^{4x} + \frac{1}{32} e^{4x} + C.$$

7. $\int 3x^2 \sin 5x\, dx = ?$

Legyen $v=3x^2$; $x'=\sin 5x$; ekkor $v'=6x$; $u=\frac{-\cos 5x}{5}$.

$$\int 3x^2 \sin 5x\, dx = \frac{-3x^2 \cos 5x}{5} - \int -\frac{6x \cos 5x}{5}\, dx =$$

$$= -\frac{3}{5} x^2 \cos 5x + \frac{6}{5}\int x \cos 5x\, dx.$$

A második tag integrandusa szorzatfüggvény, amit ismét parciálisan integrálunk.

$$\int x \cos 5x\, dx = ?$$

Legyen $v_1=x$; $u_1'=\cos 5x$; $v_1'=1$; $u_1=\frac{\sin 5x}{5}$.

$$\int x \cos 5x\, dx = \frac{1}{5} x \sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x\, dx =$$

$$= \frac{1}{5} x \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + C.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int 3x^2 \sin 5x\, dx = -\frac{3}{5} x^2 \cos 5x + \frac{6}{25} x \sin 5x + \frac{6}{125} \cos 5x + C.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\left(-\frac{3}{5} x^2 \cos 5x + \frac{6}{25} x \sin 5x + \frac{6}{125} \cos 5x + C\right)' =$$

$$= -\frac{6}{5} x \cos 5x + 3x^2 \sin 5x + \frac{6}{25} \sin 5x + \frac{6}{5} x \cos 5x - \frac{6}{25} \sin 5x =$$

$$= 3x^2 \sin 5x.$$

A feladatot tehát helyesen oldottuk meg.

8. $\int x \operatorname{sh} x\, dx = ?$

Legyen $v=x$; $u' = \operatorname{sh} x$; ekkor $v'=1$; $u = \operatorname{ch} x$.

$$\int x \operatorname{sh} x\, dx = x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x\, dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C.$$

9. $\int x^3 \operatorname{sh} 2x\, dx = ?$

Legyen $v = x^3$; $u' = \operatorname{sh} 2x$; ekkor $v' = 3x^2$; $u = \frac{\operatorname{ch} 2x}{2}$.

$$\int x^3 \operatorname{sh} 2x\, dx = \frac{1}{2} x^3 \operatorname{ch} 2x - \frac{3}{2}\int x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx.$$

A második tagra ismét a parciális integrálást alkalmazzuk:

$$\int x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx = ?$$

Legyen $v_1=x^2$; $u_1'=\operatorname{ch} 2x$; ekkor $v_1'=2x$; $u_1 = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}$.

$$\int x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sh} 2x - \int x \operatorname{sh} 2x\, dx.$$

A szorzatfüggvényt újra parciálisan integráljuk.

$$\int x \operatorname{sh} 2x\, dx = ?$$

Legyen $v_2 = x$; $u_2' = \operatorname{sh} 2x$; vagyis $v_2' = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$.

$$\int x \operatorname{sh} 2x = \frac{1}{2} x \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$$

Az eredeti integrál tehát

$$\int x^3 \operatorname{sh} 2x\, dx = \frac{1}{2} x^3 \operatorname{ch} 2x - \frac{3}{4} x^2 \operatorname{sh} 2x + \frac{3}{4} x \operatorname{ch} 2x - \frac{3}{8} \operatorname{sh} 2x + C.$$

b) *Logaritmus-, area- és arkuszfüggvények integrálása.* Ezek a függvények olyanok, hogy integráljukat nem tudjuk közvetlenül felírni, deriváltjukat viszont ismerjük. Ha ilyen esetben az integrandust olyan függvényszorzatnak tekintjük, amelynek egyik tényezője az azonosan egy függvény, a másik tényezője pedig az integrandus, akkor a feladat gyakran megoldható. Ezzel a fogással esetleg más típusú integrandus esetében is célt érhetünk.

Gyakorló feladatok

10. $\int \ln x\, dx = ?$

Legyen $v = \ln x$; $u' = 1$; ekkor $v' = \frac{1}{x}$; $u = x$. Ekkor

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x\, dx = x \ln x - x + C.$$

11. $\int \lg x\, dx = ?$

Legyen $v = \lg x$; $u = 1$; tehát $v' = \frac{1}{x} \lg e$; $u = x$.

$$\int \lg x\, dx = x \lg x - \int \lg e\, dx = x \lg x - x \lg e + C.$$

Megjegyzés: Itt $\lg e \approx 0{,}4343$ értékkel számolhatunk.

12. $\int \arcsin x\, dx = ?$

Legyen $v = \arcsin x$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $u = x$.

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Vegyük észre, hogy a második tag integrandusát csekély átalakítással $f^n(x) f'(x)$ alakra hozhatjuk, melynek integrálja már közvetlenül felírható:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Az integrálási konstans előjelváltozását természetesen figyelmen kívül hagyhatjuk!

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C)' =$$

$$= \arcsin x + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

13. $\int \arcsin (ax+b)\, dx = ?$

Az integrandust először helyettesítéssel alakítjuk át úgy, hogy az $ax+b$ függvény helyett a t új változót vezetjük be.

Legyen $ax+b = t$, ekkor $dt = a\, dx$ és így $dx = \frac{dt}{a}$.

$$\int \arcsin (ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \arcsin t\, dt.$$

Az előbbi példa eredményét felhasználva kapjuk:

$$\int \operatorname{arc\,sin}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\left(t \operatorname{arc\,sin} t+\sqrt{1-t^2}\right)+C =$$

$$= \frac{ax+b}{a}\operatorname{arc\,sin}(ax+b)+\frac{1}{a}\sqrt{1-(ax+b)^2}+C.$$

14. $\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{arc\,cos} x$; $u'=1$, tehát $v'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $u=x$.

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = x\operatorname{arc\,cos} x-\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Vegyük észre, hogy $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, ezért

$$\int \operatorname{arc\,cos} x\,dx = x\operatorname{arc\,cos} x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

15. $\int \operatorname{arc\,cos}\dfrac{x}{3}\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{arc\,cos}\dfrac{x}{3}$; $u'=1$, tehát $v'=\dfrac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$; $u=x$,

$$\int \operatorname{arc\,cos}\frac{x}{3}\,dx = x\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{3}-\int \frac{-x}{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}\,dx.$$

Vegyük észre, hogy a második tag integrandusa egyszerűen az $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \frac{-x}{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}\,dx = \int \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int -2x\,(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{9-x^2}+C.$$

Ezt figyelembe véve a feladat megoldása:

$$\int \operatorname{arc\,cos}\frac{x}{3}\,dx = x\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{3}-\sqrt{9-x^2}+C.$$

16. $\int \operatorname{arc\,tg} 6x\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{arc\,tg} 6x$; $u'=1$, tehát $v'=\dfrac{6}{1+36x^2}$; $u=x$.

$$\int \operatorname{arc\,tg} 6x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} 6x-\int \frac{6x}{1+36x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} 6x-$$

$$-\frac{1}{12}\int \frac{72x}{1+36x^2}\,dx = x\operatorname{arc\,tg} 6x-\frac{1}{12}\ln(1+36x^2)+C.$$

Tehát itt is a parciális integrálás után kapott integrandus $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ alakra volt hozható.

17. $\int \operatorname{arc\,ctg} cx\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{arc\,ctg} cx$; $u'=1$, tehát $v' = -\dfrac{c}{1+c^2x^2}$; $u=x$.

$$\int \operatorname{arc\,ctg} cx\,dx = x\operatorname{arc\,ctg} cx+\int \frac{cx}{1+c^2x^2}\,dx.$$

Vegyük észre, hogy a második tag integrandusa $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható!

$$\int \frac{cx}{1+c^2x^2}\,dx = \frac{1}{2c}\int \frac{2c^2x}{1+c^2x^2}\,dx = \frac{1}{2c}\ln(1+c^2x^2)+C.$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \operatorname{arc\,ctg} cx\,dx = x\operatorname{arc\,ctg} cx+\frac{1}{2c}\ln(1+c^2x^2)+C.$$

18. $\int \operatorname{ar\,sh} 7x\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{ar\,sh} 7x$; $u'=1$, tehát $v' = \dfrac{7}{\sqrt{1+49x^2}}$; $u=x$.

$$\int \operatorname{ar\,sh} 7x\,dx = x\operatorname{ar\,sh} 7x-\int \frac{7x}{\sqrt{1+49x^2}}\,dx.$$

A második tag integrandusa egyszerű átalakítással $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \frac{7x}{\sqrt{1+49x^2}}\,dx = \frac{1}{14}\int (1+49x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 98x\,dx =$$

$$= \frac{1}{14}\,\frac{(1+49x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{7}\sqrt{1+49x^2}+C.$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \operatorname{ar\,sh} 7x\,dx = x \operatorname{ar\,sh} 7x - \frac{1}{7}\sqrt{1+49x^2}+C.$$

19. $\int \operatorname{ar\,ch} x\,dx = \int 1\cdot \operatorname{ar\,ch} x\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{ar\,ch} x$; $u'=1$, ekkor $v' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $u=x$.

$$\int \operatorname{ar\,ch} x\,dx = x \operatorname{ar\,ch} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$$= x \operatorname{ar\,ch} x - \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = x \operatorname{ar\,ch} x - \sqrt{x^2-1}+C.$$

20. $\int \operatorname{ar\,ch} 5x\,dx = \int 1\cdot \operatorname{ar\,ch} 5x\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{ar\,ch} 5x$; $u'=1$, ekkor $v' = \dfrac{5}{\sqrt{25x^2-1}}$; $u=x$.

$$\int \operatorname{ar\,ch} 5x\,dx = x \operatorname{ar\,ch} 5x - \int \frac{5x}{\sqrt{25x^2-1}}\,dx =$$

$$= x \operatorname{ar\,ch} 5x - \frac{1}{10}\int 50x\,(25x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= x \operatorname{ar\,ch} 5x - \frac{1}{5}\sqrt{25x^2-1}+C.$$

A megoldás során felhasználtuk, hogy a parciális integrálással kapott integrandus $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható volt.

21. $\int \operatorname{ar\,th} x\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{ar\,th} x$; $u'=1$, tehát $v' = \dfrac{1}{1-x^2}$; $u=x$,

$$\int \operatorname{ar\,th} x\,dx = x \operatorname{ar\,th} x - \int \frac{x}{1-x^2}\,dx = x \operatorname{ar\,th} x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \operatorname{ar\,th} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C.$$

A parciális integrálással kapott integrandust $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ alakra hoztuk. A függvény és az integrál értelmezési tartománya $|x|<1$.

22. $\int \operatorname{ar\,cth} x\,dx = ?$

Legyen $v=\operatorname{ar\,cth} x$; $u'=1$, tehát $v' = \dfrac{1}{1-x^2}$; $u=x$.

$$\int \operatorname{ar\,cth} x\,dx = x \operatorname{ar\,cth} x - \int \frac{x}{1-x^2}\,dx =$$

$$= x \operatorname{ar\,cth} x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = x \operatorname{ar\,cth} x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)+C.$$

A függvény és integrálja csak $|x|>1$ értékekre értelmezett. A parciális integrálással kapott integrandust $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ alakra hoztuk.

c) ***Exponenciáls függvénnyel szorzott trigonometrikus és hiperbolikus függvények parciális integrálása.***

Gyakorló feladatok

23. $\int e^{3x}\sin 2x\,dx =$

I. Megoldás:

Alkalmazzuk a parciális integrálást, mégpedig legyen $u=e^{3x}$; $v'=\sin 2x$, tehát $u'=3e^{3x}$; $v=\dfrac{-\cos 2x}{2}$.

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx = \frac{-e^{3x}\cos 2x}{2} - \int \frac{-3e^{3x}\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx.$$

Ismét parciálisan integrálunk, most a jobb oldal második tagjában legyen

$$u_1=e^{3x};\ v_1'=\cos 2x,\ \text{tehát}\ u_1'=3e^{3x};\ v_1=\frac{\sin 2x}{2}.$$

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\int\frac{3}{2}e^{3x}\sin 2x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx.$$

Azt látjuk, hogy a jobb oldal utolsó tagjában az eredeti integrál lépett fel; most már az egyenlőséget rendezve, megkaphatjuk a keresett integrált.

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx=e^{3x}\left(\frac{3}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right),$$

ebből

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=\frac{4e^{3x}}{13}\left(\frac{3}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C=$$

$$=\frac{e^{3x}}{13}(3\sin 2x-2\cos 2x)+C.$$

II. Megoldás:

Mivel az integrandus mindkét tényezőjének egyaránt egyszerű a deriváltja és az integrálja, megpróbálhatjuk a fordított szereposztást is. Mint látni fogjuk, ez szintén célhoz vezet. Legyen tehát most

$$v'=e^{3x}\ \text{és}\ u=\sin 2x,\ \text{ekkor}\ v=\frac{1}{3}e^{3x}\ \text{és}\ u'=2\cos 2x;$$

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=\frac{e^{3x}\sin 2x}{3}-\frac{2}{3}\int e^{3x}\cos 2x\,dx.$$

A kapott integrálra a parciális integrálást a fentihez hasonló szereposztásban végezzük el; legyen

$$u_1=\cos 2x\ \text{és}\ v_1'=e^{3x},\ \text{tehát}\ v_1=\frac{1}{3}e^{3x}\ \text{és}\ u_1'=-2\sin 2x;\ \text{így}$$

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{e^{3x}\sin 2x}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{e^{3x}\cos 2x}{3}+\frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^{3x}\sin 2x}{3}-\frac{2}{9}e^{3x}\cos 2x-\frac{4}{9}\int e^{3x}\sin 2x\,dx;$$

rendezve az egyenlőséget:

$$\frac{13}{9}\int e^{3x}\sin 2x\,dx=\frac{e^{3x}}{9}(3\sin 2x-2\cos 2x)+C;$$

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=\frac{e^{3x}}{13}(3\sin 2x-2\cos 2x)+C.$$

A kétféle úton kapott eredmény természetesen megegyezik.

24. $\int e^{5x}\cos 3x\,dx=?$

Legyen $u=e^{5x};\ v'=\cos 3x,$ tehát $u'=5e^{5x};\ v=\frac{\sin 3x}{3}.$

$$\int e^{5x}\cos 3x\,dx=\frac{e^{5x}\sin 3x}{3}-\int\frac{5e^{5x}\sin 3x}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x-\frac{5}{3}\int e^{5x}\sin 3x\,dx.$$

A második tagbeli integrálásra ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét az eredetihez hasonló szereposztással; legyen $u_1=e^{5x};\ v_1'=\sin 3x,$ tehát $u_1'=5e^{5x};\ v_1=\frac{-\cos 3x}{3}.$

$$\int e^{5x}\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x-\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{5x}\cos 3x-\int\frac{-5e^{5x}\cos 3x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x-\frac{25}{9}\int e^{5x}\cos 3x\,dx.$$

Ebből fejezzük ki a keresett integrált:

$$\frac{34}{9}\int e^{5x}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x;$$

$$\int e^{5x}\cos 3x\,dx=\frac{9}{34}e^{5x}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{5}{9}\cos 3x\right)+C.$$

Ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha mindkét lépésben a fordított szereposztást választottuk volna.

Megoldunk egy ilyen típusú általánosabb feladatot.

25. $\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx = ?$

Legyen $u=e^{ax+b}$; $v'=\cos(cx+d)$, tehát $u'=ae^{ax+b}$; $v=\dfrac{\sin(cx+d)}{c}$.

$$\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx =$$

$$= \frac{1}{c}e^{ax+b}\sin(cx+d)-\int\frac{a}{c}e^{ax+b}\sin(cx+d)\,dx.$$

A második tagra ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Legyen $u_1=e^{ax+b}$; $v_1'=\sin(cx+d)$, tehát $u_1'=ae^{ax+b}$; $v_1= \dfrac{-\cos(cx+d)}{c}$.

$$\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx = \frac{1}{c}e^{ax+b}\sin(cx+d)-$$

$$-\frac{a}{c}\left[-\frac{1}{c}e^{ax+b}\cos(cx+d)+\frac{a}{c}\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx\right]=$$

$$=\frac{e^{ax+b}}{c}\left[\sin(cx+d)+\frac{a}{c}\cos(cx+d)\right]-$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx.$$

Rendezve az egyenlőséget:

$$\frac{a^2+c^2}{c^2}\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx=$$

$$=\frac{e^{ax+b}}{c}\left[\sin(cx+d)+\frac{a}{c}\cos(cx+d)\right],$$

ebből

$$\int e^{ax+b}\cos(cx+d)\,dx=$$

$$=\frac{ce^{ax+b}}{a^2+c^2}\left[\sin(ex+d)+\frac{a}{c}\cos(cx+d)\right]+C.$$

26. $\int e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx = ?$ Az integrált kétféle módon határozzuk meg:

1. Parciális integrálással.

2. A $\mathrm{sh}\,4x=\dfrac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}$ azonosság felhasználásával.

I. Megoldás:

Legyen $u=e^{2x}$; $v'=\mathrm{sh}\,4x$, tehát $u'=2e^{2x}$; $v=\dfrac{\mathrm{ch}\,4x}{4}$,

$$\int e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx=\frac{1}{4}e^{2x}\,\mathrm{ch}\,4x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{ch}\,4x\,dx.$$

Legyen most $u_1=e^{2x}$; $v_1'=\mathrm{ch}\,4x$, tehát $u_1'=2e^{2x}$; $v_1=\dfrac{\mathrm{sh}\,4x}{4}$.

$$\int e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}\,\mathrm{ch}\,4x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}\,\mathrm{ch}\,4x-\frac{1}{8}e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x+\frac{1}{4}\int e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx.$$

Ebből rendezéssel a keresett integrált kifejezzük:

$$\frac{3}{4}\int e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx=\frac{1}{4}e^{2x}\left(\mathrm{ch}\,4x-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,4x\right);$$

$$\int e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx=\frac{e^{2x}}{3}\left(\mathrm{ch}\,4x-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,4x\right)+C.$$

Az eredmény ugyanez lett volna akkor is, ha bármelyik esetben u és v szerepét felcseréljük.

II. Megoldás:

$$\int e^{2x}\,\mathrm{sh}\,4x\,dx=\int e^{2x}\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(e^{6x}-e^{-2x})\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{6x}}{6}-\frac{e^{-2x}}{-2}\right)+C=\frac{e^{6x}}{12}+\frac{e^{-2x}}{4}+C.$$

Összehasonlítjuk eredményünket az előbb kapott eredménnyel.

$$\frac{e^{2x}}{3}\left(\mathrm{ch}\,4x-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,4x\right)+C=\frac{e^{2x}}{3}\left(\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}-\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{e^{6x}+e^{-2x}}{6}-\frac{e^{6x}-e^{-2x}}{12}+C=$$

$$=\frac{2e^{6x}-e^{6x}+2e^{-2x}+e^{-2x}}{12}+C=\frac{e^{6x}}{12}+\frac{e^{-2x}}{4}+C.$$

A második megoldás sokkal rövidebb; ezért nemcsak azt kell megnézni, hogy egy szorzatfüggvény parciálisan integrálható-e, hanem azt is, hogy ez tűnik-e a legcélszerűbb módszernek az adott esetben.

Szögfüggvények szorzatát is lehet parciálisan integrálni, mivel azonban az integrandus megfelelő átalakításával a szorzatfüggvény összegfüggvénnyé alakítható, nem foglalkozunk vele.

III. RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

1. Egyszerűbb speciális típusok

Először egyszerűbb speciális típusokat vizsgálunk, a bonyolultabb eseteket majd ezekre vezetjük vissza.

a) *Az integrandus nevezője elsőfokú, számlálója konstans.* Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx.$$

Az integrandust úgy alakítjuk át, hogy a számláló a nevező deriváltja legyen.

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b|+C.$$

b) *Az integrandus nevezője egy elsőfokú függvény n-edik* ($n \neq 1$) *hatványa, számlálója konstans.* Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx.$$

Az integrandust $f^n(x)f'(x)$ alakra hozzuk (ilyen típusú függvényeket már integráltunk a II. pontban).

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{A}{a}\int a(ax+b)^{-n}\,dx =$$

$$= \frac{A}{a}\,\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n}+C = \frac{A}{a(1-n)}\,\frac{1}{(ax+b)^{n-1}}+C \quad (n \neq 1).$$

c) *Az integrandus nevezője egy elsőfokú függvény n-edik hatványa* ($n \neq 1$), *számlálója elsőfokú.* Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{Ax}{(ax+b)^n}\,dx.$$

($Ax+B$ alakú számláló esetén az integrandus két taggá bontható, és a második tag éppen a **b)** eset.)

$$\int \frac{Ax}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{ax+b-b}{(ax+b)^n}\,dx =$$

$$= \frac{A}{a}\int \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}\,dx - \frac{A}{a}\int \frac{b}{(ax+b)^n}\,dx =$$

$$= \frac{A}{a^2}\int a(ax+b)^{1-n}\,dx - \frac{Ab}{a^2}\int a(ax+b)^{-n}\,dx =$$

$$= \frac{A}{a^2}\,\frac{(ax+b)^{2-n}}{2-n} - \frac{Ab}{a^2}\,\frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n} + C.$$

Gyakorló feladatok

1. $\displaystyle\int \frac{4}{3x-5}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{3}{3x-5}\,dx = \frac{4}{3}\ln|3x-5|+C.$

2. $\displaystyle\int \frac{5}{2-3x}\,dx = -\frac{5}{3}\int \frac{3}{3x-2}\,dx = -\frac{5}{3}\ln|3x-2|+C.$

3. $\displaystyle\int \frac{5}{(2x-4)^6}\,dx = \frac{5}{2}\int 2\,(2x-4)^{-6}\,dx = \frac{5}{2}\,\frac{(2x-4)^{-5}}{-5}+C =$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2x-4)^5}+C = -\frac{1}{2(2x-4)^5}+C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{14}{(6-4x)^7}\,dx = -\frac{14}{4}\int -4(6-4x)^{-7}\,dx =$

$$= -\frac{7}{2}\,\frac{(6-4x)^{-6}}{-6}+C = \frac{7}{12}\,\frac{1}{(6-4x)^6}+C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{(2x+3)^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3-3}{(2x+3)^4}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+3)^3}\,dx - \frac{3}{4}\int \frac{2}{(2x+3)^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int 2(2x+3)^{-3}\,dx - \frac{3}{4}\int 2(2x+3)^{-4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(2x+3)^{-2}}{-2} - \frac{3}{4}\,\frac{(2x+3)^{-3}}{-3}+C =$$

$$= -\frac{1}{8}\,\frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(2x+3)^3}+C = \frac{-(2x+3)+2}{8(2x+3)^3}+C =$$

$$= -\frac{2x+1}{8(2x+3)^3}+C.$$

6. $\displaystyle\int \frac{5x}{(3x-4)^6}\,dx = \frac{5}{3}\int \frac{3x-4+4}{(3x-4)^6}\,dx =$

$$= \frac{5}{3}\int \frac{1}{(3x-4)^5}\,dx + \frac{20}{3}\int \frac{1}{(3x-4)^6}\,dx =$$

$$= \frac{5}{9}\int 3(3x-4)^{-5}\,dx + \frac{20}{9}\int 3(3x-4)^{-6}\,dx =$$

$$= \frac{5}{9}\,\frac{(3x-4)^{-4}}{-4} + \frac{20}{9}\,\frac{(3x-4)^{-5}}{-5}+C =$$

$$= -\frac{5}{36}\,\frac{1}{(3x-4)^4} - \frac{4}{9}\,\frac{1}{(3x-4)^5}+C = \frac{-5(3x-4)-16}{36(3x-4)^5}+C =$$

$$= \frac{4-15x}{36(3x-4)^5}+C.$$

d) *Az integrandus nevezője másodfokú polinom, számlálója konstans.* Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Az integrandus célszerű átalakítása:

$$\frac{A}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} =$$

$$= \frac{A}{a}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} =$$

$$= \frac{A}{a}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

A továbbiakat az dönti el, hogy a $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$ kifejezés előjele pozitív, negatív vagy pedig nulla-e.

Ha $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = B^2 > 0$, akkor az integrál helyettesítéssel alapintegrállá alakítható át:

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+B^2}\,dx =$$

$$= \frac{A}{aB^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{B}\right)^2+1}\,dx.$$

Ha az $\frac{x+\frac{b}{2a}}{B} = u$ új változót vezetjük be, akkor az integrandus — a konstans szorzóktól eltekintve — $\frac{1}{u^2+1}$ alakú lesz, és ennek primitív függvényei $\operatorname{arc\,tg} u + C$ alakúak.

Ha $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = -B^2 < 0$, akkor az integrandus az előző módon $\frac{1}{u^2-1}$ alakra hozható, és ennek primitív függvényei $\operatorname{ar\,th} u + C$ alakúak.

Ha $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = 0$, akkor a nevezőben levő másodfokú polinom teljes négyzet, és így az integrál a **b)**-ben tárgyalt módon számítható ki.

Gyakorló feladatok

7. $$\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{1}{x^2+4x+4+8-4}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx.$$

Alkalmazzuk most az $u = \frac{x+2}{2}$ helyettesítést, ekkor $u = \frac{x+2}{2}$, ebből $x = 2u-2$ és $\frac{dx}{du} = 2$, vagyis $dx = 2du$.

$$\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,2\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{2} + C.$$

8. $$\int \frac{1}{x^2+6x+20}\,dx = \int \frac{1}{x^2+6x+9+20-9}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x+3)^2+11}\,dx = \frac{1}{11}\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1}\,dx = ?$$

Az alábbi helyettesítést végezzük:

$$u = \frac{x+3}{\sqrt{11}};\ \text{vagyis}\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{11}},\ dx = \sqrt{11}\,du.$$

$$\int \frac{1}{x^2+6x+20}\,dx = \frac{1}{11}\int \frac{1}{u^2+1}\sqrt{11}\,du = \frac{1}{\sqrt{11}}\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+3}{\sqrt{11}} + C.$$

9. $$\int \frac{1}{3x^2+6x+15}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2x+1+4}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx =$$
$$= \frac{1}{12}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx.$$

Helyettesítés: $u = \frac{x+1}{2}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$; $dx = 2\,du$.

$$\int \frac{1}{3x^2+6x+15}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{2\,du}{u^2+1} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u^2+1} =$$
$$= \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + C.$$

10. $$\int \frac{1}{2x^2-3x+20}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+10}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{151}{16}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{16}{151}\int \frac{1}{\frac{16}{151}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+1}\,dx = \frac{8}{151}\int \frac{1}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{151}}\right)^2+1}\,dx.$$

Most helyettesítjük be a $\frac{4x-3}{\sqrt{151}} = u$ új változót:

$$x = \frac{\sqrt{151}\,u+3}{4};\quad dx = \frac{\sqrt{151}}{4}\,du.$$

$$\int \frac{1}{2x^2-3x+20}\,dx = \frac{8}{151}\int \frac{1}{u^2+1}\,\frac{\sqrt{151}}{4}\,du =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{151}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2}{\sqrt{151}}\operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{2}{\sqrt{151}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-3}{\sqrt{151}} + C.$$

11. $$\int \frac{1}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = \int (x+3)^{-2}\,dx =$$
$$= \frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+3} + C.$$

Ilyen típusú feladatok megoldásával már foglalkoztunk.

12. $$\int \frac{1}{x^2+8x+12}\,dx = \int \frac{1}{x^2+8x+16-4}\,dx = \int \frac{1}{(x+4)^2-4}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1}\,dx.$$

Helyettesítés: $u = \frac{x+4}{2}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$; $dx = 2\,du$.

$$\int \frac{1}{x^2+8x+12}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2\,du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-1} =$$
$$= \begin{cases} F_1(u) = -\frac{1}{2}\operatorname{ar\,th} u + C_1 = -\frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u} + C_1, & \text{ha } |u|<1,\\ F_2(u) = -\frac{1}{2}\operatorname{ar\,cth} u + C_2 = -\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1} + C_2, & \text{ha } |u|>1. \end{cases}$$

Tehát visszahelyettesítve:

$$\int \frac{1}{x^2+8x+12}\,dx =$$
$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}\operatorname{ar\,th}\frac{x+4}{2} + C_1 = -\frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{x+4}{2}}{1-\frac{x+4}{2}} + C_1 = \\ \qquad = -\frac{1}{4}\ln\frac{x+6}{-2-x} + C_1, \quad \text{ha } \left|\frac{x+4}{2}\right| < 1. \\ -\frac{1}{2}\operatorname{ar\,cth}\frac{x+4}{2} + C_2 = -\frac{1}{4}\ln\frac{\frac{x+4}{2}+1}{\frac{x+4}{2}-1} + C_2 = \\ \qquad = -\frac{1}{4}\ln\frac{x+6}{x+2} + C_2, \quad \text{ha } \left|\frac{x+4}{2}\right| > 1. \end{cases}$$

13. $$\int \frac{1}{x^2-10x+20}\,dx=\int\frac{1}{x^2-10x+25-5}\,dx=\int\frac{1}{(x-5)^2-5}\,dx=$$
$$=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\left(\frac{x-5}{\sqrt{5}}\right)^2-1}\,dx.$$

Helyettesítés: $u=\dfrac{x-5}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $dx=\sqrt{5}\,du.$

$$\int\frac{1}{x^2-10x+20}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{\sqrt{5}\,du}{u^2-1}=\frac{\sqrt{5}}{5}\int\frac{du}{u^2-1}=$$
$$=\begin{cases} F_1(u)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{ar\,th} u+C_1=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\ln\dfrac{1+u}{1-u}+C_1, & \text{ha } |u|<1,\\[2ex] F_2(u)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{ar\,cth} u+C_2=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\ln\dfrac{u+1}{u-1}+C_2, & \text{ha } |u|>1.\end{cases}$$

Tehát visszahelyettesítve

$$\int\frac{1}{x^2-10x+20}\,dx=$$
$$=\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{5}}{10}\ln\dfrac{1+\dfrac{x-5}{\sqrt{5}}}{1-\dfrac{x-5}{\sqrt{5}}}+C_1=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\ln\dfrac{x+\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}+5-x}+C_1, & \text{ha } \left|\dfrac{x-5}{\sqrt{5}}\right|<1,\\[3ex] -\dfrac{\sqrt{5}}{10}\ln\dfrac{\dfrac{x-5}{\sqrt{5}}+1}{\dfrac{x-5}{\sqrt{5}}-1}+C_2=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}\ln\dfrac{x-5+\sqrt{5}}{x-5-\sqrt{5}}+C_2, & \text{ha } \left|\dfrac{x-5}{\sqrt{5}}\right|>1.\end{cases}$$

14. $$\int\frac{1}{5x^2+4x-6}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+\frac{4}{5}x-\frac{6}{5}}=$$
$$=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}-\frac{6}{5}-\frac{4}{25}}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{34}{25}}=\frac{1}{\frac{5\cdot 34}{25}}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{x+\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{34}}{5}}\right)^2-1}=$$
$$=\frac{5}{34}\int\frac{dx}{\left(\frac{5x+2}{\sqrt{34}}\right)^2-1}.$$

Helyettesítés: $u=\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}$; $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$; $dx=\dfrac{\sqrt{34}}{5}\,du.$

$$\int\frac{1}{5x^2+4x-6}\,dx=\frac{5}{34}\int\frac{\frac{\sqrt{34}}{5}\,du}{u^2-1}=\frac{1}{\sqrt{34}}\int\frac{du}{u^2-1}=$$
$$=\begin{cases} F_1(u)=-\dfrac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{ar\,th} u+C_1=-\dfrac{1}{2\sqrt{34}}\ln\dfrac{1+u}{1-u}+C_1, & \text{ha } |u|<1,\\[2ex] F_2(u)=-\dfrac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{ar\,cth} u+C_2=-\dfrac{1}{2\sqrt{34}}\ln\dfrac{u+1}{u-1}+C_2, & \text{ha } |u|>1.\end{cases}$$

Tehát — visszahelyettesítve —

$$\int\frac{1}{5x^2+4x-6}\,dx=$$
$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{ar\,th}\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}+C_1=-\dfrac{1}{2\sqrt{34}}\ln\dfrac{1+\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}}{1-\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}}+C_1=\\[3ex] \qquad=-\dfrac{1}{2\sqrt{34}}\ln\dfrac{5x+2+\sqrt{34}}{\sqrt{34}-5x-2}+C_1, \quad \text{ha } \left|\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}\right|<1,\\[3ex] -\dfrac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{ar\,cth}\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}+C_2=-\dfrac{1}{2\sqrt{34}}\ln\dfrac{\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}+1}{\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}-1}+C_2=\\[3ex] \qquad=-\dfrac{1}{2\sqrt{34}}\ln\dfrac{5x+2+\sqrt{34}}{5x+2-\sqrt{34}}+C_2, \quad \text{ha } \left|\dfrac{5x+2}{\sqrt{34}}\right|>1.\end{cases}$$

e) *Az integrandus számlálója elsőfokú, nevezője másodfokú polinom.* Az integrandus számlálóját két részre bontjuk: az egyik részben előállítjuk a nevező deriváltját, a másik rész egy konstans; így az egyik integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú, míg a másik az előbbi, **d)** típusú. A módszert az első kidolgozott példán mutatjuk be.

Gyakorló feladatok

15. $\int \frac{2x-3}{x^2+4x-5}\,dx = ?$

A nevező deriváltja: $2x+4$. Ennek megfelelően alakítjuk át a számlálót:

$$\int \frac{2x-3}{x^2+4x-5}\,dx = \int \frac{2x+4-7}{x^2+4x-5}\,dx =$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x-5}\,dx - 7\int \frac{dx}{x^2+4x-5}.$$

Az első integrál értéke: $\ln|x^2+4x-5|+C_0$.
A második az előbbi módszerrel számítható ki.

$$-7\int \frac{dx}{x^2+4x-5} = -7\int \frac{dx}{(x+2)^2-9} = -\frac{7}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2-1}.$$

Helyettesítés: $u = \frac{x+2}{3}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$; $dx = 3\,du$.

$$-\frac{7}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2-1} = -\frac{7}{9}\int \frac{3\,du}{u^2-1} = \frac{7}{3}\int \frac{du}{1-u^2} =$$

$$= \begin{cases} F_1(u) = \frac{7}{3}\,\mathrm{ar\,th}\,u + C = \frac{7}{6}\ln\frac{1+u}{1-u} + C, & \text{ha } |u|<1. \\ F_2(u) = \frac{7}{3}\,\mathrm{ar\,cth}\,u + C = \frac{7}{6}\ln\frac{u+1}{u-1} + C, & \text{ha } |u|>1. \end{cases}$$

Tehát — visszahelyettesítve —

$$-7\int \frac{dx}{x^2+4x-5} =$$

$$= \begin{cases} G_1(x) = \frac{7}{3}\,\mathrm{ar\,th}\,\frac{x+2}{3} + C_1 = \frac{7}{6}\ln\frac{1+\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} + C_1 = \\ = \frac{7}{6}\ln\frac{3+x+2}{3-x-2} + C_1 = \frac{7}{6}\ln\frac{5+x}{1-x} + C_1, \text{ ha } \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1, \\ G_2(x) = \frac{7}{3}\,\mathrm{ar\,cth}\,\frac{x+2}{3} + C_2 = \frac{7}{6}\ln\frac{\frac{x+2}{3}+1}{\frac{x+2}{3}-1} + C_2 = \\ = \frac{7}{6}\ln\frac{x+2+3}{x+2-3} + C_2 = \frac{7}{6}\ln\frac{x+5}{x-1} + C_2, \text{ ha } \left|\frac{x+2}{3}\right| > 1. \end{cases}$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \frac{2x-3}{x^2+4x-5}\,dx = \ln|x^2+4x-5| + \begin{cases} G_1(x), & \text{ha } \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1, \\ G_2(x), & \text{ha } \left|\frac{x+2}{3}\right| > 1. \end{cases}$$

Az egyenlőtlenséget x-re is felírjuk:

Ha $\left|\frac{x+2}{3}\right| < 1$, akkor $-5<x<1$, ha $\left|\frac{x+2}{3}\right| > 1$, akkor $x<-5$, ill. $x>1$.

16. $\int \frac{5x-6}{x^2-2x+10}\,dx = ?$ A nevező deriváltja: $2x-2$, ennek megfelelően alakítjuk át a tört számlálóját.

$$\int \frac{5x-6}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-\frac{12}{5}}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-2-\frac{2}{5}}{x^2-2x+10}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}\,dx - \int \frac{dx}{x^2-2x+10}.$$

Az első integrál értéke: $\frac{5}{2}\ln|x^2-2x+10| + C_1$.

A második integrált számítjuk ki:

$$-\int \frac{dx}{x^2-2x+10} = -\int \frac{dx}{x^2-2x+1+9} = -\int \frac{dx}{(x-1)^2+9} =$$

$$= -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1}.$$

Helyettesítés: $u=\frac{x-1}{3}$; $\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}$; $dx=3\,du$.

$$-\int \frac{dx}{x^2-2x+10} = -\frac{1}{9}\int \frac{3\,du}{u^2+1} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{3}+C_2.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \frac{5x-6}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{5}{2}\ln|x^2-2x+10| - \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{3}+C.$$

17. $\int \frac{3x-6}{x^2+2x+8}\,dx = ?$ A nevező deriváltja $2x+2$, ennek megfelelően alakítjuk át a számlálót.

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+8}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+2x+8}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-6}{x^2+2x+8}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+8}\,dx - 9\int \frac{dx}{x^2+2x+8}.$$

Az első integrál közvetlenül felírható:

$$\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+8|+C_1.$$

A második integrál kiszámítása:

$$-9\int \frac{dx}{x^2+2x+8} = -9\int \frac{dx}{x^2+2x+1+7} = -9\int \frac{dx}{(x+1)^2+7} =$$

$$= -\frac{9}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}.$$

Helyettesítés: $u=\frac{x+1}{\sqrt{7}}$; $\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{7}}$; $dx=\sqrt{7}\,du$.

$$-9\int \frac{dx}{x^2+2x+8} = -\frac{9}{7}\int \frac{\sqrt{7}\,du}{u^2+1} = -\frac{9}{\sqrt{7}}\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$$= -\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg} u + C_2 = -\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C_2.$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x+8}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+8| - \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

f) $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ *alakú integrandus*

Ha az integrandus $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ alakú, akkor rekurziós formulát alkalmazunk.

Legyen

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \quad \text{és} \quad v' = 1,$$

ekkor

$$u' = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \quad \text{és} \quad v = x.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx.$$

A második tagot átalakítjuk úgy, hogy az integrandus számlálójához hozzáadunk a^2-et, ill. levonunk a^2-et.

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}.$$

Kifejezzük az utolsó tagot:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Legyen $I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, ill. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, akkor

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

Gyakorló feladatok

18. Alkalmazzuk a rekurziós formulát $n=1$, ill. $n=2$ esetre.

a) $n=1$

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

b) $n=2$

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

19. $\int \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx = ?$ A rekurziós formulát kell alkalmaznunk az $a=3$, I_2 esetére, ezért

$$\int \frac{5}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{2\cdot 9}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{2\cdot 27}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{18}\frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{54}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3} + C.$$

20. $\int \frac{1}{(x^2+4x+20)^3}\,dx = ?$ A rekurziós formulát most nem lehet közvetlenül alkalmazni, mert a zárójelen belüli kifejezés nem x^2+a^2 alakú. Átalakítjuk az integrandus nevezőjét, majd helyettesítünk.

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+20)^3}\,dx = \int \frac{dx}{[(x+2)^2+16]^3}.$$

Legyen $x+2 = u$, ekkor $dx = du$, és az integrál:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+20)^3} = \int \frac{du}{(u^2-16)^3} = I_3.$$

A rekurziós képletben: $a=4$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+20)^3} =$$

$$= \frac{1}{4\cdot 16}\cdot\frac{u}{(u^2+16)^2} + \frac{3}{8\cdot 256}\frac{u}{u^2+16} + \frac{3}{8\cdot 1024}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{64}\frac{x+2}{[(x+2)^2+16]^2} + \frac{3}{2048}\frac{x+2}{(x+2)^2+16} + \frac{3}{8192}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{4} + C.$$

2. Parciális törtekre bontás módszere

Legyen most az integrandus tetszőleges racionális törtfüggvény, vagyis $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ alakú, ahol $p(x)$ egy m-edfokú, $q(x)$ pedig egy n-edfokú polinom. A tárgyalás során feltehetjük, hogy $m<n$, vagyis $f(x)$ valódi törtfüggvény. Ellenkező esetben ui. az osztás elvégzésével $f(x)$-et felbonthatjuk egy racionális egész függvény és egy racionális valódi törtfüggvény összegére; előbbi egyszerűen integrálható, így elegendő csak az utóbbi integrálásával foglalkoznunk. Feltehetjük továbbá azt is, hogy $\frac{p(x)}{q(x)}$ már nem egyszerűsíthető, és hogy a nevező legmagasabb fokú tagjának együtthatója 1.

A racionális törtfüggvényeknek mindig létezik zárt alakú integrálja. Ahhoz azonban, hogy ezt az integrált ki is tudjuk számítani, *ismernünk kell a nevező gyökeit.* Az alábbiakban előbb egyszerűbb, majd bonyolultabb eseteket tárgyalunk. Mindegyiket visszavezetjük az ún. *parciális törtekre bontás* segítségével az **1. a)...f)** pontokban tárgyalt egyszerű speciális típusú integrálok meghatározására.

a) *A nevezőnek csak egyszeres, valós gyökei vannak.* Az algebrából ismeretes, hogy ha $q(x)$ gyökei $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor $q(x)$ egyértelműen felírható az ún. *gyöktényezős alakban:*

$$q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Igazolható, hogy ekkor $\frac{p(x)}{q(x)}$ az alábbi résztörtekre (parciális törtekre) bontható:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Az ismeretlen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ számok meghatározására a példák megoldása során három módszert mutatunk be. (A példákban az ismeretlen számlálókat — a könnyebb megkülönböztethetőség kedvéért — index nélküli A, B, ... nagybetűkkel jelöljük.)

Gyakorló feladatok

1. $\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}\,dx = ?$ Az integrandust — amelynek számlálója konstans és nevezője másodfokú — gyöktényezős alakban írtuk fel. Ebből látható, hogy a nevezőnek csak egyszeres valós gyökei vannak. Vagyis az alábbi alakú résztörtekre bontható:

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}.$$

A felírt azonosság x bármely értékére egyenlő (amelyre értelmezett). A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, vagyis ezzel a bal és jobb oldal nevezője, s így számlálója is azonosan egyenlő lesz:

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} \equiv \frac{A(x+4)+B(x-2)}{(x-2)(x+4)},$$

tehát

$$1 \equiv A(x+4)+B(x-2).$$

A két oldal csak akkor lehet azonosan egyenlő, ha az egyenlő fokszámú tagok együtthatói rendre egyenlők. Az *együtthatók egyeztetése* céljából a jobb oldalt x hatványai szerint rendezzük:

$$1 \equiv Ax+4A+Bx-2B; \qquad 1 \equiv (A+B)x+4A-2B.$$

A bal oldalon elsőfokú tag nincs, tehát a megfelelő együttható a jobb oldalon is zérus: $A+B=0$; a konstans a bal oldalon 1, a jobb oldalon $4A-2B$, és e kettőnek egyenlőnek kell lennie. Felírva a két kapcsolatot, egy olyan elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelyből az ismeretlen A és B együtthatók meghatározhatók:

$$A+B = 0$$

$$\underline{4A-2B = 1}$$

$$A = -B; \quad 6A = 1; \quad A = \frac{1}{6}; \quad B = -\frac{1}{6}.$$

Ebből következik, hogy

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+4)}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+4} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{1}{6}\ln|x+4| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right| + C.$$

A parciális törtek együtthatóinak meghatározására most ismertetett módszer, az ún. *együtthatók egyeztetése*, mint látni fogjuk, *minden esetben alkalmazható*, vagyis akkor is, ha a nevezőnek többszörös valós vagy komplex gyökei is vannak. Most megismerkedünk egy másik — legtöbbször kevesebb számolással járó — módszerrel, ez azonban csak akkor alkalmazható, ha a nevezőnek csakis egyszeres valós gyökei vannak.

Írjuk fel újra az előbbi számlálók azonosságát!

$$1 \equiv A(x+4)+B(x-2).$$

Az azonosság x bármely értékére igaz. Legyenek a tetszőlegesen választható x értékek éppen a nevező gyökei, vagyis $x_1 = -4$, ill. $x_2 = 2$. Ezeket behelyettesítve, mindig csak az egyik ismeretlen marad meg, és így annyi egyismeretlenes egyenletet kapunk, ahány ismeretlen van.

A két egyenlet a jelen esetben:

$$1 = 6A; \quad A = \frac{1}{6} \quad \text{és} \quad 1 = -6B; \quad B = -\frac{1}{6}.$$

Az együtthatók meghatározásának harmadik módszere az ún. *differenciálási módszer*, amelynek egyszeres valós gyökökre vonatkozó alakját az alábbiakban ismertetjük.

Legyen

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Igazolható, hogy

$$A_1 = \frac{p(x_1)}{q'(x_1)}; \quad A_2 = \frac{p(x_2)}{q'(x_2)}; \quad A_n = \frac{p(x_n)}{q'(x_n)}.$$

Alkalmazzuk ezt a módszert az előbb megoldott feladatra!

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{x^2+2x-8} = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

$$q'(x) = 2x+2.$$

$$A_1 = \frac{p(2)}{q'(2)} = \frac{1}{6}; \quad A_2 = \frac{p(-4)}{q'(-4)} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}.$$

Az együtthatók természetesen megegyeznek az előbbiekben kapottakkal.

2. $\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} dx = ?$ A nevező gyöktényezős alakban van, így közvetlenül felírhatjuk az integrandus parciális törtekre bontott alakját.

$$\frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4};$$

$$14 \equiv A(x+2)(x-4) + B(x-3)(x-4) + C(x+2)(x-3).$$

Mivel az integrandus nevezőjében csak egyszeres elsőfokú gyöktényezők vannak, az ismeretlen együtthatók a nevező gyökeinek behelyettesítésével határozhatók meg a leggyorsabban.

Legyen $x=3$, akkor $14=5(-1)A$; $A=-\frac{14}{5}$.

Legyen $x=-2$, akkor $14=(-5)(-6)B$; $B=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$.

Legyen $x=4$, akkor $14=6\cdot 1C$; $C=\frac{7}{3}$.

Az együtthatókat a differenciálás módszerével is meghatározzuk:

$q(x) = (x-3)(x+2)(x-4)$, és így a nevező deriváltja a szorzat deriválási szabálya alapján számítva:

$$q'(x) = (x+2)(x-4) + (x-3)(x-4) + (x-3)(x+2).$$

A kijelölt szorzást nem végezzük el, mert így a derivált helyettesítési értéke könnyebben számolható ki.

$$A = \frac{p(3)}{q'(3)} = \frac{14}{5(-1)} = -\frac{14}{5}.$$

$$B = \frac{p(-2)}{q'(-2)} = \frac{14}{(-5)(-6)} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

$$C = \frac{p(4)}{q'(4)} = \frac{14}{1\cdot 6} = \frac{7}{3}.$$

Az együtthatók ismeretében az integrál meghatározható.

$$\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} dx =$$

$$= \int \left(-\frac{14}{5}\frac{1}{x-3} + \frac{7}{15}\frac{1}{x+2} + \frac{7}{3}\frac{1}{x-4} \right) dx =$$

$$= -\frac{14}{5}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{7}{15}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-4} =$$

$$= -\frac{14}{5}\ln|x-3| + \frac{7}{15}\ln|x+2| + \frac{7}{3}\ln|x-4| + C.$$

3. $\int \frac{x^3-4}{5x^3-x} dx = ?$ A számláló és nevező fokszáma megegyezik, ezért előbb a számlálót osztjuk a nevezővel, azután alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét:

$$(x^3-4):(5x^3-x) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{-x^3 \mp \frac{x}{5}}{\frac{x}{5} - 4}$$

$$\int \frac{x^3-4}{5x^3-x} dx = \int \left(\frac{1}{5} + \frac{\frac{x}{5}-4}{5x^3-x} \right) dx = \int \frac{dx}{5} + \frac{1}{25}\int \frac{x-20}{x^3-\frac{1}{5}x} dx.$$

$$3A=-1;\quad A=-\frac{1}{3}.\qquad B=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}.$$

A és B értékét a differenciálás módszerével is meghatározzuk:

$$p(x)=5x-6;\; q(x)=(x-1)(x+2);\; q'(x)=x+2+x-1=2x+1.$$

$$A=\frac{p(1)}{q'(1)}=\frac{-1}{3};\; B=\frac{p(-2)}{q'(-2)}=\frac{-16}{-3}=\frac{16}{3}.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int\frac{x^4}{(x-1)(x+2)}\,dx=$$

$$=\int(x^2-x+3)\,dx-\int\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{16}{3}\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{16}{3}\ln|x+2|+C.$$

b) *A nevezőnek csak valós gyökei vannak, de többszörös gyökök is előfordulnak.* Ekkor $q(x)$ gyöktényezős alakja:

$$q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_r)^{\alpha_r},\ \text{ahol}\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i=n;$$

tehát az n-edfokú $q(x)$ polinomnak r különböző valós gyöke van.

Igazolható, hogy ebben az esetben $\frac{p(x)}{q(x)}$ az alábbi alakú résztörtekre bontható:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(x-x_r)^{\alpha_r}}=$$

$$=\frac{A_{11}}{x-x_1}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+$$

$$+\frac{A_{21}}{x-x_2}+\frac{A_{22}}{(x-x_2)^2}+\dots+\frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}+\dots$$

$$\dots+\frac{A_{r1}}{x-x_r}+\frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2}+\dots+\frac{A_{r\alpha_r}}{(x-x_r)^{\alpha_r}}.$$

Gyakorló feladatok

5. $\int\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}\,dx=?$ A nevezőnek csak egy gyöke van, és az valós és háromszoros. Ilyenkor a parciális törtek együtthatói az együtthatók egyeztetésével határozhatók meg a legegyszerűbben. Az együtthatókat ismét index nélküli nagybetűkkel jelöljük.

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}\equiv\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}.$$

A jobb oldalt közös (a bal oldallal egyező) nevezőre hozva, a számlálókra az alábbi azonosság érvényes:

$$3x^2+4x-6\equiv A(x+2)^2+B(x+2)+C.$$

A jobb oldalt is x fogyó hatványai szerint rendezzük:

$$3x^2+4x-6\equiv A(x^2+4x+4)+Bx+2B+C;$$

$$3x^2+4x-6\equiv Ax^2+(4A+B)x+4A+2B+C.$$

Az együtthatók egyeztetéséből adódó egyenletrendszer:

$$A=3$$

$$4A+B=4$$

$$\underline{4A+2B+C=-6}$$

$$A=3;\; B=4-12=-8;\; C=-6-12+16=-2.$$

Ha a differenciálás módszerét akarjuk alkalmazni az egyetlen — többszörös — valós gyökkel rendelkező nevező esetén parciális törtek számlálóinak meghatározására, akkor ismernünk kell a $p(x)$-szel jelölt számláló deriváltjait. Ha ugyanis $\frac{p(x)}{q(x)}=$ $=\frac{p(x)}{(x-x_1)^n}$ alakú, akkor a parciális törtekre bontott alak:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{A_n}{(x-x_1)^n},$$

és ekkor

$$A_1=\frac{p^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!};\quad A_2=\frac{p^{(n-2)}(x_1)}{(n-2)!};\ \dots;$$

$$A_n=\frac{p(x_1)}{0!}=p(x_1),\ \text{általában}\ A_k=\frac{p^{(n-k)}(x_1)}{(n-k)!},\ \text{ahol}\ 1\leqq k\leqq n.$$

Példánkra visszatérve:

$$p(x) = 3x^2+4x-6;\quad p'(x) = 6x+4;\quad p''(x)=6.$$

Most a megfelelő számlálók:

$$A = \frac{p''(-2)}{2!} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$B = \frac{p'(-2)}{1!} = \frac{-12+4}{1} = -8;$$

$$C = p(-2) = 3\cdot 4+4(-2)-6 = -2.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}\,dx = \int \left[\frac{3}{x+2}-\frac{8}{(x+2)^2}-\frac{2}{(x+2)^3}\right] dx =$$

$$= 3\ln|x+2|+\frac{8}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+C.$$

Felhasználhatjuk a feladat megoldásához a nevező gyökeinek helyettesítését is, de mivel egyetlen gyöktényező van, ezért csak egy ismeretlent tudunk ezzel az eljárással meghatározni. Felírjuk a parciális tört alakot:

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} \equiv \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}.$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, majd a két (egyenlő nevezőjű) tört számlálóját tesszük egyenlővé:

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} \equiv \frac{A(x+2)^2+B(x+2)+C}{(x+2)^3};$$

$$3x^2+4x-6 \equiv A(x+2)^2+B(x+2)+C.$$

Behelyettesítjük az $x=-2$ értéket (ez az egyetlen gyök):

$$12-8-6 = C;\quad C=-2.$$

Több együtthatót nem tudunk meghatározni ezzel a módszerrel. A további két ismeretlent úgy számítjuk ki, hogy az azonosságban x helyébe lehetőleg kis egész számokat helyettesítünk, majd az így kapott kétismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk.

Legyen mondjuk $x=0$, ill. -1.

$$-6 = 4A+2B-2$$

$$\underline{3-4-6 = A+B-2}$$

$$B = -2-2A$$

$$-7 = A-2-2A-2$$

$$A=3;\quad B = -2-6 = -8.$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+2}{(x-3)^4}\,dx = ?$

I. Megoldás:

$$\frac{x^3-4x^2+2}{(x-3)^4} \equiv \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-3)^3}+\frac{D}{(x-3)^4}.$$

A határozatlan együtthatókat először a differenciálás módszerével számítjuk ki.

$$f(x) = x^3-4x^2+2;\ f'(x) = 3x^2-8x;\ f''(x) = 6x-8;\ f'''(x)=6;$$

$$A = \frac{f'''(3)}{3!} = \frac{6}{6} = 1;\quad B = \frac{f''(3)}{2!} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$C = \frac{f'(3)}{1!} = \frac{27-24}{1} = 3;\quad D = f(3) = 27-36+2 = -7.$$

II. Megoldás:

Határozzuk meg az együtthatókat az együtthatók egyeztetése útján is:

$$\frac{x^3-4x^2+2}{(x-3)^4} \equiv \frac{A(x-3)^3+B(x-3)^2+C(x-3)+D}{(x-3)^4}.$$

$$x^3-4x^2+2 \equiv A(x^3-9x^2+27x-27)+B(x^2-6x+9)+Cx-3C+D;$$

$$x^3-4x^2+2 \equiv Ax^3+(-9A+B)x^2+(27A-6B+C)x-27A+9B-3C+D;$$

Az ebből leolvasható egyenletrendszer:

$$A=1$$

$$-9A+B = -4$$

$$27A-6B+C = 0$$

$$\underline{-27A+9B-3C+D = 2}$$

$$B = -4+9 = 5;$$

$$C = 6B-27A = 30-27 = 3;$$

$$D = 2+27A-9B+3C = 2+27-45+9 = -7.$$

Mindkét módszerrel természetesen ugyanazokat az együtthatókat kaptuk.

Az integrál tehát:

$$\int \frac{x^3-4x^2+2}{(x-3)^4}\,dx = \int\left[\frac{1}{x-3}+\frac{5}{(x-3)^2}+\frac{3}{(x-3)^3}-\frac{7}{(x-3)^4}\right]dx =$$

$$= \ln|x-3|+5\,\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+3\,\frac{(x-3)^{-2}}{-2}-7\,\frac{(x-3)^{-3}}{-3}+C =$$

$$= \ln|x-3|-\frac{5}{x-3}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{7}{3}\,\frac{1}{(x-3)^3}+C.$$

7. $$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2}\,dx = ?$$

$$\frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B_1}{x-3}+\frac{B_2}{(x-3)^2}.$$

(Ilyen esetben a differenciálás módszere már nagyon komplikált, ezért nem alkalmazzuk.)

I. Megoldás:

Meghatározzuk az együtthatókat az egyenlő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításával.

$$\frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} \equiv \frac{A(x-3)^2+B_1(x-1)(x-3)+B_2(x-1)}{(x-1)(x-3)^2}.$$

$$5x-3 \equiv A(x-3)^2+B_1(x-1)(x-3)+B_2(x-1);$$

$$5x-3 \equiv A(x^2-6x+9)+B_1(x^2-4x+3)+B_2x-B_2;$$

$$5x-3 \equiv (A+B_1)x^2+(-6A-4B_1+B_2)x+9A+3B_1-B_2.$$

Az adódó egyenletrendszer:

$$A+B_1 = 0$$
$$-6A-4B_1+B_2 = 5$$
$$\underline{9A+3B_1-B_2 = -3}$$

$$A=-B_1$$
$$6B_1-4B_1+B_2 = 5$$
$$\underline{-9B_1+3B_1-B_2 = -3}$$

$$A=-B_1$$
$$2B_1+B_2 = 5$$
$$\underline{-6B_1-B_2 = -3}$$

$$2B_1-6B_1 = 2;\quad B_1 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$-1+B_2 = 5;\quad B_2=6.$$

$$A = \frac{1}{2}.$$

II. Megoldás:

A nevező gyökeinek behelyettesítésével csak részben határozhatjuk meg az együtthatókat, mert a nevezőnek többszörös gyökei vannak.

$$5x-3 \equiv A(x-3)^2+B_1(x-1)(x-3)+B_2(x-1).$$

A megfelelő gyökök $x=1$ és 3, ezeket behelyettesítjük:

ha $x=1$, $5-3=4A$; $A=\dfrac{1}{2}$;

ha $x=3$, $12=2B_2$; $B_2=6$.

Több együtthatót ezzel a módszerrel már nem tudunk meghatározni, ezért a két együttható ismeretében egy tetszőleges x érték behelyettesítése révén határozzuk meg B_1 értékét.
Legyen $x=0$.

$$-3 = 9A+3B_1-B_2;$$

$$-3 = \frac{9}{2}+3B_1-6;$$

$$3B_1 = 3-\frac{9}{2} = -\frac{3}{2};\quad B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Az integrál tehát:

$$\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2}\,dx = \int\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-3}+\frac{6}{(x-3)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}+6\int\frac{dx}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x-3|+6\,\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{6}{x-3}+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|-\frac{6}{x-3}+C.$$

8. $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2}\,dx = ?$ A nevezőben két kétszeres gyök van. A parciális törtek:

$$\frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2} \equiv \frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2};$$

közös nevezőre hozva:

$$\frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{A_1(x+1)(x-1)^2+A_2(x-1)^2+B_1(x-1)(x+1)^2+B_2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

I. Megoldás:

A_1, A_2, B_1, B_2 értékét az együtthatók egyeztetésével számítjuk ki. Ezért fogyó hatványok szerint rendezzük a számlálót:

$$2x-4 \equiv A_1(x+1)(x^2-2x+1)+A_2(x^2-2x+1)+$$
$$+B_1(x-1)(x^2+2x+1)+B_2(x^2+2x+1);$$
$$2x-4 \equiv A_1(x^3+x^2-2x^2-2x+x+1)+A_2(x^2-2x+1)+$$
$$+B_1(x^3-x^2+2x^2-2x+x-1)+B_2(x^2+2x+1);$$
$$2x-4 \equiv (A_1+B_1)x^3+(-A_1+A_2+B_1+B_2)x^2+$$
$$+(-A_1-2A_2-B_1+2B_2)x+A_1+A_2-B_1+B_2.$$

Az egyenletrendszer:

$$A_1+B_1 = 0$$
$$-A_1+A_2+B_1+B_2 = 0$$
$$-A_1-2A_2-B_1+2B_2 = 2$$
$$\underline{A_1+A_2-B_1+B_2 = -4}$$

$$A_1 = -B_1 \qquad \text{I.}$$
$$2B_1+A_2+B_2 = 0 \qquad \text{II.}$$
$$-2A_2+2B_2 = 2 \qquad \text{III.}$$
$$\underline{-2B_1+A_2+B_2 = -4} \qquad \text{IV.}$$

II.—IV.:

$$4B_1=4; \quad B_1=1.$$

I.-be:

$$A_1=-1.$$

Ezeket felhasználva:

$$2+A_2+B_2 = 0 \qquad \text{II.}$$
$$\underline{A_2-B_2 = -1} \qquad \text{III.}$$

II.+III.

$$2A_2+2 = -1; \quad A_2 = -\frac{3}{2}.$$

III.-ba:

$$B_2 = A_2+1 = -\frac{3}{2}+1 = -\frac{1}{2}.$$

Az együtthatók tehát:

$$A_1 = -1; \quad A_2 = -\frac{3}{2}; \quad B_1 = 1; \quad B_2 = -\frac{1}{2}.$$

II. Megoldás:

Az együtthatókat a nevező gyökeinek és alkalmasan választott x értékeknek a behelyettesítésével is meghatározzuk.

$$2x-4 \equiv A_1(x+1)(x-1)^2+A_2(x-1)^2+B_1(x-1)(x+1)^2+B_2(x+1)^2.$$

Legyen $x=-1$, akkor $-6=4A_2$; $A_2=-\dfrac{3}{2}$.

Legyen $x=1$, akkor $-2=4B_2$; $B_2=-\dfrac{1}{2}$.

Legyenek $x=0$, ill. $x=2$ az önkényesen választott x értékek, akkor

$$-4 = A_1+A_2-B_1+B_2$$
$$\underline{0 = 3A_1+A_2+9B_1+9B_2}$$

Ide behelyettesítjük A_2 és B_2 ismert értékét, ezután már csak kétismeretlenes egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$-4 = A_1 - \frac{3}{2} - B_1 - \frac{1}{2}$$

$$0 = 3A_1 - \frac{3}{2} + 9\,B_1 - \frac{9}{2}$$

$$-2 = A_1 - B_1 \qquad \text{I.}$$

$$2 = A_1 + 3B_1 \qquad \text{II.}$$

II. − I.

$$4 = 4B_1; \quad B_1 = 1.$$

$$A_1 = B_1 - 2 = -1.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \int \left[\frac{-1}{x-1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2}\right] dx =$$

$$= -\ln|x+1| - \frac{3}{2}\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1} + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} + C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^3-x^2+2x+5}{(x+2)^2(x-1)^2}\,dx = ?$ Az integrandust parciális törtekre bontjuk, majd az ismeretlen együtthatókat az előbbi feladat megoldása során felhasznált mindkét módszerrel meghatározzuk.

$$\frac{2x^3-x^2+2x+5}{(x+2)^2(x-1)^2} \equiv \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2};$$

$$\frac{2x^3-x^2+2x+5}{(x+2)^2(x-1)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{A_1(x+2)\,(x-1)^2 + A_2(x-1)^2 + B_1(x-1)\,(x+2)^2 + B_2(x+2)^2}{(x+2)^2(x-1)^2};$$

I. Megoldás:

$$2x^3-x^2+2x+5 \equiv A_1(x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2) + A_2(x^2-2x+1) +$$

$$+ B_1(x^3-x^2+4x^2-4x+4x-4) + B_2(x^2+4x+4) \equiv$$

$$\equiv (A_1+B_1)x^3 + (A_2+3B_1+B_2)x^2 + (-3A_1-2A_2+4B_2)x +$$

$$+ 2A_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2;$$

Az együtthatók egyeztetéséből adódó egyenletrendszer:

$$A_1 + B_1 = 2 \qquad \text{I.}$$

$$A_2 + 3B_1 + B_2 = -1 \qquad \text{II.}$$

$$-3A_1 - 2A_2 + 4B_2 = 2 \qquad \text{III.}$$

$$2A_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2 = 5 \qquad \text{IV.}$$

Az első egyenletből:

$$A_1 = 2 - B_1, \qquad \text{I.}$$

ezt behelyettesítve:

$$A_2 + 3B_1 + B_2 = -1 \qquad \text{II.}$$

$$-6 + 3B_1 - 2A_2 + 4B_2 = 2 \qquad \text{III.}$$

$$4 - 2B_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2 = 5 \qquad \text{IV.}$$

A második egyenletből:

$$3B_1 = -A_2 - B_2 - 1, \qquad \text{II.}$$

ezt behelyettesítve:

$$-A_2 - B_2 - 1 - 2A_2 + 4B_2 = 8 \qquad \text{III.}$$

$$2A_2 + 2B_2 + 2 + A_2 + 4B_2 = 1 \qquad \text{IV.}$$

rendezve:

$$3B_2 - 3A_2 = 9 \qquad \text{III.}$$

$$3A_2 + 6B_2 = -1 \qquad \text{IV.}$$

III. + IV.:

$$9B_2 = 8; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

$$3A_2 + \frac{16}{3} = -1; \quad A_2 = -\frac{19}{9}.$$

Visszahelyettesítve II.-be:

$$3B_1 = \frac{19}{9}-\frac{8}{9}-\frac{9}{9} = \frac{2}{9}; \quad B_1 = \frac{2}{27}.$$

Visszahelyettesítve I.-be:

$$A_1 = 2-\frac{2}{27} = \frac{52}{27}.$$

Tehát a kapott együtthatók:

$$A_1 = \frac{52}{27}; \quad A_2 = -\frac{19}{9}; \quad B_1 = \frac{2}{27}; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

II. Megoldás:

Az együtthatókat meghatározzuk még a nevező gyökhelyeinek, ill. tetszőleges más x értékeknek behelyettesítésével is. Felírjuk újra a számlálókra adódó azonosságot:

$$2x^3-x^2+2x+5 \equiv$$

$$\equiv A_1(x+2)(x-1)^2+A_2(x-1)^2+B_1(x-1)(x+2)^2+B_2(x+2)^2.$$

A nevező gyökei 1 és -2, ezért legyen $x=1$, akkor

$$2-1+2+5 = 9B_2; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

Legyen $x=-2$, akkor $-16-4-4+5 = 9A_2$; $A_2 = -\frac{19}{9}$.

Legyen $x=0$, ill. $x=-1$ (ezek már tetszőleges számok); akkor

$$5 = 2A_1+A_2-4B_1+4B_2$$

$$\underline{-2-1-2+5 = 4A_1+4A_2-2B_1+B_2}$$

Behelyettesítjük A_2 és B_2 értékét, majd megoldjuk a kétismeretlenes egyenletrendszert:

$$5 = 2A_1-\frac{19}{9}-4B_1+\frac{32}{9} \qquad \text{I.}$$

$$0 = 4A_1-\frac{76}{9}-2B_1+\frac{8}{9} \qquad \text{II.}$$

$$\frac{45}{9}-\frac{13}{9} = 2A_1-4B_1 \qquad \text{I.}$$

$$\frac{68}{9} = 4A_1-2B_1 \qquad \text{II.}$$

$$\frac{32}{9} = 2A_1-4B_1 \qquad \text{I.}$$

$$\frac{68}{9} = 4A_1-2B_1 \qquad \text{II.}$$

$-2\cdot$I.+II.:

$$+\frac{4}{9} = 6B_1; \quad B_1 = \frac{2}{27}.$$

$$2A_1 = \frac{32}{9}+\frac{8}{27}; \quad A_1 = \frac{16}{9}+\frac{4}{27} = \frac{52}{27}.$$

Az együtthatók tehát

$$A_1 = \frac{52}{27}; \quad A_2 = -\frac{19}{9}; \quad B_1 = \frac{2}{27}; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

A feladat megoldása:

$$\int \frac{2x^3-x^2+2x+5}{(x+2)^2(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \int \left[\frac{52}{27}\frac{1}{x+2}-\frac{19}{9}\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{2}{27}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{9}\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{52}{27}\ln|x+2|-\frac{19}{9}\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+\frac{2}{27}\ln|x-1|+\frac{8}{9}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C =$$

$$= \frac{52}{27}\ln|x+2|+\frac{19}{9}\frac{1}{x+2}+\frac{2}{27}\ln|x-1|-\frac{8}{9}\frac{1}{x-1}+C.$$

c) *A $\frac{p(x)}{q(x)}$ alakú integrandus nevezőjének, $q(x)$-nek, nem minden gyöke valós.* Mint az algebrából ismeretes, a komplex gyökök párosával lépnek fel: ha egy z_0 komplex szám gyöke $q(x)$-nek, akkor konjugáltja, $\bar{z}_0$ szintén gyök. Az ezeknek megfelelő elsőfokú gyöktényező, $(x-z_0)$, ill. $(x-\bar{z}_0)$, már nem valós kifejezés, azonban a konjugált gyökök gyöktényezőinek szorzata egy valós másodfokú gyöktényezőt ad, amely nem bontható fel valós elsőfokú kifejezések szorzatára. Ha a nevezőnek többszörös valós gyöktényezői, valamint egyszeres komplex gyöktényezői vannak, vagyis a nevező gyöktényezős alakja

$$q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_r)^{\alpha_r}(x^2+b_1x+c_1)\dots(x^2+b_sx+c_s),$$

akkor

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{A_{1i}}{(x-x_1)^i}+\dots+\sum_{j=1}^{\alpha_r}\frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j}+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{B_2x+C_2}{x^2+b_2x+c_2}+\dots+\frac{B_sx+C_s}{x^2+b_sx+c_s}.$$

Amennyiben a nevezőnek többszörös komplex gyökei is vannak, vagyis a valós elsőfokú gyöktényezők szorzatára nem bontható másodfokú gyöktényezőknek egynél magasabb hatványa is szerepel, akkor a nevező:

$$q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_r)^{\alpha_r}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\dots(x^2+b_sx+c_s)^{\beta_s},$$

és a parciális tört alakja:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1}\frac{A_{1i}}{(x-x_1)^i}+\dots+\sum_{j=1}^{\alpha_r}\frac{A_{rj}}{(x-x_r)^j}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\beta_1}\frac{B_{1k}x+C_{1k}}{(x^2+b_1x+c_1)^k}+\dots+\sum_{l=1}^{\beta_s}\frac{B_{sl}x+C_{sl}}{(x^2+b_sx+c_s)^l}.$$

Megjegyzés: A feladatokban az együtthatókat index nélküli nagybetűkkel jelöljük.

Gyakorló feladatok

10. $\displaystyle\int\frac{5}{x(x^2+4)}\,dx = ?$ A nevező nem alakítható át elsőfokú tényezők szorzatává, hiszen az (x^2+4) tényező diszkriminánsa $D<0$. Tehát az integrandus parciális tört alakja a következő:

$$\frac{5}{x(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4};$$

$$\frac{5}{x(x^2+4)} \equiv \frac{A(x^2+4)+Bx^2+Cx}{x(x^2+4)}.$$

A számlálók azonossága — x hatványai szerint rendezve —

$$5 \equiv (A+B)x^2+Cx+4A.$$

Az együtthatók egyeztetéséből adódó egyenletrendszer:

$$A+B = 0$$

$$C=0$$

$$\underline{4A=5}$$

$$A = \frac{5}{4};\quad B = -\frac{5}{4};\quad C = 0.$$

Tehát:

$$\int\frac{5}{x(x^2+4)}\,dx = \int\left(\frac{5}{4}\,\frac{1}{x}-\frac{5}{4}\,\frac{x}{x^2+4}\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{5}{4}\,\frac{1}{x}-\frac{5}{8}\,\frac{2x}{x^2+4}\right)dx = \frac{5}{4}\ln|x|-\frac{5}{8}\ln(x^2+4)+C =$$

$$= \frac{5}{8}\ln x^2-\frac{5}{8}\ln(x^2+4)+C = \frac{5}{8}\ln\frac{x^2}{x^2+4}+C.$$

Meghatározhatjuk az ismeretlen együtthatókat alkalmas x értékek helyettesítésével is, bár — mint látni fogjuk — ez a módszer jelen esetben nem egyszerűbb.

$$5 \equiv A(x^2+4)+Bx^2+Cx.$$

Legyen $x=0$ (az egyetlen valós gyök), akkor $5=4A$, és $A=\dfrac{5}{4}$.

Legyen $x=1$ és $x=-1$ a két tetszőleges helyettesítési érték; ezekből!

$$5=\frac{5}{4}\cdot 5+B+C \qquad \text{I.}$$

$$5=\frac{5}{4}\cdot 5+B-C \qquad \text{II.}$$

I.+II.:

$$10=\frac{50}{4}+2B;\quad B=-\frac{5}{4}.$$

$$C=5-\frac{25}{4}+\frac{5}{4}=0.$$

11. $$\int\frac{2x^2}{x^4-1}dx=\int\frac{2x^2}{(x^2-1)(x^2+1)}dx=\int\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}dx=?$$

A nevező két elsőfokú egyszeres gyöktényezőt és egy elsőfokú tényezők szorzatára nem bontható másodfokú egyszeres gyöktényezőt tartalmaz. Végezzük el a parciális törtekre bontást:

$$\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1};$$

$$\frac{2x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}\equiv$$

$$\equiv\frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)};$$

$$2x^2\equiv A(x^3-x^2+x-1)+B(x^3+x^2+x+1)+C(x^3-x)+D(x^2-1);$$

$$2x^2\equiv(A+B+C)x^3+(-A+B+D)x^2+(A+B-C)x-A+B-D.$$

Az együtthatók egyeztetéséből felírható egyenletrendszer:

$$A+B+C=0 \qquad \text{I.}$$
$$-A+B+D=2 \qquad \text{II.}$$
$$A+B-C=0 \qquad \text{III.}$$
$$-A+B-D=0 \qquad \text{IV.}$$

I.−III.

$$2C=0;\quad C=0.$$

III.-ba:

$$A+B=0\quad A=-B$$
$$2B+D=2 \qquad \text{II.}$$
$$2B-D=0 \qquad \text{IV.}$$

$$4B=2;\quad B=\frac{1}{2};\quad A=-\frac{1}{2};\quad D=1.$$

A keresett együtthatók tehát:

$$A=-\frac{1}{2};\quad B=\frac{1}{2};\quad C=0;\quad D=1.$$

Most meghatározzuk az együtthatókat alkalmasan választott x értékek behelyettesítésével is:

$$2x^2\equiv A(x-1)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1).$$

Legyen $x=1$ (az egyik valós gyök), akkor $2=4B$; $B=\frac{1}{2}$.

Legyen $x=-1$ (a másik valós gyök), akkor $2=-4A$; $A=-\frac{1}{2}$.

Ezenkívül valasszuk még x értékét 0-nak és 2-nek. Ekkor

$$0=-A+B-D$$
$$8=5A+15B+6C+3D$$

$$0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-D$$
$$8=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}+6C+3D$$

$$D=1$$

$$3=6C+3;\quad C=0.$$

A feladat megoldása tehát

$$\int\frac{2x^2}{x^4-1}dx=\int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\operatorname{arc\,tg}x+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=?$ A nevezőben levő másodfokú polinom nem alakítható valós gyöktényezők szorzatává, mert az $x^2-2x+5=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív ($D=4-20=-16$). A tört nevezőjében tehát kétszeres komplex gyökök vannak.

$$\frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2-2x+5)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+5}.$$

A jobb oldalon közös nevezőre hozunk, majd az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlőségét felhasználva felírjuk az ismeretlen A, B, C, D együtthatók egyenletrendszerét.

$$\frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2}\equiv\frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2}\equiv$$

$$\equiv\frac{Ax+B+Cx^3+Dx^2-2Cx^2-2Dx+5Cx+5D}{(x^2-2x+5)^2}\equiv$$

$$\equiv\frac{Cx^3+(D-2C)x^2+(A+5C-2D)x+5D+B}{(x^2-2x+5)^2}.$$

Az egyenletrendszer:

$C=0$ I.

$D-2C=3$ II.

$A+5C-2D=0$ III.

$5D+B=6$ IV.

$C=0$, tehát II.-ből $D=3$, ezt a III.-ba helyettesítve:

$A-6=0$, vagyis $A=6$.

A IV.-ből kapjuk: $15+B=6$, vagyis $B=-9$.

$$\int\frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=\int\frac{6x-9}{(x^2-2x+5)^2}\,dx+\int\frac{3}{x^2-2x+5}\,dx=$$

$$=3\int\frac{2x-2-1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx+\int\frac{3}{x^2-2x+5}\,dx=$$

$$=3\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx-3\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}+3\int\frac{dx}{x^2-2x+5}.$$

Legyen

$$I_1=3\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx,\quad I_2=-3\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2},$$

$$I_3=3\int\frac{dx}{x^2-2x+5}.$$

$$I_1=3\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=$$

$$=3\int(2x-2)(x^2-2x+5)^{-2}\,dx=-\frac{3}{x^2-2x+5}+C_1.$$

$$I_2=-3\int\frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2},$$

ezt $x-1=u$, $dx=du$ helyettesítéssel alakítjuk át, majd az **1. f)** pontban levezetett rekurziós formulával határozzuk meg.

$$I_2=-3\int\frac{du}{(u^2+4)^2}.$$

Mivel

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C,$$

ezért

$$I_2=-\frac{3}{2\cdot4}\,\frac{u}{u^2+4}-\frac{3}{2\cdot8}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2}+C_2=$$

$$=-\frac{3}{8}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+4}-\frac{3}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C_2.$$

$$I_3=3\int\frac{dx}{x^2-2x+5}=3\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}.$$

Ezt is az $x-1=u$, $dx=du$ helyettesítéssel alakítjuk át, majd figyelembe vesszük, hogy

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

$$I_3=3\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2}+C_3=\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C_3.$$

Összegezve a részeredményeket, a feladat megoldása:

$$\int\frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=$$

$$=-\frac{3}{x^2-2x+5}-\frac{3}{8}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+4}-\frac{3}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C=$$

$$=-\frac{3}{x^2-2x+5}-\frac{3}{8}\,\frac{x-1}{x^2-2x+5}+\frac{21}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}+C.$$

13. $\int \frac{2x^3-4x^2+x-5}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx = ?$ A nevezőben egy valós gyöktényező és egy kétszeres komplex gyöktényező van.

A törtet parciális törtek összegére bontjuk:

$$\frac{2x^3-4x^2+x-5}{(x-1)(x^2+4)^2} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+4)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, elvégezzük a kijelölt műveleteket, majd az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlőségéből felírható egyenletrendszert megoldjuk.

$$\frac{2x^3-4x^2+x-5}{(x-1)(x^2+4)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(x^2+4)^2+(Bx+C)(x-1)+(Dx+E)(x^2+4)(x-1)}{(x-1)(x^2+4)^2};$$

$$2x^3-4x^2+x-5 \equiv$$

$$\equiv A(x^4+8x^2+16)+Bx^2+Cx-Bx-C+(Dx+E)(x^3+4x-x^2-4) \equiv$$

$$\equiv Ax^4+8Ax^2+16A+Bx^2+Cx-Bx-C+Dx^4+Ex^3+4Dx^2+$$

$$+4Ex-Dx^3-Ex^2-4Dx-4E \equiv x^4(A+D)+x^3(E-D)+$$

$$+x^2(8A+B+4D-E)+x(C-B+4E-4D)+(16A-C-4E).$$

Az együtthatók egyenletrendszere:

$$\begin{array}{ll}
A+D=0 & \text{I.}\\
E-D=2 & \text{II.}\\
8A+B+4D-E=-4 & \text{III.}\\
C-B+4E-4D=1 & \text{IV.}\\
\underline{16A-C-4E=-5} & \text{V.}
\end{array}$$

D-vel kifejezzük A-*t* és E-t:

$$\begin{array}{ll}
A=-D; \quad E=2+D. & \\
-8D+B+4D-2-D=-4 & \text{III.}\\
C-B+8+4D-4D=1 & \text{IV.}\\
\underline{-16D-C-8-4D=-5} & \text{V.}\\
B-5D=-2 & \text{III.}\\
C-B=-7 & \text{IV.}\\
\underline{-20D-C=3} & \text{V.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
C=B-7\\
B-5D=-2\\
\underline{-20D-B+7=3.}
\end{array}$$

A két egyenletet összeadjuk:

$$-25D=-6, \quad \text{ebből} \quad D=\frac{6}{25};$$

$$B=5\cdot\frac{6}{25}-2=\frac{6}{5}-\frac{10}{5}=-\frac{4}{5};$$

$$C=B-7=-\frac{4}{5}-\frac{35}{5}=-\frac{39}{5};$$

$$A=-D=-\frac{6}{25}; \quad E=2+D=\frac{50}{25}+\frac{6}{25}=\frac{56}{25}.$$

Az együtthatók:

$$A=-\frac{6}{25}; \quad B=-\frac{4}{5}; \quad C=-\frac{39}{5}; \quad D=\frac{6}{25}; \quad E=\frac{56}{25}.$$

Az integrandus törzstényezős felbontása:

$$\frac{2x^3-4x^2+x-5}{(x-1)(x^2+4)^2} \equiv -\frac{6}{25}\frac{1}{x-1}+\frac{-\frac{4}{5}x-\frac{39}{5}}{(x^2+4)^2}+\frac{\frac{6}{25}x+\frac{56}{25}}{x^2+4}=$$

$$=-\frac{6}{25}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{5}\frac{4x+39}{(x^2+4)^2}+\frac{1}{25}\frac{6x+56}{x^2+4}.$$

$$\int \frac{2x^3-4x^2+x-5}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx=$$

$$=-\frac{6}{25}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{5}\int\frac{4x+39}{(x^2+4)^2}\,dx+\frac{1}{25}\int\frac{6x+56}{x^2+4}\,dx=$$

$$=-\frac{6}{25}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{2}{5}\int\frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx-\frac{39}{5}\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}+$$

$$+\frac{3}{25}\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx+\frac{56}{25}\int\frac{dx}{x^2+4}.$$

Az egyes integrálok meghatározása:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|+C_1;$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx = \int 2x(x^2+4)^{-2}\,dx = -\frac{1}{x^2+4}+C_2;$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = ?$$

A III. 1. pontban meghatároztuk az integrált:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{2\cdot 8}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C_3 =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4}+\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C_3;$$

$$\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \ln(x^2+4)+C_4;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C_5.$$

A feladat megoldása:

$$\int \frac{2x^3-4x^2+x-5}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{6}{25}\ln|x-1|+\frac{2}{5}\frac{1}{x^2+4}-\frac{39}{5}\cdot\frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4}-\frac{39}{5}\cdot\frac{1}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{3}{25}\ln(x^2+4)+\frac{56}{25}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C =$$

$$= -\frac{6}{25}\ln|x-1|+\frac{2}{5}\frac{1}{x^2+4}-\frac{39}{40}\frac{x}{x^2+4}-\frac{39}{80}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{3}{25}\ln(x^2+4)+\frac{28}{25}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C.$$

IV. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEINEK INTEGRÁLÁSA

1. Egyszerűbb speciális típusok

a) $\sin^{2n+1}x\cos^k x$ *alakú integrandus.* Amennyiben az integrandusban $\sin x$ páratlan hatvánnyal lép fel ($\cos x$ pedig tetszőleges hatvánnyal), akkor a színuszt tartalmazó tényezőt átalakíthatjuk az alábbi módon:

$$\sin^{2n+1}x = \sin x\sin^{2n}x = \sin x(1-\cos^2 x)^n.$$

Az integrandus így a következő alakot veszi fel:

$$\sin^{2n+1}x\cos^k x = \sin x(1-\cos^2 x)^n\cos^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, az összeg minden egyes tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ típusú lesz, tehát az integrálás tagonként elvégezhető.

b) $\cos^{2n+1}x\sin^k x$ *alakú integrandus.* Ha az integrandusban $\cos x$ páratlan hatványa lép fel ($\sin x$-nek pedig tetszőleges hatványa), akkor a $\cos^{2n+1}x$ tényezőt alakíthatjuk szorzattá:

$$\cos^{2n+1}x\sin^k x = \cos x(1-\sin^2 x)^n\sin^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, az integrandus minden tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ alakú lesz, vagyis integrálja közvetlenül felírható.

Gyakorló feladatok

1. $$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx =$$

$$= \int (\sin x-\cos^2 x\sin x)\,dx =$$

$$= -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C = -\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

2. $\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx =$

$$= \int (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx =$$

$$= \int (\sin x - 2\cos^2 x \sin x + \cos^4 x \sin x)\,dx =$$

$$= \int \sin x\,dx - 2\int \cos^2 x \sin x\,dx + \int \cos^4 x \sin x\,dx.$$

Mindhárom integrál közvetlenül felírható, mert az első alapintegrál, a másik kettő integrandusa pedig $f^n(x)f'(x)$ alakú.

$$\int \sin^5 x\,dx = -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

3. $\int \cos^2 x \sin^5 x\,dx = \int \cos^2 x(1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx =$

$$= \int \cos^2 x(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx =$$

$$= \int (\cos^2 x \sin x - 2\cos^4 x \sin x + \cos^6 x \sin x)\,dx =$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$$

4. $\int \cos^7 x\,dx = \int \cos^6 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^3 \cos x\,dx =$

$$= \int (1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x)\cos x\,dx =$$

$$= \int (\cos x - 3\sin^2 x\cos x + 3\sin^4 x\cos x - \sin^6 x\cos x)\,dx =$$

$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

5. $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x\,dx =$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx =$$

$$= \int \sin^2 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos x\,dx =$$

$$= \int (\sin^2 x\cos x - 2\sin^4 x\cos x + \sin^6 x\cos x)\,dx =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

Ha az integrandus mindkét szögfüggvényben páratlan hatványú, akkor természetesen teljesen mindegy, hogy melyiket alakítjuk át. Most erre oldunk meg feladatot.

6. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx = ?$ Mindkét módszerrel meghatározzuk az integrált.

I. Megoldás:

$$\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^3 x\,dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^3 x \sin x\,dx = \int (\cos^3 x\sin x - \cos^5 x \sin x)\,dx =$$

$$= -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

II. Megoldás:

$$\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx = \int \sin^3 x\cos^2 x\cos x\,dx =$$

$$= \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx = \int (\sin^3 x\cos x - \sin^5 x\cos x)\,dx =$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

c) $\sin^{2n} x\cos^{2k} x$ *alakú integrandus.* Ha az integrandusban mindkét tényező páros kitevőjű, akkor a kétszeres szögfüggvényekre tanult azonosságokat használhatjuk fel az integrandus átalakítására:

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x;$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Gyakorló feladatok

7. $\int \cos^2 x\,dx = ?$ A harmadik azonosságot írva az integrandus helyébe:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

8. $\int \sin^2 x\,dx = ?$ A második azonosságot felhasználva kapjuk:

$$\int \sin^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

9. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = ?$ Az integrandus előbb az első, majd a második azonosság felhasználásával hozható könnyen integrálható alakra:

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right]+C = \frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

10. $\int \sin^6 x\cos^2 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^2\sin^4 x\,dx =$

$$= \int\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{16}\int \sin^2 2x(1-\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin^2 2x(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\cos^2 2x\,dx.$$

Mindhárom integrált külön számítjuk ki.

Az első integrál:

$$\frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{32}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{32}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+C_1.$$

A második integrál integrandusa könnyen $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható, ezért

$$-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx = -\frac{1}{16}\int \sin^2 2x(2\cos 2x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3}+C_2 = -\frac{1}{48}\sin^3 2x+C_2.$$

A harmadik integrál:

$$\frac{1}{16}\int \sin^2 2x\cos^2 2x\,dx = \frac{1}{16}\int (\sin 2x\cos 2x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(\frac{\sin 4x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{64}\int \sin^2 4x\,dx = \frac{1}{64}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{128}\int (1-\cos 8x)\,dx = \frac{1}{128}\left(x-\frac{\sin 8x}{8}\right)+C_3 = \frac{x}{128}-\frac{\sin 8x}{1024}+C_3.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \sin^6 x\cos^2 x\,dx = \frac{5x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}-\frac{\sin^3 2x}{48}-\frac{\sin 8x}{1024}+C,$$

ahol $C_1+C_2+C_3 = C$.

11. $\int \sin^4 x\,dx = ?$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\frac{2\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C =$$

$$= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

12. $\int \cos^4 x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\frac{2\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C =$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

2. Trigonometrikus függvények általános alakú racionális kifejezésének integrálja

A $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, valamint $\operatorname{ctg} x$ függvények tetszőleges $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ racionális kifejezése integrálható. Mégpedig mindig célravezet a $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítés, amelynek segítségével az integrandus racionális (egész vagy tört) kifejezésbe megy át — ennek integrálásával az előző II., ill. III. fejezetben foglalkoztunk — és ez mindig integrálható.

Ezzel a helyettesítéssel ui. — mint az könnyen belátható —

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Gyakorló feladatok

1. $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx = ?$ Az integrandus $\sin x$-re, ill. $\cos x$-re nézve racionális törtfüggvény.

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx = \int \frac{1+\frac{2t}{t^2+1}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1-t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2+1+2t}{1+t^2-1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+2t+1}{2t^2(1+t^2)}\cdot 2dt = \int \frac{t^2+2t+1}{t^2(t^2+1)}dt.$$

Az integrandus t-ben racionális törtfüggvény, amit parciális törtekre bontunk.

$$\frac{t^2+2t+1}{t^2(t^2+1)} \equiv \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{Ct+D}{t^2+1};$$

$$t^2+2t+1 \equiv At(t^2+1)+B(t^2+1)+(Ct+D)t^2;$$

$$t^2+2t+1 \equiv At^3+At+Bt^2+B+Ct^3+Dt^2;$$

$$t^2+2t+1 \equiv (A+C)t^3+(B+D)t^2+At+B.$$

Az együtthatók egyenlőségéből kapjuk a következő egyenletrendszert:

$A+C = 0$

$B+D = 1$

$A=2$

$\underline{B=1}$

Ebből $C=-A=-2$, és $D = 1-B = 1-1 = 0$.

Behelyettesítve az együtthatókat:

$$\int \frac{t^2+2t+1}{t^2(t^2+1)}dt = \int \left(\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{2t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2\ln t-\frac{1}{t}-\ln(t^2+1)+C = -\frac{1}{t}+\ln\frac{t^2}{t^2+1}+C =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}+C = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\ln\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}+C =$$

$$= -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\ln\sin\frac{x}{2}+C.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\left(-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\ln\sin\frac{x}{2}+C\right)'=\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}+2\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1+\sin x}{1-\cos x}.$$

A feladatot tehát helyesen oldottuk meg.

2. $\int\frac{1}{1+\cos x}dx=?$

I. Megoldás:

A $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad\text{és}\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{1+t^2+1-t^2}=$$

$$=\int dt=t+C=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Differenciáljuk az eredményt!

$$\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Mivel $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, ezért $\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+\cos x}$, és így számításunk helyes volt.

II. Megoldás:

Megoldjuk a feladatot egy másik módon:

Mivel $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, ezért $\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

3. $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=?$

$$\sin x=\frac{2t}{t^2+1};\quad dx=\frac{2\,dt}{t^2+1}.$$

$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2\,dt}{t^2+1}=\int\frac{2\,dt}{t^2+1+2t}=$$

$$=\int\frac{2}{(t+1)^2}dt=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+C.$$

4. $\int\frac{4}{5+6\cos x}dx=?$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

$$\int\frac{4}{5+6\cos x}dx=\int\frac{4}{5+\frac{6-6t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{8}{5+5t^2+6-6t^2}dt=\int\frac{8\,dt}{11-t^2}.$$

A t-re kapott racionális törtfüggvényt 11 kiemelésével alakítjuk át, hogy alapintegrálra jussunk,

$$\frac{1}{11}\int\frac{8\,dt}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)^2}=?$$

Legyen most $u=\frac{t}{\sqrt{11}}$; tehát $dt=\sqrt{11}\,du$.

$$\frac{8}{11}\int\frac{dt}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)^2}=\frac{8}{11}\int\frac{\sqrt{11}\,du}{1-u^2}=\frac{8\sqrt{11}}{11}\int\frac{du}{1-u^2}=I.$$

Az integrál $|u|<1$ esetén:

$$I_1=\frac{8\sqrt{11}}{11}\operatorname{ar\,th}u+C_1=\frac{8\sqrt{11}}{11}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}+C_1=$$

$$=\frac{4\sqrt{11}}{11}\ln\frac{1+\frac{t}{\sqrt{11}}}{1-\frac{t}{\sqrt{11}}}+C_1=\frac{4\sqrt{11}}{11}\ln\frac{\sqrt{11}+t}{\sqrt{11}-t}+C_1=$$

$$=\frac{4\sqrt{11}}{11}\ln\frac{\sqrt{11}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{11}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C_1.$$

Az integrál $|u|>1$ esetén:

$$I_2=\frac{8\sqrt{11}}{11}\operatorname{ar\,cth}u+C_2=\frac{8\sqrt{11}}{11}\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{u+1}{u-1}+C_2=$$

$$=\frac{4\sqrt{11}}{11}\ln\frac{\frac{t}{\sqrt{11}}+1}{\frac{t}{\sqrt{11}}-1}+C_2=\frac{4\sqrt{11}}{11}\ln\frac{t+\sqrt{11}}{t-\sqrt{11}}+C_2=$$

$$=\frac{4\sqrt{11}}{11}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{11}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{11}}+C_2.$$

Az első integrál értelmezési tartománya: $|u|<1$, de $u=\frac{t}{\sqrt{11}}$, tehát $\left|\frac{t}{\sqrt{11}}\right|<1$, vagyis $|t|<\sqrt{11}$.

Mivel $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ezért $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|<\sqrt{11}$, amiből $\left|\frac{x}{2}\right|<\operatorname{arc\,tg}\sqrt{11}\approx$ $\approx\operatorname{arc\,tg}3{,}317\approx 73°\approx 1{,}27$ (radián), vagyis $|x|<2{,}54$.

A második integrál értelmezési tartománya ebből következően $|x|>2{,}54$.

5. $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x\cos x}\,dx=?$

I. Megoldás:

A $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítést alkalmazva, vagyis ha

$$\sin x=\frac{2t}{t^2+1};\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

akkor

$$\int\frac{1}{\sin x\cos x}\,dx=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2}{t(1-t^2)}\,dt.$$

Az integrandus parciális tört előállítása:

$$\frac{1+t^2}{t(1+t)(1-t)}\equiv\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{1-t};$$

$$\frac{1+t^2}{t(1+t)(1-t)}\equiv\frac{A(1-t^2)+Bt(1-t)+Ct(1+t)}{t(1+t)(1-t)}.$$

Az azonosság a számlálók azonosságát is jelenti:

$$1+t^2\equiv A-At^2+Bt-Bt^2+Ct+Ct^2;$$

$$1+t^2\equiv(C-A-B)t^2+(B+C)t+A.$$

Az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlők:

$$\begin{array}{rl}
C-A-B=1 & \text{I.}\\
B+C=0 & \text{II.}\\
\underline{\quad A=1} & \text{III.}\\
C-B=2 & \text{I.+II.}\\
\underline{B+C=0} & \\
2C=2;\quad C=1;\quad B=-1. &
\end{array}$$

Az együtthatókat beírva:

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt =$$

$$= \ln t - \ln(1+t) - \ln(1-t) + C = \ln \frac{t}{1-t^2} + C =$$

$$= \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + C.$$

Mivel $\operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, ezért

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \ln \left|\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \ln 2 + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C_1.$$

II. Megoldás:

Most $t = \cos x$-et helyettesítve alakítjuk át az integrandust racionális törtfüggvénnyé.

Az integrandust bővítjük $\sin x$-szel.

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x}.$$

Mivel $\cos x = t$, ezért $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$, és $dt = -\sin x\,dx$. Mindezeket figyelembe véve:

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x}\,dx = \int \frac{-dt}{(1-t^2)t} = -\int \frac{dt}{t(1-t)(1+t)}.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{t(1-t)(1+t)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t};$$

$$\frac{1}{t(1-t)(1+t)} \equiv \frac{A(1-t^2) + Bt(1+t) + Ct(1-t)}{t(1-t)(1+t)};$$

$$1 \equiv A - At^2 + Bt + Bt^2 + Ct - Ct^2;$$

$$1 \equiv (B-A-C)t^2 + (B+C)t + A.$$

Az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlők:

$$B - A - C = 0$$

$$B + C = 0$$

$$A = 1$$

$$B - C = 1$$

$$B + C = 0$$

$$2B = 1; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Eredményeinket felhasználva

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = -\int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= -\ln t + \frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

III. Megoldás:

A feladatot még egy harmadik módon is megoldjuk:

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\sin x \cos^2 x}}{\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}\,dx = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

6. $\displaystyle\int \frac{2}{1+2\operatorname{tg} x}\,dx = ?$

I. Megoldás:

Legyen $\operatorname{tg} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ és $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt.$

$$\int \frac{2}{1+2\,\mathrm{tg}\,x}\,dx = \int \frac{2}{1+2\frac{2t}{1-t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2}{\frac{1-t^2+4t}{1-t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{4-4t^2}{(1+t^2)(1-t^2+4t)}\,dt =$$

$$= \int \frac{4t^2-4}{(1+t^2)(t^2-4t-1)}\,dt.$$

A nevezőt gyöktényezős alakba kell írnunk:

$$t^2-4t-1=0$$

$$t_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2} = 2\pm\sqrt{5};\quad t_1 = 2+\sqrt{5};\quad t_2 = 2-\sqrt{5}.$$

$$\int \frac{4t^2-4}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)}\,dt.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk.

$$\frac{4t^2-4}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)} \equiv \frac{A}{t-2-\sqrt{5}}+\frac{B}{t-2+\sqrt{5}}+\frac{Ct+D}{t^2+1};$$

$$\frac{4t^2-4}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)} \equiv$$

$$\equiv \frac{A(t^2+1)(t-2+\sqrt{5})+B(t^2+1)(t-2-\sqrt{5})+(Ct+D)(t^2-4t-1)}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)};$$

$$4t^2-4 \equiv A(t^3-2t^2+t^2\sqrt{5}+t-2+\sqrt{5})+$$
$$+B(t^3-2t^2-t^2\sqrt{5}+t-2-\sqrt{5})+Ct^3-4Ct^2-Ct+$$
$$+Dt^2-4Dt-D;$$

$$4t^2-4 \equiv (A+B+C)t^3+(-2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-4C+D)t^2+$$
$$+(A+B-C-4D)t-2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-D.$$

Az egyenlő fokszámú tagok együtthatóinak egyenlőségéből:

$$A+B+C=0 \qquad \text{I.}$$
$$-2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-4C+D=4 \qquad \text{II.}$$
$$A+B-C-4D=0 \qquad \text{III.}$$
$$\underline{-2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-D=-4} \qquad \text{IV.}$$

II.–IV.: $-4C+D+D=8;\quad D=4+2C.$

D értékét a III. egyenletbe helyettesítjük:

$$A+B-C-4(4+2C)=0;$$
$$A+B-C-16-8C=0;$$
$$A+B-9C-16=0.$$

Az I. egyenletet ebből kivonjuk.

$$-10C-16=0;\quad C=-\frac{16}{10}=-\frac{8}{5}.$$

$$D=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}.$$

$$A+B-\frac{8}{5}=0,\quad A+B=\frac{8}{5},\quad A=\frac{8}{5}-B.$$

Eredményünket a IV. egyenletbe helyettesítjük:

$$-\frac{16}{5}+2B+\frac{8\sqrt{5}}{5}-B\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-\frac{4}{5}=-4\cdot 5$$

$$-16+8\sqrt{5}-10B\sqrt{5}-4=-20;$$

$$8\sqrt{5}=10B\sqrt{5};$$

$$B=\frac{4}{5}.$$

$$A=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}.$$

A keresett együtthatók tehát:

$$A=\frac{4}{5};\quad B=\frac{4}{5};\quad C=-\frac{8}{5};\quad D=\frac{4}{5}.$$

Felírjuk az integrált:

$$\int \frac{2}{1+2\,\mathrm{tg}\,x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{4}{5}\,\frac{1}{t-2-\sqrt{5}} + \frac{4}{5}\,\frac{1}{t-2+\sqrt{5}} + \frac{-\frac{8}{5}t+\frac{4}{5}}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{4}{5}\int \left(\frac{1}{t-2-\sqrt{5}} + \frac{1}{t-2+\sqrt{5}} + \frac{-2t+1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{4}{5}\int \frac{dt}{t-2-\sqrt{5}} + \frac{4}{5}\int \frac{dt}{t-2+\sqrt{5}} - \frac{4}{5}\int \frac{2t-1}{t^2+1}\,dt.$$

Először a harmadik integrált számítjuk ki, mert azt még át kell alakítanunk.

$$-\frac{4}{5}\int \frac{2t-1}{t^2+1}\,dt = -\frac{4}{5}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \frac{4}{5}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{4}{5}\ln(t^2+1) + \frac{4}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C_1.$$

$$\int \frac{2}{1+2\,\mathrm{tg}\,x}\,dx = \frac{4}{5}\ln\left(t-2-\sqrt{5}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(t-2+\sqrt{5}\right) -$$

$$-\frac{4}{5}\ln(t^2+1) + \frac{4}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C =$$

$$= \frac{4}{5}\ln\frac{t^2-4t-1}{t^2+1} + \frac{4}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C =$$

$$= \frac{4}{5}\ln\frac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1} + \frac{4}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + C.$$

II. Megoldás:

Legyen $t = \mathrm{tg}\,x$, így $x = \mathrm{arc\,tg}\,x$ és ekkor $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$, vagyis $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Ekkor az integrál

$$\int \frac{2}{1+2\,\mathrm{tg}\,x}\,dx = \int \frac{2}{1+2t}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{(1+2t)(1+t^2)}\,dt.$$

Az integrandust parciális törtekre bontva:

$$\frac{2}{(1+2t)(1+t^2)} \equiv \frac{A}{1+2t} + \frac{Bt+C}{1+t^2};$$

$$\frac{2}{(1+2t)(1+t^2)} \equiv \frac{A(1+t^2)+(Bt+C)(1+2t)}{(1+2t)(1+t^2)},$$

azaz

$$2 \equiv A(1+t^2)+(Bt+C)(1+2t) \equiv (A+2B)t^2+(B+2C)t+A+C,$$

ami csak úgy állhat fenn, ha

$0 = A+2B$ I.

$0 = B+2C$ II.

$2 = A+C$ III.

Az egyenletrendszer megoldása:

III.-ból

$A = 2-C,$

ezt II.-be helyettesítve

$0 = 2-C+2B$

II.-t újból leírva

$0 = B+2C$, ebből $B = -2C$.

$0 = 2-C-4C;\quad 5C = 2;\quad C = \frac{2}{5}.$

$B = -\frac{4}{5};\quad A = \frac{8}{5}.$

Az integrál így

$$\int \frac{2}{1+2\,\mathrm{tg}\,x}\,dx = \frac{8}{5}\int \frac{dt}{1+2t} - \frac{2}{5}\int \frac{2t-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{8}{5}\int \frac{dt}{1+2t} - \frac{2}{5}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + \frac{2}{5}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{8}{5}\,\frac{\ln|1+2t|}{2} - \frac{2}{5}\ln(t^2+1) + \frac{2}{5}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C.$$

Mivel arc tg $t=x$ és $t=\operatorname{tg} x$, ezért

$$\int \frac{2}{1+2\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{2}{5}\ln(1+2\operatorname{tg} x)^2 - \frac{2}{5}\ln(\operatorname{tg}^2 x+1)+\frac{2}{5}x+C =$$

$$=\frac{2}{5}\left[\ln\frac{(1+2\operatorname{tg} x)^2}{\operatorname{tg}^2 x+1}+x\right]+C.$$

V. EXPONENCIÁLIS ÉS HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEINEK INTEGRÁLÁSA

1. Egyszerűbb speciális típusok

a) $\operatorname{sh}^{2n+1} x \operatorname{ch}^k x$ *alakú integrandus.* Amennyiben az integrandusban $\operatorname{sh} x$ páratlan és $\operatorname{ch} x$ tetszőleges egész kitevőjű hatványa van, akkor a $\operatorname{sh} x$ tényezőt átalakíthatjuk az alábbi módon:

$$\operatorname{sh}^{2n+1} x = \operatorname{sh} x \operatorname{sh}^{2n} x = \operatorname{sh} x(\operatorname{ch}^2 x - 1)^n.$$

Az átalakítás során felhasználtuk a hiperbolikus függvényekre tanult $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ azonosságot.

Az integrandus így a következő alakot veszi fel:

$$\operatorname{sh}^{2n+1} x \operatorname{ch}^k x = \operatorname{sh} x(\operatorname{ch}^2 x - 1)^n \operatorname{ch}^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve az összeg minden egyes tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ típusú lesz, tehát az integrálás tagonként elvégezhető.

b) $\operatorname{ch}^{2n+1} x \operatorname{sh}^k x$ *alakú integrandus.* Ha az integrandusban $\operatorname{ch} x$ páratlan hatványa, $\operatorname{sh} x$-nek pedig tetszőleges hatványa lép fel, akkor a $\operatorname{ch}^{2n+1} x$ tényezőt alakíthatjuk szorzattá:

$$\operatorname{ch}^{2n+1} x \operatorname{sh}^k x = \operatorname{eh} x(\operatorname{sh}^2 x + 1)^n \operatorname{sh}^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, az integrandus minden tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ alakú lesz, vagyis integrálja közvetlenül felírható.

Gyakorló feladatok

1. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x\,dx = ?$

$$\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x\,dx = \int \operatorname{ch}^4 x(\operatorname{ch}^2 x - 1)\operatorname{sh} x\,dx =$$

$$= \int (\operatorname{ch}^6 x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh} x)\,dx = \frac{\operatorname{ch}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{ch}^5 x}{5} + C.$$

2. $\int \mathrm{sh}^4 x \,\mathrm{ch}^3 x \,dx = ?$

$$\int \mathrm{sh}^4 x\,\mathrm{ch}^3 x\,dx = \int \mathrm{sh}^4 x(1+\mathrm{sh}^2 x)\,\mathrm{ch}\,x\,dx =$$

$$= \int (\mathrm{sh}^4 x\,\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}^6 x\,\mathrm{ch}\,x)\,dx = \frac{\mathrm{sh}^5 x}{5}+\frac{\mathrm{sh}^7 x}{7}+C.$$

3. $\int \mathrm{sh}^5 x\,\mathrm{ch}^7 x\,dx = ?$

I. Megoldás:

Először a $\mathrm{sh}^5 x$-ct alakítjuk szorzattá:

$$\int \mathrm{ch}^7 x\,\mathrm{sh}^4 x\,\mathrm{sh}\,x\,dx = \int \mathrm{ch}^7 x(\mathrm{ch}^2 x-1)^2\,\mathrm{sh}\,x\,dx =$$

$$= \int \mathrm{ch}^7 x(\mathrm{ch}^4 x-2\,\mathrm{ch}^2 x+1)\,\mathrm{sh}\,x\,dx =$$

$$= \int (\mathrm{ch}^{11} x-2\,\mathrm{ch}^9 x+\mathrm{ch}^7 x)\,\mathrm{sh}\,x\,dx.$$

Legyen $t=\mathrm{ch}\,x$, akkor $dt=\mathrm{sh}\,x dx$.

$$\int \mathrm{sh}^5 x\,\mathrm{ch}^7 x\,dx = \int (t^{11}-2t^9+t^7)\,dt = \frac{t^{12}}{12}-\frac{2t^{10}}{10}+\frac{t^8}{8}+C =$$

$$= \frac{1}{12}\mathrm{ch}^{12} x-\frac{1}{5}\mathrm{ch}^{10} x+\frac{1}{8}\mathrm{ch}^8 x+C.$$

II. Megoldás:

A feladatot most a másik tényező átalakításával oldjuk meg.

$$\int \mathrm{sh}^5 x\,\mathrm{ch}^7 x\,dx = \int \mathrm{sh}^5 x\,\mathrm{ch}^6 x\,\mathrm{ch}\,x\,dx = \int \mathrm{sh}^5 x(1+\mathrm{sh}^2 x)^3\,\mathrm{ch}\,x dx =$$

$$= \int \mathrm{sh}^5 x(1+3\,\mathrm{sh}^2 x+3\,\mathrm{sh}^4 x+\mathrm{sh}^6 x)\,\mathrm{ch}\,x\,dx =$$

$$= \int (\mathrm{sh}^5 x+3\,\mathrm{sh}^7 x+3\,\mathrm{sh}^9 x+\mathrm{sh}^{11} x)\,\mathrm{ch}\,x\,dx.$$

Most $t=\mathrm{sh}\,x$-et helyettesítünk, ekkor $dt=\mathrm{ch}\,x dx$.

$$\int \mathrm{sh}^5 x\,\mathrm{ch}^7 x\,dx = \int (t^5+3t^7+3t^9+t^{11})\,dt =$$

$$= \frac{t^6}{6}+\frac{3t^8}{8}+\frac{3t^{10}}{10}+\frac{t^{12}}{12}+C =$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{sh}^6 x+\frac{3}{8}\mathrm{sh}^8 x+\frac{3}{10}\mathrm{sh}^{10} x+\frac{1}{12}\mathrm{sh}^{12} x+C.$$

Az eredmények összehasonlítását az Olvasóra bízzuk.

c) $\mathrm{sh}^{2n} x$, $\mathrm{ch}^{2n} x$, ill. $\mathrm{sh}^{2n} x\,\mathrm{ch}^{2k} x$ *alakú integrandus.* Amenynyiben az integrandusban a $\mathrm{sh}\,x$, ill. $\mathrm{ch}\,x$ függvényeknek csak páros kitevőjű hatványa szerepel, úgy az alábbi összefüggések felhasználásával alakítjuk át az integrandust:

$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{2}, \quad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{2}.$$

Gyakorló feladatok

4. $\int \mathrm{ch}^2 x dx = ?$ A feladatot — az összehasonlítás kedvéért — két féle módon is megoldjuk.

I. Megoldás:

Az exponenciális alak felhasználásával:

$$\mathrm{ch}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}.$$

$$\int \mathrm{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int (e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2}+2x+\frac{e^{-2x}}{-2}\right)+C =$$

$$= \frac{x}{2}+\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{8}+C = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\,\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C =$$

$$= \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x+C.$$

II. Megoldás:

A hiperbolikus integrandust átalakítjuk a második azonosság szerint:

$$\int \mathrm{ch}^2 x\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (\mathrm{ch}\,2x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2x}{2}+x\right)+C = \frac{\mathrm{sh}\,2x}{4}+\frac{x}{2}+C.$$

A két eredmény tehát megegyezik.

5. $\int \mathrm{sh}^2 x\,dx = ?$ Ezt a feladatot is mind a két módszerrel megoldjuk.

I. Megoldás:

Az exponenciális alak felhasználásával:

$$\int \mathrm{sh}^2 x\,dx = \int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \int \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (e^{2x}-2+e^{-2x})\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2}-2x+\frac{e^{-2x}}{-2}\right)+C =$$

$$= -\frac{x}{2}+\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{8}+C = -\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C =$$

$$= -\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2x+C.$$

II. Megoldás:

Az integrandus átalakításával a harmadik azonosság alapján:

$$\int \mathrm{sh}^2 x\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (\mathrm{ch}\,2x-1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2x}{2}-x\right)+C = \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2x-\frac{x}{2}+C.$$

A két eredmény tehát megegyezik.

6. $\int \mathrm{ch}^4 x\,dx = ?$ Tudjuk azt, hogy $\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{2}$; ezt írjuk az integrandusba:

$$\int \mathrm{ch}^4 x\,dx = \int \left(\frac{\mathrm{ch}\,2x+1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (\mathrm{ch}^2\,2x+2\,\mathrm{ch}\,2x+1)\,dx.$$

A fenti linearizáló formulát ismételten alkalmazzuk, most a $\mathrm{ch}^2\,2x$-re:

$$\int \mathrm{ch}^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{\mathrm{ch}\,4x+1}{2}+2\,\mathrm{ch}\,2x+1\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{\mathrm{ch}\,4x}{2}+2\,\mathrm{ch}\,2x+\frac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{sh}\,4x}{8}+2\,\frac{\mathrm{sh}\,2x}{2}+\frac{3}{2}x\right)+C = \frac{1}{32}\mathrm{sh}\,4x+\frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2x+\frac{3}{8}x+C.$$

7. $\int \mathrm{sh}^4 x\,dx = ?$ Most a $\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{2}$ linearizáló formulát alkalmazzuk:

$$\int \mathrm{sh}^4 x\,dx = \int (\mathrm{sh}^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int \frac{\mathrm{ch}^2\,2x-2\,\mathrm{ch}\,2x+1}{4}\,dx = \frac{1}{4}\int (\mathrm{ch}^2\,2x-2\,\mathrm{ch}\,2x+1)\,dx.$$

A $\mathrm{ch}^2\,2x = \frac{\mathrm{ch}\,4x+1}{2}$ azonosságot felhasználva:

$$\int \mathrm{sh}^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{\mathrm{ch}\,4x+1}{2}-2\,\mathrm{ch}\,2x+1\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{\mathrm{ch}\,4x}{2}-2\,\mathrm{ch}\,2x+\frac{3}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{sh}\,4x}{8}-\frac{2\,\mathrm{sh}\,2x}{2}+\frac{3x}{2}\right)+C = \frac{1}{32}\,\mathrm{sh}\,4x-\frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2x+\frac{3}{8}\,x+C.$$

8. $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x\,dx = ?$ A feladatot a linearizáló módszerrel oldjuk meg:

$$\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{2}\cdot\frac{\mathrm{ch}\,2x-1}{2}\,dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2\,2x-1}{4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (\mathrm{ch}^2\,2x-1)\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{\mathrm{ch}\,4x+1}{2}-1\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (\mathrm{ch}\,4x-1)\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{sh}\,4x}{4}-x\right)+C = \frac{1}{32}\,\mathrm{sh}\,4x-\frac{1}{8}\,x+C.$$

9. $\int \mathrm{sh}^4 x \,\mathrm{ch}^2 x \,dx = ?$ Felhasználjuk, hogy $\mathrm{sh}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2x - 1}{2}$ és

$\mathrm{ch}^2 x = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2x + 1}{2}$.

$$\int \mathrm{sh}^4 x \,\mathrm{ch}^2 x\, dx = \int \left(\frac{\mathrm{ch}\, 2x - 1}{2}\right)^2 \frac{\mathrm{ch}\, 2x + 1}{2}\, dx =$$

$$= \int \frac{\mathrm{ch}^2\, 2x - 2\,\mathrm{ch}\, 2x + 1}{4} \cdot \frac{\mathrm{ch}\, 2x + 1}{2}\, dx =$$

$$= \int \frac{\dfrac{\mathrm{ch}\, 4x + 1}{2} - 2\,\mathrm{ch}\, 2x + 1}{4} \cdot \frac{\mathrm{ch}\, 2x + 1}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int (\mathrm{ch}\, 4x + 1 - 4\,\mathrm{ch}\, 2x + 2)(\mathrm{ch}\, 2x + 1)\, dx = ?$$

A feladatot az exponenciális alak felhasználásával oldjuk meg.

$$\int \mathrm{sh}^4 x \,\mathrm{ch}^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left[\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} - 4\,\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 3\right)\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left[\frac{e^{6x} + e^{-2x} + e^{2x} + e^{-6x}}{4} (e^{4x} + 1 + 1 + e^{-4x}) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + \frac{e^{4x}}{2} + \frac{e^{-4x}}{2} - 2e^{2x} - 2e^{-2x} + 3\right] dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(\frac{e^{6x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-6x}}{4} - \frac{4e^{4x}}{4} - 2 - \frac{4e^{-4x}}{4} + \frac{6e^{2x}}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{6e^{-2x}}{4} + \frac{2e^{4x}}{4} + \frac{2e^{-4x}}{4} - \frac{8e^{2x}}{4} - \frac{8e^{-2x}}{4} + 3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(\frac{e^{6x}}{4} - \frac{2e^{4x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} + 1 - \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{2e^{-4x}}{4} + \frac{e^{-6x}}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{64} \int (e^{6x} - 2e^{4x} - e^{2x} + 4 - e^{-2x} - 2e^{-4x} + e^{-6x})\, dx =$$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{e^{6x}}{6} - \frac{e^{4x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + 4x + \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-4x}}{2} - \frac{e^{-6x}}{6}\right) + C.$$

2. Exponenciális függvények általános alakú racionális kifejezéseinek integrálása

Amennyiben az integrandus az e^x függvény $R(e^x)$ racionális kifejezése, akkor a $t = e^x$, vagyis $x = \ln t$ és $dx = \dfrac{dt}{t}$ helyettesítéssel átalakítjuk t racionális függvényévé, és ily módon racionális (egész vagy tört) függvényként integrálhatjuk.

Gyakorló feladatok

1. $\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x} - 4}\, dx = ?$

Az $e^x = t$; vagyis $dx = \dfrac{dt}{t}$, helyettesítéssel;

$$\int \frac{4}{e^{2x} - 4}\, dx = \int \frac{4}{t^2 - 4} \frac{dt}{t} = \int \frac{4\,dt}{t(t^2 - 4)} = \int \frac{4\,dt}{t(t+2)(t-2)}.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{4}{t(t+2)(t-2)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t-2}.$$

$$4 \equiv A(t^2 - 4) + Bt(t-2) + Ct(t+2).$$

Az ismeretlen együtthatók értékét alkalmas t értékek (a nevező gyökei) behelyettesítésével határozzuk meg:

ha $t = 0$, akkor $4 = -4A$, vagyis $A = -1$;

ha $t = -2$, akkor $4 = 8B$, vagyis $B = \dfrac{1}{2}$;

ha $t = 2$, akkor $4 = 8C$, vagyis $C = \dfrac{1}{2}$.

Az integrál tehát

$$\int \frac{4}{e^{2x} - 4}\, dx = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-2}\right) dt =$$

$$= -\ln t + \frac{1}{2} \ln (t+2) + \frac{1}{2} \ln (t-2) + C =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t} + C = \ln \frac{\sqrt{e^{2x} - 4}}{e^x} + C.$$

2. $\int \frac{5}{e^{2x}+1}\,dx = ?$ A $t = e^x$; $dx = \frac{dt}{t}$, helyettesítéssel:

$$\int \frac{5}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{5}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{5}{t(t^2+1)}\,dt.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{5}{t(t^2+1)} \equiv \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1};$$

$$\frac{5}{t(t^2+1)} \equiv \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)t}{t(t^2+1)};$$

$$5 \equiv At^2+A+Bt^2+Ct;$$

$$5 \equiv (A+B)t^2+Ct+A.$$

Az együtthatókat összehasonlítjuk:

$$A+B = 0$$
$$C = 0$$
$$\underline{A = 5}$$
$$B = -5$$

$$\int \frac{5}{e^{2x}+1}\,dx = \int \left(\frac{5}{t}-\frac{5t}{t^2+1}\right)dt = 5\ln t-\frac{5}{2}\ln(t^2+1)+C =$$

$$= 5\ln e^x-\frac{5}{2}\ln(e^{2x}+1)+C = 5x-\frac{5}{2}\ln(e^{2x}+1)+C.$$

3. $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = ?$ A számláló e^x-ben magasabbfokú, mint a nevező, ezért a $t=e^x$, $dx=\frac{dt}{t}$ helyettesítés után a számlálót osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = \int \frac{t^3}{t+2}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{t+2}\,dt.$$

$$t^2:(t+2) = t-2$$
$$\underline{-t^2 \pm 2t}$$
$$-2t$$
$$\underline{\mp 2t \mp 4}$$
$$+4$$

Az integrál:

$$\int \frac{t^2}{t+2}\,dt = \int \left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}-2t+4\ln(t+2)+C = \frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+4\ln(e^x+2)+C.$$

4. $\int \frac{e^x}{e^{-x}+2}\,dx = ?$ A $t = e^x$, $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{e^x}{e^{-x}+2}\,dx = \int \frac{t}{\frac{1}{t}+2}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)-1}{1+2t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+2t}\right)dt = \frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\ln|1+2t|+C =$$

$$= \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{4}\ln|1+2e^x|+C.$$

5. $\int \frac{3}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{3e^x}{e^{2x}+1}\,dx = ?$

$$t = e^x;\quad dx = \frac{dt}{t}.$$

$$\int \frac{3e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{3t}{t^2+1}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{3dt}{t^2+1} = 3\,\mathrm{arc\,tg}\,t+C =$$

$$= 3\,\mathrm{arc\,tg}\,e^x+C.$$

6. $\int \frac{e^x}{(e^x+2)^2}\,dx = ?$

I. Megoldás:

A $t=e^x$; $dx=\frac{dt}{t}$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)^2}\,dx = \int \frac{t}{(t+2)^2}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2}+C = -\frac{1}{e^x+2}+C.$$

II. Megoldás:

Az integrandus számlálójában a nevező belső függvényének deriváltja van, ezért az integrandus $f^n(x)f'(x)$ alakú és a feladat helyettesítés nélkül is megoldható.

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)^2}\,dx = \int (e^x+2)^{-2}e^x\,dx = \frac{(e^x+2)^{-1}}{-1}+C =$$

$$= -\frac{1}{e^x+2}+C.$$

7. $\displaystyle\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx = ?$ A $t=e^x$; $dx=\dfrac{dt}{t}$, helyettesítéssel:

$$\int \frac{t+4}{t^2+4t+3}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t+4}{t(t^2+4t+3)}\,dt.$$

A nevezőben levő másodfokú polinomot szorzattá alakítjuk:

$$t^2+4t+3 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} = -2\pm 1;$$

$$t_1=-1;\quad t_2=-3.$$

$$t^2+4t+3 = (t+1)(t+3).$$

$$\int \frac{t+4}{t(t^2+4t+3)}\,dt = \int \frac{t+4}{t(t+1)(t+3)}\,dt.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{t+4}{t(t+1)(t+3)} \equiv \frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t+3};$$

$$\frac{t+4}{t(t+1)(t+3)} \equiv \frac{A(t+1)(t+3)+Bt(t+3)+Ct(t+1)}{t(t+1)(t+3)};$$

$$t+4 \equiv A(t+1)(t+3)+Bt(t+3)+Ct(t+1).$$

Behelyettesítjük a nevező gyökeit:

ha $t=0$, akkor $4=3A$, ebből $A=\dfrac{4}{3}$;

ha $t=-1$, akkor $3=-2B$, ebből $B=-\dfrac{3}{2}$;

ha $t=-3$, akkor $1=6C$, ebből $C=\dfrac{1}{6}$.

$$\int \frac{t+4}{t(t+1)(t+3)}\,dt = \int\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{t+3}\right)dt =$$

$$= \frac{4}{3}\ln t-\frac{3}{2}\ln(t+1)+\frac{1}{6}\ln(t+3)+C =$$

$$= \frac{4}{3}\ln e^x-\frac{3}{2}\ln(e^x+1)+\frac{1}{6}\ln(e^x+3)+C =$$

$$= \frac{4}{3}x-\frac{3}{2}\ln(e^x+1)+\frac{1}{6}\ln(e^x+3)+C.$$

8. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x(e^{2x}+7e^x+6)}\,dx = ?$ A $t=e^x$; $dx=\dfrac{dt}{t}$ helyettesítés után:

$$\int \frac{t^2+t-1}{t(t^2+7t+6)}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2+t-1}{t^2(t^2+7t+6)}\,dt.$$

A nevezőben levő másodfokú polinomot szorzattá alakítjuk.

$$t^2+7t+6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7\pm 5}{2};$$

$$t_1=-1;\quad t_2=-6;$$

$$t^2+7t+6 = (t+1)(t+6).$$

$$\int \frac{t^2+t-1}{t^2(t+1)(t+6)}\,dx = ?$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{t^2+t-1}{t^2(t+1)(t+6)} \equiv \frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t+6} \equiv$$

$$= \frac{At(t+1)(t+6)+B(t+1)(t+6)+Ct^2(t+6)+Dt^2(t+1)}{t^2(t+1)(t+6)};$$

$$t^2+t-1 \equiv At(t+1)(t+6)+B(t+1)(t+6)+Ct^2(t+6)+Dt^2(t+1).$$

Az együtthatókat alkalmasan választott t értékek behelyettesítésével határozzuk meg (ezek közül 3 a nevező gyöke):

ha $t=0$, akkor $-1=6B$, ebből $B=-\dfrac{1}{6}$;

ha $t=-1$, akkor $-1=5C$, ebből $C=-\frac{1}{5}$;

ha $t=-6$, akkor $36-6-1=D36(-5)$; $D=-\frac{29}{180}$.

Legyen végül $t=1$, és a már ismert három együtthatót helyettesítsük be:

$$1 = A\cdot 14-\frac{1}{6}\cdot 14-\frac{1}{5}\cdot 7-\frac{29}{180}\cdot 2 = 14A-\frac{7}{3}-\frac{7}{5}-\frac{29}{90} =$$

$$= 14A-\frac{210+126+29}{90} = 14A-\frac{365}{90} = 14A-\frac{73}{18};$$

$$\frac{91}{18} = 14A; \quad A=\frac{91}{18\cdot 14}=\frac{91}{252}.$$

A feladat megoldása:

$$\int \frac{t^2+t-1}{t^2(t^2+7t+6)}\,dt = \int\left(\frac{91}{252}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{6}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{5}\frac{1}{t+1}-\frac{29}{180}\frac{1}{t+6}\right)dt =$$

$$= \frac{91}{252}\ln t+\frac{1}{6}\frac{1}{t}-\frac{1}{5}\ln|t+1|-\frac{29}{180}\ln|t+6|+C =$$

$$= \frac{91}{252}\ln e^x+\frac{1}{6e^x}-\frac{1}{5}\ln(e^x+1)-\frac{29}{180}\ln(e^x+6)+C =$$

$$= \frac{91}{252}x+\frac{1}{6}e^{-x}-\frac{1}{5}\ln(e^x+1)-\frac{29}{180}\ln(e^x+6)+C.$$

VI. NÉHÁNY TOVÁBBI SPECIÁLIS ALAKÚ KIFEJEZÉS INTEGRÁLÁSA

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x-nek) és $\sqrt[n]{ax+b}$-nek racionális függvénye, akkor az integrandus a $t=\sqrt[n]{ax+b}$ új változó bevezetésével racionális függvénnyé alakítható.

Ha $t=\sqrt[n]{ax+b}$, akkor $x=\frac{t^n-b}{a}$ és $dx=\frac{n}{a}t^{n-1}\,dt$.

Gyakorló feladatok

1. $\int x\sqrt{5x+3}\,dx = ?$

$$t=\sqrt{5x+3}; \quad t^2=5x+3; \quad x=\frac{t^2-3}{5}; \quad dx=\frac{2t}{5}dt.$$

A helyettesítést elvégezve:

$$\int x\sqrt{5x+3}\,dx = \int\frac{t^2-3}{5}t\frac{2t}{5}\,dt = \frac{2}{25}\int(t^4-3t^2)\,dt.$$

Látható, hogy az új t változóban az integrandus racionális egész függvény.

$$\int x\sqrt{5x+3}\,dx = \frac{2}{25}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{3t^3}{3}\right)+C =$$

$$= \frac{2}{125}(5x+3)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{25}(5x+3)^{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= \frac{2}{125}(5x+3)^2\sqrt{5x+3}-\frac{2}{25}(5x+3)\sqrt{5x+3}+C =$$

$$= \frac{2}{25}(5x+3)\sqrt{5x+3}\left[\frac{1}{5}(5x+3)-1\right]+C =$$

$$= \frac{2}{25}(5x+3)\sqrt{5x+3}\left(x-\frac{2}{5}\right)+C.$$

2. $\int (3x+6)\sqrt{2x-4}\,dx = ?$

Az elvégzendő helyettesítés:

$$t=\sqrt{2x-4};\quad t^2 = 2x-4;\quad x=\frac{t^2+4}{2};\quad dx = t\,dt.$$

Tehát

$$\int (3x+6)\sqrt{2x-4}\,dx = \int\left(\frac{3t^2+12}{2}+6\right)t\cdot t\,dt =$$

$$=\int\left(\frac{3t^4}{2}+12t^2\right)dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{t^5}{5}+\frac{12t^3}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{10}\sqrt{(2x-4)^5}+4\sqrt{(2x-4)^3}+C=$$

$$=(2x-4)\sqrt{2x-4}\left[\frac{3}{10}(2x-4)+4\right]+C=$$

$$=2(x-2)\sqrt{2x-4}\left(\frac{3}{5}x-\frac{14}{5}\right)+C.$$

3. $\int (x^2-2x+3)\sqrt{2x-1}\,dx = ?$

A helyettesítés:

$$t=\sqrt{2x-1};\quad t^2=2x-1;\quad x=\frac{t^2+1}{2};\quad dx = t\,dt.$$

$$\int\left[\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2-t^2-1+3\right]t\cdot t\,dt = \int\left(\frac{t^2+2t+1}{4}-t^2+2\right)t^2\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{2}+\frac{t^2}{4}-t^4+2t^2\right)dt=\int\left(-\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^3+\frac{9}{4}t^2\right)dt=$$

$$=-\frac{3}{4}\cdot\frac{t^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+\frac{9}{4}\cdot\frac{t^3}{3}+C=-\frac{3}{20}t^5+\frac{1}{8}t^4+\frac{3}{4}t^3+C=$$

$$=\frac{t^3}{4}\left(-\frac{3}{5}t^2+\frac{1}{2}t+3\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{2x-1}\left[-\frac{3}{5}(2x-1)+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+3\right]+C=$$

$$=\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{2x-1}\left(-\frac{6}{5}x+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+3\frac{3}{5}\right)+C.$$

4. $\int (2x-1)\sqrt{(5x-3)^3}\,dx = ?$

Helyettesítünk:

$$t=\sqrt{5x-3};\quad t^3=\sqrt{(5x-3)^3};\quad t^2=5x-3;\quad x=\frac{t^2+3}{5};$$

$$dx=\frac{2}{5}t\,dt.$$

$$\int(2x-1)\sqrt{(5x-3)^3}\,dx=\int\left[\frac{2}{5}(t^2+3)-1\right]t^3\cdot\frac{2}{5}t\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{2}{5}t^2+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}t^4\,dt=\int\left(\frac{2}{5}t^2+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}t^4\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{4}{25}t^6+\frac{2}{25}t^4\right)dt=\frac{4}{25}\frac{t^7}{7}+\frac{2}{25}\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=\frac{2}{25}t^5\left(\frac{2}{7}t^2+\frac{1}{5}\right)+C=$$

$$=\frac{2}{25}(5x-3)^2\sqrt{5x-3}\left[\frac{2}{7}(5x-3)+\frac{1}{5}\right]+C=$$

$$=\frac{2}{25}(5x-3)^2\sqrt{5x-3}\left(\frac{10}{7}x-\frac{23}{35}\right)+C.$$

5. $\int\frac{2x}{\sqrt{6x+4}}\,dx = ?$

Helyettesítünk:

$$t=\sqrt{6x+4};\quad t^2=6x+4;\quad x=\frac{t^2-4}{6};\quad x=\frac{t}{3}\,dt.$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{6x+4}}\,dx=\int\frac{\frac{t^2-4}{3}}{t}\,\frac{t}{3}\,dt=\int\frac{t^2-4}{9}\,dt=$$

$$=\frac{t^3}{27}-\frac{4}{9}t+C=\frac{\sqrt{(6x+4)^3}}{27}-\frac{4}{9}\sqrt{6x+4}+C.$$

6. $\int x\sqrt[4]{5x+3}\,dx = ?$

Helyettesítünk:

$$t=\sqrt[4]{5x+3},\quad t^4=5x+3,\quad x=\frac{t^4-3}{5},\ \text{ebből}\ dx=\frac{4}{5}t^3\,dt.$$

$$\int x\sqrt[4]{5x+3}\,dx = \int \frac{t^4-3}{5}\, t\, \frac{4}{5}t^3\, dt = \frac{4}{25}\int t^4(t^4-3)\,dt =$$

$$= \frac{4}{25}\int (t^8-3t^4)\,dt = \frac{4}{25}\left(\frac{t^9}{9}-3\frac{t^5}{5}\right)+C = \frac{4}{225}t^9-\frac{12}{125}t^5+C=$$

$$=\frac{4}{225}\sqrt[4]{(5x+3)^9}-\frac{12}{125}\sqrt[4]{(5x+3)^5}+C=$$

$$=\frac{4}{25}(5x+3)\left(\frac{5x+3}{9}\sqrt[4]{5x+3}-\frac{3}{5}\sqrt[4]{5x+3}\right)+C=$$

$$=\frac{4}{25}(5x+3)\sqrt[4]{5x+3}\cdot\frac{25x+15-27}{45}+C=$$

$$=\frac{5(5x+3)(25x-12)\sqrt[4]{5x+3}}{1125}+C.$$

7. $\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{6x-4}}\,dx=?$

Helyettesítünk:

$$t=\sqrt[3]{6x-4};\quad t^3=6x-4;\quad x=\frac{t^3+4}{6},\quad \text{ebből}$$

$$dx=\frac{3t^2}{6}\,dt=\frac{t^2}{2}\,dt.$$

$$\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{6x-4}}\,dx=\int\frac{3\left(\frac{t^3+4}{6}\right)^2+2}{t}\,\frac{t^2}{2}\,dt=$$

$$=\int\left(3\frac{t^6+8t^3+16}{36}+2\right)\frac{t}{2}\,dt=\int\frac{t^6+8t^3+16+24}{12}\cdot\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{24}\int(t^7+8t^4+40t)\,dt=\frac{1}{24}\left(\frac{t^8}{8}+\frac{8t^5}{5}+\frac{40t^2}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{t^2}{24}\left(\frac{1}{8}t^6+\frac{8}{5}t^3+20\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(6x-4)^2}}{24}\left(\frac{1}{8}\sqrt[3]{(6x-4)^6}+\frac{8}{5}\sqrt[3]{(6x-4)^3}+20\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(6x-4)^2}}{24}\left[\frac{1}{8}(6x-4)^2+\frac{8}{5}(6x-4)+20\right]+C.$$

A további átalakításokat az olvasóra bízzuk.

2. $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ alakú integrandus

Az integrandust racionálissá tehetjük, ha új változót vezetünk be.

Legyen $u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ($n=2, 3, 4, \ldots,$ és $ad\neq bc$), ekkor $u^n=\frac{ax+b}{cx+d}$, és ebből kifejezzük x-et mint az u új változó függvényét:

$$u^n(cx+d)=ax+b;$$

$$cxu^n+du^n=ax+b;$$

$$x(cu^n-a)=b-du^n;$$

$$x=\frac{b-du^n}{cu^n-a}.$$

$$\frac{dx}{du}=\frac{-n\,du^{n-1}(cu^n-a)-(b-du^n)\,cnu^{n-1}}{(cu^n-a)^2}=$$

$$=\frac{nu^{n-1}(da-bc)}{(cu^n-a)^2},$$

vagyis

$$dx = \frac{n(da-bc)}{(cu^n-a)^2}u^{n-1}\,du.$$

Ha (előbbi feltételezésünkkel ellentétben) $ad=bc$, akkor a gyökjel alatti tört a következő módon alakítható át:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}{c\left(x+\dfrac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c},$$

ugyanis $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$ miatt a tört egyszerűsíthető és a törtfüggvény helyett konstans van a gyökjel alatt.

A feladatok megoldása során nem a végképletet, hanem a módszert alkalmazzuk.

Gyakorló feladatok

1. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}\,dx = ?$

Legyen $u=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$, vagyis $u^2=\dfrac{x-3}{x-1}$.

Kifejezzük x-et mint az u új változó függvényét:

$$u^2x-u^2=x-3,\quad x(u^2-1)=u^2-3,\quad \text{ebből}\quad x=\frac{u^2-3}{u^2-1}.$$

Differenciáljuk x-et u szerint, majd kifejezzük a dx-et:

$$\frac{dx}{du}=\frac{2u(u^2-1)-(u^2-3)\cdot 2u}{(u^2-1)^2}=\frac{2u^3-2u-2u^3+6u}{(u^2-1)^2}=\frac{4u}{(u^2-1)^2},$$

ebből

$$dx=\frac{4u}{(u^2-1)^2}\,du.$$

Behelyettesítünk:

$$\int\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}\,dx=\int\frac{4u^2}{(u^2-1)^2}\,du.$$

Az integrandust parciális törtek összegére bontjuk:

$$\frac{4u^2}{(u^2-1)^2}=\frac{4u^2}{(u+1)^2(u-1)^2}\equiv\frac{A}{(u+1)^2}+\frac{B}{u+1}+\frac{C}{(u-1)^2}+\frac{D}{u-1}=$$

$$=\frac{A(u-1)^2+B(u+1)(u-1)^2+C(u+1)^2+D(u-1)(u+1)^2}{(u+1)^2(u-1)^2}=$$

$$=\frac{(u-1)^2(A+Bu+B)+(u+1)^2(C+Du-D)}{(u+1)^2(u-1)^2}.$$

A számlálók azonosan egyenlők, tehát

$$4u^2\equiv(u^2-2u+1)(A+Bu+B)+(u^2+2u+1)(C+Du-D)=$$

$$=Au^2+Bu^3+Bu^2-2Au-2Bu^2-2Bu+A+Bu+B+$$

$$+Cu^2+Du^3-Du^2+2Cu+2Du^2-2Du+C+Du-D=$$

$$=(B+D)u^3+(A+B-2B+C-D+2D)u^2+$$

$$+(-2A-2B+B+2C-2D+D)u+(A+B+C-D)=$$

$$=(B+D)u^3+(A-B+C+D)u^2+(-2A-B+2C-D)u+$$

$$+(A+B+C-D).$$

Az azonosság bal és jobb oldalán levő egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlők:

$$\begin{array}{rl}
B+D=0 & \text{I.}\\
A-B+C+D=4 & \text{II.}\\
-2A-B+2C-D=0 & \text{III.}\\
A+B+C-D=0 & \text{IV.}
\end{array}$$

I.+III.

$$-2A+2C=0,\ \text{vagyis}\ A=C.$$

I.+IV.

$$A+2B+C=0,\ \text{de}\ A=C\ \text{és ezért}\ 2A+2B=0,\ \text{vagyis}\ B=-A=-C$$

I.-ből.

$$D=-B=C.$$

A II.-be helyettesítve:

$$C+C+C+C=4,\quad C=1.$$

A keresett együtthatók:

$$A=1;\quad B=-1;\quad C=1;\quad D=1.$$

Az integrandus parciális törtekre bontva:

$$\frac{4u^2}{(u^2-1)^2}=\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{u-1}.$$

A feladat megoldása:

$$\int\frac{4u^2}{(u^2-1)^2}\,du=\int\left[\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{u-1}\right]du=$$

$$=\int\left[(u+1)^{-2}-\frac{1}{u+1}+(u-1)^{-2}+\frac{1}{u-1}\right]du=$$

$$=-\frac{1}{u+1}-\ln|u+1|-\frac{1}{u-1}+\ln|u-1|+C=$$

$$=-\frac{u-1+u+1}{u^2-1}+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C=\frac{-2u}{u^2-1}+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C.$$

Az eredményt az x változó függvényeként is megadjuk:

$$\int\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}\,dx=\frac{-2\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}}{\dfrac{x-3}{x-1}-1}+\ln\frac{\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}-1}{\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}+1}+C.$$

További átalakítást nem végzünk.

2. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=?$

Legyen $u=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, ebből $u^3=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Fejezzük ki x-et mint u függvényét.

$$u^3x+u^3=x-1;\quad x(u^3-1)=-u^3-1;$$

$$x=-\frac{u^3+1}{u^3-1}.$$

$$\frac{dx}{du}=-\frac{3u^2(u^3-1)-(u^3+1)\cdot 3u^2}{(u^3-1)^2}=-\frac{3u^5-3u^2-3u^5-3u^2}{(u^3-1)^2}=$$

$$=\frac{6u^2}{(u^3-1)^2},$$

ebből

$$dx=\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}\,du.$$

Behelyettesítve x-et és dx-et:

$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\int\frac{(u^3-1)^2}{(u^3+1)^2}\,u\,\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}\,dx=\int\frac{6u^3}{(u^3+1)^2}\,du.$$

Az integrandust parciális törtek összegére bontjuk:

$$\frac{6u^3}{(u^3+1)^2}=\frac{6u^3}{(u+1)^2(u^2-u+1)^2}\equiv$$

$$\equiv\frac{A}{(u+1)^2}+\frac{B}{u+1}+\frac{Cu+D}{(u^2-u+1)^2}+\frac{Eu+F}{u^2-u+1},$$

ugyanis a nevezőben levő második tényező nem bontható valós gyöktényezők szorzatára.

Közös nevezőre hozunk a jobb oldalon, majd felírjuk az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlőségéből következő egyenletrendszert.

$$\frac{6u^3}{(u^3+1)^2}\equiv\frac{A(u^2-u+1)^2+B(u+1)(u^2-u+1)^2}{(u+1)^2(u^2-u+1)^2}+$$

$$+\frac{(Cu+D)(u+1)^2+(Eu+F)(u+1)^2(u^2-u+1)}{(u+1)^2(u^2-u+1)^2}.$$

A továbbiakban már csak a számlálók azonosságát írjuk fel:

$$6u^3\equiv(u^2-u+1)^2(A+Bu+B)+$$

$$+(u+1)^2[Cu+D+(Eu+F)(u^2-u+1)]=$$

$$=(u^4-2u^3+u^2+2u^2-2u+1)(A+Bu+B)+$$

$$+(u^2+2u+1)(Cu+D+Eu^3+Fu^2-Eu^2-Fu+Eu+F)=$$

$$=(u^4-2u^3+3u^2-2u+1)[(A+B)+Bu]+$$

$$+(u^2+2u+1)[Eu^3+(F-E)u^2+(C+E-F)u+(D+F)]=$$

$$=(A+B)u^4-2(A+B)u^3+3(A+B)u^2-2(A+B)u+(A+B)+$$

$$+Bu^5-2Bu^4+3Bu^3-2Bu^2+Bu+Eu^5+2Eu^4+Eu^3+$$

$$+(F-E)u^4+2(F-E)u^3+(F-E)u^2+(C+E-F)u^3+2(C+E-F)u^2+$$

$$+(C+E-F)u+(D+F)u^2+2(D+F)u+(D+F)=$$

$$= (B+E)u^5+(A+B-2B+2E+F-E)u^4+$$
$$+(-2A-2B+3B+E+2F-2E+C+E-F)u^3+$$
$$+(3A+3B-2B+F-E+2C+2E-2F+D+F)u^2+$$
$$+(-2A-2B+B+C+E-F+2D+2F)u+(A+B+D+F) =$$
$$= (B+E)u^5+(A-B+E+F)u^4+(-2A+B+C+F)u^3+$$
$$+(3A+B+2C+D+E)u^2+(-2A-B+C+2D+E+F)u+$$
$$+(A+B+D+F).$$

A bal és jobb oldal egyenlő fokszámú tagjainak együtthatói egyenlők, tehát

$$\begin{array}{ll} B+E=0 & \text{I.} \\ A-B+E+F=0 & \text{II.} \\ -2A+B+C+F=6 & \text{III.} \\ 3A+B+2C+D+E=0 & \text{IV.} \\ -2A-B+C+2D+E+F=0 & \text{V.} \\ \underline{A+B+D+F=0} & \text{VI.} \end{array}$$

Az egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy minden ismeretlent A-val és B-vel fejezzük ki, majd megoldjuk az így kapható kétismeretlenes egyenletrendszert.

$$E=-B.$$

A II. egyenletbe helyettesítve:

$$A-B-B+F=0, \text{ ebből } F=2B-A.$$

A III.-ba helyettesítve:

$$-2A+B+C+2B-A=6, \text{ ebből } C=3A-3B+6.$$

A IV.-be helyettesítve:

$$3A+B+6A-6B+12+D-B=0, \text{ ebből } D=6B-9A-12.$$

Az eddig kapott értékeket az V. és VI. egyenletbe helyettesítjük:

$$-2A-B+3A-3B+6+12B-18A-24-B+2B-A=0$$
$$\underline{A+B+6B-9A-12+2B-A=0}$$

$$\begin{array}{ll} -18A+9B=18 & \text{V.} \\ \underline{-9A+9B=12} & \text{VI.} \end{array}$$

VI. – V.

$$9A=-6; \quad A=-\frac{2}{3}.$$

Visszahelyettesítve a VI. egyenletbe:

$$6+9B=12; \quad B=\frac{2}{3}.$$
$$C=-2-2+6=2;$$
$$D=4+6-12=-2;$$
$$E=-\frac{2}{3}; \quad F=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2.$$

Az integrál:

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int \frac{6u^3}{(u^3+1)^2}\,du =$$
$$= \int \left[-\frac{2}{3}\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{u+1}+\frac{2u-2}{(u^2-u+1)^2}+\frac{-\frac{2}{3}u+2}{u^2-u+1}\right] du =$$
$$= -\frac{2}{3}\int (u+1)^{-2}\,du+\frac{2}{3}\int \frac{1}{u+1}\,du+\int \frac{2u-2}{(u^2-u+1)^2}\,du+$$
$$+\frac{1}{3}\int \frac{-2u+6}{u^2-u+1}\,du.$$

A következő részfeladat az egyes integrálok meghatározása:

a) $$-\frac{2}{3}\int (u+1)^{-2}\,du = +\frac{2}{3(u+1)}+C_1.$$

b) $$\frac{2}{3}\int \frac{1}{u+1}\,du = \frac{2}{3}\ln|u+1|+C_2.$$

c) $$\int \frac{2u-2}{(u^2-u+1)^2}\,du = \int \frac{2u-1-1}{(u^2-u+1)^2}\,du =$$
$$= \int \frac{2u-1}{(u^2-u+1)^2}\,du-\int \frac{1}{(u^2-u+1)^2}\,du =$$
$$= \int (2u-1)(u^2-u+1)^{-2}\,du-\int \frac{1}{(u^2-u+1)^2}\,du =$$
$$= -\frac{1}{u^2-u+1}-\int \frac{1}{(u^2-u+1)^2}\,du.$$

Tudjuk, hogy

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C,$$

tehát az integrált helyettesítéssel ilyen típusra kell visszavezetni.

$$\int \frac{1}{(u^2-u+1)^2}\,du = \int \frac{1}{\left[\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\,du.$$

Legyen $v = u-\frac{1}{2}$, és $dv = du$.

$$\int \frac{1}{(u^2-u+1)^2}\,du = \int \frac{dv}{\left(v^2+\frac{3}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}}\,\frac{v}{v^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2v}{\sqrt{3}}+C =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{v}{v^2+\frac{3}{4}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\,v+C,$$

mivel $v = u-\frac{1}{2}$, ezért

$$\int \frac{du}{(u^2-u+1)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{u-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u-\frac{1}{2}\right)+C.$$

$$\int \frac{2u-2}{(u^2-u+1)^2}\,du =$$

$$= -\frac{1}{(u^2-u+1)}-\frac{1}{3}\,\frac{2u-1}{u^2-u+1}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\,(2u-1)+C_3.$$

d) $$\frac{1}{3}\int \frac{-2u+6}{u^2-u+1}\,du = -\frac{1}{3}\int \frac{2u-1-5}{u^2-u+1}\,du =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\,du+\frac{5}{3}\int \frac{du}{u^2-u+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|u^2-u+1|+\frac{5}{3}\int \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Az integrált helyettesítéssel számítjuk ki.

Legyen $v = u-\frac{1}{2}$, és $dv = du$.

$$\frac{5}{3}\int \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{5}{3}\int \frac{dv}{v^2+\frac{3}{4}} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C =$$

$$= \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2v}{\sqrt{3}}+C = \frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Vagyis

$$\frac{1}{3}\int \frac{-2u+6}{u^2-u+1}\,du = -\frac{1}{3}\ln|u^2-u+1|+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C_4.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \frac{2}{3(u+1)}+\frac{2}{3}\ln|u+1|-$$

$$-\frac{1}{u^2-u+1}-\frac{1}{3}\,\frac{2u-1}{u^2-u+1}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{1}{3}\ln|u^2-u+1|+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Az integrált x függvényeként kell megkapnunk, ezért u helyébe $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$-et kell helyettesítenünk, vagyis:

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \frac{2}{3\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1\right)}+\frac{2}{3}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1\right|-$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1}-\frac{1}{3}\,\frac{2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1}-$$

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1\right|+\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\sqrt{3}}+C.$$

3. $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x-nek), valamint $\sqrt{a^2-x^2}$-nek racionális függvénye, akkor $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ átalakítás után az $\frac{x}{a}=\sin t$, ill. $\frac{x}{a}=\cos t$ helyettesítéssel a t trigonometrikus függvényévé alakítható az integrandus.

Helyettesítés:

$$\frac{x}{a}=\sin t,\quad x=a\sin t,\quad dx=a\cos t\,dt,\quad \text{ill.}$$

$$\frac{x}{a}=\cos t,\quad x=a\cos t,\quad dx=-a\sin t\,dt.$$

Gyakorló feladatok

1. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=?$

$x=\sin t;\quad dx=\cos t\,dt;$

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt=?$$

Most a linearizáló formulákat alkalmazzuk: mivel $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$ és $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$, így

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-\cos^2 2t)\,dt=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C.$$

A visszahelyettesítéshez $\sin 4t$ értékét x-szel — vagy $\sin t$-vel — kell kifejeznünk:

$$\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=2\cdot 2\sin t\cos t(\cos^2 t-\sin^2 t)=$$

$$=4\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\,(1-2\sin^2 t)=4x\sqrt{1-x^2}\,(1-2x^2).$$

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{8}\left[\arcsin x-(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}\right]+C.$$

2. $\int(2x+4)\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx=?$

A helyettesítés:

$x=\sin t;\quad dx=\cos t\,dt.$ Így

$$\int(2x+4)\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx=\int(2\sin t+4)\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}\cos t\,dt=$$

$$=\int(2\sin t+4)\cos^4 t\,dt=\int(2\sin t\cos^4 t+4\cos^4 t)\,dt=$$

$$=\int 2\sin t\cos^4 t\,dt+\int 4\cos^4 t\,dt.$$

Legyen $I_1=\int 2\sin t\cos^4 t\,dt$ és $I_2=\int 4\cos^4 t\,dt$.

Az I_1 integrál az $\int f^n(x)f'(x)\,dx$ típusú, ezért

$$I_1=-\int 2(-\sin t)\cos^4 t\,dt=-2\frac{\cos^5 t}{5}+C_1.$$

$$I_2 = \int 4\cos^4 t\, dt = \int 4\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \int (1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\, dt = \int \left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt =$$

$$= \int \left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2}\right) dt = \frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t+C_2.$$

$$\int (2x+4)\sqrt{(1-x^2)^3}\, dx = -\frac{2}{5}\cos^5 t+\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t+C.$$

Ezt az eredményt $\sin t$-ben kell kifejeznünk, hogy visszahelyettesíthessük az x változót.

Mivel $x = \sin t$, tehát $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$, ezért

$$\cos^5 t = (1-x^2)^{\frac{5}{2}};$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}; \quad \sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t =$$

$$= 2\cdot 2\sin t\cos t\,(\cos^2 t-\sin^2 t) = 4x\sqrt{1-x^2}\,(1-2x^2).$$

A feladat megoldása tehát

$$\int (2x+4)\sqrt{(1-x^2)^3}\, dx =$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+\frac{3}{2}\arcsin x+2x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}(1-2x^2).$$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = ?$ Az $x=\sin t$; $dx=\cos t\, dt$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\, dt = \int \sin^3 t\, dt.$$

Az integrandusban csak a $\sin t$ páratlan kitevőjű hatványa van.

$$\int \sin^3 t\, dt = \int \sin t\sin^2 t\, dt = \int \sin t(1-\cos^2 t)\, dt =$$

$$= \int (\sin t-\sin t\cos^2 t)\, dt = -\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t+C.$$

Mivel $x=\sin t$ és így $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$, ezért

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}+C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\, dx = ?$

I. Megoldás:

Az $x=\sin t$; $dx=\cos t\, dt$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\, dx = \int \frac{2\sin t\cos t\, dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^5}} = \int \frac{2\sin t\cos t\, dt}{\cos^5 t} =$$

$$= \int 2\sin t\cos^{-4} t\, dt = -2\frac{\cos^{-3} t}{-3}+C =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}}+C = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}+C.$$

II. Megoldás:

Most közvetlenül x-ben tudjuk $f^{(n)}(x)f'(x)$ alakba átírni az integrandust:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\, dx = \int 2x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\, dx = -\int -2x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\, dx =$$

$$= -\frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}+C.$$

4. $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x-nek), valamint $\sqrt{a^2+x^2}$-nek racionális kifejezése, akkor

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

és az

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sh} t, \quad x = a \operatorname{sh} t, \quad \text{valamint} \quad dx = a \operatorname{ch} t\, dt$$

helyettesítéssel a gyökkifejezés kiküszöbölhető.

Először olyan feladatokat oldunk meg, amelyekben $a=1$, majd az általános esettel foglalkozunk.

Gyakorló feladatok

1. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$ A feladatot kétféle módon oldjuk meg: egyrészt $x=\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel, másrészt $f^{(n)}(x)f'(x)$ alak ismeretében.

I. Megoldás:

$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$ Az $x=\operatorname{sh} t$, $dx=\operatorname{ch} t\,dt$ helyettesítéssel:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\,dt = \int \operatorname{sh} t\operatorname{ch}^2 t\,dt.$$

Vegyük észre, hogy az integrandus most $f^{(n)}(t)f'(t)$ alakú, ezért

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{\operatorname{ch}^3 t}{3}+C = \frac{(\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t})^3}{3}+C = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3}+C.$$

II. Megoldás:

Az $u = 1+x^2$; $du=2x\,dx$ helyettesítéssel:

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx = \int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}+C.$$

Vigyázat! A második módszert most azért alkalmazhattuk, mert a gyökös kifejezés a belső függvény, az $(1+x^2)$ deriváltjával volt szorozva. Ilyen esetben viszont ez az eljárás gyorsabban vezet célhoz.

2. $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx = ?$ Az $x=\operatorname{sh} t$ helyettesítést alkalmazzuk, amelylyel $dx=\operatorname{ch} t\,dt$; $t=\operatorname{ar\,sh} x$.

$$\int \operatorname{sh}^2 t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\,dt = \int \operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^2 t\,dt = ?$$

Mivel $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x-1}{2}$ és $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x+1}{2}$, ezért

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}\cdot\frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int(\operatorname{ch}^2 2t-1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{\operatorname{ch} 4t+1}{2}-1\right)dt = \frac{1}{8}\int(\operatorname{ch} 4t-1) = \frac{1}{8}\left[\frac{\operatorname{sh} 4t}{4}-t\right]+C.$$

Most vissza kell alakítanunk az eredményt úgy, hogy abban az x változó szerepeljen.

Mivel $x=\operatorname{sh} t$, és $\operatorname{sh} 4t = 2\operatorname{sh} 2t\operatorname{ch} 2t = 2\cdot 2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t(\operatorname{sh}^2 t+\operatorname{ch}^2 t) =$
$= 4\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}(\operatorname{sh}^2 t+1+\operatorname{sh}^2 t) = 4x\sqrt{1+x^2}(2x^2+1)$,

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{8}[x\sqrt{1+x^2}(2x^2+1)-\operatorname{ar\,sh} x]+C.$$

3. $\int 2x^2\sqrt{(1+x^2)^3}\,dx = ?$ Az $x=\operatorname{sh} t$; $dx=\operatorname{ch} t\,dt$; $t=\operatorname{ar\,sh} x$ helyettesítéssel adódik:

$$\int 2\operatorname{sh}^2 t\sqrt{(1+\operatorname{sh}^2 t)^3}\operatorname{ch} t\,dt = \int 2\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^4 t\,dt = ?$$

Mindkét hiperbolikus függvény páros kitevőjű.

$$\operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}; \quad \operatorname{ch}^4 t = \left(\frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2}\right)^2.$$

A felírt azonosságokat behelyettesítve:

$$\int 2x^2\sqrt{(1+x^2)^3}\,dx = \int 2\frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}\left(\frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int(\operatorname{ch}^2 2t-1)(\operatorname{ch} 2t+1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{\operatorname{ch} 4t+1}{2}-1\right)(\operatorname{ch} 2t+1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int(\operatorname{ch} 4t-1)(\operatorname{ch} 2t+1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int(\operatorname{ch} 4t\operatorname{ch} 2t-\operatorname{ch} 2t+\operatorname{ch} 4t-1)\,dt.$$

Az integrandusban levő szorzatfüggvényt a megfelelő azonosság felhasználásával összeggé alakítjuk.

Mivel

$$\mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}\,(x+y)+\mathrm{ch}\,(x-y)],$$

ezért

$$\mathrm{ch}\, 4t\, \mathrm{ch}\, 2t = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}\, 6t+\mathrm{ch}\, 2t),$$

tehát az integrál:

$$\int 2x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{ch}\, 6t+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\, 2t-\mathrm{ch}\, 2t+\mathrm{ch}\, 4t-1\right)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{ch}\, 6t-\frac{1}{2}\mathrm{ch}\, 2t+\mathrm{ch}\, 4t-1\right)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{sh}\, 6t}{12}-\frac{\mathrm{sh}\, 2t}{4}+\frac{\mathrm{sh}\, 4t}{4}-t\right)+C =$$

$$= \frac{1}{96}(\mathrm{sh}\, 6t-3\,\mathrm{sh}\, 2t+3\,\mathrm{sh}\, 4t-12t)+C.$$

A kapott eredményt x függvényévé kell alakítanunk: ehhez felhasználhatjuk a $\mathrm{sh}(x_1+x_2) = \mathrm{sh}\, x_1\, \mathrm{ch}\, x_2+\mathrm{ch}\, x_1\, \mathrm{sh}\, x_2$ összefüggést. $\mathrm{sh}\, 6t = \mathrm{sh}(4t+2t) = \mathrm{sh}\, 4t\, \mathrm{ch}\, 2t+\mathrm{ch}\, 4t\, \mathrm{sh}\, 2t$.

$$\int 2x^2\sqrt{(1+x^2)^3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{96}(\mathrm{sh}\, 4t\, \mathrm{ch}\, 2t+\mathrm{ch}\, 4t\, \mathrm{sh}\, 2t-3\,\mathrm{sh}\, 2t+3\,\mathrm{sh}\, 4t-12t)+C =$$

$$= \frac{1}{96}[\mathrm{sh}\, 4t\,(\mathrm{ch}\, 2t+3)+\mathrm{sh}\, 2t\,(\mathrm{ch}\, 4t-3)-12t]+C.$$

További alakítások:

$$\mathrm{sh}\, 4t = 2\,\mathrm{sh}\, 2t\, \mathrm{ch}\, 2t = 4\,\mathrm{sh}\, t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}\,(2\,\mathrm{sh}^2 t+1) =$$

$$= 4x(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}.$$

$$\mathrm{ch}\, 2t = 2x^2+1; \quad \mathrm{sh}\, 2t = 4x\sqrt{1+x^2};$$

$$\mathrm{ch}\, 4t = \mathrm{ch}^2 2t+\mathrm{sh}^2 2t = (2\,\mathrm{sh}^2 t+1)^2+4\,\mathrm{sh}\, t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} =$$

$$= (2x^2+1)^2+4x\sqrt{1+x^2}.$$

$$\int 2x^2\sqrt{(1+x^2)^3}\, dx = \frac{1}{96}\Big\{(8x^3+4x)\sqrt{1+x^2}\,(2x^2+4)+$$

$$+4x\sqrt{1+x^2}\,[(2x^2+1)^2+4x\sqrt{1+x^2}-3]-12\,\mathrm{ar\,sh}\, x\Big\}+C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = ?$

I. Megoldás:

Az $x=\mathrm{sh}\, t$ helyettesítéssel $dx=\mathrm{ch}\, t\, dt$, és így

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int\frac{\mathrm{sh}\, t}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}\mathrm{ch}\, t\, dt = \int \mathrm{sh}\, t\, dt =$$

$$= \mathrm{ch}\, t+C = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}+C = \sqrt{1+x^2}+C.$$

II. Megoldás:

Az integrandus könnyen átalakítható $f^{(n)}(x)f'(x)$ alakúvá:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{1+x^2}+C.$$

A két megoldás valóban megegyezik.

5. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx = ?$ Ezt a feladatot az $x = \mathrm{sh}\, t$ helyettesítéssel oldjuk meg:

$$x=\mathrm{sh}\, t; \quad t=\mathrm{ar\,sh}\, x; \quad dx=\mathrm{ch}\, t\, dt.$$

$$\int\frac{\mathrm{sh}^2 t\, \mathrm{ch}\, t\, dt}{\sqrt{(1+\mathrm{sh}^2 t)^3}} = \int\frac{\mathrm{sh}^2 t\, \mathrm{ch}\, t\, dt}{\mathrm{ch}^3 t} = \int \mathrm{sh}^2 t\, \mathrm{ch}^{-2} t\, dt =$$

$$= \int(\mathrm{ch}^2 t-1)\,\mathrm{ch}^{-2} t\, dt = \int\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\right)dt = t-\mathrm{th}\, t+C =$$

$$= t-\frac{\mathrm{sh}\, t}{\mathrm{ch}\, t}+C = t-\frac{\mathrm{sh}\, t}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}+C = \mathrm{ar\,sh}\, x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

6. $\displaystyle\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx = ?$ Az integrandust úgy alakítjuk át, hogy a nevezőből 4-et kiemelünk:

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{x^3}{\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}\,dx.$$

A gyökjel alatti kifejezés $1+\mathrm{sh}^2\,t$-vel egyenlő, ha $\frac{3x}{2} = \mathrm{sh}\,t$ új függvényt vezetünk be; ekkor

$$x = \frac{2}{3}\,\mathrm{sh}\,t \quad \text{és} \quad dx = \frac{2}{3}\,\mathrm{ch}\,t\,dt.$$

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{\frac{8}{27}\,\mathrm{sh}^3 t}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}\,\frac{2}{3}\,\mathrm{ch}\,t\,dt = \frac{40}{81}\int \mathrm{sh}^3\,t\,dt.$$

Az integrandust szorzattá alakítjuk, majd felhasználjuk a $\mathrm{ch}^2\,t-\mathrm{sh}^2\,t = 1$ azonosságot.

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx = \frac{40}{81}\int \mathrm{sh}^2\,t\,\mathrm{sh}\,t\,dt = \frac{40}{81}\int (\mathrm{ch}^2\,t-1)\,\mathrm{sh}\,t\,dt =$$

$$= \frac{40}{81}\int (\mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{sh}\,t)\,dt = \frac{40}{81}\left(\frac{\mathrm{ch}^3\,t}{3}-\mathrm{ch}\,t\right)+C.$$

Mivel $\mathrm{ch}\,t = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,t} = \sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}$, ezért az integrál mint az x függvénye:

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx = \frac{40}{81}\left[\frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\right)^3}{3}-\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\right]+C.$$

A további átalakításokat az Olvasóra bízzuk.

5. $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x-nek), valamint $\sqrt{x^2-a^2}$-nek racionális függvénye, akkor a gyökös kifejezést először a^2 kiemelésével átalakítjuk $a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}$ alakúra, majd

$\frac{x}{a} = \mathrm{ch}\,t$ új változót bevezetve, a gyökkifejezést kiküszöböljük, és így $R(\mathrm{sh}\,t, \mathrm{ch}\,t)$ alakú integrandust kapunk, amelyet már tárgyaltunk.

Gyakorló feladatok

1. $\int 3x\sqrt{x^2-1}\,dx = ?$

I. Megoldás:

Az integrandus az előbbiekben említett típushoz tartozik, tehát az előbb említett helyettesítés célhoz vezet. Legyen

$$x = \mathrm{ch}\,t;\ \text{ekkor}\ t = \mathrm{ar\,ch}\,x;\ dx = \mathrm{sh}\,t\,dt.$$

$$\int 3\,\mathrm{ch}\,t\sqrt{\mathrm{ch}^2\,t-1}\,\mathrm{sh}\,t\,dt = \int 3\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}^2\,t\,dt.$$

Az integrandusban $\mathrm{ch}\,t$ első hatványa (páratlan kitevőjű hatvány) és a $\mathrm{sh}\,t$ második hatványa van. Ilyenkor $\mathrm{sh}\,t = u$ helyettesítést alkalmazunk, ekkor $du = \mathrm{ch}\,t\,dt$, vagyis

$$dt = \frac{du}{\mathrm{ch}\,t}.$$

$$\int 3x\sqrt{x^2-1}\,dx = \int 3u^2\,du = 3\frac{u^3}{3}+C = u^3+C =$$

$$= \mathrm{sh}^3\,t+C = \sqrt{(\mathrm{ch}^2\,t-1)^3}+C = \sqrt{(x^2-1)^3}+C.$$

II. Megoldás:

A feladatot egyszerűbben megoldhatjuk, ha a gyökjel alatti kifejezést helyettesítjük.

$$u = x^2-1;\ du = 2x\,dx,$$

$$\int 3x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{3}{2}\int 2x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{3}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \sqrt{u^3}+C = \sqrt{(x^2-1)^3}+C.$$

III. Megoldás:

A legegyszerűbb az integrálás, ha az integrandust $f^n(x)f'(x)$ alakba írjuk:

$$\frac{3}{2}\int 2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \sqrt{(x^2-1)^3}+C.$$

A megoldások valóban megegyeznek.

2. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = ?$ Az $x=\operatorname{ch} t$ helyettesítést alkalmazzuk, mellyel:

$$t=\operatorname{ar\,ch} x \quad \text{és} \quad dx=\operatorname{sh} t\,dt;$$

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \operatorname{ch}^3 t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}\operatorname{sh} t\,dt = \int \operatorname{ch}^3 t\operatorname{sh}^2 t\,dt.$$

Az integrandus ch t-ben páratlan, sh t-ben páros. Legyen ezért

$$u=\operatorname{sh} t;\quad du=\operatorname{ch} t\,dt.$$

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch} t\,dt = \int (1+\operatorname{sh}^2 t)\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch} t\,dt =$$

$$= \int (1+u^2)u^2\,du = \int (u^2+u^4)\,du = \frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 t+\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 t+C.$$

Mivel $x=\operatorname{ch} t$, ezért $\operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1} = \sqrt{x^2-1}$, és így

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+C.$$

3. $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = ?$ A feladatot kétféle módon oldjuk meg:

1. $x=\operatorname{ch} t$ helyettesítéssel. 2. $x^2-1 = u$ helyettesítéssel.

I. Megoldás:

Legyen $x=\operatorname{ch} t$; és $dx=\operatorname{sh} t\,dt$.

$$\int \frac{5x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{5\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t\,dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}} = \int 5\operatorname{ch} t\,dt =$$

$$= 5\operatorname{sh} t+C = 5\sqrt{x^2-1}+C.$$

II. Megoldás:

$$u = x^2-1;\quad du=2x\,dx.$$

$$\int \frac{5x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{5}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{5}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{5}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = 5\sqrt{u}+C = 5\sqrt{x^2-1}+C.$$

A két megoldás valóban megegyezik. Megoldhattuk volna az integrandus $f'(x)f^n(x)$ alakra hozásával is.

4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx = ?$ Az $x=\operatorname{ch} t$ helyettesítéssel $dx=\operatorname{sh} t\,dt$, és

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx = \int \frac{\operatorname{ch}^3 t\operatorname{sh} t\,dt}{\sqrt{(\operatorname{ch}^2 t-1)^3}} = \int \frac{\operatorname{ch}^3 t\operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh}^3 t} = \int \frac{\operatorname{ch}^3 t}{\operatorname{sh}^2 t}dt.$$

Az integrandusban most ch t páratlan kitevőjű hatványa és sh t páros kitevőjű hatványa van. Ekkor $u=\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel megoldhatjuk a feladatot:

$$u=\operatorname{sh} t;\quad du=\operatorname{ch} t\,dt.$$

Ennek megfelelően alakítjuk át az integrandust:

$$\int \frac{\operatorname{ch}^3 t}{\operatorname{sh}^2 t}dt = \int \frac{\operatorname{ch}^2 t\operatorname{ch} t\,dt}{\operatorname{sh}^2 t} = \int \frac{(1+\operatorname{sh}^2 t)\operatorname{ch} t\,dt}{\operatorname{sh}^2 t} =$$

$$= \int \frac{(1+u^2)\,du}{u^2} = \int \left(\frac{1}{u^2}+1\right)du = \int (u^{-2}+1)\,du = \frac{u^{-1}}{-1}+u+C =$$

$$= -\frac{1}{u}+u+C = -\frac{1}{\operatorname{sh} t}+\operatorname{sh} t+C = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-1}+C.$$

5. $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt{16x^2-25}}\,dx = ?$ A nevezőből kiemelünk 25-öt, így $\sqrt{16x^2-25} = 5\sqrt{\left(\frac{4x}{5}\right)^2-1}$; amennyiben ez után a $\frac{4x}{5} = \operatorname{ch} t$ helyettesí-

$$\int_{0,2}^{0,6} 1 \arcsin x\,dx = [x \arcsin x]_{0,2}^{0,6} - \int_{0,2}^{0,6} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= [x \arcsin x]_{0,2}^{0,6} - [-\sqrt{1-x^2}]_{0,2}^{0,6} =$$

$$= 0{,}6 \arcsin 0{,}6 - 0{,}2 \arcsin 0{,}2 + \sqrt{1-0{,}6^2} - \sqrt{1-0{,}2^2}.$$

Először visszakeressük 0,6, ill. 0,2 arkusz szinuszát; a táblázatban fokban kapjuk meg a szöget, ezt át kell számítanunk radiánba:

$$\arcsin 0{,}6 \approx 37° \approx 37 \cdot 0{,}0174 \approx 0{,}644 \text{ (rad)};$$

$$\arcsin 0{,}2 \approx 11{,}5° \approx 11{,}5 \cdot 0{,}0174 \approx 0{,}2 \text{ (rad)}.$$

$$\int_{0,2}^{0,6} \arcsin x\,dx \approx 0{,}6 \cdot 0{,}644 - 0{,}2 \cdot 0{,}2 + \sqrt{1-0{,}36} - \sqrt{1-0{,}04} \approx$$

$$\approx 0{,}3864 - 0{,}04 + 0{,}8 - 0{,}98 = 1{,}1864 - 1{,}02 = 0{,}1664 \approx 0{,}17.$$

11. $\int_{0,3}^{4} \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int_{0,3}^{4} 1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx = ?$

Legyen $u = \operatorname{arc\,tg} x$; $u' = \frac{1}{1+x^2}$; $v' = 1$; $v = x$.

$$\int_{0,3}^{4} \operatorname{arc\,tg} x\,dx = [x \operatorname{arc\,tg} x]_{0,3}^{4} - \int_{0,3}^{4} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= [x \operatorname{arc\,tg} x]_{0,3}^{4} - \left[\frac{1}{2} \ln (1+x^2)\right]_{0,3}^{4} =$$

$$= 4 \operatorname{arc\,tg} 4 - 0{,}3 \operatorname{arc\,tg} 0{,}3 - \frac{1}{2} \ln 17 + \frac{1}{2} \ln 1{,}09.$$

$$4 \operatorname{arc\,tg} 4 \approx 4 \cdot 76 \cdot 0{,}0174 \approx 5{,}3;$$

$$0{,}3 \operatorname{arc\,tg} 0{,}3 \approx 0{,}3 \cdot 16{,}7 \cdot 0{,}0174 \approx 0{,}087;$$

$$-\frac{1}{2} \ln 17 + \frac{1}{2} \ln 1{,}09 \approx -\frac{1}{2} \cdot 2{,}833 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}086 \approx -1{,}373.$$

És így a végeredmény $5{,}213 - 1{,}373 = 3{,}84$.

12. $\int_{2}^{3} \operatorname{ar\,sh} x\,dx = \int_{2}^{3} 1 \operatorname{ar\,sh} x\,dx = ?$

Legyen $u = \operatorname{ar\,sh} x$; $u' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $v' = 1$; $v = x$.

$$\int_{2}^{3} \operatorname{ar\,sh} x\,dx = [x \operatorname{ar\,sh} x]_2^3 - \int_{2}^{3} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= [x \operatorname{ar\,sh} x]_2^3 - [\sqrt{1+x^2}]_2^3 = [x \ln (x+\sqrt{x^2+1})]_2^3 - [\sqrt{1+x^2}]_2^3 =$$

$$= 3 \ln (3+\sqrt{10}) - 2 \ln (2+\sqrt{5}) - \sqrt{10} + \sqrt{5} \approx$$

$$\approx 3 \ln (3+3{,}16) - 2 \ln (2+2{,}24) - 3{,}16 + 2{,}24 =$$

$$= 3 \ln 6{,}16 - 2 \ln 4{,}24 - 0{,}92 \approx 3 \cdot 1{,}82 - 2 \cdot 1{,}44 - 0{,}92 = 1{,}66.$$

13. $\int_{2}^{4} \operatorname{ar\,ch} x\,dx = \int_{2}^{4} 1 \operatorname{ar\,ch} x\,dx = ?$

Legyen $u = \operatorname{ar\,ch} x$; $u' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $v' = 1$; $v = x$.

$$\int_{2}^{4} \operatorname{ar\,ch} x\,dx = [x \operatorname{ar\,ch} x]_2^4 - \int_{2}^{4} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$$= [x \operatorname{ar\,ch} x]_2^4 - [\sqrt{x^2-1}]_2^4 = [x \ln (x+\sqrt{x^2-1})]_2^4 - [\sqrt{x^2-1}]_2^4 =$$

$$= 4 \ln (4+\sqrt{15}) - 2 \ln (2+\sqrt{3}) - \sqrt{15} + \sqrt{3} \approx$$

$$\approx 4 \ln (4+3{,}87) - 2 \ln (2+1{,}73) - 3{,}87 + 1{,}73 =$$

$$= 4 \ln 7{,}87 - 2 \ln 3{,}73 - 2{,}14 \approx 4 \cdot 2{,}06 - 2 \cdot 1{,}32 - 2{,}14 = 3{,}46.$$

14. $\int_{0,2}^{0,4} \operatorname{ar\,th} x\,dx = \int_{0,2}^{0,4} 1 \operatorname{ar\,th} x\,dx = ?$

Legyen $u = \operatorname{ar\,th} x$; $u' = \frac{1}{1-x^2}$; $v' = 1$; $v = x$.

$$\int_{0,2}^{0,4} \operatorname{ar\,th} x\,dx = [x \operatorname{ar\,th} x]_{0,2}^{0,4} - \int_{0,2}^{0,4} \frac{x}{1-x^2}\,dx =$$

$$= [x \operatorname{ar\,th} x]_{0,2}^{0,4} + \frac{1}{2}\int_{0,2}^{0,4} \frac{-2x}{1-x^2}\,dx =$$

$$= [x \operatorname{ar\,th} x]_{0,2}^{0,4} + \frac{1}{2}[\ln(1-x^2)]_{0,2}^{0,4} =$$

$$= \left[x\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_{0,2}^{0,4} + \frac{1}{2}[\ln(1-x^2)]_{0,2}^{0,4} =$$

$$= \frac{1}{2}[x\ln(1+x) - x\ln(1-x) + \ln(1+x) + \ln(1-x)]_{0,2}^{0,4} =$$

$$= \frac{1}{2}[(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)]_{0,2}^{0,4} =$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}4\ln 1{,}4 + 0{,}6\ln 0{,}6 - 1{,}2\ln 1{,}2 - 0{,}8\ln 0{,}8) =$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}4\ln 1{,}4 + 0{,}6\ln 6 - 0{,}6\ln 10 - 1{,}2\ln 1{,}2 - 0{,}8\ln 8 + 0{,}8\ln 10) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}(1{,}4\cdot 0{,}34 + 0{,}6\cdot 1{,}80 - 0{,}6\cdot 2{,}30 - 1{,}2\cdot 0{,}18 - 0{,}8\cdot 2{,}08 + 0{,}8\cdot 2{,}30) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}(0{,}475 + 1{,}08 - 1{,}38 - 0{,}216 - 1{,}664 + 1{,}84) =$$

$$= \frac{1}{2}(3{,}395 - 3{,}260) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}135 = 0{,}0675.$$

2. Integrálás helyettesítéssel

Ha

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

kiszámítása során egy $x=\varphi(t)$ helyettesítést végzünk, akkor — φ inverz függvényét φ^{-1}-gyel jelölve — $t=\varphi^{-1}(x)$;

$dx=\varphi'(t)dt$; az új határok pedig az alábbi módon adódnak:
az $x=a$ alsó határnak megfelelő t érték $t=\varphi^{-1}(a)$;
az $x=b$ felső határnak megfelelő t érték $t=\varphi^{-1}(b)$.

Megjegyzés: Megtehetjük természetesen azt is, hogy először a határok figyelembevétele nélkül a helyettesítési eljárással kiszámítjuk az integrandus határozatlan integrálját, majd az eredményt visszaalakítva az eredeti változó függvényévé, az eredeti határokat helyettesítjük be.

Gyakorló feladatok

1. $\int_1^2 (3x+4)^3\,dx = ?$ Az integrandus egy elsőfokú függvény hatványfüggvénye; ilyenkor az $u = 3x+4$ helyettesítést alkalmazhatjuk, ekkor $dx = \frac{1}{3}\,du$.

A megfelelő határok kiszámítása:
Ha $x=1$, akkor $u=7$; ha $x=2$, akkor $u=10$, tehát

$$\int_1^2 (3x+4)^3\,dx = \int_7^{10} u^3\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_7^{10} u^3\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_7^{10} =$$

$$= \frac{1}{12}(10^4-7^4) \approx \frac{1}{12}(10000-2400) = \frac{7600}{12} \approx 633.$$

2. $\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4}\,dx = ?$

Legyen $u = 2x+1$; vagyis $dx = \frac{1}{2}\,du$.
Ha $x=2$, akkor $u=5$; ha $x=3$, akkor $u=7$.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4}\,dx = \int_5^7 \frac{du}{2u^4} = \frac{1}{2}\int_5^7 u^{-4}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{-3}}{-3}\right]_5^7 =$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{u^3}\right]_5^7 = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{7^3}-\frac{1}{5^3}\right] = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{343}-\frac{1}{125}\right] =$$

$$= \frac{343-125}{6\cdot 343\cdot 125} \approx 8{,}5\cdot 10^{-4}.$$

A feladat megoldható $f^{(n)}(x)f'(x)$ alak felhasználásával is.

3. $\int\limits_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,dx = ?$ A feladat megoldható helyettesítéssel, valamint $f^n(x)f'(x)$ alak felhasználásával.

I. Megoldás:

Legyen $u=\sqrt{x^3-2}$; tehát $u^2 = x^3-2$; $x^3 = u^2+2$, ebből

$$3x^2\,dx = 2u\,du, \text{ vagyis } x^2\,dx = \frac{2}{3}u\,du.$$

Az új határok:

Ha $x=2$, akkor $u=\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$; ha $x=3$, akkor $u=\sqrt{27-2}=5$.

$$\int\limits_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,dx = \int\limits_{\sqrt{6}}^5 \frac{\frac{2}{3}u\,du}{u} = \frac{2}{3}\int\limits_{\sqrt{6}}^5 du =$$

$$= \frac{2}{3}[u]_{\sqrt{6}}^5 = \frac{2}{3}(5-\sqrt{6}) \approx 0{,}67(5-2{,}45) = 0{,}67\cdot 2{,}55 \approx 1{,}71.$$

II. Megoldás:

Az integrandus könnyen $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható:

$$\int\limits_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_2^3 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_2^3 3x^2(x^3-2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_2^3 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3-2}\right]_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3}(5-\sqrt{6}) \approx 0{,}67(5-2{,}45) = 0{,}67\cdot 2{,}55 \approx 1{,}71.$$

4. $\int\limits_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx = ?$

I. Megoldás:

Legyen $u=e^{3x}$; tehát $du=3e^{3x}\,dx$, vagyis $e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\,du$.

Az új határok:
Ha $x=1$, akkor $u=e^3$, ha $x=2$, akkor $u=e^6$.

$$\int\limits_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx = \int\limits_{e^3}^{e^6} \frac{\frac{1}{3}\,du}{u+1} = \frac{1}{3}\int\limits_{e^3}^{e^6} \frac{du}{u+1} =$$

$$= \frac{1}{3}[\ln(u+1)]_{e^3}^{e^6} \approx \frac{1}{3}[\ln u]_{e^3}^{e^6} = \frac{1}{3}(\ln e^6 - \ln e^3) = \frac{1}{3}(6-3) = 1.$$

II. Megoldás:

A számlálót a nevező deriváltjává alakítjuk, majd integrálunk.

$$\int\limits_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln|e^{3x}+1|\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}[\ln(e^6+1)-\ln(e^3+1)] \approx \frac{1}{3}(\ln e^6 - \ln e^3) = \frac{1}{3}(6-3) = 1.$$

5. $\int\limits_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1}\,dx = ?$

Legyen $u=e^x$, ekkor $du=e^x\,dx$ és így $dx = \frac{du}{u}$.

Az új határok: ha $x=-1$, akkor $u = \frac{1}{e}$; ha $x=0$, akkor $u=1$.

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1}\,dx = \int\limits_{1/e}^1 \frac{3}{u+1}\frac{du}{u} = \int\limits_{1/e}^1 \frac{3}{u(u+1)}\,du = ?$$

A feladatot az integrandusnak parciális törtekre bontásával oldjuk meg.

$$\frac{3}{u(u+1)} \equiv \frac{A}{u}+\frac{B}{u+1};$$

$$\frac{3}{u(u+1)} \equiv \frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)};$$

$$3 \equiv A(u+1)+Bu.$$

Legyen $u=0$, ekkor látható, hogy $A=3$; és legyen $u=-1$, ebből adódik $B=-3$

$$\int_{-1}^{0}\frac{3}{e^x+1}\,dx=\int_{1/e}^{1}\left(\frac{3}{u}-\frac{3}{u+1}\right)du=3\,[\ln u-\ln(u+1)]_{\frac{1}{e}}^{1}=$$

$$=3\left[\ln 1-\ln 2-\ln\frac{1}{e}+\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)\right]=3\left(-\ln 2+\ln\frac{\frac{1+e}{e}}{\frac{1}{e}}\right)=$$

$$=3\ln\frac{1+e}{2}\approx 3\ln 1{,}86\approx 3\cdot 0{,}62=1{,}86.$$

II. Megoldás:

A feladatot — ellenőrzésül — más helyettesítéssel is megoldjuk.

$$\int_{-1}^{0}\frac{3}{e^x+1}\,dx=?$$

Legyen most $u=e^x+1$, akkor $du=e^x\,dx$, és $dx=\frac{du}{e^x}=\frac{du}{u-1}$.

Megállapítjuk az új határokat: ha $x=-1$, akkor $u=\frac{1}{e}+1$, és ha $x=0$, akkor $u=2$.

$$\int_{-1}^{0}\frac{3}{e^x+1}\,dx=\int_{\frac{1}{e}+1}^{2}\frac{3}{u}\cdot\frac{du}{u-1}=\int_{\frac{1}{e}+1}^{2}\frac{3\,du}{u(u-1)}.$$

Parciális törtekre bontjuk az integrandust:

$$\frac{3}{u(u-1)}\equiv\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}.$$

$$3\equiv A(u-1)+Bu.$$

Legyen $u=0$, akkor $A=-3$, és $u=1$ esetén $B=3$.

$$\int_{\frac{1}{e}+1}^{2}\left(-\frac{3}{u}+\frac{3}{u-1}\right)du=3\int_{\frac{1}{e}+1}^{2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du=$$

$$=3\,[\ln(u-1)-\ln u]_{\frac{1}{e}+1}^{2}=3\left[\ln 1-\ln 2-\ln\frac{1}{e}+\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)\right].$$

Eredményünk az előbbi módszerrel kapott eredménnyel megegyezik, ahol a számértéket is meghatároztuk.

6. $$\int_{1}^{4}\frac{x}{\sqrt{5x-4}}\,dx=?$$

Legyen $u=5x-4$; vagyis $x=\frac{u+4}{5}$, és $dx=\frac{1}{5}\,du$.

Az új határok: ha $x=1$, akkor $u=1$; ha $x=4$, akkor $u=16$.

$$\int_{1}^{4}\frac{x}{\sqrt{5x-4}}\,dx=\int_{1}^{16}\frac{\frac{u+4}{5}\cdot\frac{1}{5}\,du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{25}\int_{1}^{16}\frac{u+4}{\sqrt{u}}\,du=$$

$$=\frac{1}{25}\int_{1}^{16}\left(\sqrt{u}+\frac{4}{\sqrt{u}}\right)du=\frac{1}{25}\int_{1}^{16}\left(u^{\frac{1}{2}}+4u^{-\frac{1}{2}}\right)du=$$

$$=\frac{1}{25}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+4\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{16}=\frac{1}{25}\left[\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+8\sqrt{u}\right]_{1}^{16}=$$

$$=\frac{1}{25}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}+8\sqrt{u}\right]_{1}^{16}=\frac{1}{25}\left(\frac{2}{3}16\cdot 4+8\cdot 4-\frac{2}{3}\cdot 1-8\cdot 1\right)=$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{128}{3}+32-\frac{2}{3}-8\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{126}{3}+24\right)=\frac{66}{25}.$$

7. $\displaystyle\int_{0{,}5}^{2}\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=?$ Az integrandusból az $x=\operatorname{sh}t$ helyettesítéssel a gyökkifejezést kiküszöbölhetjük. Legyen tehát $x=\operatorname{sh}t$, akkor $dx=\operatorname{ch}t\,dt$. Az új határokat csak jelöljük:

$$\int_{0{,}5}^{2}\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\frac{2\operatorname{sh}^2t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}}\operatorname{ch}t\,dt=\int_{t_1}^{t_2}2\operatorname{sh}^2t\,dt.$$

Az átalakítás során figyelembe vettük, hogy

$$\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}=\operatorname{ch}t.$$

Mint tudjuk, $\operatorname{sh}^2 t = \dfrac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$, ezért

$$\int_{t_1}^{t_2} 2\operatorname{sh}^2 t\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch} 2t - 1)\,dt = \left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t\right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= [\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t]_{t_1}^{t_2} = [\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} - t]_{t_1}^{t_2} = [x\sqrt{1+x^2} - \operatorname{ar\,sh} x]_{0,5}^{2} =$$

$$= 2\sqrt{5} - \ln(2+\sqrt{5}) - 0{,}5\sqrt{1{,}25} + \ln(0{,}5+\sqrt{1{,}25}) \approx$$

$$\approx 2\cdot 2{,}24 - \ln 4{,}24 - 0{,}5\cdot 1{,}12 + \ln 1{,}62 \approx$$

$$\approx 4{,}48 - 1{,}44 - 0{,}56 + 0{,}482 = 4{,}962 - 2{,}00 = 2{,}962.$$

8. $\displaystyle\int_3^4 3x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = ?$ Most az $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítés célszerű, mert a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ azonosságot felhasználva, az integrandus $\operatorname{sh} t$ és $\operatorname{ch} t$ racionális kifejezése lesz.

$$x = \operatorname{ch} t; \quad dx = \operatorname{sh} t\,dt.$$

Mivel most adott x-hez tartozó t érték megállapítása elég nehézkes, ezért a határokat nem fejezzük ki az új változóban, inkább majd visszatérünk a régi változóra.

$$\int_3^4 3x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} 3\operatorname{ch}^2 t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\operatorname{sh} t\,dt = \int_{t_1}^{t_2} 3\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh}^2 t\,dt.$$

Mivel $\operatorname{ch}^2 t = \dfrac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}$, és $\operatorname{sh}^2 t = \dfrac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$, ezért

$$\int_{t_1}^{t_2} 3\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh}^2 t\,dt = \frac{3}{4}\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch} 2t + 1)(\operatorname{ch} 2t - 1)\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch}^2 2t - 1)\,dt = \frac{3}{4}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1+\operatorname{ch} 4t}{2} - 1\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\operatorname{ch} 4t}{2} - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{3}{8}\int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch} 4t - 1)\,dt =$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{3}{8}\left[\frac{2\operatorname{sh} 2t\operatorname{ch} 2t}{4} - t\right]_{t_1}^{t_2}.$$

$$2\operatorname{sh} 2t\operatorname{ch} 2t = 4\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = 4\operatorname{ch} t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\,(2\operatorname{ch}^2 t - 1).$$

Visszahelyettesítjük a régi változót és határokat:

$$\int_3^4 3x^2\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{3}{8}[\operatorname{ch} t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\,(2\operatorname{ch}^2 t - 1) - t]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{3}{8}[x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1) - \operatorname{ar\,ch} x]_3^4 =$$

$$= \frac{3}{8}[x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2-1) - \ln(x+\sqrt{x^2-1})]_3^4 =$$

$$= \frac{3}{8}[4\sqrt{15}(31) - \ln(4+\sqrt{15}) - 3\sqrt{8}(17) + \ln(3+\sqrt{8})] \approx$$

$$\approx \frac{3}{8}[124\cdot 3{,}87 - \ln(4+3{,}87) - 51\cdot 2{,}83 + \ln(3+2{,}83)] \approx$$

$$\approx \frac{3}{8}(480 - \ln 7{,}87 - 144 + \ln 5{,}83) \approx \frac{3}{8}(336 - 2{,}06 + 1{,}76) =$$

$$= \frac{3}{7}(336 - 0{,}30) = \frac{3\cdot 335{,}7}{8} \approx 126.$$

IX. IMPROPRIUS INTEGRÁL

1. Végtelen integrálási intervallum

Legyen az $f(x)$ függvény minden $B>a$-ra az $[a, B]$ intervallumban integrálható. Ha a

$$\lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)\,dx$$

határérték létezik és véges, amit úgy is mondunk, hogy az integrál konvergens, akkor az $[a, \infty]$ intervallumbeli improprius integrál definíció szerint ezzel a határértékkel egyenlő:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)\,dx.$$

Hasonlóképpen

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)\,dx,$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx,$$

ha a megfelelő integrálok és határértékek léteznek.

Gyakorló feladatok

1. $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_2^B \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^B = \lim_{B\to+\infty} \left[-\frac{1}{B}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Az improprius integrál tehát konvergens, és értéke $\frac{1}{2}$.

2. $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{1}{x}\,dx = \lim_{B\to+\infty} [\ln x]_1^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} [\ln B - \ln 1] = +\infty.$$

Az integrál tehát divergens.

3. $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_0^B \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} [\operatorname{arc\,tg} x]_0^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} (\operatorname{arc\,tg} B - \operatorname{arc\,tg} 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

4. $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{25+x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_0^B \frac{1}{25+x^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \frac{1}{25} \int_0^B \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\,dx.$$

A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg: $u=\frac{x}{5}$; $dx=5\,du$; ha $x=0$, akkor $u=0$; ha $x=+\infty$, akkor $u=+\infty$; ha $x=B$, akkor $u=\frac{B}{5}=B'$;

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{25+x^2}\,dx = \lim_{B'\to+\infty} \frac{1}{25} \int_0^{B'} \frac{5\,du}{1+u^2} = \lim_{B'\to+\infty} \frac{1}{5} \int_0^{B'} \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \lim_{B'\to+\infty} \frac{1}{5} [\operatorname{arc\,tg} u]_0^{B'} = \lim_{B'\to+\infty} \frac{1}{5} (\operatorname{arc\,tg} B' - \operatorname{arc\,tg} 0) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{10}.$$

5. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}} \int_A^B \frac{2}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}} [2\operatorname{arc\,tg} x]_A^B =$$

$$= \lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}} [2\operatorname{arc\,tg} B - 2\operatorname{arc\,tg} A]_A^B = 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

6. $$\int_5^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx = \int_5^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_5^B x^{-\frac{4}{3}}\,dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right]_5^B = \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\right]_5^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{B}} + \frac{3}{\sqrt[3]{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{5}}.$$

7. $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{B\to+\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^3} = \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^B = \lim_{B\to+\infty} \left(-\frac{1}{2B^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

8. $$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_3^B \frac{dx}{(x-2)^2} = \lim_{B\to+\infty} \int_3^B (x-2)^{-2}\,dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{(x-2)^{-1}}{-1}\right]_3^B = \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{-1}{x-2}\right]_3^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[\frac{-1}{B-2} + \frac{1}{3-2}\right] = 1.$$

9. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{2}{(x-3)(x+4)}\,dx = ?$ Az integrandusnak az $[5;\ +\infty]$ intervallumban nincs szakadása. Parciális törtekre bontva integrálunk:

$$\frac{2}{(x-3)(x+4)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{C}{x+4};$$

$$2 \equiv A(x+4) + C(x-3).$$

Ha $x=3$, akkor $2=7A$, és így $A=\frac{2}{7}$; ha $x=-4$, akkor $2=-7C$, és így $C=-\frac{2}{7}$.

$$\int_5^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\frac{1}{x-3} - \frac{2}{7}\frac{1}{x+4}\right) dx = \lim_{B\to+\infty} \frac{2}{7} \int_5^B \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4}\right) dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{2}{7} [\ln(x-3) - \ln(x+4)]_5^B = \lim_{B\to+\infty} \frac{2}{7} \left[\ln\frac{x-3}{x+4}\right]_5^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{2}{7} \left[\ln\frac{B-3}{B+4} - \ln\frac{5-3}{5+4}\right] = \frac{2}{7}\left(0 - \ln\frac{2}{9}\right) =$$

$$= \frac{2}{7} \ln 4{,}5 \approx 0{,}285\cdot 1{,}51 \approx 0{,}43.$$

Felhasználtuk, hogy $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{B-3}{B+4} = \lim_{B\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{B}}{1+\frac{4}{B}} = 1$, és $\ln 1 = 0$.

10. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{5}{(x-1)(x+5)}\,dx = ?$ A feladatot az előbbi módon oldjuk meg:

$$\frac{5}{(x-1)(x+5)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5};$$

$$5 \equiv A(x+5) + B(x-1).$$

Legyen $x=1$, akkor $5=6A$, és így $A=\frac{5}{6}$; ha $x=-5$, akkor $5=-6B$, tehát $B=-\frac{5}{6}$.

Eredményeinket felhasználva:

$$\int_3^{+\infty} \frac{5}{(x-1)(x+5)}\,dx = \int_3^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\frac{1}{x-1} - \frac{5}{6}\frac{1}{x+5}\right) dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{5}{6} \int_3^B \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5}\right) dx =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{5}{6} [\ln(x-1) - \ln(x+5)]_3^B = \lim_{B\to+\infty} \frac{5}{6} \left[\ln\frac{x-1}{x+5}\right]_3^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \frac{5}{6}\left(\ln\frac{B-1}{B+5} - \ln\frac{3-1}{3+5}\right) = \lim_{B\to+\infty}\frac{5}{6}\left(\ln\frac{1-\frac{1}{B}}{1+\frac{5}{B}} - \ln\frac{2}{8}\right) =$$

$$= \frac{5}{6}\left(0-\ln\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{6}\ln 4 \approx 0{,}835\cdot 1{,}4 \approx 1{,}17.$$

11. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx = ?$ A $(-\infty;\ -2]$ intervallumon belül az integrandusnak nincs szakadása. Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3};$$

$$1 \equiv A(x-3)+B(x+1).$$

Legyen $x=-1$, akkor $1=-4A$, és $A=-\frac{1}{4}$; legyen $x=3$, akkor $1=4B$, és $B=\frac{1}{4}$.

Tehát

$$\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-2}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-3}\right)dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{4}\int\limits_{A}^{-2}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{4}[\ln(x-3)-\ln(x+1)]_A^{-2} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{4}\left[\ln\frac{x-3}{x+1}\right]_A^{-2} = \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{4}\left(\ln\frac{-2-3}{-2+1}-\ln\frac{A-3}{A+1}\right) =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{4}\left(\ln 5 - \ln\frac{1-\frac{3}{A}}{1+\frac{1}{A}}\right) = \frac{1}{4}\ln 5 \approx 0{,}25\cdot 1{,}62 = 0{,}405.$$

12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{5}{x^2-2x+2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{5}{(x-1)^2+1}\,dx = ?$ Az integrandus mindenütt folytonos. A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg:

Legyen $u=x-1$, így $du=dx$; ha $x\to\pm\infty$; akkor $u\to\pm\infty$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{5}{(x-1)^2+1}\,dx = \lim_{\substack{B\to+\infty\\ A\to-\infty}}\int\limits_{A}^{B}\frac{5}{(x-1)^2+1}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{B'\to+\infty\\ A'\to-\infty}}\int\limits_{A'}^{B'}\frac{5}{u^2+1}\,du = \lim_{\substack{B'\to+\infty\\ A'\to-\infty}}[5\operatorname{arc\,tg} u]_{A'}^{B'} =$$

$$= \lim_{\substack{B'\to+\infty\\ A'\to-\infty}}(5\operatorname{arc\,tg} B' - 5\operatorname{arc\,tg} A') = 5\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 5\pi.$$

13. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{1}^{B} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty}[-e^{-x}]_1^B =$

$$= \lim_{B\to+\infty}(-e^{-B}+e^{-1}) = \frac{1}{e}\approx 0{,}368.$$

14. $\int\limits_{2}^{+\infty} 5e^{-2x}\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{2}^{B} 5e^{-2x}\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\left[-\frac{5}{2}e^{-2x}\right]_2^B =$

$$= \lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{5}{2}e^{-2B}+\frac{5}{2}e^{-4}\right) = \frac{5}{2e^4}\approx\frac{2{,}5}{54{,}6}\approx 0{,}0458.$$

15. $\int\limits_{-\infty}^{-3} e^{x}\,dx = \lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{-3} e^{x}\,dx = \lim\limits_{A\to-\infty}[e^x]_A^{-3} =$

$$= \lim_{A\to-\infty}(e^{-3}-e^{A}) = \frac{1}{e^3}\approx\frac{1}{20} = 0{,}05.$$

16. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = ?$ Alkalmazzuk az $e^x=u$ helyettesítést. Ekkor $u=e^x$; $du=e^x\,dx$.

A határok: ha $x=1$, akkor $u=e$; ha $x=+\infty$, akkor $u=+\infty$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \int_e^{+\infty} \frac{du}{u^2-1} = \lim_{B\to+\infty} \int_e^{B} \frac{du}{u^2-1} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} [-\operatorname{ar\,cth} u]_e^B = \lim_{B\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_e^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\ln\frac{B-1}{B+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1}\right) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1}-0\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\ln\frac{1,72}{3,72} = \frac{1}{2}(\ln 1,72-\ln 3,72) \approx \frac{1}{2}(0,542-1,33) \approx -0,4.$$

17. $$\int_{-\infty}^{0} 3^x\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 3^x\,dx = \lim_{A\to-\infty}\left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_A^0 =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{\ln 3}[1-3^A] = \frac{1}{\ln 3} \approx \frac{1}{1,1} \approx 0,91.$$

18. $$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2} = ?$$ Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1};$$

$$1 \equiv A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

A kijelölt szorzásokat elvégezzük, majd felírjuk az egyenlő fokszámú tagok együtthatóinak egyenlőségét. Az így kapott egyenletrendszert megoldjuk.

$$1 \equiv A(x^3-x^2+x-1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-2x+1);$$

$$1 \equiv (A+C)x^3+(-A+B+D-2C)x^2+(A-2D+C)x+$$
$$+(-A+B+D).$$

$A+C=0$ I.

$-A+B+D-2C=0$ II.

$A-2D+C=0$ III.

$-A+B+D=1$ IV.

I.–III.:

$2D=0, \quad D=0.$

V.–II. :

$$2C=0; \quad C=\frac{1}{2}.$$

I.-be behelyettesítve:

$$A+C=0; \quad A=-\frac{1}{2}.$$

IV.-ből:

$$\frac{1}{2}+B=1; \quad B=\frac{1}{2}.$$

Az integrál

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\right]dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x-1}-\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_A^{-1} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{A-1}+\ln(1-A)-\frac{1}{2}\ln(A^2+1)\right] =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{A-1}+\ln\frac{1-A}{\sqrt{A^2+1}}\right).$$

Mivel $\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{A-1}=0$ és $\lim_{A\to-\infty}\ln\frac{1-A}{\sqrt{A^2+1}}=\ln 1=0,$

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\ln 2 \approx 0,25-0,17 = 0,08.$$

19. $\int\limits_{10}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = ?$ Az improprius integrált parciálisan integráljuk:

Legyen $u=x$; $u'=1$; $v'=e^{-x}$; $v=-e^{-x}$.

Most a „lim” jelölést csak a feladat megoldása végén vezetjük be, ami megengedett.

$$\int\limits_{10}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_{10}^{+\infty} - \int\limits_{10}^{+\infty} -e^{-x}\,dx =$$

$$= [-xe^{-x}]_{10}^{+\infty} + \int\limits_{10}^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_{10}^{+\infty} + [-e^{-x}]_{10}^{+\infty} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \{[-xe^{-x}]_{10}^{B} + [-e^{-x}]_{10}^{B}\} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} (-Be^{-B} + 10e^{-10} - e^{-B} + e^{-10}).$$

A határérték kiszámításakor felhasználjuk, hogy

$$\lim_{B\to+\infty} Be^{-B} = 0.$$

Ennek bizonyítását bármely — határérték számítással foglalkozó — könyvben megtalálhatja az olvasó.

$$\int\limits_{10}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 11e^{-10}.$$

Az integrál tehát konvergens.

20. $$\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int\limits_{4}^{+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{4}^{A} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} [\ln\ln x]_4^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln\ln A - \ln\ln 4) = +\infty.$$

Az integrál tehát divergens.

21. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = ?$ Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át.

Legyen $u=\sqrt{1+x}$, ebből $x=u^2-1$ és $dx=2u\,du$.

Az új határok: ha $x=3$, akkor $u=2$, és ha $x\to+\infty$, akkor $u\to+\infty$.

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{2u\,du}{(u^2-1)u} = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{2\,du}{u^2-1} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{2}^{B} \frac{2\,du}{u^2-1} = \lim_{B\to+\infty} \left[-\ln\frac{u+1}{u-1}\right]_2^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \left[\ln\frac{u-1}{u+1}\right]_2^B = \lim_{B\to+\infty} \left(\ln\frac{B-1}{B+1} - \ln\frac{2-1}{2+1}\right) =$$

$$= 0 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3 \approx 1{,}1.$$

22. $\int\limits_{8}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} = ?$ Helyettesítés $u=\sqrt{1+x}$; tehát ebből $x=u^2-1$ és $dx=2u\,du$.

Az új határok: ha $x=8$, akkor $u=3$, és ha $x\to+\infty$, akkor $u\to+\infty$.

$$\int\limits_{8}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} = \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{2u\,du}{(u^2-1)^2u} = \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{2\,du}{(u^2-1)^2} = ?$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{2}{(u^2-1)^2} = \frac{2}{(u+1)^2(u-1)^2} \equiv \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{(u-1)^2}.$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, majd az egyenlő fokszámú tagok együtthatóinak egyenlőségét felírjuk:

$$2 \equiv A(u+1)(u-1)^2 + B(u-1)^2 + C(u+1)^2(u-1) + D(u+1)^2;$$

$$2 \equiv A(u+1)(u^2-2u+1) + B(u^2-2u+1) +$$
$$+ C(u^2+2u+1)(u-1) + D(u^2+2u+1);$$

$$2 \equiv A(u^3+u^2-2u^2-2u+u+1) + B(u^2-2u+1) +$$
$$+ C(u^3+2u^2+u-u^2-2u-1) + D(u^2+2u+1);$$

$$2 \equiv A(u^3-u^2-u+1) + B(u^2-2u+1) + C(u^3+u^2-u-1) +$$
$$+ D(u^2+2u+1).$$

$$2 \equiv (A+C)u^3 + (-A+B+C+D)u^2 + (-A-2B-C+2D)u +$$
$$+ (A+B-C+D).$$

$$A+C=0 \qquad \text{I.}$$
$$B-A+C+D=0 \qquad \text{II.}$$
$$2D-A-2B-C=0 \qquad \text{III.}$$
$$A+B-C+D=2. \qquad \text{IV.}$$

IV. − II.:

$$2A-2C=2$$
$$A-C=1$$
$$A+C=0 \qquad \text{(I.)}$$

$$2A=1; \quad A=\frac{1}{2}; \quad C=-\frac{1}{2}.$$

IV.-ből:

$$B+D=1.$$

III.-ból:

$$2D-\frac{1}{2}-2B+\frac{1}{2}=0; \quad D-B=0$$

$$2D=1; \quad D=\frac{1}{2}; \quad B=\frac{1}{2}.$$

A kapott együtthatók:

$$A=\frac{1}{2}; \quad B=\frac{1}{2}; \quad C=-\frac{1}{2}; \quad D=\frac{1}{2}.$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{2\,du}{(u^2-1)^2} =$$

$$= \lim_{B'\to+\infty} \int_3^{B'} \left[\frac{1}{2}\frac{1}{u+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{u-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(u-1)^2}\right] du =$$

$$= \lim_{B'\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\ln(u+1)-\ln(u-1)-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right]_3^{B'} =$$

$$= \lim_{B'\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\ln\frac{u+1}{u-1}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right]_3^{B'} =$$

$$= \lim_{B'\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\ln\frac{B'+1}{B'-1}-\frac{1}{B'+1}-\frac{1}{B'-1}-\ln\frac{4}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0-0-0-\ln 2+\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}375-0{,}5\cdot 0{,}69 = 0{,}030.$$

2. Nem korlátos függvények improprius integrálja

Legyen az $f(x)$ függvény minden $[a, b-\varepsilon]$ intervallumban (ahol $\varepsilon>0$ és $b-\varepsilon > a$) integrálható, és legyen $f(x)$ a b pontban nem korlátos (vagyis $f(b)=+\infty$ vagy $-\infty$).

Ha létezik és véges a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

határérték, akkor az $[a, b]$ intervallumbeli (improprius) integrál definíció szerint ezzel a határértékkel egyenlő:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Ha $f(x)$ az a pontban nem korlátos és minden $[a+\varepsilon, b]$ intervallumban integrálható, akkor hasonlóképpen

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx;$$

ha $f(x)$ sem a-ban, sem b-ben nem korlátos és minden $[a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2]$ intervallumban integrálható, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx;$$

ha pedig $f(x)$ egy belső c pontban $(a<c<b)$ nem korlátos,

akkor az integrál két improprius integrál összegeként határozható meg:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Gyakorló feladatok

1. $$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{5-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = ?$$ Tudjuk, hogy $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

$= \arcsin\frac{x}{a}$, ezért

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{5-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\frac{x}{5}\right]_0^{5-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{5-\varepsilon}{5} - \arcsin 0\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. $$\int_{-10}^{10} \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = ?$$ Az integrandus egyik határon sem korlátos.

$$\int_{-10}^{10} \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\int_{-10+\varepsilon_1}^{10-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left[\arcsin\frac{x}{10}\right]_{-10+\varepsilon_1}^{10-\varepsilon_1} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\arcsin\frac{10-\varepsilon_2}{10} - \arcsin\frac{-10+\varepsilon_1}{10}\right) =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

3. $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = ?$$ Az integrandus az $x=0$ helyen nem korlátos.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

4. $$\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = ?$$ Az integrandus pozitív x-re $\frac{1}{\sqrt{x}}$, negatív x-re $\frac{1}{\sqrt{-x}}$, $x=0$-ra pedig nem korlátos. Az integrált tehát két részre kell bontanunk.

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

A két improprius integrált külön-külön számítjuk ki.

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}}\,dx = \int_{-2}^{0} (-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-2}^{-\varepsilon} (-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{-x}\right]_{-2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{+\varepsilon} + 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{3}.$$

Tehát

$$\int_{-2}^{3} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \approx$$

$$\approx 2(1{,}41 + 1{,}73) = 2\cdot 3{,}14 = 6{,}28.$$

5. $$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^8 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_\varepsilon^8 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{64} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right) = 6.$$

6. $\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = ?$ Az integrandus az $x=0$ helyen nem korlátos, ezért az intervallumot két részre bontjuk fel:

$$\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = ?$$

A két impropius integrált külön számítjuk ki.

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-2}^{-\varepsilon} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}\right]_{-2}^{-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\varepsilon^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4}\right) = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{4}.$$

$$\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{3} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}\right]_{\varepsilon}^{3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{9} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\varepsilon^2}\right) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{9}.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{9} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \approx 1{,}5(2{,}08-1{,}59) = 1{,}5\cdot 0{,}49 = 0{,}735.$$

7. $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = ?$ Az integrandus nem korlátos az 1 helyen.

$$\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-2}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{-2}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-2\sqrt{1-1+\varepsilon} + 2\sqrt{1+2}\right) = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46.$$

8. $\int\limits_{4/3}^{5} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = ?$ Az integrandus nem korlátos az $x = \frac{3}{4}$ helyen.

$$\int\limits_{\frac{4}{3}}^{5} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\frac{4}{3}+\varepsilon}^{5} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\frac{4}{3}+\varepsilon}^{5} (3x-4)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{2}{3} \sqrt{3x-4}\right]_{\frac{4}{3}+\varepsilon}^{5} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{2}{3} \sqrt{15-4} - \frac{2}{3} \sqrt{4+3\varepsilon-4}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{11} \approx 0{,}67\cdot 3{,}32 \approx 2{,}22.$$

9. $\int\limits_{3}^{6} \frac{x}{\sqrt{(x+1)(x-3)}}\, dx = ?$ Az integrandus az $x=3$ helyen nem korlátos, másrészt $f^n(x) f'(x) + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ alakra hozható.

$$\int\limits_{3}^{6} \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{2} \int\limits_{3+\varepsilon}^{6} (2x-2)(x^2-2x-3)^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int\limits_{3+\varepsilon}^{6} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-4}}\, dx\right].$$

A két integrált külön határozzuk meg.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int\limits_{3+\varepsilon}^{6} (2x-2)(x^2-2x-3)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \left[2\sqrt{x^2-2x-3}\right]_{3+\varepsilon}^{6} = \sqrt{36-12-3} - \sqrt{9-6-3} = \sqrt{21} \approx 4{,}583.$$

$$\int\limits_{3+\varepsilon}^{6} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-4}}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{3+\varepsilon}^{6} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 1}}\, dx.$$

A $t=\dfrac{x-1}{2}$ helyettesítéssel $x=2t+1$ és $dx=2dt$; ha $x=3$, akkor $t=1$ és ha $x=6$, akkor $t=\dfrac{5}{2}$.

A $t=1$ helyen az integrandus nem korlátos. Tehát a második integrál helyettesítés után

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int\limits_{1+\varepsilon}^{5/2}\frac{2\,dt}{\sqrt{t^2-1}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\,[\operatorname{ar\,ch} t]_{1+\varepsilon}^{\frac{5}{2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\,[\ln(t+\sqrt{t^2-1})]_{1+\varepsilon}^{\frac{5}{2}}=\ln\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-1}\right)-\ln 1=\ln\frac{5+\sqrt{21}}{2}.$$

A feladat megoldása:

$$\int\limits_3^6\frac{x}{\sqrt{(x+1)(x-3)}}\,dx=\sqrt{21}+\ln\frac{5+\sqrt{21}}{2}\approx 4{,}6+\ln\frac{9{,}6}{2}=$$

$$=4{,}6+\ln 4{,}8\approx 4{,}6+1{,}57=6{,}17.$$

10. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=?$ Az integrandus egyik határon sem korlátos; az előjeltől eltekintve $f^n(x)f'(x)$ alakú:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}-\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\,[-2\sqrt{1-x^2}]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}=0-0=0.$$

11. $\displaystyle\int\limits_0^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\ln x\,dx=?$ Az integrál improprius, mert $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$. A feladatot parciális integrálással oldjuk meg.

$$\int\limits_0^1\ln x\,dx=\int\limits_0^1 1\ln x\,dx.$$

Legyen $u=\ln x$, és $v=x$, vagyis $u'=\dfrac{1}{x}$ és $v'=1$.

$$\int\limits_0^1 1\ln x\,dx=[x\ln x]_0^1-\int\limits_0^1 1\,dx=[x\ln x]_0^1=-[x]_0^1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\{[x\ln x]_\varepsilon^1-[x]_\varepsilon^1\}=\lim_{\varepsilon\to 0}(1\ln 1-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon).$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=?$$

A szorzat egyik tényezője (ε) nullához, a másik tényezője pedig ($\ln\varepsilon$) mínusz végtelenhez tart. A szorzat határértékét a L'Hospital-szabállyal állapítjuk meg, de ehhez előbb átalakítjuk kifejezésünket:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Így átalakítva a szorzatot olyan törtet kaptunk, amelynek számlálója és nevezője abszolút értékben egyaránt végtelenhez tart, ha $\varepsilon\to 0$. Most

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon)=0.$$

A megoldás tehát:

$$\int\limits_0^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon)=-1.$$

12. $\displaystyle\int\limits_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=?$ Az integrál improprius, mert a nevező helyettesítési értéke az $x=1$ helyen nulla. Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át.

Legyen $x=\operatorname{ch} t$; vagyis $dx=\operatorname{sh} t\,dt$. Kiszámítjuk az új határokat: Mivel $t=\operatorname{ar\,ch} x$, ezért

$$t_1=\operatorname{ar\,ch} 1=\ln(1+\sqrt{1-1})=0,\quad\text{és}$$

$$t_2=\operatorname{ar\,ch} 2=\ln(2+\sqrt{4-1})=\ln(2+\sqrt{3}).$$

Az új határokat — bár értéküket ismerjük — csak jelöljük.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{sh} t\, dt}{\operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}.$$

Az átalakítás során felhasználtuk, hogy bármely t-re $\dfrac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t-1}} = 1.$ ($t=0$-ra a tört határértéke ennyi!) Az új változóra már nem improprius az integrál, mert a nevező bármely t értékre nagyobb vagy egyenlő eggyel.

Az integrandust exponenciális alakba írjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2\,dt}{e^t+e^{-t}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\,dt.$$

Az integrandust újabb helyettesítéssel alakítjuk át:
Legyen $u=e^t$; $du=e^t dt$. Az új határokat u_1, ill. u_2-vel jelöljük.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \int_{u_1}^{u_2} \frac{2\,du}{u^2+1} = [2 \operatorname{arc\,tg} u]_{u_1}^{u_2} = [2 \operatorname{arc\,tg} e^t]_{t_1}^{t_2}.$$

Mivel $t_1 = 0$ és $t_2 = \ln(2+\sqrt{3})$, ezért

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{\ln(2+\sqrt{3})} - 2 \operatorname{arc\,tg} e^0 =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tg} (2+\sqrt{3}) - 2 \operatorname{arc\,tg} 1.$$

$\operatorname{arc\,tg} 3{,}73 \approx 75° \approx 75\cdot 0{,}0174 \approx 1{,}3,$ és $\operatorname{arc\,tg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}785,$ ezért

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \approx 2\cdot 1{,}3 - 2\cdot 0{,}785 = 2{,}6 - 1{,}57 = 1{,}030.$$

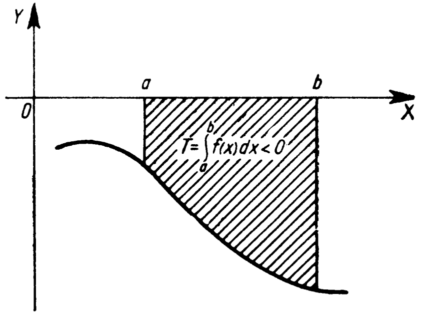
X. A HATÁROZOTT INTEGRÁL ALKALMAZÁSA

1. Területszámítás

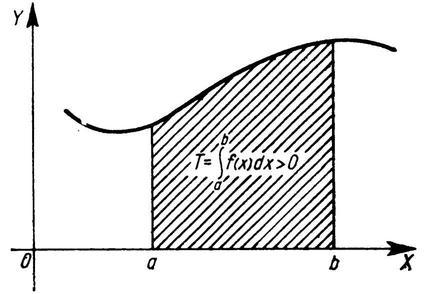
Ha egy $[a, b]$ intervallumban értelmezett folytonos $f(x)$ függvény görbéje, az a és b határpontokhoz tartozó ordinátaszakaszok, valamint az X-tengely által határolt (előjeles) területet akarjuk meghatározni, akkor a függvény a-tól b-ig vett határozott integrálját kell képeznünk:

$$T = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Az előjeles terület azt jelenti, hogy ($a<b$ esetén) az X-tengely feletti terület pozitív, a tengely alatti pedig negatív előjelű (2., 3. ábra).



2. ábra

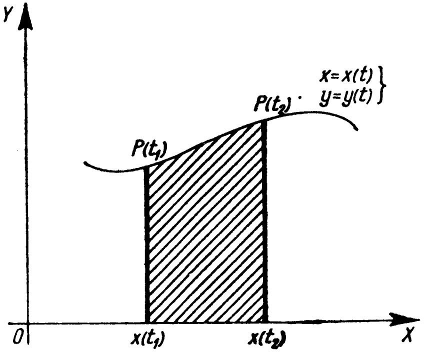


3. ábra

Ha a görbe paraméteres alakban adott, vagyis $x=x(t)$ és $y=y(t)$, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékekhez tartozó $P[x(t_1);\ y(t_1)]=P(t_1)$ és $P[x(t_2);\ y(t_2)]=P(t_2)$ pontok által határolt görbeszakasz, az $x(t_1)$ és $x(t_2)$ egyenesek és az X-tengely közötti terület (4. ábra)

$$T=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt,$$

ahol $\dot{x}(t)$ az $x(t)$ függvény t szerinti deriváltját jelenti: $\dot{x}(t)=\dfrac{dx}{dt}$.



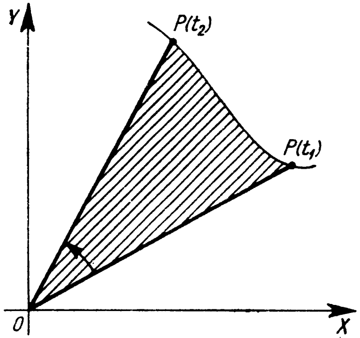
4. ábra

Ha ún. *szektorterületet* akarunk meghatározni (5. ábra), és ismert a síkgörbe paraméteres egyenletrendszere, akkor a következő módon járunk el.

Legyen $x=x(t)$ és $y=y(t)$, akkor a t_1 és t_2 paraméterekkel megadott $P[x(t_1);\ y(t_1)]=P(t_1)$ és $P[x(t_2);\ y(t_2)]=P(t_2)$ pontokhoz az origóból húzott egyenes szakaszok, valamint a síkgörbe által határolt terület a következő határozott integrál kiszámításával kapható meg:

$$T=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt.$$

(Az ábrán T a satírozott terület!)

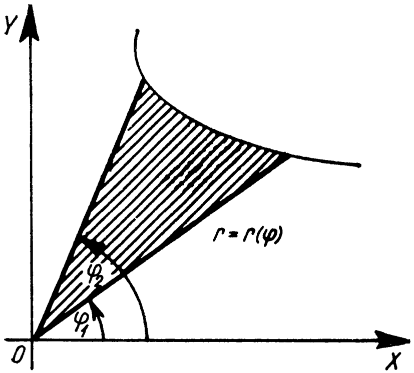


5. ábra

Ha a szektorterületet a síkgörbe polárkoordinátás alakja ismeretében akarjuk kiszámítani, akkor a következő formulát kell használnunk (6. ábra):

$$T=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi.$$

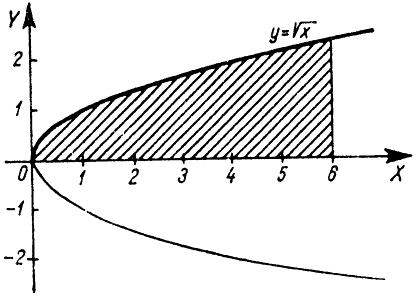
Itt $r=r(\varphi)$ a rádiuszvektor nagysága, mint a polárszög függvénye.



6. ábra

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=\sqrt{x}$ függvény és az X-tengely által határolt területet az $a=0$-tól $b=6$ abszcisszájú pontig (7. ábra).



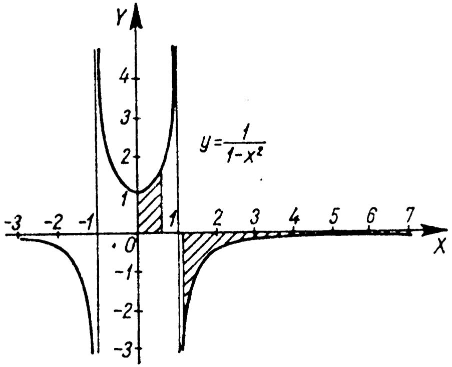
7. ábra

$$T=\int_0^6 \sqrt{x}\,dx=\int_0^6 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^6=$$

$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^6=\frac{2}{3}6\sqrt{6}-0\approx 4\cdot 2{,}45=9{,}8.$$

Az $x=6$ abszcisszához tartozó ordináta, az $y=\sqrt{x}$ függvény görbéje és az X-tengely által határolt terület tehát 9,8 területegység.

2. Határozzuk meg az $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ függvény görbéje, az X-tengely és az $a=0$; $b=0{,}6$ abszcisszájú pontokhoz tartozó ordináták által határolt síkrész területének mérőszámát (8. ábra).



8. ábra

$$T=\int_0^{0,6}\frac{1}{1-x^2}\,dx=[\operatorname{ar\,th} x]_0^{0,6}=\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{0,6}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1{,}6}{0{,}4}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1}=\frac{1}{2}\ln 4\approx\frac{1}{2}1{,}39=0{,}695.$$

A keresett síkrész területe tehát 0,695 területegység.

3. Határozzuk meg az $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ függvény görbéje, az X-tengely és az $a=1{,}2$; $b=7$ abszcisszájú pontokhoz tartozó ordináták által határolt terület mérőszámát (8. ábra)! Vigyázat! A függvény az előbbi példa integrandusával megegyezik, a határozatlan integrálja azonban nem, mert most $|x|>1$.

$$T=\int_{1,2}^{7}\frac{1}{1-x^2}\,dx=[\operatorname{ar\,cth} x]_{1,2}^{7}=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{x+1}{x-1}\right]_{1,2}^{7}=$$

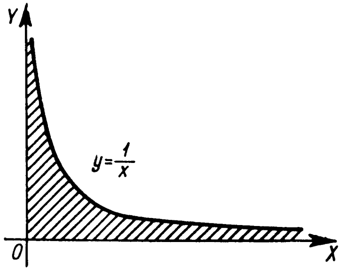
$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{8}{6}-\ln\frac{2{,}2}{0{,}2}\right)=\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 3-\ln 11)\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}(1{,}39-1{,}1-2{,}4)=0{,}5\cdot(-2{,}11)=-1{,}055.$$

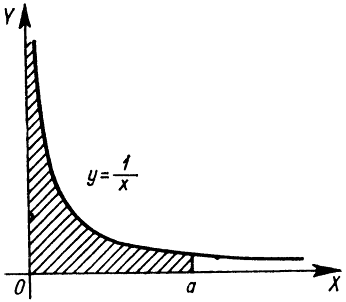
4. Határozzuk meg az $y=\dfrac{1}{x}$ függvény görbéje és az X-tengely közé eső területet, a következő intervallumok felett: $[0;\infty]$, $[0;a]$, $[a;+\infty]$ (9., 10. és 11. ábra).

$$T_1=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{A}\frac{1}{x}\,dx=$$

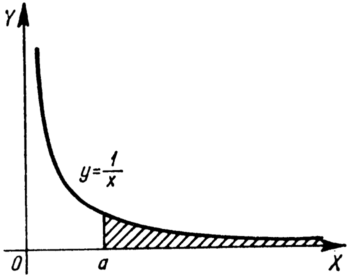
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}[\ln x]_{\varepsilon}^{A}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}(\ln A-\ln\varepsilon)=\infty+\infty=\infty.$$



9. ábra



10. ábra



11. ábra

$$T_2 = \int_0^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln x]_\varepsilon^a =$$

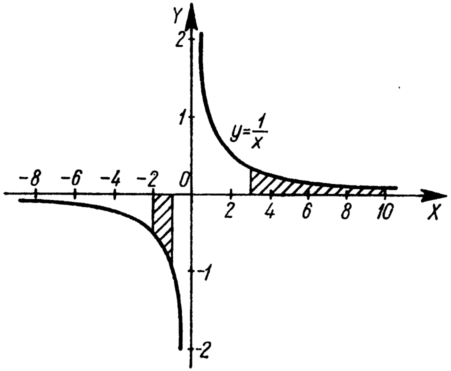
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln a - \ln \varepsilon] = \ln a + \infty = \infty.$$

$$T_3 = \int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty}[\ln x]_a^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}[\ln A - \ln a] = \infty - \ln a = \infty.$$

Ezek az improprius integrálok tehát divergensek.

5. Határozzuk meg az $y = \dfrac{1}{x}$ függvény görbéje és az X-tengely közé eső területet a következő két intervallumban: $[3;\ 10]$, valamint $[-2;\ -1]$ (12. ábra).



12. ábra

$$T_1 = \int_3^{10} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_3^{10} = \ln 10 - \ln 3 = \ln\frac{10}{3} \approx \ln 3{,}33 = 1{,}21.$$

$$T_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = ?$$

Az $\dfrac{1}{x}$ függvény primitív függvénye negatív x értékekre $\ln(-x)$, ezt felhasználva:

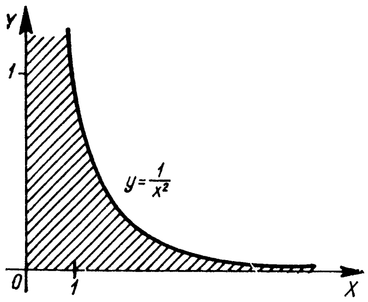
$$T_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(-x)]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \approx -0{,}69.$$

A terület azért negatív, mert a függvény görbéje ebben az intervallumban az X-tengely alatt van.

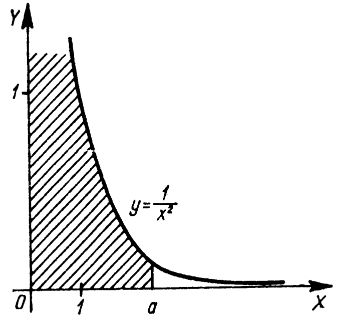
6. Határozzuk meg az $y = \dfrac{1}{x^2}$ függvény görbéje és az X-tengely közé eső területet, ha az intervallumok a következők: $[0;\ \infty]$, $[0;\ a]$, $[a;\ \infty]$. (13., 14., 15. ábra.)

$$T_1 = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}\int_\varepsilon^A \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^A =$$

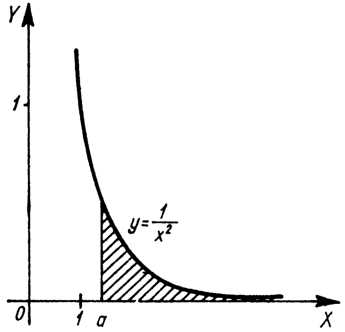
$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}}\left[-\frac{1}{A}+\frac{1}{\varepsilon}\right] = \infty.$$



13. ábra



14. ábra



15. ábra

$$T_2 = \int_0^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^a =$$

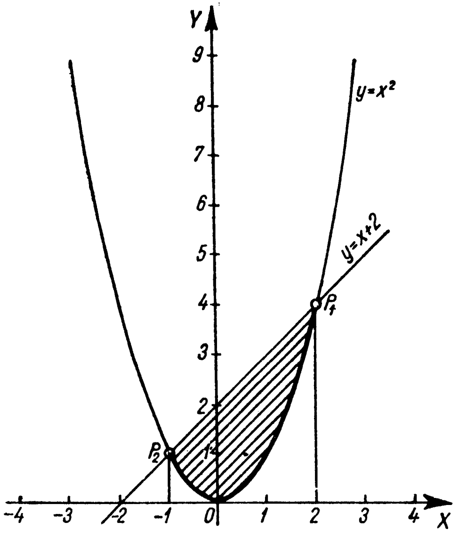
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{a}+\frac{1}{\varepsilon}\right] = -\frac{1}{a}+\infty = \infty.$$

$$T_3 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{A}+\frac{1}{a}\right] = 0+\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

7. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény görbéje, és az $y = x+2$ egyenes által határolt területrészt (16. ábra)!

Az intervallum végpontjait a két görbe metszéspontjainak abszcisszái adják.



16. ábra

Az egyenes és a parabola metszéspontjai:

$$x^2 = x+2;$$

$$x^2-x-2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -1;$$

$$y_1=4; \quad y_2=1.$$

A metszéspontok: $P_1(2;4)$, $P_2(-1;1)$.
Az integrálás határai: $[-1; 2]$.

A két függvény grafikonja közötti terület egyenlő a vázlatos ábra szerint az $y = x+2$ egyenes és az X-tengely közötti területnek, valamint az $y=x^2$ parabola és az X-tengely közötti területnek a különbségével.

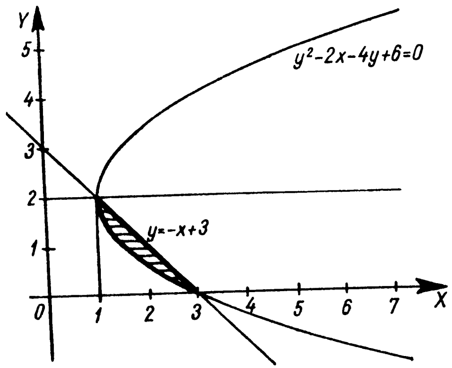
$$T = \int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 6-\frac{8}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3} = 7\frac{1}{2}-3 = 4\frac{1}{2} \text{ területegység.}$$

Az integrálandó függvényt úgy határoztuk meg, hogy a különbség az adott intervallumban pozitív legyen.

8. Határozzuk meg az $y^2-2x-4y+6 = 0$ parabola és az $y = -x+3$ egyenes által határolt síkrész területét (17. ábra).



17. ábra

Az ábrából látható, hogy a két metszéspont: $P_1(1;2)$, $P_2(3;0)$.
A parabola egyenletéből — teljes négyzetté kiegészítéssel — kifejezzük y-t:

$$y^2-4y = 2x-6;$$

$$y^2-4y+4 = 2x-2;$$

$$(y-2)^2 = 2(x-1);$$

$$y-2 = \pm\sqrt{2(x-1)};$$

$$y = \pm 2\sqrt{(x-1)}+2.$$

A függvény kétértékű és az alsó szár, valamint az egyenes közé eső síkrész területét keressük. Az integrálás határai: $[1; 3]$.

$$T = \int_{1}^{3} (-x+3)\,dx - \int_{1}^{3} [-\sqrt{2(x-1)}+2]\,dx =$$

$$= \int_{1}^{3} \left[-x+1+\sqrt{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx = \left[-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{2\sqrt{2}}{2}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 =$$

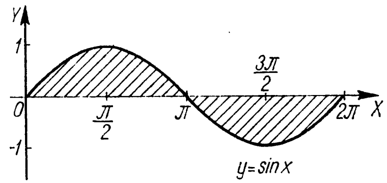
$$= -\frac{9}{2}+3+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2^3}+\frac{1}{2}-1-0 = -2+\frac{8}{3} = \frac{2}{3} \text{ területegység.}$$

9. Határozzuk meg az $y=\sin x$ függvény görbéje és az X-tengely által határolt területet a $[0; \pi]$ és a $[0; 2\pi]$ intervallumok felett (18. ábra).

$$T_1 = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi+\cos 0 =$$

$$= -(-1)+1 = 2 \text{ területegység.}$$

$$T_2 = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi+\cos 0 = -1+1 = 0.$$



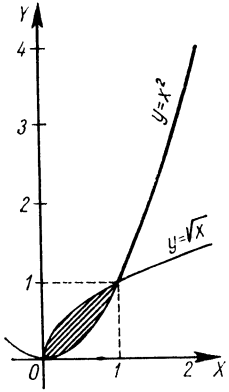
18. ábra

A T_2 terület nem azért nulla, mert a $\sin x$ függvény görbéje és az X-tengely közötti terület nulla, hanem azért, mert a pozitív és negatív terület (az X-tengely felett levő és az alatta levő) megegyezik, és így összege nulla.

A feladatot tehát úgy kell megoldanunk, hogy a $[0; \pi]$ és $[\pi; 2\pi]$ intervallumokra számított területek abszolút értékének összegét kell képeznünk. Ekkor — mivel $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$ értéke szintén 2 — az eredmény

$$T_2 = 4 \text{ területegység.}$$

10. Határozzuk meg az $y=x^2$ és az $y^2=x$ görbék által határolt területet (19. ábra)! Mindkét görbe parabola, csak az $y=x^2$ parabola tengelye az Y-tengely, míg az $y^2=x$, vagyis $y=\pm\sqrt{x}$ parabola tengelye az X-tengely. Könnyen belátható, hogy a két parabola egymást a $P_1(0;\ 0)$ és $P_2(1;\ 1)$ pontban metszi, és az $y=\sqrt{x}$ parabola $[0;\ 1]$ intervallumhoz tartozó íve az $y=x^2$ parabola ugyanazon intervallumhoz tartozó íve felett van. Ezért



19. ábra

$$T = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int\limits_0^1 x^2\,dx = \int\limits_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{3} \text{ területegység.}$$

11. $$T = \int\limits_0^7 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^7 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^7 =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 50 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 50 \approx \frac{1}{2}\,3{,}91 = 1{,}955 \text{ területegység.}$$

12. $$T = \int\limits_2^3 (e^x-1)^2\,dx = \int\limits_2^3 (e^{2x}-2e^x+1)\,dx =$$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x\right]_2^3 = \frac{e^6}{2} - 2e^3 + 3 - \frac{e^4}{2} + 2e^2 - 2 \approx$$

$$\approx \frac{410}{2} - 2\cdot 20 + 3 - \frac{52}{2} + 2\cdot 7{,}4 - 2 = 205 - 40 + 3 - 26 + 14{,}8 - 2 =$$

$$= 222{,}8 - 68 = 154{,}8 \text{ területegység.}$$

13. $T = \int\limits_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = 3\int\limits_{-3}^3 \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx.$ A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg.

$$\frac{x}{3} = \sin t; \quad x = 3\sin t; \quad dx = 3\cos t\,dt.$$

A határokat t_1, ill. t_2-vel jelöljük.

$$T = 3\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\sin^2 t}\;3\cos t\,dt = 9\int\limits_{t_1}^{t_2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 9\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{t_2}^{t_1}.$$

Most a kapott kifejezést visszaalakítjuk úgy, hogy a független változó ismét x legyen.

$$t = \arcsin\frac{x}{3}; \quad \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\,\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

Ezeket behelyettesítve:

$$T=\frac{9}{2}\left[\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}\right]_{-3}^{3}=$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arcsin 1+\sqrt{0}-\arcsin(-1)+\sqrt{0}\right]=$$

$$=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{9}{2}\pi\approx 4{,}5\cdot 3{,}14\approx 14{,}1 \text{ területegység.}$$

14. $T=\int\limits_2^5 \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}}dx=?$ A gyökjel alatti mennyiséget helyettesítéssel alakítjuk át:

$$u=2-x;\quad x=2-u;\quad dx=-du.$$

A határokat u_1-gyel és u_2-vel jelöljük:

$$T=\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1}{\sqrt[3]{u^2}}(-du)=-\int\limits_{u_1}^{u_2}u^{-\frac{2}{3}}du=-\left[\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_{u_1}^{u_2}=$$

$$=-\left[3\sqrt[3]{u}\right]_{u_1}^{u_2}=-\left[3\sqrt[3]{2-x}\right]_2^5=-\left(3\sqrt[3]{-3}-3\sqrt[3]{0}\right)=$$

$$=3\sqrt[3]{3}\approx 3\cdot 1{,}44=4{,}32 \text{ területegység.}$$

15. $T=\int\limits_1^5\sqrt{x^2+8x+12}\,dx=\int\limits_1^5\sqrt{x^2+8x+16-4}\,dx=$

$$=\int\limits_1^5\sqrt{(x+4)^2-4}\,dx=2\int\limits_1^5\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1}\,dx.$$

Mivel $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, és ebből $\operatorname{ch}^2 x-1=\operatorname{sh}^2 x$, ezért a $\operatorname{ch} u=$ $=\frac{x+4}{2}$ helyettesítéssel új függvényt vezetünk be:

$$x=2\operatorname{ch} u-4;\quad dx=2\operatorname{sh} u\,du.$$

Az új határokat csak jelöljük:

$$T=2\int\limits_{u_1}^{u_2}\sqrt{\operatorname{ch}^2 u-1}\,2\operatorname{sh} u\,du=4\int\limits_{u_1}^{u_2}\operatorname{sh}^2 u\,du=$$

$$=4\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\operatorname{ch}2u-1}{2}du=2\left[\frac{\operatorname{sh}2u}{2}-u\right]_{u_1}^{u_2}.$$

A kapott kifejezést x függvényévé alakítjuk vissza:

$$\operatorname{sh}2u=2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u=2\frac{x+4}{2}\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1};\quad u=\operatorname{ar\,ch}\frac{x+4}{2}.$$

$$T=2\left[\frac{x+4}{2}\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1}-\operatorname{ar\,ch}\frac{x+4}{2}\right]_1^5=$$

$$=2\left[\frac{x+4}{2}\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1}-\ln\left(\frac{x+4}{2}+\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1}\right)\right]_1^5=$$

$$=2\left[\frac{9}{2}\sqrt{\frac{81}{4}-1}-\ln\left(\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-1}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{25}{4}-1}+\ln\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-1}\right)\right]=$$

$$=2\left[\frac{9}{2}\sqrt{\frac{77}{4}}-\ln\left(\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{77}{4}}\right)-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{21}{4}}+\ln\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)\right]\approx$$

$$\approx 2\left[\frac{9\cdot 8{,}8}{4}-\ln\left(\frac{9}{2}+\frac{8{,}8}{2}\right)-\frac{5\cdot 4{,}6}{4}+\ln\left(\frac{5}{2}+\frac{4{,}6}{2}\right)\right]=$$

$$=2(19{,}8-\ln 8{,}9-5{,}75+\ln 4{,}8)=2(14{,}05-2{,}18+1{,}57)=$$

$$=2(15{,}62-2{,}18)=2\cdot 13{,}44=26{,}88 \text{ területegység.}$$

16. $T=\int\limits_3^5\frac{dx}{x^2+6x+10}=\int\limits_3^5\frac{dx}{x^2+6x+9+1}=\int\limits_3^5\frac{dx}{(x+3)^2+1}$. Mivel az integrandus $\frac{1}{u^2+1}$ alakú, ezért új változóként az $u=x+3$-at vezetjük be, és a határokat csak jelöljük.

$$u=x+3;\quad du=dx.$$

$$T=\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{du}{u^2+1}=[\operatorname{arc\,tg} u]_{u_1}^{u_2}.$$

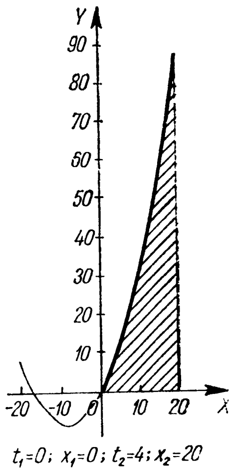
15*

A feladat megoldásához meg kell határoznunk u_1 és u_2 értékét. Ha $x_1=3$, akkor $u_1=6$; ha $x_2=5$, akkor $u_2=8$.

$$T = [\operatorname{arc\,tg} u]_6^8 = \operatorname{arc\,tg} 8 - \operatorname{arc\,tg} 6 \approx 82{,}9^\circ - 80{,}5^\circ =$$

$$= 2{,}4^\circ \approx 2{,}4 \cdot 0{,}01745 \approx 0{,}042.$$

17. Legyen egy görbe (parabola) paraméteres egyenletrendszere a következő: $x=5t$; $y = 10t+3t^2$. Határozzuk meg a $t_1=0$ és $t_2=4$ paraméterértékekhez tartozó ordináták, a görbe íve és az X-tengely által határolt terület mérőszámát (20. ábra)!



20. ábra

I. Megoldás:

Mivel $\dot{x}=5$, ezért

$$T = \int_0^4 (10t+3t^2)5\,dt = 5\int_0^4 (10t+3t^2)\,dt =$$

$$= 5[5t^2+t^3]_0^4 = 5(80+64) = 720 \text{ területegység.}$$

II. Megoldás:

Kiküszöböljük a t paramétert, vagyis meghatározzuk y-t mint x függvényét; ehhez kifejezzük t-t az egyik egyenletből és behelyettesítjük a másikba:

$$t = \frac{x}{5}; \quad y = \frac{10x}{5} + 3\frac{x^2}{25} = \frac{3}{25}x^2+2x.$$

Ha $t_1=0$, akkor $x_1=0$; ha $t_2=4$, akkor $x_2=20$. Integráljuk tehát az $y = \frac{3}{25}x^2+2x$ függvényt a $[0;\ 20]$ intervallumban:

$$T = \int_0^{20} \left(\frac{3}{25}x^2+2x\right)dx = \left[\frac{x^3}{25}+x^2\right]_0^{20} =$$

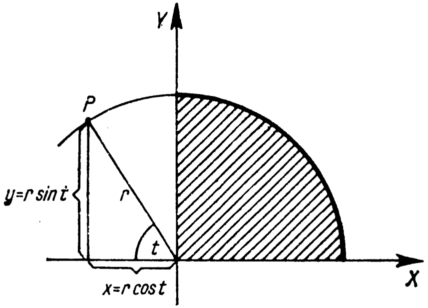
$$= \left[x^2\left(\frac{x}{25}+1\right)\right]_0^{20} = 400\left(\frac{4}{5}+1\right) = \frac{400\cdot 9}{5} = 720 \text{ területegység.}$$

Valóban a kétféle képpen kapott eredmény megegyezik. Ez természetes, hiszen a görbék és a határok megegyeztek, csak a görbék megadási módja nem.

18. A kör paraméteres egyenletrendszere, ha a kör sugarát r-rel, és a sugár X-tengellyel bezárt szögét t-vel jelöljük:

$$x = r\cos t; \quad y = r\sin t.$$

Határozzuk meg a negyedkör területét (21. ábra)! A paraméterértékek: $t_1 = \frac{\pi}{2}$, és $t_2=0$.



21. ábra

A határokat azért választottuk ilyen sorrendben, mert amíg t értéke $\frac{\pi}{2}$-től 0-ig csökken, addig a t-nek megfelelő pont balról jobbra, vagyis az X-tengely pozitív irányításának megfelelően megy végig a görbén, tehát így lesz a számított terület előjele pozitív.

$$\dot{x} = -r\sin t.$$

$$T = \int_{\pi/2}^{0} r\sin t(-r\sin t)\,dt = \int_{\pi/2}^{0} -r^2\sin^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} r^2\sin^2 t\,dt.$$

Alkalmazzuk a $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ azonosságot.

$$T = \int_0^{\pi/2} r^2 \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}-0-0+0\right] = \frac{r^2\pi}{4} \text{ területegység.}$$

A negyedkör területe $\dfrac{r^2\pi}{4}$, tehát a teljes kör területe — eddigi eredményeinkkel megegyezően — $r^2\pi$.

19. Határozzuk meg adott ellipszisnegyed területét. A területet az ellipszis paraméteres egyenletrendszere alapján és a derékszögű koordinátákban adott egyenlet alapján is meghatározzuk.

I. Megoldás:

A $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű, origó középpontú ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Itt t a 22. ábrán látható szöget jelenti. Az integrálás határai: $\dfrac{\pi}{2}$ és 0.

$\dot{x} = -a\sin t.$

$$T = \int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt = \int_{\pi/2}^{0}(-ab\sin^2 t)\,dt =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

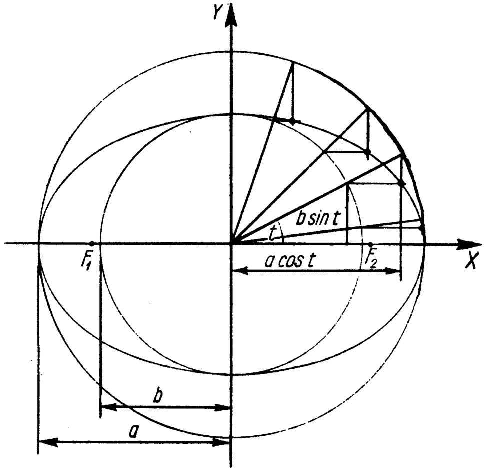
$$= \frac{ab}{2}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{ab\pi}{4}.$$

Eredményünknek megfelelően a teljes ellipszis területe: $ab\pi$.

II. Megoldás:

A $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{ebből} \quad y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$



22. ábra

Az ellipszisnegyed területét megkapjuk, ha meghatározzuk az ellipszisív X-tengely feletti, 0-tól a-ig levő szakasza, valamint az X-tengely közötti területet.

$$T = \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Az integrandusból helyettesítéssel a gyököt kiküszöböljük. Legyen $\dfrac{x}{a} = \sin t$, ebből $x = a\sin t$ és $dx = a\cos t\,dt$. Az új határok: ha $x=0$, akkor $\sin t = 0$ és $t=0$; ha $x=a$, akkor $\sin t = 1$, és $t = \dfrac{\pi}{2}$.

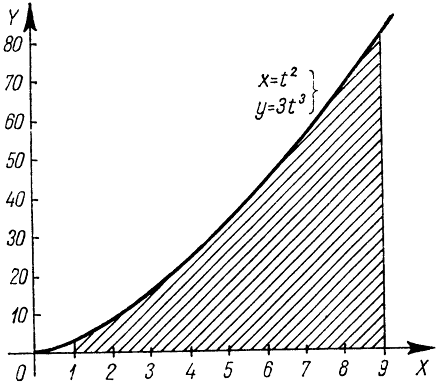
$$T = b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = b\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,a\cos t\,dt =$$

$$= ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= ab\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = ab\left[\frac{\pi}{4}+0-0\right] = \frac{ab\pi}{4},$$

ebből a teljes ellipszis területe: $ab\pi$.

20. Határozzuk meg a Neil-féle szemikubikus parabola, valamint az X-tengely által határolt területet, a $t_1=1$, $t_2=3$ paraméterértékek esetén (23. ábra).



23. ábra

A szemikubikus parabola egyenletrendszere $x=at^2$, $y=bt^3$; legyen most $a=1$ és $b=3$, ekkor

$$x=t^2; \quad y=3t^3.$$

I. Megoldás:

$$\dot{x}=2t.$$

$$T=\int_1^3 3t^3\cdot 2t\,dt=\int_1^3 6t^4\,dt=\left[\frac{6}{5}t^5\right]_1^3=$$

$$=\frac{6\cdot 243}{5}-\frac{6}{5}=\frac{6}{5}\cdot 242=\frac{1452}{5}=290{,}4 \text{ területegység.}$$

II. Megoldás:

Most küszöböljük ki a t paramétert, és oldjuk meg így a feladatot!

$$x=t^2; \quad y=3t^3, \quad t=\sqrt{x}, \quad \text{és így} \quad y=3(\sqrt{x})^3=3x^{\frac{3}{2}}.$$

Az integrálás határait úgy számítjuk ki, hogy az $x=t^2$ összefüggésben t helyébe 1-et, ill. 3-at helyettesítünk. Ha $t_1=1$, akkor $x_1=1$, és ha $t_2=3$, akkor $x_2=9$.

A terület tehát:

$$T=\int_1^9 3x^{\frac{3}{2}}\,dx=3\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^9=$$

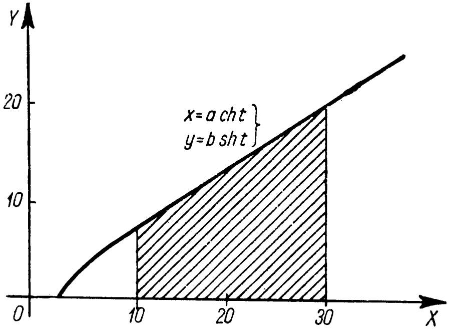
$$=3\cdot\frac{2}{5}\left[(\sqrt{9})^5-(\sqrt{1})^5\right]=\frac{6}{5}(243-1)=290{,}4 \text{ területegység.}$$

A két — különböző módon kapott — eredmény tehát valóban megegyezik.

21. A hiperbola paraméteres egyenletrendszere: $x=a\operatorname{ch}t$; $y=b\operatorname{sh}t$ (24. ábra). Ugyanis az

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

hiperbolaegyenletet a hiperbolikus függvényekre vonatkozó $\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$ azonossággal egybevetve észrevehetjük, hogy az $\frac{x}{a}=\operatorname{ch}t$ és $\frac{y}{b}=\operatorname{sh}t$ paraméteres kapcsolat kielégíti a hiperbola paraméteres egyenletrendszerét.



24. ábra

Határozzuk meg $a=3$ és $b=2$ esetén a $t_1=2$ és $t_2=3$ paraméterértékek közé eső területet:

$$T=\int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}\,dt=\int_2^3 2\operatorname{sh}t\cdot 3\operatorname{sh}t\,dt=6\int_2^3 \operatorname{sh}^2t\,dt.$$

Mivel $\operatorname{sh}^2 t = \dfrac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}$, ezért

$$T = 6\int_2^3 \frac{\operatorname{ch} 2t-1}{2}\,dt = 3\int_2^3 (\operatorname{ch} 2t-1)\,dt =$$

$$= 3\left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{2}-t\right]_2^3 = 3\left(\frac{\operatorname{sh} 6}{2}-3-\frac{\operatorname{sh} 4}{2}+2\right) = 3\left(\frac{\operatorname{sh} 6-\operatorname{sh} 4}{2}-1\right).$$

$$\operatorname{sh} 6 = \frac{e^6-e^{-6}}{2} \approx \frac{400-\frac{1}{400}}{2} \approx 200;$$

$$\operatorname{sh} 4 = \frac{e^4-e^{-4}}{2} \approx \frac{55-\frac{1}{55}}{2} \approx 27{,}5.$$

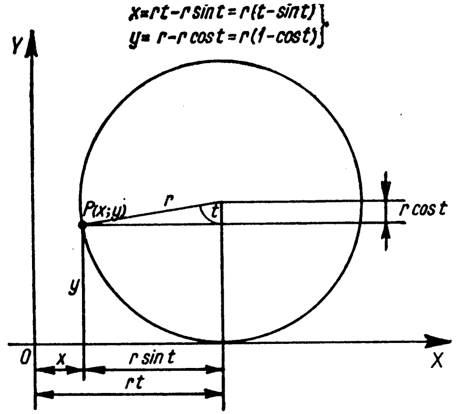
$$T \approx 3\left(\frac{200-27{,}5}{2}-1\right) = 3\left(\frac{172{,}5}{2}-1\right) \approx 3(86-1) =$$

$$= 3\cdot 85 = 255 \text{ területegység.}$$

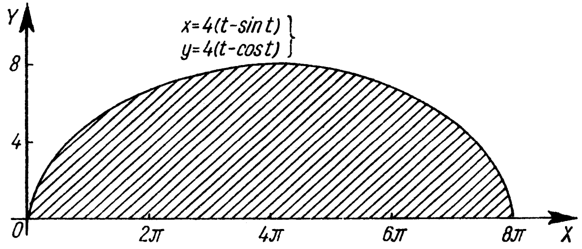
22. Az X-tengelyen csúszás nélkül gördülő kör kerületének bármely pontja cikloisívet ír le. A ciklois paraméteres egyenletrendszere a 25. ábrán látható módon kapható meg.

Legyen egy ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 4(t-\sin t);\quad y = 4(1-\cos t). \text{ (26. ábra.)}$$



25. ábra



26. ábra

Határozzuk meg a cikloisív és az X-tengely közötti terület számértékét, ha $t_1=0$ és $t_2=2\pi$, vagyis a teljes ív alatti területet keressük.

$$T = \int_0^{2\pi} y\dot{x}\,dt = \int_0^{2\pi} 4(1-\cos t)4(1-\cos t)\,dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = 16\int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt =$$

$$= 16\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{\cos 2t+1}{2}\right)dt =$$

$$= 16\left[t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 16\left[\frac{\sin 2t}{4}-2\sin t+\frac{3}{2}t\right]_0^{2\pi} = 16(0-0+3\pi-0+0-0) =$$

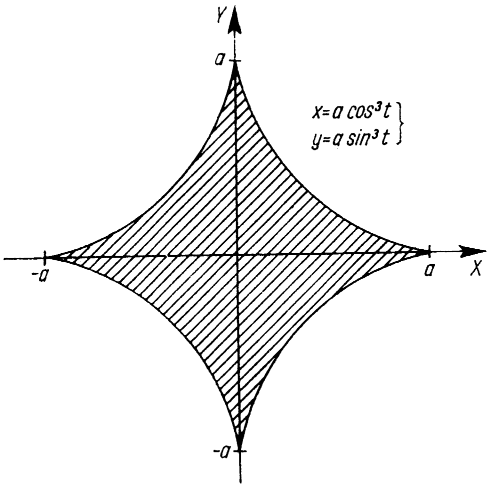
$$= 48\pi \approx 48\cdot 3{,}14 \approx 151 \text{ területegység.}$$

23. A $2a$ tengelyhosszúságú asztrois paraméteres egyenletrendszere: $x=a\cos^3 t$; $y=a\sin^3 t$ (27. ábra). (Az asztrois szimmetrikus az origóra.) Határozzuk meg az asztrois területét!

A szimmetria miatt elegendő a negyed asztrois területét meghatározni, ennek négyszerese a teljes asztrois területe.

Legyen $a=5$ és $t_1=\dfrac{\pi}{2}$, $t_2=0$.

$$\dot{x} = 15\cos^2 t(-\sin t) = -15\sin t\cos^2 t.$$



27. ábra

$$T=\int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}\,dt=\int_{\pi/2}^{0} 5\sin^3 t\,(-15\sin t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=-75\int_{\pi/2}^{0}\sin^4 t\cos^2 t\,dt.$$

Mindkét trigonometrikus tényező páros hatványa lépett fel, ezért a linearizáló formulákat alkalmazhatjuk.

$$\sin^4 t=\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2, \quad \text{ill.} \quad \cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}.$$

$$T=75\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=75\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2 2t}{4}\,\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{75}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 2t)(1-\cos 2t)\,dt.$$

Ismét alkalmazzuk a linearizáló formulát, ugyanis $\cos^2 2t=\frac{1+\cos 4t}{2}$, tehát

$$T=\frac{75}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{1+\cos 4t}{2}\right)(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{75}{8}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4t}{2}\right)(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{75}{8}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4t}{2}-\frac{\cos 2t}{2}+\frac{\cos 4t\cos 2t}{2}\right)dt.$$

Az integrandusban két szögfüggvény szorzata van, ezeket szögösszegek szögfüggvényévé tudjuk alakítani az alábbi összefüggés felhasználásával:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Alkalmazzuk az előbbi összefüggést az integrandus megfelelő tagjára, akkor

$$\cos 4t\cos 2t=\frac{1}{2}(\cos 2t+\cos 6t).$$

$$T=\frac{75}{8}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4t}{2}-\frac{\cos 2t}{2}+\frac{\cos 2t+\cos 6t}{4}\right)dt=$$

$$=\frac{75}{8}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4t}{2}-\frac{\cos 2t}{4}+\frac{\cos 6t}{4}\right)dt=$$

$$=\frac{75}{8}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}-\frac{\sin 2t}{8}+\frac{\sin 6t}{24}\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{75}{8}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin 2\pi}{8}-\frac{\sin\pi}{8}+\frac{\sin 3\pi}{24}-0\right)=\frac{75}{8}\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{75\pi}{32}\approx\frac{75\cdot 3{,}14}{32}\approx 7{,}35 \text{ területegység.}$$

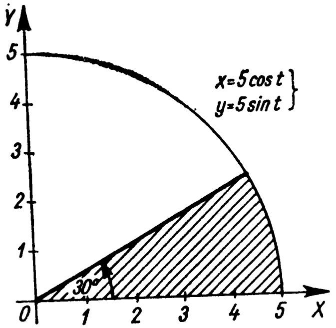
A teljes asztrois területe tehát: $4\cdot 7{,}35=29{,}4$ területegység.

Most olyan feladatokat oldunk meg, amelyek eredményének helyességét eddigi ismereteink felhasználásával könnyen ellenőrizhetjük.

24. Az origó középpontú és r sugarú kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x=r\cos t;\quad y=r\sin t.$$

Határozzuk meg az $r=5$ sugarú körbe rajzolt 30°-os nyílásszögű körcikk területét (28. ábra)!



28. ábra

$$x=5\cos t;\quad y=5\sin t.\ \text{A határok: } t_1=0;\ t_2=\frac{\pi}{6}.$$

$$\dot{x}=-5\sin t;\ \dot{y}=5\cos t.$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(25\cos^2 t+25\sin^2 t)\,dt=\frac{25}{2}\int_0^{\pi/6}1\,dt=$$

$$=\frac{25}{2}[t]_0^{\pi/6}=\frac{25}{2}\cdot\frac{\pi}{6}.$$

Ugyanezt kapjuk a körcikk területképletével is, ugyanis:

$$T=\frac{ri}{2}=\frac{r\,r\alpha}{2}=\frac{r^2\alpha}{2},$$

ahol α a körcikk radiánban mért középponti szöge, tehát

$$T=\frac{5^2\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{25}{2}\cdot\frac{\pi}{6}.$$

25. Határozzuk meg az ellipszis területét a szektorterület integrálképlete alapján!

Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$x=a\cos t;\quad y=b\sin t.$$

A deriváltak:

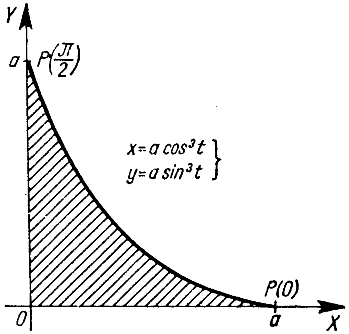
$$\dot{x}=-a\sin t;\quad \dot{y}=b\cos t.$$

A határok (ha a teljes ellipszis területét akarjuk meghatározni): 0 és 2π. Most is úgy választjuk meg a határokat, hogy a paraméter növekedésével a görbeponthoz húzott sugár pozitív (óramutató járásával ellentétes) elfordulást végezzen.

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t)\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\frac{ab}{2}2\pi=ab\pi.$$

26. Határozzuk meg a negyedasztrois területét mint szektorterületet, ha paraméteres egyenletrendszere:

$$x=a\cos^3 t;\quad y=a\sin^3 t\quad \text{(29. ábra)}.$$



29. ábra

A deriváltak:

$$\dot{x}=3a\cos^2 t(-\sin t)=-3a\sin t\cos^2 t;$$

$$\dot{y}=3a\sin^2 t\cos t.$$

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(3a^2\cos^4 t\sin^2 t+3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=$$

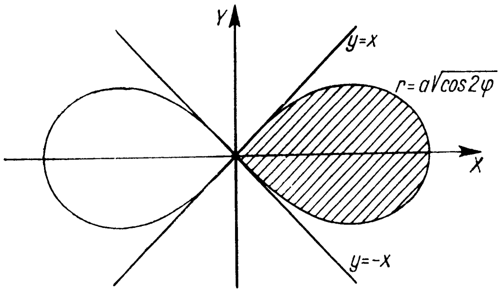
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^2 t\,dt=\frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 2t)\,dt=\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt=\frac{3a^2}{16}\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{3a^2}{16}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{3a^2}{32}\pi.$$

27. A lemniszkáta egyenlete: $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (30. ábra). Határozzuk meg a lemniszkáta $\varphi_1=-\frac{\pi}{4}$ és $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$ polárszögek közé eső szektorterületét.



30. ábra

Azért választottuk ezt a két szöget, mert $\frac{\pi}{4}$-nél nagyobb szögekre $\left(\frac{3}{4}\pi\text{-ig}\right)$, és $-\frac{\pi}{4}$-nél kisebb szögekre $\left(-\frac{3}{4}\pi\text{-ig}\right)$ nincs értelmezve a függvény.

$$T=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}a^2\cos 2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{a^2}{4}\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{a^2}{4}(1+1)=\frac{a^2}{2}.$$

28. Egy logaritmikus spirális polárkoordinátás egyenlete:

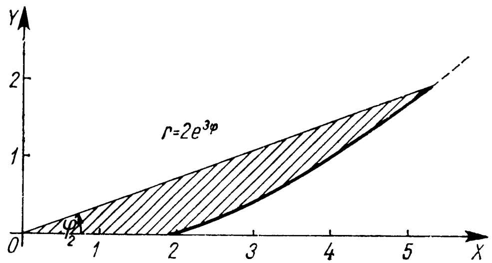
$$r=2e^{3\varphi}.$$

Határozzuk meg a $\varphi_1=0$ és $\varphi_2=\frac{\pi}{9}$ polárszögek által határolt szektorterületet (31. ábra)!

$$T=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/9}4e^{6\varphi}\,d\varphi=2\int_0^{\pi/9}e^{6\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\left[\frac{e^{6\varphi}}{6}\right]_0^{\pi/9}=\frac{1}{3}(e^{2\pi/3}-e^0)\approx\frac{1}{3}(2^{2,09}-1)\approx$$

$$\approx\frac{1}{3}(8{,}1-1)=\frac{7{,}1}{3}\approx 2{,}4 \text{ területegység.}$$

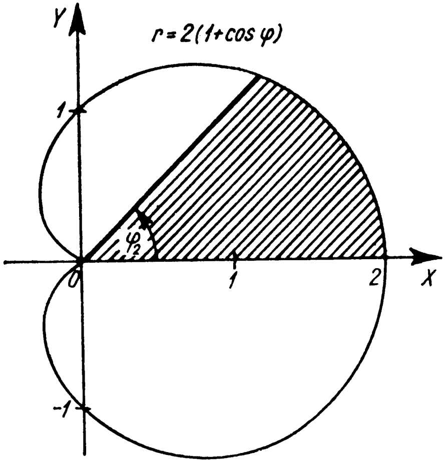


31. ábra

29. A kardioid polárkoordinátával megadott egyenlete:

$$r = 2(1+\cos\varphi).$$

Határozzuk meg a $\varphi_1=0$ és $\varphi_2=\dfrac{\pi}{4}$ polárszögek által határolt szektorterületet (32. ábra)!



32. ábra

$$T=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}[2(1+\cos\varphi)]^2\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi/4}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi/4}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=2\left[\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/4}=$$

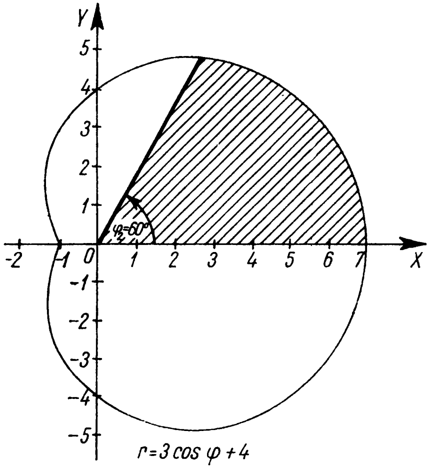
$$=2\left(\frac{3}{2}\,\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{4}-0\right)=$$

$$=\frac{3\pi}{4}+4\,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{4}\approx\frac{3}{4}\cdot 3{,}14+2\cdot 1{,}41+0{,}5\approx 5{,}68\ \text{területegység}$$

30. Egy Pascal-féle csigavonal polárkoordinátás egyenlete:

$$r = 3\cos\varphi+4.$$

Határozzuk meg a $\varphi_1=0$ és $\varphi_2=\dfrac{\pi}{3}$ polárkoordináták által határolt szektorterületet (33. ábra)!



33. ábra

$$T=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(3\cos\varphi+4)^2\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(9\cos^2\varphi+24\cos\varphi+16)\,d\varphi=$$

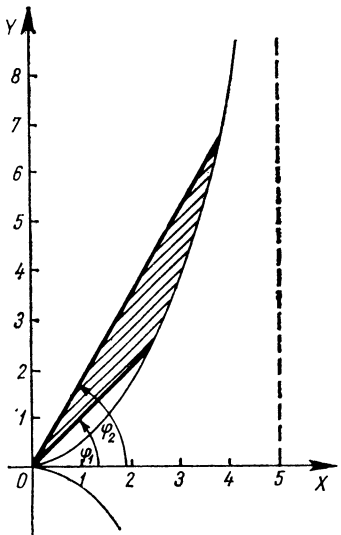
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left(9\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+24\cos\varphi+16\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{41}{2}\varphi+\frac{9}{4}\sin 2\varphi+24\sin\varphi\right]_0^{\pi/3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{41}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{9}{4}\sin\frac{2\pi}{3}+24\sin\frac{\pi}{3}-0\right)\approx$$

$$\approx 10{,}7+0{,}97+10{,}4=22{,}07\ \text{területegység.}$$

31. Határozzuk meg az $r=\dfrac{5\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ egyenletű cisszois $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$ és $\varphi_2=\dfrac{\pi}{3}$ polárszögek által határolt szektorterületét (34. ábra)!



34. ábra

$$T=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{25\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=12{,}5\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=12{,}5\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{(1-\cos^2\varphi)^2}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=12{,}5\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1-2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=12{,}5\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-2+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=12{,}5\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-2+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=12{,}5\left[\operatorname{tg}\varphi-\frac{3}{2}\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=$$

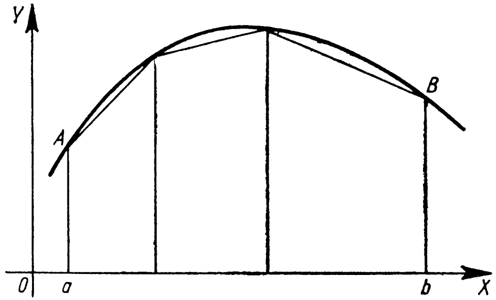
$$=12{,}5\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4}\right)\approx$$

$$\approx 12{,}5\left(1{,}73-1{,}57+\frac{0{,}866}{4}-1+1{,}5\cdot 0{,}785-\frac{1}{4}\right)\approx$$

$\approx 3{,}85$ területegység.

2. Ívhossz-számítás

Ha az A és B pontokkal határolt AB vonaldarabba — például a 35. ábrán látható módon — beírt poligon hosszának van felső határa, akkor a vonaldarabot rektifikálhatónak mondjuk és a vonaldarab ívhossza ezen felső határral egyenlő.



35. ábra

Ha egy $y=f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos és differenciálható, továbbá a differenciálhányadosa korlátos, akkor az a és b abszcisszák által határolt vonaldarab ívhosszát az

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

határozott integrál adja meg.

Ha a görbe paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékeknek megfelelő pontok közé eső görbedarab ívhossza:

$$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Ha a görbe egyenlete polárkoordinátákkal adott, akkor a $(\varphi_1; r_1)$ és $(\varphi_2; r_2)$ pontok közé eső görbedarab ívhossza:

$$s=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény görbéjének az $x_1=1$ és $x_2=4$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének hosszúságát (36. ábra)!

$$y=x^2;\quad y'=2x.$$

$s=\int_1^4 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx=?$ Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át:

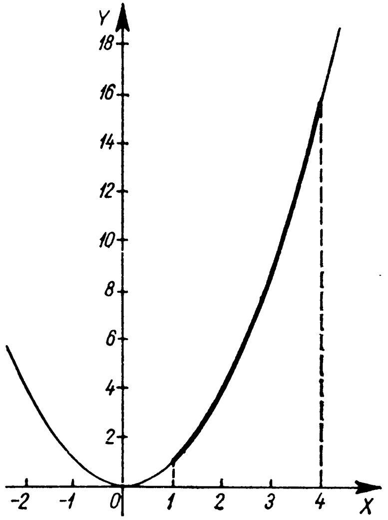
Legyen $2x=\operatorname{sh} u$, akkor $x=\frac{1}{2}\operatorname{sh} u$, és $dx=\frac{1}{2}\operatorname{ch} u\,du$. A határokat csak jelöljük, és a visszaalakítás után helyettesítünk.

$$s=\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\,\frac{1}{2}\operatorname{ch} u\,du=\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \operatorname{ch}^2 u\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch} 2u+1}{2}\,du=\frac{1}{4}\int_{u_1}^{u_2} (\operatorname{ch} 2u+1)\,du=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2}+u\right]_{u_1}^{u_2}=\frac{1}{4}[\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u+u]_{u_1}^{u_2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1+(2x)^2}+\operatorname{ar\,sh} 2x\right]_1^4.$$



36. ábra

Tudjuk, hogy $\operatorname{ar\,sh} 2x=\ln\left[2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right]$, ezért

$$s=\frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1+(2x)^2}+\ln\left(2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right)\right]_1^4=$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\cdot 4\sqrt{1+64}+\ln\left(8+\sqrt{1+64}\right)-2\sqrt{1+4}-\ln\left(2+\sqrt{1+4}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[8\sqrt{65}+\ln\left(8+\sqrt{65}\right)-2\sqrt{5}-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]\approx$$

$$\approx 0{,}25(8\cdot 8{,}05+\ln 16{,}05-2\cdot 2{,}24-\ln 4{,}24)\approx$$

$$\approx 0{,}25(64{,}4+2{,}78-4{,}48-1{,}45)=0{,}25(67{,}18-5{,}93)=$$

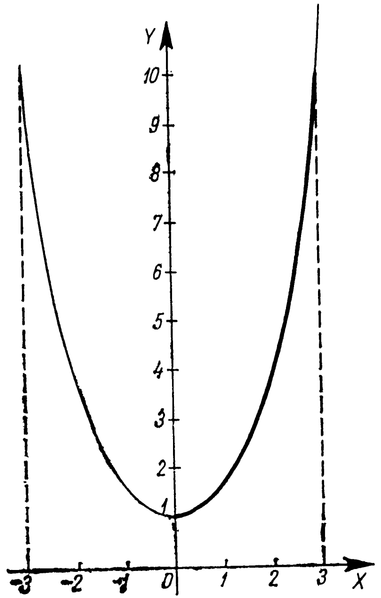
$$=0{,}25\cdot 61{,}25\approx 15{,}31 \text{ hosszúságegység.}$$

2. Határozzuk meg az $y=\operatorname{ch} x$ függvény-görbe $x_1=0$ és $x_2=3$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének hosszát (37. ábra)!

$$y=\operatorname{ch} x;\quad y'=\operatorname{sh} x.$$

$$s=\int_0^3 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx=\int_0^3 \operatorname{ch} x\,dx=[\operatorname{sh} x]_0^3=$$

$$=\frac{e^3-e^{-3}}{2}\approx\frac{20-\frac{1}{20}}{2}\approx 10 \text{ hosszúságegység.}$$



37. ábra

3. Határozzuk meg az $y=x^{\frac{3}{2}}$ függvény görbéjének az $x_1=2$ és $x_2=4$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének hosszúságát (38. ábra)!

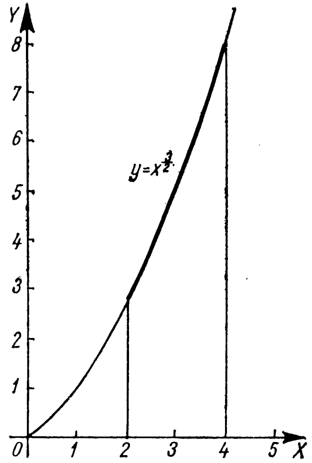
$$y=x^{\frac{3}{2}}; \quad y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

$$s=\int_2^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}}\right]_2^4=$$

$$=\left[\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\right]_2^4=\frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3}-\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^3}\right)\approx$$

$$\approx\frac{8}{27}(\sqrt{1000}-\sqrt{166{,}4})\approx\frac{8}{27}(31{,}7-12{,}9)=\frac{150{,}4}{27}\approx$$

$\approx 5{,}56$ hosszúságegység.

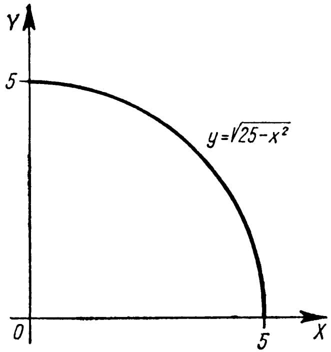


38. ábra

4. Határozzuk meg az $x^2+y^2=25$ kör ívének hosszát az $x_1=0$ és $x_2=5$ abszcisszájú pontok által határolt szakasz felett (tehát az 5 sugarú negyedkör kerületét) (39. ábra).

$$y^2=25-x^2; \quad y=\sqrt{25-x^2};$$

$$y'=\frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}.$$



39. ábra

$$s=\int_0^5\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}\,dx=\int_0^5\sqrt{\frac{25-x^2+x^2}{25-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_0^5\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\,dx=\frac{1}{5}\int_0^5\frac{5}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}\,dx=$$

$$=\left[5\arcsin\frac{x}{5}\right]_0^5=5(\arcsin 1-\arcsin 0)=$$

$$=5\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\frac{5\pi}{2}\text{ hosszúságegység.}$$

Ez valóban az 5 egység sugarú negyedkör íve.

5. Határozzuk meg az $y=\ln x$ függvény ívének hosszát az $x_1=2$ és $x_2=6$ abszcisszájú pontok által határolt szakaszon (40. ábra)!

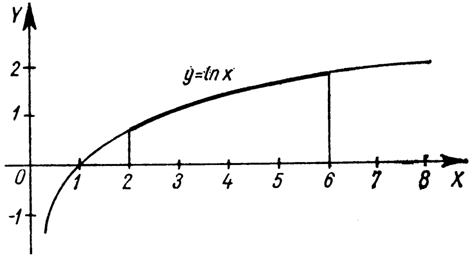
$$y=\ln x;\quad y'=\frac{1}{x}.$$

$$s=\int_2^6\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_2^6\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx=\int_2^6\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx.$$

Helyettesítést alkalmazunk: $x^2+1=t^2$; így

$$x=\sqrt{t^2-1}=(t^2-1)^{\frac{1}{2}},\quad\text{ebből}\quad dx=\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t\,dt=$$

$$=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$



40. ábra

Az új határok $x_1=2$, ezért $t_1=\sqrt{5}$; és $x_2=6$, ezért $t_2=\sqrt{37}$.

$$s=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}}\frac{t\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}}=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}}\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt=$$

$$=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt.$$

Mivel $|t|>1$, ezért

$$s=\left[t-\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}}=\sqrt{37}-\ln\frac{\sqrt{37}-1}{\sqrt{37}+1}-\sqrt{5}+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\approx$$

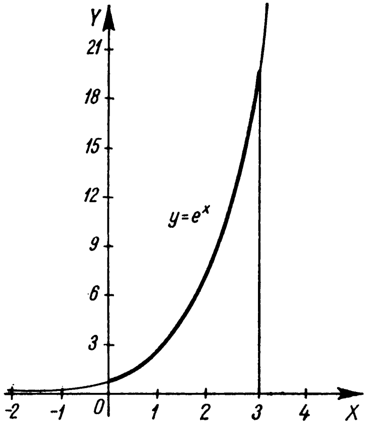
$$\approx 6{,}1-\ln\frac{5{,}1}{7{,}1}-2{,}24+\ln\frac{1{,}24}{3{,}24}\approx$$

$$\approx 3{,}86-\ln 5{,}1+\ln 7{,}1+\ln 1{,}24-\ln 3{,}24\approx$$

$$\approx 3{,}86-1{,}63+1{,}96+0{,}215-1{,}17=3{,}23\text{ hosszúságegység.}$$

6. Határozzuk meg az $y=e^x$ függvény görbéje $x_1=0$ és $x_2=3$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének hosszát (41. ábra)!

$$y=e^x;\quad y'=e^x;\quad s=\int_0^3\sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$$



41. ábra

Ilyen alakú integrandusra általános eljárást nem ismerünk; mivel azonban tudjuk, hogy $\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 u} = \mathrm{ch}\, u$, a következő helyettesítéssel próbálkozunk: legyen $e^x = \mathrm{sh}\, u$, vagyis $x = \ln \mathrm{sh}\, u$ és $\frac{dx}{du} = \frac{1}{\mathrm{sh}\, u}\,\mathrm{ch}\, u$, amiből

$$dx = \frac{\mathrm{ch}\, u}{\mathrm{sh}\, u}\, du.$$

Az új határokat egyelőre csak jelöljük. Így

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{ch}^2 u}{\mathrm{sh}\, u}\, du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{sh}^2 u + 1}{\mathrm{sh}\, u}\, du = \int_{u_1}^{u_2} \left(\mathrm{sh}\, u + \frac{1}{\mathrm{sh}\, u}\right) du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \mathrm{sh}\, u\, du + \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\mathrm{sh}\, u}\, du.$$

A második tag integrálja:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\mathrm{sh}\, u}\, du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\frac{u}{2}\,\mathrm{ch}\frac{u}{2}}\, du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{1}{2}\,\frac{2}{\mathrm{ch}^2\frac{u}{2}}}{\mathrm{th}\frac{u}{2}}\, du = \left[\ln\left|\mathrm{th}\frac{u}{2}\right|\right]_{u_1}^{u_2}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{ch}^2 u}{\mathrm{sh}\, u}\, du = \left[\mathrm{ch}\, u + \ln\left|\mathrm{th}\frac{u}{2}\right|\right]_{u_1}^{u_2} =$$

$$= \left[\sqrt{\mathrm{sh}^2 u + 1} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\mathrm{sh}^2 u+1}-1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 u+1}+1}\right]_{u_1}^{u_2} =$$

$$= \left[\sqrt{e^{2x}+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{e^{2x}+1}-1}{\sqrt{e^{2x}+1}+1}\right]_0^3 =$$

$$= \sqrt{e^6+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{e^6+1}-1}{\sqrt{e^6+1}+1} - \sqrt{e^0+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{e^0+1}-1}{\sqrt{e^0+1}+1} \approx$$

$$\approx 20 + \frac{1}{2}\ln\frac{20-1}{20+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx$$

$$\approx 20 + \frac{1}{2}\ln\frac{19}{21} - 1{,}41 - \frac{1}{2}\ln\frac{0{,}41}{2{,}41} = 18{,}59 + \frac{1}{2}\ln\frac{19\cdot 2{,}41}{21\cdot 0{,}41} \approx$$

$$\approx 18{,}59 + \frac{1}{2}\ln 5{,}3 \approx 18{,}59 + \frac{1{,}68}{2} = 18{,}59 + 0{,}84 =$$

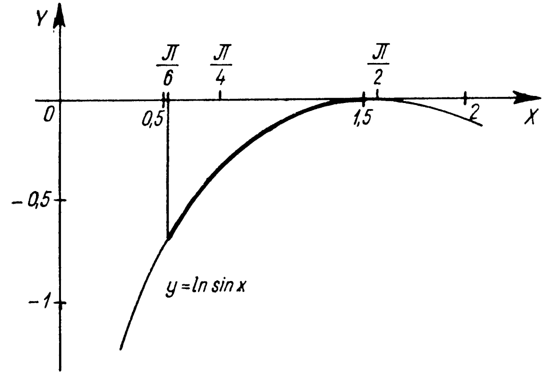
$= 19{,}43$ hosszúságegység.

7. Határozzuk meg az $y = \ln \sin x$ függvény görbéje $x_1 = \frac{\pi}{6}$ és $x_2 = \frac{\pi}{2}$ abszcisszák által határolt ívének hosszúságát (42. ábra).

$$s = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\, dx.$$



42. ábra

Most az $R(\sin x)$ alakú integrandusra szokásos helyettesítést végezzük:

Legyen $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ekkor

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad x = 2\operatorname{arc\,tg} t;$$

tehát $\dfrac{dx}{dt} = 2\dfrac{1}{1+t^2}$ és $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$;

ha $x = \frac{\pi}{6}$, akkor $t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} 15° \approx 0{,}268$,

ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor $t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45° = 1$.

Így

$$s = \int_{\operatorname{tg} 15°}^{\operatorname{tg} 45°} \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int_{\operatorname{tg} 15°}^{\operatorname{tg} 45°}\frac{dt}{t} = [\ln|t|]_{\operatorname{tg} 15°}^{\operatorname{tg} 45°} \approx [\ln t]_{0,268}^{1} =$$

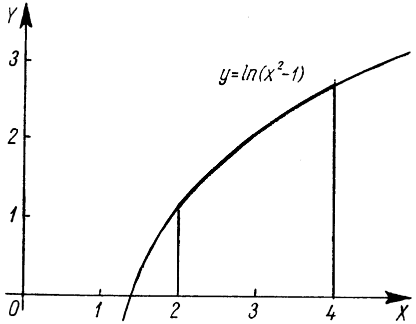
$$= \ln 1 - \ln 0{,}268 = -\ln 0{,}268 = -\ln\frac{2{,}68}{10} =$$

$$= \ln 10 - \ln 2{,}68 \approx 2{,}3 - 0{,}986 = 1{,}314 \text{ hosszúságegység.}$$

8. Határozzuk meg az $y = \ln(x^2-1)$ függvény $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének hosszúságát (43. ábra)! (Az integrandus értelmezési tartománya $|x| > 1$, tehát értelmezve van az egész integrálási intervallumban.)

$$s = \int_2^4 \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$$y = \ln(x^2-1); \quad y' = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x.$$



43. ábra

$$s = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{x^4-2x^2+1+4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{x^2-1}dx = \int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2-1}dx = \int_2^4 \frac{x^2-1+2}{x^2-1}dx =$$

$$= \int_2^4 \left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx = \int_2^4 dx + 2\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}dx =$$

$$= [x]_2^4 + 2\left[-\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right]_2^4 =$$

$$= 4-2-2\ln\sqrt{\frac{3}{5}}+2\ln\sqrt{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2+\ln\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3} = 2+\ln\frac{5}{9} =$$

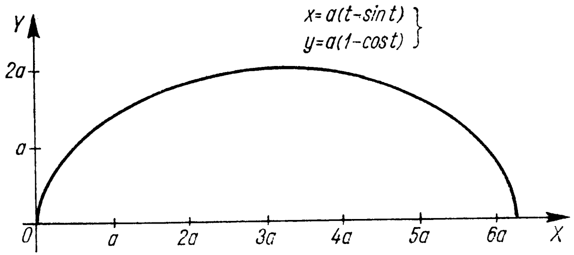
$$= 2+\ln 5 - \ln 9 \approx 2+1{,}61-2{,}2 =$$

$$= 1{,}41 \text{ hosszúságegység.}$$

Most paraméteres alakban adott függvények ívhosszának kiszámításával foglalkozunk.

9. Határozzuk meg a ciklois ívhosszát (44. ábra)! A ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a(t-\sin t); \quad y = a(1-\cos t).$$



44. ábra

A deriváltak és négyzetösszegük:

$$\dot{x} = a(1-\cos t); \quad \dot{y} = a\sin t.$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = a^2(1-2\cos t+\cos^2 t)+a^2\sin^2 t =$$

$$= a^2-2a^2\cos t+a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t = 2a^2(1-\cos t).$$

A határok: 0 és 2π (ugyanis t a körnek radiánban mért elfordulási szöge).

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt.$$

Az integrandust átalakítjuk, ugyanis

$$\frac{1-\cos t}{2} = \sin^2\frac{t}{2}, \text{ vagyis } 1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}.$$

$$s = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\left[-\frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\pi} =$$

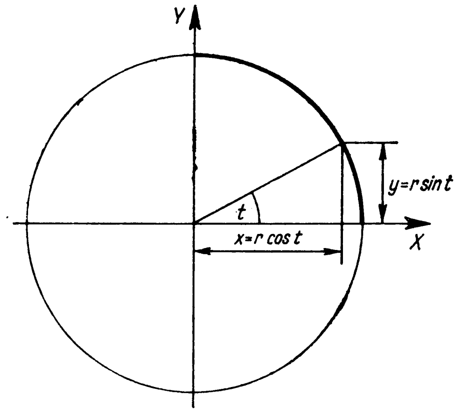
$$= -4a(\cos\pi-\cos 0) = -4a(-1-1) = 8a.$$

10. Határozzuk meg a negyedkör ívének hosszát (45. ábra). A kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x = r\cos t; \quad y = r\sin t.$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = [r(-\sin t)]^2+(r\cos t)^2 = r^2.$$

$$s = \int_0^{\pi/2}\sqrt{r^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} r\,dt = [rt]_0^{\frac{\pi}{2}} = r\frac{\pi}{2}.$$



45. ábra

Valóban! A körön ívhosszat úgy számítunk ki, hogy a középponti szöget [esetünkben $(\pi/2)$] szorozzuk a kör sugarával.

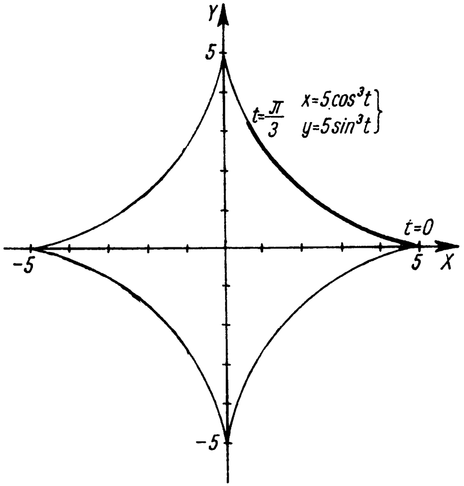
11. Határozzuk meg a következő egyenletrendszerrel adott asztrois $t_1=0$ és $t_2=\dfrac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívének hosszát (46. ábra).

$$x = 5\cos^3 t; \quad y = 5\sin^3 t.$$

A deriváltak négyzetösszege:

$$\dot{x} = 15\cos^2 t(-\sin t) = -15\cos^2 t\sin t;$$

$$\dot{y} = 15\sin^2 t\cos t.$$



46. ábra

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = 225\,(\sin^2 t\cos^4 t+\sin^4 t\cos^2 t) =$$

$$= 225\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t) = 225\sin^2 t\cos^2 t.$$

$$s = \int_0^{\pi/3} \sqrt{225\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = 15\int_0^{\pi/3}\sin t\cos t\,dt =$$

$$= 15\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{15}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2 0\right) = 7{,}5\cdot\frac{3}{4} =$$

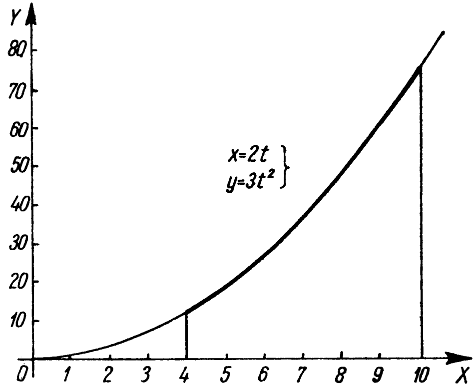
$$= 7{,}5\cdot 0{,}75 = 5{,}625.$$

12. Határozzuk meg az $x=2t$; $y=3t^2$ paraméteres egyenletrendszerrel adott parabola $t_1=2$ és $t_2=5$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívének hosszát (47. ábra).

$$s = \int_2^5 \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \int_2^5 \sqrt{4+36t^2}\,dt = 2\int_2^5 \sqrt{1+9t^2}\,dt.$$

Az integrált helyettesítéssel alakítjuk át.

Legyen $3t=\operatorname{sh} u$; vagyis $t=\frac{1}{3}\operatorname{sh} u$; ekkor $dt=\frac{1}{3}\operatorname{ch} u\,du$.



47. ábra

Az új integrálási határokat csak jelezzük:

$$s = 2\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\,\frac{1}{3}\operatorname{ch} u\,du = \frac{2}{3}\int_{u_1}^{u_2}\operatorname{ch}^2 u\,du.$$

Mivel $\operatorname{ch}^2 u = \frac{1+\operatorname{ch} 2u}{2}$, ezért

$$s = \frac{2}{3}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1+\operatorname{ch} 2u}{2}\,du = \frac{1}{3}\int_{u_1}^{u_2}(1+\operatorname{ch} 2u)\,du = \frac{1}{3}\left[u+\frac{\operatorname{sh} 2u}{2}\right]_{u_1}^{u_2}.$$

Visszahelyettesítjük a t változót:

$$u = \operatorname{ar\,sh} 3t = \ln\left(3t+\sqrt{9t^2+1}\right);$$

$$\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} = \frac{2\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u}{2} = \operatorname{sh} u\operatorname{ch} u = \operatorname{sh} u\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = 3t\sqrt{1+9t^2}.$$

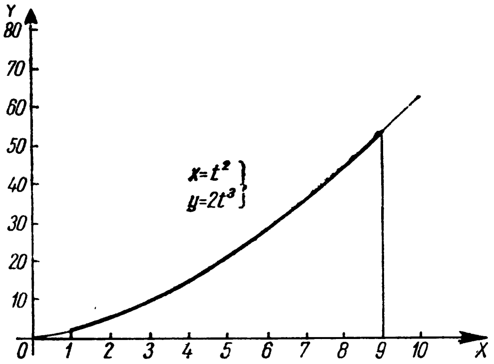
$$s = \frac{1}{3}\left[\ln\left(3t+\sqrt{9t^2+1}\right)+3t\sqrt{1+9t^2}\right]_2^5 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left(15+\sqrt{226}\right)+15\sqrt{226}-\ln\left(6+\sqrt{37}\right)-6\sqrt{37}\right]\approx$$

$$\approx \frac{1}{3}(\ln 30+225-\ln 12-36) = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{30}{12}+189\right)\approx$$

$$\approx \frac{1}{3}(0{,}92+189) = \frac{189{,}92}{3} \approx 63{,}31 \text{ hosszúságegység.}$$

13. Határozzuk meg az $x=t^2$; $y=2t^3$ paraméteres egyenletű Neil-féle szemikubikus parabola $t_1=1$ és $t_2=3$ paraméterértékekkel adott pontjai közé eső ívének hosszát (48. ábra)!



48. ábra

$$\dot{x}=2t;\quad \dot{y}=6t^2.$$

$$s=\int_1^3\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_1^3\sqrt{4t^2+36t^4}\,dt=\int_1^3 2t\sqrt{1+9t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^3 18t\sqrt{1+9t^2}\,dt=\frac{1}{9}\left[(1+9t^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right]_1^3=$$

$$=\frac{2}{27}\left[\sqrt{(1+9t^2)^3}\right]_1^3=\frac{2}{27}(82\sqrt{82}-10\sqrt{10})\approx$$

$$\approx\frac{2}{27}(742{,}6-31{,}7)\approx 52{,}6 \text{ hosszúságegység.}$$

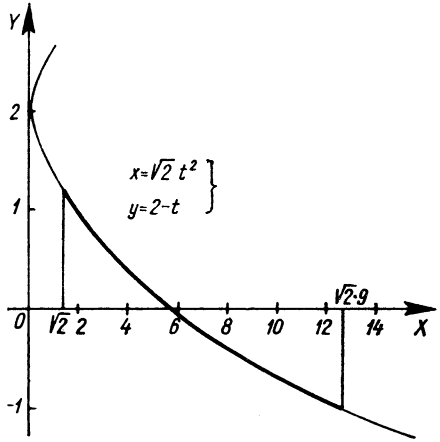
14. Egy parabola paraméteres egyenletrendszere:

$$x=\sqrt{2}\,t^2;\quad y=2-t.$$

Határozzuk meg a $t_1=1$ és $t_2=3$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ív hosszát (49. ábra)!

$$\dot{x}=2\sqrt{2}\,t;\quad \dot{y}=-1.$$

$$s=\int_1^3\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_1^3\sqrt{8t^2+1}\,dt.$$



49. ábra

Alkalmazzuk a $\operatorname{sh} u=\sqrt{8}\,t$ helyettesítést, ekkor

$$t=\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{sh} u \text{ és } dt=\frac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{8}}\,du.$$

Az ívhossz:

$$s=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\operatorname{sh}^2 u+1}\,\frac{\operatorname{ch} u}{\sqrt{8}}\,du=\frac{1}{\sqrt{8}}\int_{u_1}^{u_2}\operatorname{ch}^2 u\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\operatorname{ch} 2u+1}{2}\,du=\frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2}+u\right]_{u_1}^{u_2}.$$

Az eredeti t változót visszahelyettesítve:

$$\frac{\operatorname{sh} 2u}{2}=\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u=\sqrt{8}\,t\sqrt{8t^2+1};$$

$$u=\operatorname{ar\,sh}\sqrt{8}\,t=\ln\left(\sqrt{8t}+\sqrt{8t^2+1}\right).$$

$$s=\frac{1}{2\sqrt{8}}\left[\sqrt{8}\,t\sqrt{8t^2+1}+\ln\left(\sqrt{8}\,t+\sqrt{8t^2+1}\right)\right]_1^3=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{8}}\left[3\sqrt{8}\sqrt{73}+\ln(3\sqrt{8}+\sqrt{73})-\sqrt{8}\sqrt{9}-\ln(\sqrt{8}+\sqrt{9})\right]\approx$$

$$\approx \frac{1}{2\sqrt{8}}[3\cdot 2{,}83\cdot 8{,}55+\ln(3\cdot 2{,}83+8{,}55)-8{,}5-\ln(2{,}83+3)]\approx$$

$$\approx \frac{1}{2\sqrt{8}}[72{,}6+\ln(8{,}5+8{,}55)-8{,}5-\ln 5{,}83]\approx$$

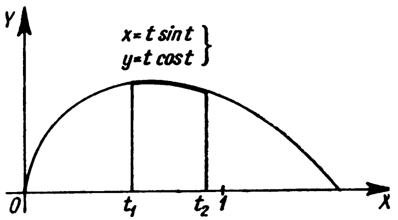
$$\approx \frac{1}{2\sqrt{8}}\left(64{,}1+\ln\frac{17{,}05}{5{,}83}\right)\approx\frac{1}{2\sqrt{8}}(64{,}1+\ln 2{,}92)\approx$$

$$\approx \frac{1}{2\sqrt{8}}(64{,}1+1{,}07)\approx\frac{65{,}17}{5{,}65}\approx 11{,}5 \text{ hosszúságegység.}$$

15. Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott függvény görbéjének a $t_1=\frac{\pi}{4}$ és $t_2=\frac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontok közé eső ívének hosszúságát (50. ábra)!

$$x=t\sin t;\quad y=t\cos t.$$

$$\dot{x}=\sin t+t\cos t;\quad y=\cos t-t\sin t.$$



50. ábra

A két derivált négyzetösszege

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=(\sin t+t\cos t)^2+(\cos t-t\sin t)^2=$$

$$=\sin^2 t+2t\sin t\cos t+t^2\cos^2 t+\cos^2 t-2t\sin t\cos t+t^2\sin^2 t=$$

$$=1+t^2.$$

$$s=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

A $t=\operatorname{sh} u$ helyettesítéssel, figyelembe véve, hogy ekkor $dt=\operatorname{ch} u\,du$,

$$s=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\,du=\int_{u_1}^{u_2}\operatorname{ch}^2 u\,du=$$

$$=\int_{u_1}^{u_2}\frac{\operatorname{ch} 2u+1}{2}\,du=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2}+u\right]_{u_1}^{u_2}.$$

Mivel

$$\frac{\operatorname{sh} 2u}{2}=\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u=t\sqrt{t^2+1},\text{ és } u=\operatorname{ar\,sh} t=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right),$$

ezért

$$s=\frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+1}+\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+1}+\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+1}\right)-\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}-\ln\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}\right)\right].$$

Behelyettesítve a $\frac{\pi}{3}\approx 1{,}05$ és $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785$ közelítő értékeket, a keresett ívhossz:

$$s\approx\frac{1}{2}\left[1{,}05\sqrt{1{,}05^2+1}+\ln\left(1{,}05+\sqrt{1{,}05^2+1}\right)-\right.$$

$$\left.-0{,}785\sqrt{0{,}785^2+1}-\ln\left(0{,}785+\sqrt{0{,}785^2+1}\right)\right]\approx$$

$$\approx 0{,}5\left[1{,}05\sqrt{1{,}1+1}+\ln\left(1{,}05+\sqrt{1{,}1+1}\right)-\right.$$

$$\left.-0{,}785\sqrt{0{,}62+1}-\ln\left(0{,}785+\sqrt{0{,}62+1}\right)\right]=$$

$$=0{,}5\left[1{,}05\sqrt{2{,}1}+\ln\left(1{,}05+\sqrt{2{,}1}\right)-0{,}785\sqrt{1{,}62}-\right.$$

$$\left.-\ln\left(0{,}785+\sqrt{1{,}62}\right)\right]\approx 0{,}5(1{,}52+\ln 2{,}5-0{,}996-\ln 2{,}055)=$$

$$=0{,}5\left(0{,}524+\ln\frac{2{,}5}{2{,}055}\right)\approx 0{,}5(0{,}524+\ln 1{,}22)\approx 0{,}5(0{,}524+0{,}2)\approx$$

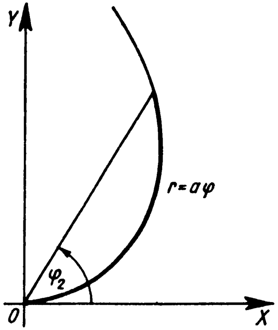
$$=0{,}362 \text{ hosszúságegység.}$$

16. Határozzuk meg az archimedesi spirális ívhosszát a $\varphi_1=0$, $\varphi_2=1$ határok között (51. ábra)!

$$r=a\varphi;\quad \dot r=a.$$

$$s=\int_0^1 \sqrt{r^2+\dot r^2}\,d\varphi=\int_0^1 \sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^1 \sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi.$$

A gyökjel alatti mennyiséget helyettesítéssel alakítjuk át.



51. ábra

Legyen $\varphi=\mathrm{sh}\,t$; ekkor $\varphi^2+1=\mathrm{sh}^2\,t+1=\mathrm{ch}^2\,t$, és $d\varphi=\mathrm{ch}\,t\,dt$.
A határok kiszámítása: ha $\varphi_1=0$, akkor $t_1=0$; ha $\varphi_2=1$, akkor

$$1=\mathrm{sh}\,t_2=\frac{e^{t_2}-e^{-t_2}}{2}\Bigg|\cdot 2e^{t_2};\quad 2e^{t_2}=e^{2t_2}-1;\quad e^{2t_2}-2e^{t_2}-1=0;$$

$$e^{t_2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt2}{2}=1\pm\sqrt2;\quad t_2=0{,}88.$$

$e^{t_2}=1-\sqrt2$ a valós számok körében nem oldható meg. Tehát

$$s=a\int_0^{0,88}\mathrm{ch}^2\,t\,dt=a\int_0^{0,88}\frac{\mathrm{ch}\,2t+1}{2}\,dt=a\left[\frac{\mathrm{sh}\,2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^{0,88}=$$

$$=a\left(\frac{\mathrm{sh}\,1{,}76}{4}+0{,}44-0\right)=a\left(\frac{e^{1,76}-e^{-1,76}}{8}+0{,}44\right)\approx$$

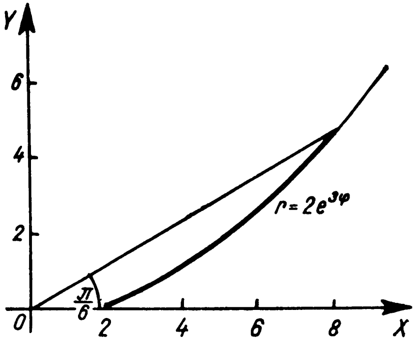
$$\approx a\left(\frac{5{,}8-\dfrac{1}{5{,}8}}{8}+0{,}44\right)\approx a\left(\frac{5{,}8-0{,}172}{8}+0{,}44\right)=$$

$$=a\left(\frac{5{,}628}{8}+0{,}44\right)=a(0{,}7035+0{,}44)=1{,}1435a\approx1{,}14a.$$

Legyen $a=10$, vagyis $r=10\varphi$; akkor

$$s=\int_0^1\sqrt{r^2+\dot r^2}\,d\varphi=1{,}14\cdot10=11{,}4 \text{ hosszúságegység.}$$

17. Határozzuk meg az $r=2e^{3}\varphi$ egyenletű logaritmikus spirális ívhosszát, ha $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{6}$ (52. ábra).



52. ábra

$$r=2e^{3\varphi};\quad \dot r=6e^{3\varphi}.$$

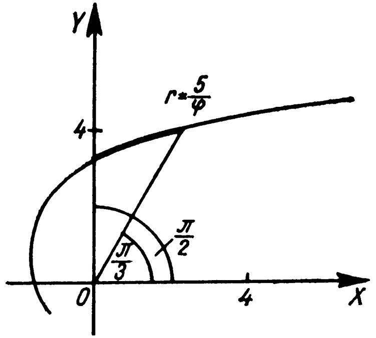
$$s=\int_0^{\pi/6}\sqrt{r^2+\dot r^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi/6}\sqrt{4e^{6\varphi}+36e^{6\varphi}}\,d\varphi=\int_0^{\pi/6}\sqrt{40e^{6\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{40}\int_0^{\pi/6}e^{3\varphi}\,d\varphi=\sqrt{40}\left[\frac{e^{3\varphi}}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{40}}{3}\left(e^{\frac{\pi}{6}}-e^0\right)\approx$$

$$\approx\frac{\sqrt{40}}{3}\left(e^{1,57}-1\right)\approx\frac{6{,}32}{3}(4{,}8-1)\approx 8.$$

18. Határozzuk meg adott hiperbolikus spirális $\varphi_1=\dfrac{\pi}{3}$ és $\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$ polárszögek által határolt ívének hosszúságát (53. ábra)! A hiperbolikus spirális polárkoordinátás egyenlete:

$$r=\frac{5}{\varphi};\quad \dot r=-\frac{5}{\varphi^2};$$



53. ábra

$$s=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{r^2+\dot r^2}\,d\varphi=5\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^4}}\,d\varphi=$$

$$=5\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\varphi^2}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi.$$

Legyen $\varphi=\operatorname{sh} u$; tekintetbe véve, hogy $d\varphi=\operatorname{ch} u\,du$ (arról, hogy a határokat is átszámítjuk-e u-ra, vagy pedig visszahelyettesítjük a φ változót, később döntünk), az ívhossz:

$$s=5\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u+1}}{\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\,du=5\int_{u_1}^{u_2}\frac{\operatorname{sh}^2 u+1}{\operatorname{sh}^2 u}\,du=$$

$$=5\int_{u_1}^{u_2}\left(1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\right)du=5[u-\operatorname{cth} u]_{u_1}^{u_2}.$$

Behelyettesítjük a határokat: ha $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$, akkor

$$u_1=\operatorname{ar\,sh}\varphi=\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+1}\right)\approx\ln\left(1{,}05+\sqrt{1{,}05^2+1}\right)\approx$$

$$\approx\ln\left(1{,}05+\sqrt{1{,}1+1}\right)=\ln\left(1{,}05+\sqrt{2{,}1}\right)\approx$$

$$\approx\ln(1{,}05+1{,}45)=\ln 2{,}5\approx 0{,}91,$$

ha $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, akkor

$$u_2\ \operatorname{ar\,sh}\frac{\pi}{2}=\ln\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1}\right)\approx$$

$$\approx\ln\left(1{,}57+\sqrt{1{,}57^2+1}\right)\approx\ln\left(1{,}57+\sqrt{3{,}46}\right)\approx$$

$$\approx\ln(1{,}57+1{,}86)=\ln 3{,}43\approx 1{,}23.$$

Az u-ra kapott értékeket behelyettesítjük:

$$s=5[u-\operatorname{cth} u]_{0,91}^{1,23}=5(1{,}23-\operatorname{cth}1{,}23-0{,}91+\operatorname{cth}0{,}91).$$

További részletszámítások:

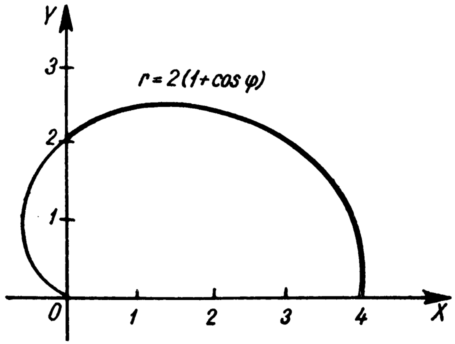
$$\operatorname{cth}1{,}23=\frac{e^{1,23}+e^{-1,23}}{e^{1,23}-e^{-1,23}}\approx\frac{3{,}42+0{,}292}{3{,}42-0{,}292}=\frac{3{,}712}{3{,}128}\approx 1{,}19;$$

$$\operatorname{cth}0{,}91=\frac{e^{0,91}+e^{-0,91}}{e^{0,91}-e^{-0,91}}\approx\frac{2{,}48+0{,}404}{2{,}48-0{,}404}=\frac{2{,}884}{2{,}076}\approx 1{,}38.$$

$$s=5(0{,}32-1{,}19+1{,}38)=5(1{,}70-1{,}19)=2{,}55 \text{ hosszúságegység.}$$

19. Határozzuk meg az $r=2(1+\cos\varphi)$ egyenletű kardioid $\varphi_1=0$ és $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ polárszögekhez tartozó pontok által határolt ívének hosszát (54. ábra)!

$$r=2(1+\cos\varphi);\quad \dot r=-2\sin\varphi.$$



54. ábra

Először az integrandus gyökjel alatti részét határozzuk meg:

$$r^2+\dot{r}^2 = [2(1+\cos\varphi)]^2+(-2\sin\varphi)^2 =$$
$$= 4(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)+4\sin^2\varphi =$$
$$= 4+8\cos\varphi+4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi = 8(1+\cos\varphi).$$
$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2+\dot{r}^2}\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{8(1+\cos\varphi)}\,d\varphi =$$
$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Mivel $2\,\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2} = 1+\cos\varphi$, ezért

$$s = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{2\,\mathrm{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} \mathrm{ch}\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$
$$= 8\left[\mathrm{sh}\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = 8\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{4} = 8\,\frac{e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}}{2} = 4(e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}) \approx$$
$$\approx 4(e^{0,785}-e^{-0,785}) \approx 4\left(2,19-\frac{1}{2,19}\right) \approx 6,936 \text{ hosszúságegység.}$$

3. Forgástestek felszíne

Csak olyan felületek felszínének meghatározásával foglalkozunk, amelyek valamilyen folytonos $y=f(x)$ görbe X-tengely körüli forgatásával vagy $x=g(y)$ görbe Y-tengely körüli forgatásával keletkeznek.

Ha egy folytonos függvény görbéje valamely $[a, b]$ szakaszon rektifikálható, akkor az X-, ill. Y-tengely körüli forgatásával kapható forgásfelületnek (vagyis a forgástest palástjának) a felszíne is meghatározható.

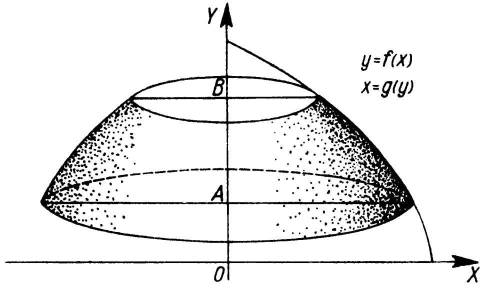
Ha az $y=f(x)$ függvény görbéjének X-tengely körüli forgatásával keletkező forgástest palástjának felszínét akarjuk kiszámítani az a, b határok között, akkor az alábbi határozott integrál értékeként kapjuk meg:

$$F_x(a, b) = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Ha a forgástengely az Y-tengely és a szakasz végpontja $y=A$ és $y=B$, akkor a palást felszíne

$$F_y(A, B) = 2\pi\int_A^B x\sqrt{1+x'^2}\,dy,$$

ahol x az $y=f(x)$ függvény inverze, vagyis $x=f^{-1}(y)=g(y)$, valamint $x'=\frac{dx}{dy}$ (55. ábra).



55. ábra

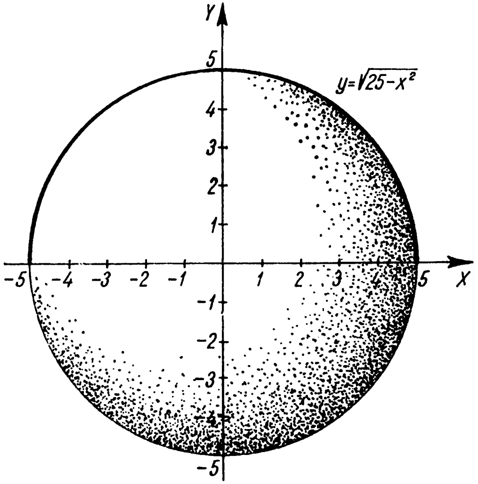
Ha a függvény paraméteres alakban adott, akkor a t_1 és t_2 paramétereknek megfelelő pontok által határolt görbe X-tengely körüli forgatásából adódó forgástest palástjának *felszíne*

$$F_x(t_1, t_2) = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=\sqrt{25-x^2}$ félkör forgatásával keletkező gömb felszínét (56. ábra)! Az integrálás határai -5 és 5.

$$y' = \frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}.$$



56. ábra

$$F = 2\pi \int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2+x^2}\,dx = 10\pi[x]_{-5}^{5} = 100\pi \text{ területegység.}$$

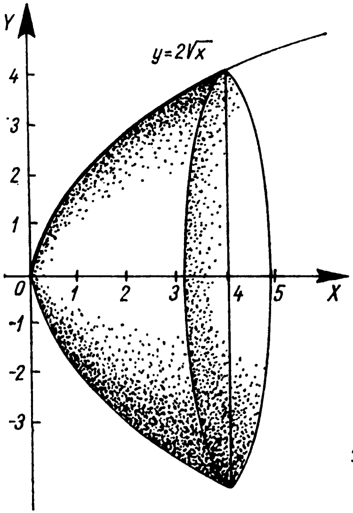
Az $r=5$ egység sugarú gömb felszíne valóban $F=4r^2\pi=100\pi$.

2. Határozzuk meg az $y=2\sqrt{x}$ parabola X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgási paraboloid felszínét, ha az ív két végpontjának abszcisszája 0 és 4 (57. ábra)!

$$y' = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

az integrandus

$$y\sqrt{1+y'^2} = 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 2\sqrt{x+1}.$$



57. ábra

A forgásfelület felszíne:

$$F = 2\pi \int_0^4 2\sqrt{x+1}\,dx = 4\pi \int_0^4 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = 4\pi \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8\pi}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5}-1) \approx \frac{8\cdot 3{,}14}{3}(5\cdot 2{,}24-1) \approx 85{,}5 \text{ területegység.}$$

3. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipszis $x_1=0$; $x_2=3$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgásfelület felszínét!

Először az implicit alakban adott függvényt explicit alakra hozzuk:

$$y^2 = 4\left(1-\frac{x^2}{9}\right) = \frac{4}{9}(9-x^2);$$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

Az X-tengely feletti ellipszisív egyenlete:

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}.$$

A derivált:

$$y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-2x}{3\sqrt{9-x^2}}.$$

A felszín:

$$F = 2\pi\int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{9(9-x^2)}}\,dx =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^3 \sqrt{9-x^2+\frac{4}{9}x^2}\,dx = \frac{4\pi}{3}\int_0^3\sqrt{9-\frac{5}{9}x^2}\,dx =$$

$$= 4\pi\int_0^3\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}x}{9}\right)^2}\,dx.$$

Legyen $\frac{\sqrt{5}x}{9} = \sin u$, vagyis $x = \frac{9}{\sqrt{5}}\sin u$; $dx = \frac{9}{\sqrt{5}}\cos u\,du$.
Az új határokat u_1-gyel, ill. u_2-vel jelöljük.

$$F = 4\pi\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1-\sin^2 u}\,\frac{9}{\sqrt{5}}\cos u\,du = \frac{36\pi}{\sqrt{5}}\int_{u_1}^{u_2}\cos^2 u\,du =$$

$$= \frac{36\pi}{\sqrt{5}}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \frac{18\pi}{\sqrt{5}}\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_{u_1}^{u_2}.$$

Kiszámítjuk u_1 és u_2 értékét, majd behelyettesítünk:

ha $x_1 = 0$, akkor $u_1 = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{9}x_1 = 0$;

ha $x_2 = 3$, akkor $u_2 = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} \approx \arcsin\frac{2{,}24}{3} \approx$

$\approx \arcsin 0{,}75 \approx 48{,}5\cdot 0{,}0174 \approx 0{,}844$ (radián).

$\sin 2u_1 = \sin 0 = 0$;

$\sin 2u_2 = \sin 2\cdot 48{,}5° = \sin 97° = \sin 83° = 0{,}99.$

$$F = \frac{18\pi}{\sqrt{5}}\left(0{,}844+\frac{0{,}99}{2}-0\right) \approx 25{,}2(0{,}844+0{,}495) =$$

$$= 25{,}2\cdot 1{,}339 \approx 33{,}8 \text{ területegység.}$$

A felületdarab felszíne tehát 33,8 területegység.

4. Határozzuk meg az $y=\operatorname{ch} x$ függvény $0\leq x\leq 3$ abszcisszákkal meghatározott ívének X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest palástjának felszínét!

$$y=\operatorname{ch} x;\quad y'=\operatorname{sh} x.$$

$$F = 2\pi\int_0^3 \operatorname{ch} x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^3\operatorname{ch}^2 x\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^3\frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2}\,dx = \pi\left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{2}+x\right]_0^3 =$$

$$= \pi\left(\frac{\operatorname{sh} 6}{2}+3\right) = \pi\left(\frac{e^6-e^{-6}}{4}+3\right) \approx 3{,}14\left(\frac{400-\frac{1}{400}}{4}+3\right) \approx$$

$$\approx 3{,}14\cdot 103 \approx 324.$$

A felszín tehát 324 területegység.

5. Határozzuk meg az $y=3x^3$ parabola $x_1=0$ és $x_2=5$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének az X-tengely körüli forgatásakor keletkező felület felszínét!

$$y=3x^3;\quad y'=9x^2.$$

$$F = 2\pi\int_0^5 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_0^5 3x^3\sqrt{1+81x^4}\,dx.$$

Az integrandus átalakítható úgy, hogy a gyökös tényező szorzója éppen a gyökjel alatti kifejezés deriváltja legyen, tehát $f^n(x)f'(x)$ alakúvá:

$$F = 2\pi\int_0^5\frac{3\cdot 324x^3}{324}\sqrt{1+81x^4}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{108}\int_0^5 324x^3(1+81x^4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\pi}{54}\left[(1+81x^4)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^5 \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{81}[(9x^2)^3]_0^5 = \frac{\pi}{81}(225^3-0) \approx \frac{3{,}14\cdot 11{,}4\cdot 10^6}{81} \approx$$

$\approx 4{,}42\cdot 10^5$ területegység.

6. Határozzuk meg az $y=x^2$ parabola $y_1=0$ és $y_2=4$ ordinátájú pontjai által határolt ívének az Y-tengely körüli forgatásával keletkező forgásfelszínt!

Ha a görbét az Y-tengely körül forgatjuk, akkor ismernünk kell x-et mint az y függvényét, ugyanis

$$F_y = 2\pi \int_0^4 x(y)\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy.$$

Mivel $y = x^2$, ezért $x = \sqrt{y}$; $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

Megjegyzés: Az $y=x^2$ függvény inverz kapcsolatban $x = \pm\sqrt{y}$. A függvény kétértékű és szimmetrikus az Y-tengelyre. Mi most a pozitív X-tengely feletti ívet forgatjuk az Y-tengely körül, ennek egyenlete $x=\sqrt{y}$. Ha a negatív X-tengely feletti ívet forgatnánk az Y-tengely körül, akkor $x = -\sqrt{y}$ lenne, és a felszín számértékének mínusz egyszeresét kapnánk, ennek abszolút értéke lenne a keresett felszín.

$$F_y = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y+\frac{1}{4}}\,dy =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left(y+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dy = 2\pi \left[\frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3}\right].$$

A második tag értéke az elsőhöz képest kicsi, valamint figyelembe véve, hogy $\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^3} \approx \sqrt{76} \approx 8{,}7$ a keresett felszín:

$$F_y \approx \frac{4\pi\cdot 8{,}7}{3} \approx 36{,}5 \text{ területegység.}$$

7. Határozzuk meg az $y=x^2$ parabola $x_1=0$ és $x_2=4$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének az X-tengely körüli forgatásával keletkező forgásfelületét!

$$y=x^2; \quad y'=2x.$$

$$F_x = 2\pi \int_0^4 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^4 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

A gyökös tényezőt racionálissá alakíthatjuk, ha a $2x=\operatorname{sh} u$ helyettesítést használjuk: legyen $x=\dfrac{\operatorname{sh} u}{2}$; ekkor $dx=\dfrac{1}{2}\operatorname{ch} u\,du$ és

$$F_x = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{sh}^2 u}{4}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\,\frac{1}{2}\operatorname{ch} u\,du =$$

$$= \frac{2\pi}{8}\int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch}^2 u\,du = \frac{\pi}{16}\int_{u_1}^{u_2} 4\operatorname{sh}^2 u\operatorname{ch}^2 u\,du =$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh}^2 2u\,du = \frac{\pi}{16}\int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch} 4u - 1}{2}\,du = \frac{\pi}{32}\left[\frac{\operatorname{sh} 4u}{4} - u\right]_{u_1}^{u_2}.$$

Most kiszámíthatjuk az u_1 és u_2 határok értékét: $\operatorname{sh} u=2x$, tehát $u= = \operatorname{ar\,sh} 2x = \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$; ha $x=0$, akkor $u=\ln 1=0$, ha $x=4$, akkor $u = \ln\left(8+\sqrt{65}\right)$.

Tehát

$$F_x = \frac{\pi}{32}\left[\frac{e^{4u}-e^{-4u}}{8} - u\right]_{u_1}^{u_2} = \frac{\pi}{32}\left[\frac{e^{4u}-e^{-4u}}{8} - u\right]_0^{\ln(8+\sqrt{65})} \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{32}\left[\frac{e^{4u}-e^{-4u}}{8} - u\right]_0^{\ln 16} = \frac{\pi}{32}\left(\frac{16^4-\frac{1}{16^4}}{8} - \ln 16 - \frac{1-1}{8} + 0\right) \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{32}\left(\frac{16^4}{8} - \ln 16\right) = \pi\left(\frac{16^4}{16^2} - \frac{\ln 16}{32}\right) \approx$$

$$\approx \pi 16^2 = 256\pi \approx 805 \text{ területegység.}$$

8. Határozzuk meg az $y=\ln x$ függvény $y_1=1$ és $y_2=2$ ordinátájú pontjai által határolt ívének az Y-tengely körüli forgatásával keletkező forgásfelületét!

$$y=\ln x; \quad x=e^y.$$

$$F_y = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+x'^2}\,dy, \text{ ahol } x=e^y \text{ és } x' = \frac{dx}{dy} = e^y.$$

$$F_y = 2\pi \int_1^2 e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy.$$

Legyen $e^y=\operatorname{sh} u$, akkor $e^y\,dy=\operatorname{ch} u\,du$.

$$F_y = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\,du = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{ch}^2 u\,du =$$

$$= 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch} 2u+1}{2}\,du = \pi \int_{u_1}^{u_2} (\operatorname{ch} 2u+1)\,du = \pi\left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2}+u\right]_{u_1}^{u_2}.$$

A határokat fejezzük ki u-ban! Mivel $e^y=\operatorname{sh} u$, ezért $u=\operatorname{ar\,sh} e^y=$ $=\ln\left(e^y+\sqrt{e^{2y}+1}\right)$; $y_1=1$, tehát $u_1 = \ln\left(e+\sqrt{e^2+1}\right) \approx \ln(2{,}72+2{,}9) =$ $=\ln 5{,}62 \approx 1{,}73$ és $y_2=2$, vagyis

$$u_2 = \ln\left(e^2+\sqrt{e^4+1}\right) \approx \ln\left(7{,}4+\sqrt{52+1}\right) \approx \ln(7{,}4+7{,}3) \approx 2{,}69.$$

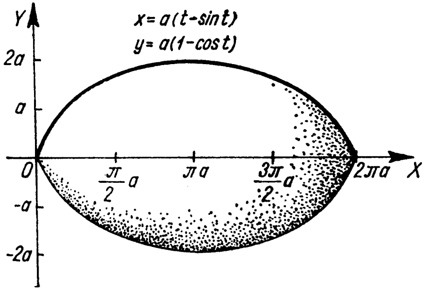
$$F_y = \pi\left[\frac{e^{2u}-e^{-2u}}{4}+u\right]_{1,73}^{2,69} =$$

$$= \pi\left(\frac{e^{5,38}-e^{-5,38}}{4}+2{,}69-\frac{e^{3,46}-e^{-3,46}}{4}-1{,}73\right) \approx$$

$$\approx \pi\left(\frac{218-0{,}0046}{4}+2{,}69-\frac{32-0{,}0313}{4}-1{,}73\right) \approx$$

$$\approx \pi(54{,}5+2{,}69-8-1{,}73) = 47{,}46\pi \approx 148 \text{ területegység.}$$

9. Határozzuk meg a cikloisív X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgásfelület felszínét. Mint tudjuk, az ív két végpontjához tartozó paraméterértékek: $t_1=0$ és $t_2=2\pi$ (58. ábra).



58. ábra

A ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a(t-\sin t); \quad y = a(1-\cos t);$$

$$\dot{x} = a(1-\cos t); \quad \dot{y}=a\sin t;$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = a^2(1-2\cos t+\cos^2 t)+a^2\sin^2 t =$$

$$= a^2-2a^2\cos t+a^2(\cos^2 t+\sin^2 t) = 2a^2-2a^2\cos t =$$

$$= 2a^2(1-\cos t).$$

$$F_x = 2\pi \int_0^2 a(1-\cos t)\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt.$$

Mivel

$$1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2},$$

ezért

$$F_x = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\,dt.$$

Az integrandust átalakítjuk:

$$\sin^3\frac{t}{2} = \sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} = \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2} =$$

$$= \sin\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}.$$

$$F = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= 8\pi a^2 \left[-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 8\pi a^2 \left(-2 \cos \pi + \frac{2}{3} \cos^3 \pi + 2 \cos 0 - \frac{2}{3} \cos^3 0\right) =$$

$$= 8\pi a^2 \left(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3}\right) = 8\pi a^2 \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{3} a^2.$$

10. Legyen egy kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 6 \cos t; \quad y = 6 \sin t.$$

Határozzuk meg az X-tengely feletti félkörív X-tengely körüli forgatásakor keletkező gömb felszínét!

A félkörív határpontjaihoz tartozó paraméterértékek:

$$t_1 = 0; \quad t_2 = \pi.$$

$$F_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

$$\dot{x} = -6 \sin t; \quad y = 6 \cos t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 36 \sin^2 t + 36 \cos^2 t = 36.$$

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} 6 \sin t \cdot 6\, dt = 72\pi \int_0^{\pi} \sin t\, dt = 72\pi [-\cos t]_0^{\pi} =$$

$$= 72\pi(1+1) = 144\pi.$$

Valóban a 6 egység sugarú gömb felszíne $F = 4\pi \cdot 36 = 144\pi$ területegység.

11. Határozzuk meg a $t_1 = 0$ és $t_2 = \frac{\pi}{2}$ paraméterértékekkel határolt asztroisív X-tengely körüli forgatásával kapott forgásfelület felszínét!

Az asztrois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t.$$

A deriváltak:

$$\dot{x} = 3a \cos^2 t(-\sin t) = -3a \cos^2 t \sin t;$$

$$\dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) =$$

$$= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t.$$

$$F_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t}\, dt = 2\pi\, 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt.$$

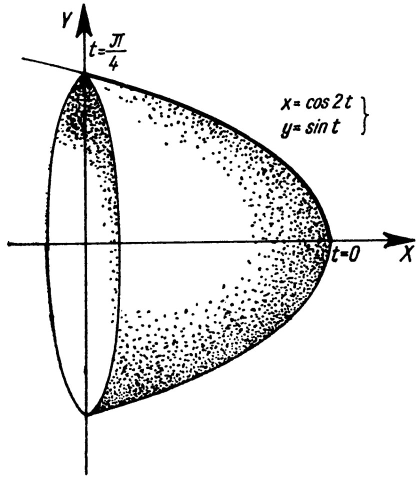
$$F_x = 6a^2\pi \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6a^2 \pi}{5} \left(\sin^5 \frac{\pi}{2} - \sin^5 0\right) =$$

$$= \frac{6a^2 \pi}{5} (1 - 0) = \frac{6a^2 \pi}{5} \text{ területegység.}$$

12. Határozzuk meg az $x = \cos 2t$, $y = \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe $t_1 = 0$ és $t_2 = \frac{\pi}{4}$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívének az X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest palástjának felszínét (59. ábra)!

$$x = \cos 2t; \quad y = \sin t.$$

$$\dot{x} = -2 \sin 2t; \quad \dot{y} = \cos t.$$



59. ábra

$$F_x = 2\pi \int_0^{\pi/4} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin t\sqrt{4\sin^2 2t+\cos^2 t}\, dt.$$

A gyökjel alatti kifejezést átalakítjuk:

$$4\sin^2 2t+\cos^2 t = 4\cdot 4\sin^2 t\cos^2 t+\cos^2 t = \cos^2 t\,(16\sin^2 t+1).$$

$$F_x = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin t\cos t\sqrt{16\sin^2 t+1}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_0^{\pi/4} 32\sin t\cos t\,(16\sin^2 t+1)^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Az integrandus $f^n(t)f'(t)$ alakú, ezért

$$F_x = \frac{\pi}{16}\left[\frac{(16\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{24}\left[\left(16\cdot\frac{1}{2}+1\right)^{\frac{3}{2}}-(0+1)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{24}(27-1) = \frac{26\pi}{24} \approx 3{,}4 \text{ területegység.}$$

13. Tekintsük az $x=5\cos t$, $y=4\sin t$ egyenletrendszerrel megadott ellipszisnek a $t_1=0$ és $t_2=\frac{\pi}{2}$ paraméterértékekhez tartozó két pontját. Forgassuk meg a két pont közötti ívét az X-tengely körül és számítsuk ki az így keletkezett forgásfelület területét!

$$x=5\cos t;\quad y=4\sin t.$$

$$\dot{x} = -5\sin t;\quad \dot{y}=4\cos t.$$

$$F_x = 2\pi\int_0^{\pi/2} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt = 2\pi\int_0^{\pi/2} 4\sin t\sqrt{25\sin^2 t+16\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 8\pi\int_0^{\pi/2} \sin t\sqrt{25(1-\cos^2 t)+16\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 8\pi\int_0^{\pi/2} \sin t\sqrt{25-9\cos^2 t}\, dt = 8\pi\int_0^{\pi/2} 5\sin t\sqrt{1-\left(\frac{3\cos t}{5}\right)^2}dt.$$

Most legyen $u=\frac{3\cos t}{5}$; ekkor $du = -\frac{3}{5}\sin t\, dt$. Ennek megfelelően alakítjuk át az integrandust.

$$F_x = 40\pi\left(-\frac{5}{3}\right)\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{3}{5}\sin t\right)\sqrt{1-\left(\frac{3\cos t}{5}\right)^2}\, dt =$$

$$= -\frac{200\pi}{3}\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1-u^2}\, du.$$

Ismét helyettesítünk. Legyen $u=\sin z$, ekkor $du=\cos z\, dz$.

$$F_x = -\frac{200\pi}{3}\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{1-\sin^2 z}\cos z\, dz =$$

$$= -\frac{200\pi}{3}\int_{z_1}^{z_2}\cos^2 z\, dz = -\frac{200\pi}{3}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\cos 2z+1}{2}\, dz =$$

$$= -\frac{100\pi}{3}\int_{z_1}^{z_2}(\cos 2z+1)\, dz = -\frac{100\pi}{3}\left[\frac{\sin 2z}{2}+z\right]_{z_1}^{z_2} =$$

$$= -\frac{100\pi}{3}[\sin z\cos z+z]_{z_1}^{z_2}.$$

$$z = \arcsin u = \arcsin\frac{3}{5}\cos t,$$

ha $t=0$, akkor $\cos t=1$ és $z_1=\arcsin\frac{3}{5} = \arcsin 0{,}6\approx 0{,}645$ (radián);

$$\sin z_1 = \frac{3}{5} \text{ és } \cos z_1 = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5},$$

ha $t=\frac{\pi}{2}$, akkor $\cos t=0$, $z_2=\arcsin 0=0$; $\sin z_2=0$, $\cos z_2=1$.

$$F_x = \frac{100\pi}{3}\left[\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+0{,}645\right] = \frac{100\pi}{3}\left(\frac{12}{25}+0{,}645\right) =$$

$$= \frac{100\pi}{3}(0{,}48+0{,}645) = \frac{100\pi\, 1{,}125}{3} \approx 118 \text{ területegység.}$$

14. Határozzuk meg az $x=2t^2$, $y=3t+1$ paraméteres egyenletrendszerrel adott parabola $t_1=1$ és $t_2=3$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívének X-tengely körüli forgatásakor keletkező felület felszínét!

$$x=2t^2;\quad y=3t+1.$$

$$\dot{x}=4t;\quad \dot{y}=3.$$

$$F_x=2\pi\int_1^3 y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=2\pi\int_1^3(3t+1)\sqrt{16t^2+9}\,dt=$$

$$=2\pi\int_1^3 3t\sqrt{16t^2+9}\,dt+2\pi\int_1^3\sqrt{16t^2+9}\,dt=I_1+I_2.$$

A két integrált külön-külön számítjuk ki.

$$I_1=2\pi\int_1^3 3t\sqrt{16t^2+9}\,dt=\frac{6\pi}{32}\int_1^3 32t(16t^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{3\pi}{16}\left[\frac{2}{3}(16t^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=\frac{\pi}{8}(\sqrt{153^3}-\sqrt{25^3})=$$

$$=\frac{\pi}{8}(153\sqrt{153}-125)\approx\frac{\pi}{8}(153\cdot 12{,}4-125)\approx\frac{\pi\cdot 1775}{8}\approx 695.$$

$$I_2=2\pi\int_1^3\sqrt{16t^2+9}\,dt=2\pi\int_1^3 3\sqrt{\frac{16t^2}{9}+1}\,dt.$$

A $\dfrac{4t}{3}=\operatorname{sh}u$ függvényt helyettesítjük.

$$t=\frac{3}{4}\operatorname{sh}u;\quad dt=\frac{3}{4}\operatorname{ch}u\,du.$$

Az új határokat csak jelöljük:

$$I_2=6\pi\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\operatorname{sh}^2u+1}\,\frac{3}{4}\operatorname{ch}u\,du=\frac{9\pi}{2}\int_{u_1}^{u_2}\operatorname{ch}^2u\,du=$$

$$=\frac{9\pi}{2}\int_{u_1}^{u_2}\frac{\operatorname{ch}2u+1}{2}\,du=\frac{9\pi}{4}\int_{u_1}^{u_2}(\operatorname{ch}2u+1)\,du=$$

$$=\frac{9\pi}{4}\left[\frac{\operatorname{sh}2u}{2}+u\right]_{u_1}^{u_2}=\frac{9\pi}{4}[\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u+u]_{u_1}^{u_2}.$$

Mivel $u=\operatorname{ar\,sh}\dfrac{4}{3}t=\ln\left|\dfrac{4}{3}t+\sqrt{\dfrac{16}{9}t^2+1}\right|$, tehát $t_1=1$-re

$u_1=\ln\left(\dfrac{4}{3}+\sqrt{\dfrac{16}{9}+1}\right)=\ln\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{3}\right)=\ln 3\approx 1{,}1;$ $\operatorname{sh}u_1=\dfrac{4}{3}$; $\operatorname{ch}u_1=\dfrac{5}{3}$.
$t_2=3$-ra pedig $u_2=\ln(4+\sqrt{16+1})\approx\ln 8{,}12\approx 2{,}1$; $\operatorname{sh}u_2=4$; $\operatorname{ch}u_2=$ $=\sqrt{17}\approx 4{,}12$.

$$I_2=\frac{9\pi}{4}[\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u+u]_{1,1}^{2,1}=\frac{9\pi}{4}\left(4\cdot\sqrt{17}+2{,}1-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}-1{,}1\right)\approx$$

$$\approx 7{,}06(16{,}5+2{,}1-2{,}22-1{,}1)=7{,}06(18{,}6-3{,}32)=$$

$$=7{,}06\cdot 15{,}28\approx 108.$$

Így a keresett felszín

$$F_x=I_1+I_2=695+108=803 \text{ területegység.}$$

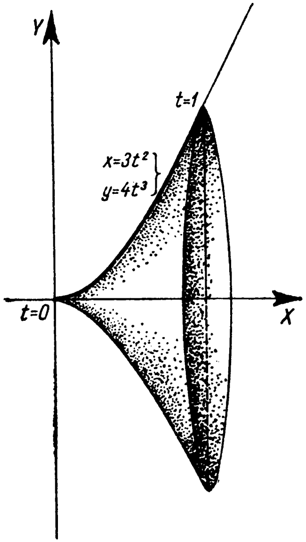
15. Határozzuk meg az $x=3t^2$, $y=4t^3$ egyenletrendszerrel adott görbe $t_1=0$ és $t_2=1$ paraméterértékekkel meghatározott ívének X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgásfelület felszínét (60. ábra)!

$$x=3t^2;\quad y=4t^3.$$

$$\dot{x}=6t;\quad \dot{y}=12t^2.$$

$$F_x=2\pi\int_0^1 y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=2\pi\int_0^1 4t^3\sqrt{36t^2+144t^4}\,dt=$$

$$=48\pi\int_0^1 t^4\sqrt{1+4t^2}\,dt.$$



60. ábra

Legyen $2t = \operatorname{sh} u$; $t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u$; $dt = \frac{1}{2} \operatorname{ch} u\, du$. Ekkor

$$F_x = 48\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{16} \operatorname{sh}^4 u \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\, \frac{1}{2} \operatorname{ch} u\, du =$$

$$= \frac{3\pi}{2} \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh}^4 u \operatorname{ch}^2 u\, du = \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} 4 \operatorname{sh}^2 u \,\mathrm{eh}^2 u \operatorname{sh}^2 u\, du =$$

$$= \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh}^2 2u \operatorname{sh}^2 u\, du.$$

Áttérünk az exponeneiális alakra, elvégezzük a kijelölt műveleteket és integrálunk!

$$F_x = \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{e^{2u}-e^{-2u}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}\right)^2 du =$$

$$= \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{4u}-2+e^{-4u}}{4} \cdot \frac{e^{2u}-2+e^{-2u}}{4}\, du =$$

$$= \frac{3\pi}{128} \int_{u_1}^{u_2} (e^{6u}-2e^{2u}+e^{-2u}-2e^{4u}+4-2e^{-4u}+e^{2u}-2e^{-2u}+e^{-6u})\, du =$$

$$= \frac{3\pi}{128} \int_{u_1}^{u_2} (e^{6u}-2e^{4u}-e^{2u}+4-e^{-2u}-2e^{-4u}+e^{-6u})\, du =$$

$$= \frac{3\pi}{128} \left[\frac{e^{6u}}{6} - \frac{2e^{4u}}{4} - \frac{e^{2u}}{2} + 4u + \frac{e^{-2u}}{2} + \frac{2e^{-4u}}{4} - \frac{e^{-6u}}{6}\right]_{u_1}^{u_2} =$$

$$= \frac{3\pi}{128 \cdot 12} [2e^{6u} - 6e^{4u} - 6e^{2u} + 48u + 6e^{-2u} + 6e^{-4u} - 2e^{-6u}]_{u_1}^{u_2}.$$

Mivel $2t = \operatorname{sh} u$, ezért $u = \operatorname{ar\,sh} 2t = \ln\left(2t + \sqrt{4t^2+1}\right)$;

ha $t_1 = 0$, akkor $u_1 = \ln 1 = 0$;

ha $t_2 = 1$, akkor $u_2 = \ln(2+\sqrt{5}) \approx \ln(2+2{,}24) = \ln 4{,}24 \approx 1{,}44$.

$$F_x = \frac{\pi}{512}\Bigg[2(2+\sqrt{5})^6 - 6(2+\sqrt{5})^4 - 6(2+\sqrt{5})^2 + 48 \cdot 1{,}44 +$$

$$+6\,\frac{6}{(2+\sqrt{5})^2} + \frac{6}{(2+\sqrt{5})^4} - \frac{2}{(2+\sqrt{5})^6} -$$

$$-2+6+6-0-6-6+2\Bigg].$$

Részletszámítások: $(2+\sqrt{5})^6 \approx 4{,}24^6 \approx 5800$; $(2+\sqrt{5})^4 \approx 4{,}24^4 \approx 325$;

$(2+\sqrt{5})^2 \approx 4{,}24^2 \approx 18$; $\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2} \approx 0$; $\frac{1}{(2+\sqrt{5})^4} \approx 0$; $\frac{1}{(2+\sqrt{5})^6} \approx 0$.

$$F_x = \frac{\pi}{512}(2 \cdot 5800 - 6 \cdot 325 - 6 \cdot 18 + 48 \cdot 1{,}44) \approx$$

$$\approx 0{,}0061(11600 - 1950 - 108 + 69{,}2) =$$

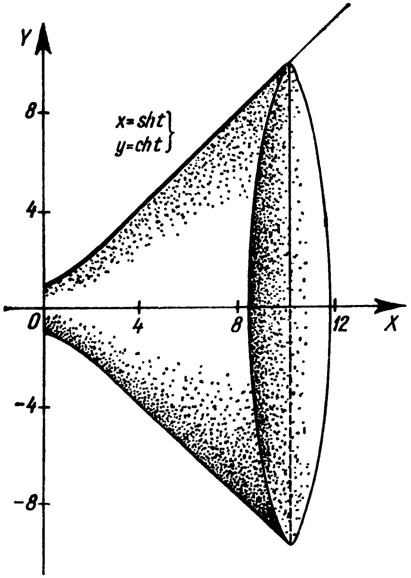
$$= 0{,}0061(11669{,}2 - 2058) \approx 0{,}0061(11670 - 2058) =$$

$$= 0{,}0061 \cdot 9612 \approx 58{,}5 \text{ területegység.}$$

16. Legyen adott az $x=\operatorname{sh} t$, $y=\operatorname{ch} t$ függvény. Forgassuk a $t_1=0$ és $t_2=3$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívét az X-tengely körül! Határozzuk meg az így keletkező forgásfelület felszínét (61. ábra)!

$$x=\operatorname{sh} t;\quad y=\operatorname{ch} t.$$

$$\dot{x}=\operatorname{ch} t;\quad \dot{y}=\operatorname{sh} t.$$



61. ábra

$$F_x=2\pi\int_0^3 y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=2\pi\int_0^3 \operatorname{ch} t\sqrt{\operatorname{ch}^2 t+\operatorname{sh}^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^3 \operatorname{ch} t\sqrt{1+2\operatorname{sh}^2 t}\,dt.$$

Legyen $u=\sqrt{2}\operatorname{sh} t$, $du=\sqrt{2}\operatorname{ch} t\,dt$. Így

$$F_x=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^3 \sqrt{2}\operatorname{ch} t\sqrt{1+2\operatorname{sh}^2 t}\,dt=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{u_2}^{u_1}\sqrt{1+u^2}\,du.$$

Újabb helyettesítéssel az irracionális integrandust átalakítjuk sh z és ch z racionális kifejezésévé,

$$u=\operatorname{sh} z;\quad du=\operatorname{ch} z\,dz.$$

$$F_x=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 z}\operatorname{ch} z\,dz=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{z_1}^{z_2}\operatorname{ch}^2 z\,dz=$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\operatorname{ch} 2z+1}{2}\,dz=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_{z_1}^{z_2}(\operatorname{ch} 2z+1)\,dz=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{\operatorname{sh} 2z}{2}+z\right]_{z_1}^{z_2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}[\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z+z]_{z_1}^{z_2}.$$

Most meghatározzuk z_1 és z_2 értékét. Az eredeti határok: $t_1=0$ és $t_2=3$. Mivel $u=\sqrt{2}\operatorname{sh} t$, ezért $u_1=\sqrt{2}\operatorname{sh} 0=0$ és $u_2=\sqrt{2}\operatorname{sh} 3=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^3-e^{-3})\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\left(20-\frac{1}{20}\right)\approx 10\sqrt{2}\approx 14{,}1.$$

$$u=\operatorname{sh} z;\text{ ebből } z=\operatorname{ar\,sh} u=\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right),$$

ezért $z_1=\ln 1=0$ és $z_2=\ln\left(10\sqrt{2}+\sqrt{201}\right)\approx\ln 20\sqrt{2}\approx\ln 28{,}2\approx 3{,}34.$

$$F_x=\frac{\pi}{\sqrt{2}}[\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z+z]_0^{3,34}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{\operatorname{sh} 2z}{2}+z\right]_0^{3,34}=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{\operatorname{sh} 6{,}68}{2}+3{,}34-\operatorname{sh} 0-0\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{6,68}-e^{-6,68}}{4}+3{,}34\right)\approx$$

$$\approx\frac{\pi}{2}\left(\frac{750-\frac{1}{750}}{4}+3{,}34\right)=\frac{3{,}14\cdot 1{,}41}{2}\cdot 190{,}84\approx 422 \text{ területegység.}$$

4. Súlypontszámítás

Az $y=f(x)$ egyenlettel megadható görbe a és b abszcisszájú pontok által határolt ívének súlypontját $S(x_s, y_s)$-sel jelölve,

$$x_s=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx};\quad y_s=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Ha egy sík lemezt határoló vonalak: az $y=f(x)$ függvény görbéje, az a és b abszcisszájú pontokhoz tartozó ordináták, valamint az X-tengely, akkor a lemez P_s súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \quad \text{és} \quad y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

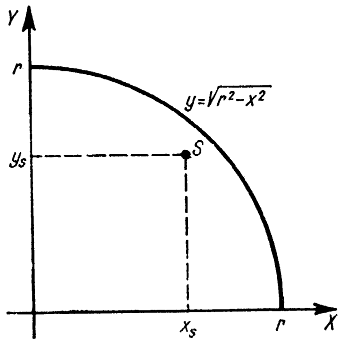
Ha az $y=f(x)$ függvény görbéjét az X-tengely körül forgatjuk, akkor egy olyan forgásfelületet kapunk, amely által határolt forgástest súlypontja a szimmetria miatt az X-tengelyre esik, tehát $y_s=0$. A súlypont abszcisszája:

$$x_s = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg a negyedkörív súlypontját (62. ábra)!

$$y = \sqrt{r^2-x^2} = (r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}; \quad y' = \frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$



62. ábra

Az integrálás határai: 0 és r. Az egyes integrálokat külön-külön számítjuk ki.

$$\int_0^r x\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^r x\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^r x\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{rx}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx =$$

$$= \left[-r\sqrt{r^2-x^2}\right]_0^r = 0+r^2 = r^2.$$

$$\int_0^r \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,dx =$$

$$= \left[r \arcsin \frac{x}{r}\right]_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{r\pi}{2}.$$

A súlypont abszcisszája tehát:

$$x_s = \frac{\int_0^r x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_0^r \sqrt{1+y'^2}\,dx} = \frac{r^2}{\frac{r\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}.$$

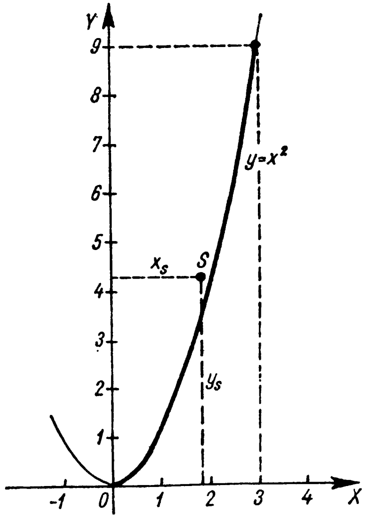
A szimmetria miatt a súlypont ordinátája is ennyi, vagyis $y_s = \frac{2r}{\pi}$.

2. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény $0 \leq x \leq 3$ szakasz felett levő ívének súlypontját (63. ábra)! Először most a nevező értékét határozzuk meg:

$$\int_0^3 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át.

$$2x = \operatorname{sh} t; \quad 2dx = \operatorname{ch} t\,dt; \quad dx = \frac{\operatorname{ch} t}{2}\,dt.$$



63. ábra

Az új határokat csak jelöljük.

$$\int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}\,\frac{\mathrm{ch}\,t}{2}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{ch}^2 t}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{ch}\,2t+1)\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{sh}\,2t}{2}+t\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Most visszatérünk az x változóra.

$$\mathrm{sh}\,2t = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t = 2\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} = 2\cdot 2x\sqrt{1+4x^2};$$

$$t = \mathrm{ar\,sh}\,2x = \ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right).$$

Ezen átalakításokat figyelembe véve a keresett integrál:

$$\int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1+4x^2}+\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[6\sqrt{37}+\ln(6+\sqrt{37})-0-0\right] \approx \frac{1}{4}\left[6\cdot 6{,}1+\ln(6+6{,}1)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(36{,}6+\ln 12{,}1) \approx \frac{1}{4}(36{,}6+2{,}5) \approx 9{,}8.$$

A súlypont koordinátáinak kiszámításához még két integrál értékét kell kiszámítanunk. Az egyik

$$\int_0^3 x\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^3 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_0^3 x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Az integrandus könnyen $f^n(x)f'(x)$ alakúvá alakítható:

$$\frac{1}{8}\int_0^3 8x(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\sqrt{37^3}-1\right) \approx \frac{224}{12} \approx 18{,}65.$$

A másik szükséges integrál:

$$\int_0^3 y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^3 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Az integrált helyettesítéssel számítjuk ki:

Legyen $2x=\mathrm{sh}\,t$; ekkor $dx=\frac{\mathrm{ch}\,t}{2}\,dt$. Az új határokat egyelőre csak jelöljük.

$$\int_0^3 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{sh}^2 t}{4}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}\,\frac{\mathrm{ch}\,t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t\,dt = \frac{1}{8}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{sh}^2 2t}{4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{32}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{ch}\,4t-1}{2}\,dt = \frac{1}{64}\left[\frac{\mathrm{sh}\,4t}{4}-t\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Most meghatározzuk t_1 és t_2 értékét, majd behelyettesítünk.

Mivel $2x=\operatorname{sh} t$, ezért $t=\operatorname{ar\,sh} 2x=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$. Ha $x_1=0$, akkor $t_1=\ln 1=0$, ha $x_2=3$, akkor $t_2=\ln\left(6+\sqrt{37}\right)\approx \ln 12{,}08\approx 2{,}48$. Így

$$\frac{1}{64}\left[\frac{\operatorname{sh} 4t}{4}-t\right]_{t_1}^{t_2}=\frac{1}{64}\left[\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{8}-t\right]_0^{\ln(6+\sqrt{37})}=$$

$$=\frac{1}{64}\left[\frac{(6+\sqrt{37})^4-\dfrac{1}{(6+\sqrt{37})^4}}{8}-\ln\left(6+\sqrt{37}\right)-0+0\right]\approx$$

$$\approx\frac{1}{64}\left(\frac{12^4-\dfrac{1}{12^4}}{8}-2{,}48\right)\approx\frac{12^4}{64\cdot 8}=\frac{3^4\cdot 4^4}{4^4\cdot 2}=\frac{81}{2}=40{,}5.$$

A vonaldarab súlypontjának abszcisszája tehát

$$x_s=\frac{\int_0^3 x\sqrt{1+4x^2}\,dx}{\int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx}=\frac{18{,}65}{9{,}8}=1{,}91.$$

A súlypont y ordinátája:

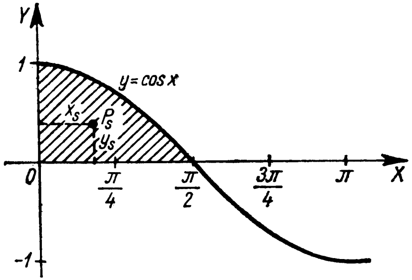
$$y_s=\frac{\int_0^3 y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_0^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx}=\frac{40{,}5}{9{,}8}\approx 4{,}13.$$

Tehát a súlypont: $S(1{,}91;\,4{,}13)$.

3. Határozzuk meg az $y=\cos x$ függvény $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumbeli görbeszakasza, valamint az O abszcisszájú ponthoz tartozó ordináta és az X-tengely által határolt lemez súlypontját (64. ábra):

$$x_s=\frac{\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx}=?$$

A számláló értékét parciális integrálással határozzuk meg.



64. ábra

Legyen $u=x$, és $v'=\cos x$; így $u'=1$, és $v=\sin x$.

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=$$

$$=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0+0-1=\frac{\pi}{2}-1.$$

A nevező értéke:

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Tehát a súlypont abszcisszája:

$$x_s=\frac{\dfrac{\pi}{2}-1}{1}=\frac{\pi}{2}-1\approx 1{,}57-1=0{,}57.$$

A súlypont ordinátája:

$$y_s=\frac{\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx}{\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

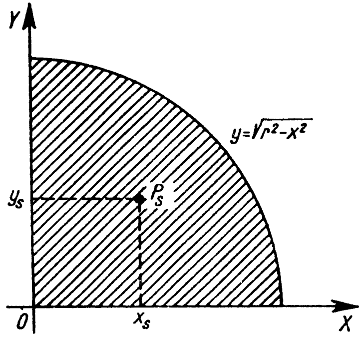
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin \pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}393.$$

Vagyis a súlypont P_s (0,57; 0,393).

4. Határozzuk meg a negyedkörlemez súlypontjának koordinátáit (65. ábra)!

$$y = \sqrt{r^2-x^2}.$$

A szimmetria miatt a súlypont az $y=x$ (45°-os) egyenesen van, ezért koordinátái megegyeznek. Elegendő tehát csak az egyiket meghatározni, mégpedig az egyszerűbb módon számíthatót.



65. ábra

A súlypont ordinátája:

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_0^r (r^2-x^2)\,dx}{\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx} = ?$$

$$\frac{1}{2}\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{r^3}{3}.$$

Mivel $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$ éppen a körnegyed területe, vagyis $\frac{r^2\pi}{4}$, ezért

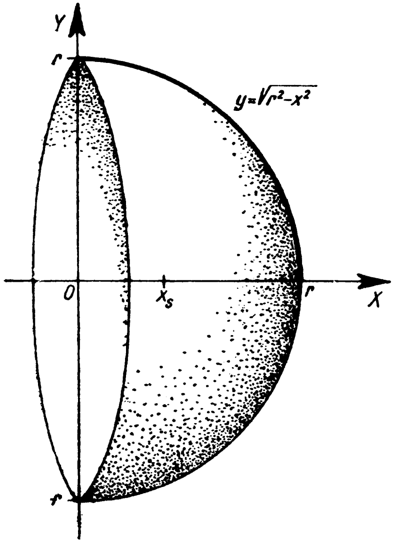
$$y_s = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{r^2\pi}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Tehát a súlypont $P_s\left(\frac{4r}{3\pi};\ \frac{4r}{3\pi}\right)$.

5. Határozzuk meg a félgömb súlypontját (66. ábra)! Az origó középpontú félkör egyenlete: $y = \sqrt{r^2-x^2}$.

$$x_s = \frac{\int_0^r x(r^2-x^2)\,dx}{\int_0^r (r^2-x^2)\,dx};$$

$$\int_0^r x(r^2-x^2)\,dx = \int_0^r (r^2x-x^3)\,dx = \left[r^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{r^4}{2}-\frac{r^4}{4} = \frac{r^4}{4};$$

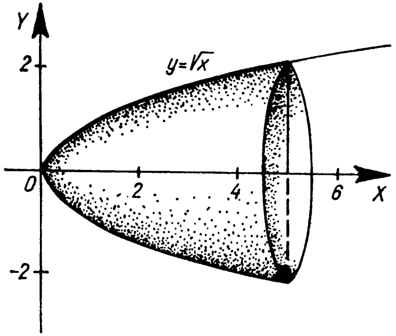


66. ábra

$$\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = \left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r = r^3-\frac{r^3}{3} = \frac{2r^3}{3}.$$

$$x_s = \frac{\dfrac{r^4}{4}}{\dfrac{2r^3}{3}} = \frac{3r}{8}.$$

6. Határozzuk meg az $y=\sqrt{x}$ függvény $0 \leq x \leq 5$ szakaszának X-tengely körüli forgatásakor keletkező test súlypontját (67. ábra)!



67. ábra

A súlypont abszcisszája:

$$x_s = \frac{\int\limits_0^5 x\,x\,dx}{\int\limits_0^5 x\,dx} = \frac{\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^5}{\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^5} = \frac{\dfrac{125}{3}}{\dfrac{25}{2}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

7. Határozzuk meg az $y=\sin x$ függvény $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ szakaszának X-tengely körüli forgatásával kapható test súlypontját!

$$x_s = \frac{\int\limits_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx}{\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx}.$$

A számláló értékének kiszámítása:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} x\,\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cos 2x\,dx.$$

A második integrál értékét parciális integrálással számítjuk ki. Legyen $u=x$, és $v'=\cos 2x$, vagyis $u'=1$, és $v=\frac{1}{2}\sin 2x$.

$$\int_0^{\pi/2} x\cos 2x\,dx = \left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx =$$

$$= (0-0)-\left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos\pi}{4}-\frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{2}.$$

A számláló tehát

$$\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4},$$

a nevező pedig

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

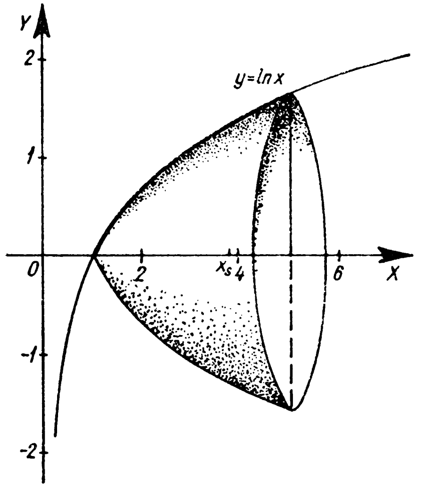
A súlypont abszcisszája

$$x_s = \frac{\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{1}{4}}{\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2+4}{4\pi} \approx \frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi} \approx 0{,}785+0{,}318 = 1{,}103.$$

8. Határozzuk meg az $y=\ln x$ függvény $1\leq x\leq 5$ ívének X-tengely körüli forgatásával keletkező forgástest súlypontját (68. ábra)!

$$x_s=\frac{\int_1^5 x\ln^2 x\,dx}{\int_1^5 \ln^2 x\,dx}.$$

$\int_1^5 x\ln^2 x\,dx=?$ Az integrált a parciális integrálás módszerével határozzuk meg.



68. ábra

Legyen $u=\ln^2 x$ és $v'=x$, vagyis $u'=\dfrac{2\ln x}{x}$ és $v=\dfrac{x^2}{2}$.

$$\int_1^5 x\ln^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right]_1^5-\int_1^5 x\ln x\,dx.$$

Ismét parciálisan integrálunk, legyen most $u_1=\ln x$ és $v_1'=x$, vagyis $u_1'=\dfrac{1}{x}$ és $v_1=\dfrac{x^2}{2}$.

$$\int_1^5 x\ln^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right]_1^5-\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^5+\int_1^5\frac{x}{2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right]_1^5-\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^5+\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^5=$$

$$=12{,}5\ln^2 5-0-12{,}5\ln 5+0+6{,}25-0{,}25=$$

$$=12{,}5(\ln^2 5-\ln 5)+6\approx 12{,}5(1{,}61^2-1{,}61)+6\approx$$

$$\approx 12{,}5(2{,}6-1{,}6)+6=18{,}5.$$

A nevező kiszámítása:

$$\int_1^5 \ln^2 x\,dx=\int_1^5 1\ln^2 x\,dx.$$

Legyen $u'=1$; és $v=\ln^2 x$; tehát $u=x$ és $v'=\dfrac{2\ln x}{x}$.

$$\int_1^5 1\ln^2 x\,dx=[x\ln^2 x]_1^5-\int_1^5 2\ln x\,dx.$$

Ismét parciálisan integrálunk: $u_1'=2$; $u_1=2x$; $v_1=\ln x$; $v_1'=\dfrac{1}{x}$.

$$\int_1^5 2\ln x\,dx=[2x\ln x]_1^5-\int_1^5 2\,dx=[2x\ln x]_1^5-[2x]_1^5.$$

Így

$$\int_1^5 \ln^2 x\,dx=[x\ln^2 x]_1^5-[2x\ln x]_1^5+[2x]_1^5=$$

$$=(5\ln^2 5-0)-(10\ln 5-0)+(10-2)\approx$$

$$\approx 5\cdot 1{,}61^2-10\cdot 1{,}61+8\approx 5\cdot 2{,}6-16{,}1+8=21-16{,}1=4{,}9.$$

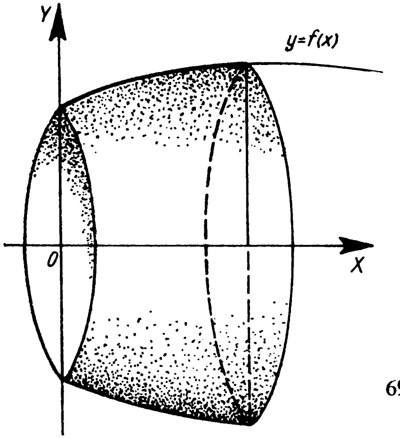
A keletkező forgástest súlypontjának x koordinátája tehát

$$x_s\approx\frac{18{,}5}{4{,}9}\approx 3{,}78.$$

5. Térfogatszámítás

Ha egy test X-tengelyre merőleges metszetének területe mint az x abszcissza függvénye $T(x)$, akkor a test $[a, b]$ szakaszba eső darabjának térfogata

$$V(a, b) = \int_a^b T(x)\, dx.$$



69. ábra

Ha a test valamely $y=f(x)$ görbe x_1 és x_2 abszcisszák által határolt ívének X-tengely körüli forgatása révén keletkezik (69. ábra), vagyis forgástest, akkor — tekintve, hogy keresztmetszete minden x-re $f(x)$ sugarú kör —

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx.$$

Ha az $y=f(x)$ függvény görbéjét az Y-tengely körül forgatjuk, akkor az így keletkező forgástest y_1 és y_2 ordinátájú pontok által határolt részének térfogata:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y)\, dy,$$

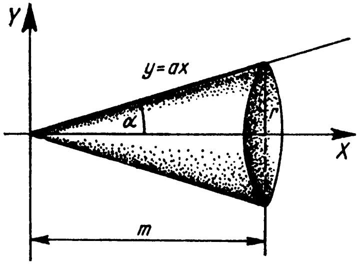
ahol $x=x(y)$ az $y=f(x)$ függvény inverze.

Ha a függvény $x=x(t)$, $y=y(t)$ paraméteres alakban adott, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékek által határolt görbeszakasz X-tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát az alábbi integrál adja:

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t)\, \dot{x}(t)\, dt.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=ax$ egyenes X-tengely körüli forgatásával nyert m magasságú kúp térfogatát (70. ábra)!



70. ábra

Mivel $a=\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{r}{m}$, tehát

$$V_x = \pi \int_0^m \frac{r^2}{m^2} x^2\, dx = \frac{\pi r^2}{m^2} \int_0^m x^2\, dx = \frac{r^2\pi}{m^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m =$$

$$= \frac{r^2\pi}{m^2}\left(\frac{m^3}{3}-0\right) = \frac{r^2\pi m}{3}.$$

Valóban a kúp térfogatképletét kaptuk!

2. Határozzuk meg az $y=\sin x$ függvény görbéjének X-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha a határok 0 és π.

$$V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi =$$

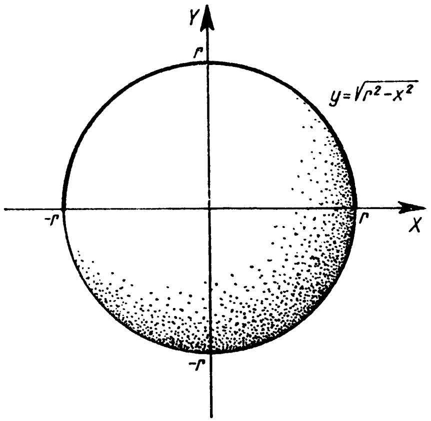
$$= \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

3. Határozzuk meg az $y = \sqrt{r^2-x^2}$ egyenletű félkör X-tengely körüli forgatása révén keletkező gömb térfogatát (71. ábra)!

$$V_x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)\,dx = \pi \left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

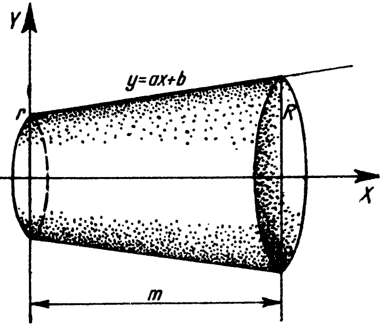
$$= \pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right) = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Mint látjuk, valóban a gömb térfogatképlete adódott.



71. ábra

4. Határozzuk meg az $y = ax+b$ egyenes X-tengely körüli forgatásakor a $[0, m]$ szakaszon keletkező csonkakúp térfogatát (72. ábra)!



72. ábra

A csonkakúp R sugarú alapkörére $x=m$, tehát $R = am+b$; r sugarú fedőkörére $x=0$, tehát $r=b$; ezért $a=\dfrac{R-r}{m}$ és így

$$V_x = \pi \int_0^m y^2\,dx = \pi \int_0^m \left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^2 dx =$$

$$= \pi\left[\frac{m}{R-r}\,\frac{\left(\frac{R-r}{m}x+r\right)^3}{3}\right]_0^m = \frac{m\pi}{3(R-r)}\left[\left(\frac{R-r}{m}m+r\right)^3-r^3\right] =$$

$$= \frac{m\pi}{3(R-r)}(R^3-r^3) = \frac{m\pi}{3(R-r)}(R-r)(R^2+Rr+r^2) =$$

$$= \frac{m\pi}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

5. Határozzuk meg az $y=\operatorname{sh} x$ függvény X-tengely körüli forgatásakor a $0\leqq x\leqq 4$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát!

$$V_x = \pi\int_0^4 \operatorname{sh}^2 x\,dx = \pi\int_0^4 \frac{\operatorname{ch} 2x-1}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{2}-x\right]_0^4 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} 8}{2}-4-0\right) \approx$$

$$\approx 1{,}57\left(\frac{e^8-e^{-8}}{4}-4\right) \approx 1{,}57\left(\frac{3000-\frac{1}{3000}}{4}-4\right) \approx$$

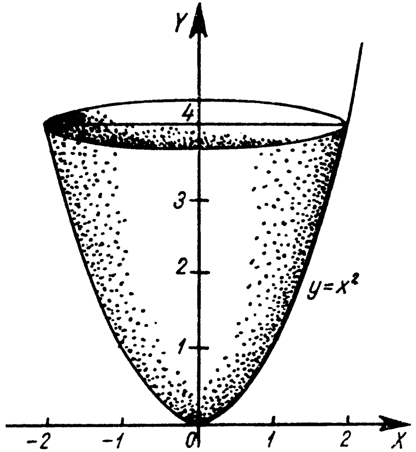
$$\approx \frac{1{,}57\cdot 3000}{4} \approx 1180.$$

6. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény X-tengely körüli forgatása révén a $0\leqq x\leqq 5$ szakaszon keletkező test térfogatát!

$$V_x = \pi\int_0^5 x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^5 = \pi(5^4-0) = 625\pi \approx 1960.$$

7. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény görbéjének Y-tengely körüli forgatása révén a $0\leqq y\leqq 4$ szakaszon keletkező test térfogatát (73. ábra)!

$$V_y = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2(y)\,dy.$$



73. ábra

Az $x(y)$ jelölés szerint az x-et kell megadnunk mint az y függvényét. Példánkban $x=\sqrt{y}$ (ha az első negyedbe eső ágat választjuk).

$$V_y = \pi \int_0^4 y\,dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = \pi(8-0) = 8\pi \approx 25{,}12 \text{ térfogategység.}$$

8. Határozzuk meg az $y=\operatorname{ch} x$ függvény görbéjének X-tengely körüli forgatásakor a $0 \leqq x \leqq 3$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát!

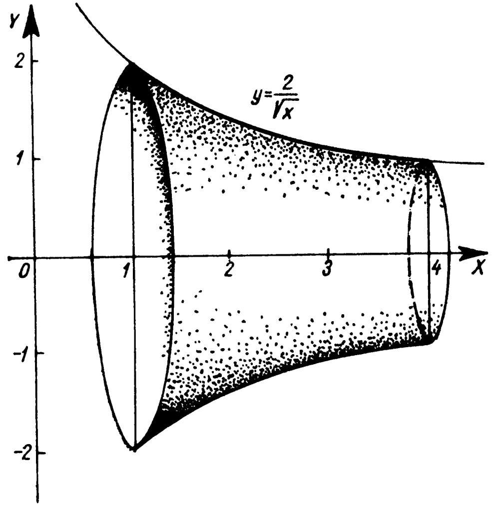
$$V_x = \pi \int_0^3 y^2\,dx = \pi \int_0^3 \operatorname{ch}^2 x\,dx = \pi \int_0^3 \frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2}\,dx =$$

$$= \pi \left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^3 = \pi \left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 6 + \frac{3}{2} - 0\right).$$

$$\operatorname{sh} 6 = \frac{e^6 - e^{-6}}{2} \approx \frac{e^6}{2} = \frac{400}{2} = 200.$$

$$V_x = \pi \left(\frac{200}{4} + 1{,}5\right) \approx 50\pi \approx 157 \text{ térfogategység.}$$

9. Határozzuk meg az $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ függvény görbéjének X-tengely körüli forgatásakor az $1 \leqq x \leqq 4$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát (74. ábra)!



74. ábra

$$V_x = \pi \int_1^4 y^2\,dx = \pi \int_1^4 \frac{4}{x}\,dx = \pi[4 \ln x]_1^4 =$$

$$= 4\pi(\ln 4 - \ln 1) \approx 4\pi \cdot 1{,}39 \approx 17{,}5 \text{ térfogategység.}$$

10. Határozzuk meg az $y=\ln x$ függvény X-tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest $2 \leqq x \leqq 6$ abszcisszájú pontok által határolt részének térfogatát (75. ábra).

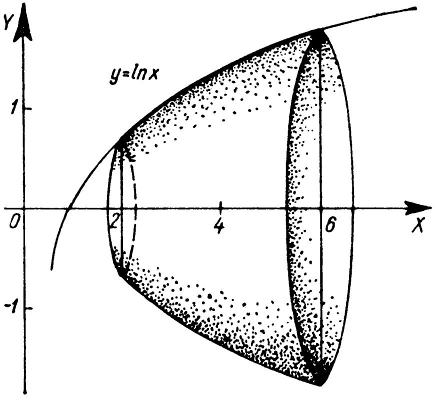
$$V_x = \pi \int_2^6 y^2\,dx = \pi \int_2^6 \ln^2 x\,dx.$$

A feladatot a parciális integrálás módszerével oldjuk meg.

Legyen $u' = 1$ **és** $v = \ln^2 x$; **ekkor** $u = x$ **és** $v' = \dfrac{2 \ln x}{x}$.

$$V_x = \pi \int_2^6 1 \ln^2 x\,dx = \pi[x \ln^2 x]_2^6 - 2\pi \int_2^6 \ln x\,dx.$$

Az új integrált szintén parciális integrálással alakítjuk át.



75. ábra

Legyen $u_1' = 1$, $v_1 = \ln x$, ekkor $u_1 = x$ és $v_1' = \dfrac{1}{x}$.

$$V_x = \pi[x \ln^2 x]_2^6 - 2\pi \left\{[x \ln x]_2^6 - 2 \int_2^6 dx\right\} =$$

$$= \pi[x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_2^6 =$$

$$= \pi(6 \ln^2 6 - 12 \ln 6 + 12 - 2 \ln^2 2 + 4 \ln 2 - 4) \approx$$

$$\approx \pi(6 \cdot 1{,}79^2 - 2 \cdot 0{,}693^2 - 12 \cdot 1{,}79 + 4 \cdot 0{,}693 + 8) \approx$$

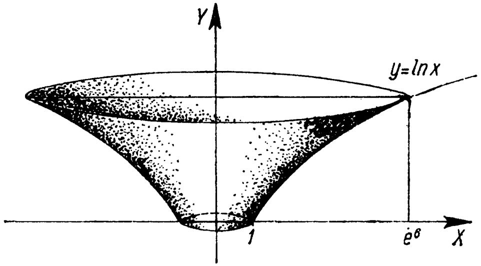
$$\approx \pi(6 \cdot 3{,}2 - 2 \cdot 0{,}48 - 21{,}5 + 2{,}77 + 8) =$$

$$= \pi(19{,}2 - 0{,}96 - 21{,}5 + 2{,}77 + 8) = \pi(29{,}97 - 22{,}46) \approx$$

$$\approx 7{,}51 \cdot 3{,}14 \approx 23{,}6 \text{ térfogategység.}$$

11. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény görbéjének Y-tengely körüli forgatásakor a 0 és 6 ordináták között keletkező test térfogatát (76. ábra)!

$$V_y = \pi \int_0^6 x^2\, dy.$$



76. ábra

Az $y = \ln x$ függvényből $x = e^y$.

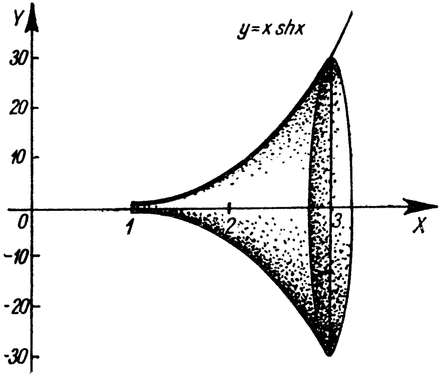
$$V_y = \pi \int_0^6 e^{2y}\, dy = \pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^6 = \frac{\pi}{2}(e^{12} - e^0) \approx$$

$$\approx \frac{e^{12}\pi}{2} \approx \frac{22 \cdot 7{,}4 \cdot 10^4 \pi}{2} \approx 8{,}14 \cdot 3{,}14 \cdot 10^4 \approx$$

$$\approx 25{,}6 \cdot 10^4 = 2{,}56 \cdot 10^5 \text{ térfogategység.}$$

12. Határozzuk meg az $y = x \operatorname{sh} x$ függvény görbéjének X-tengely körüli forgatásakor az $1 \leqq x \leqq 3$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát (77. ábra)!

$$V_x = \pi \int_1^3 y^2\, dx = \pi \int_1^3 x^2 \operatorname{sh}^2 x\, dx.$$



77. ábra

A hiperbolikus tényezőt linearizáljuk:

$$V_x = \pi \int_1^3 x^2 \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^3 (x^2 \operatorname{ch} 2x - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^3 x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx - \frac{\pi}{2} \int_1^3 x^2\, dx.$$

A szorzatfüggvény integrálját határozzuk meg parciális integrálással:

$$\int_1^3 x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx.$$

Legyen $u = x^2$ és $v' = \operatorname{ch} 2x$, ekkor $u' = 2x$ és $v = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{2}$.

$$\int_1^3 x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sh} 2x\right]_1^3 - \int_1^3 x \operatorname{sh} 2x\, dx.$$

Legyen most $u_1 = x$ és $v_1' = \operatorname{sh} 2x$, ekkor $u_1' = 1$ és $v_1 = \dfrac{\operatorname{ch} 2x}{2}$.

$$\int_1^3 x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sh} 2x\right]_1^3 - \left\{\left[\frac{x}{2} \operatorname{ch} 2x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} dx\right\} =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sh} 2x\right]_1^3 - \left[\frac{x}{2} \operatorname{ch} 2x\right]_1^3 + \left[\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x\right]_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} \operatorname{sh} 6 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 - \frac{3}{2} \operatorname{ch} 6 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2 + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 6 - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2 =$$

$$= \frac{19}{4} \operatorname{sh} 6 - \frac{3}{4} \operatorname{sh} 2 - \frac{3}{2} \operatorname{ch} 6 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2.$$

$$\operatorname{sh} 6 = \frac{e^6 - e^{-6}}{2} \approx \frac{400 - \frac{1}{400}}{2} \approx 200;$$

$$\operatorname{ch} 6 = \frac{e^6 + e^{-6}}{2} \approx \frac{400 + \frac{1}{400}}{2} \approx 200;$$

$$\operatorname{sh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx \frac{7{,}4 - \frac{1}{7{,}4}}{2} \approx \frac{7{,}4 - 0{,}135}{2} = 3{,}7 - 0{,}0675 \approx 3{,}633;$$

$$\operatorname{ch} 2 = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \approx 3{,}7 + 0{,}0675 \approx 3{,}768.$$

$$\int_1^3 x^2 \operatorname{ch} 2x\, dx \approx \frac{19}{4} \cdot 200 - \frac{3}{4} \cdot 3{,}633 - \frac{3}{2} \cdot 200 + \frac{1}{2} \cdot 3{,}768 \approx$$

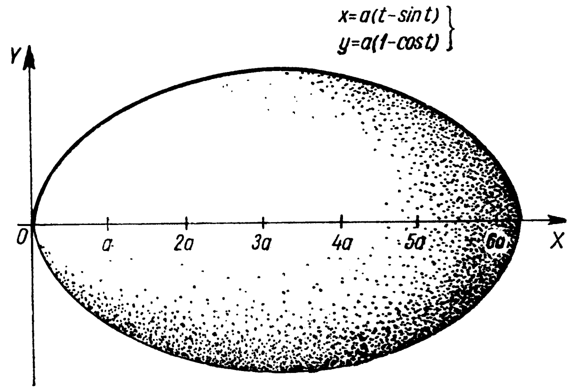
$$\approx 950 - 2{,}72 - 300 + 1{,}884 \approx 651{,}9 - 2{,}7 = 649{,}2.$$

A feladat megoldása:

$$V_x = \frac{\pi}{2} \cdot 649{,}2 - \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 \approx 1020 - 1{,}57 \left(9 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 1020 - \frac{1{,}57 \cdot 28}{3} \approx 1020 - 14{,}7 = 1005{,}3 \text{ térfogategység.}$$

13. Forgassuk meg a cikloisívet az X-tengely körül, majd határozzuk meg az így keletkező forgástest térfogatát! A cikloisívet határoló pontok paraméterértékei: $t_1 = 0$ és $t_2 = 2\pi$ (78. ábra).



78. ábra

$$x = a(t-\sin t); \quad y = a(1-\cos t);$$

$$\dot{x} = a(1-\cos t).$$

$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt =$$

$$= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\, dt = ?$$

Részletszámítások:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(2\pi+\frac{\sin 4\pi}{2}-0\right) = \pi.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos t\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t-\sin^2 t\cos t)\, dt = \left[\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \sin 2\pi-\frac{\sin^3 2\pi}{3}-0 = 0.$$

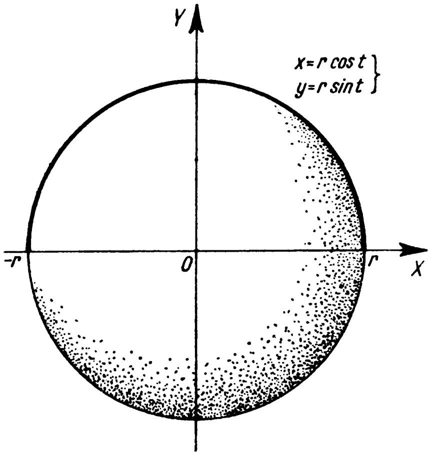
$$V = a^3\pi\{[t-3\sin t]_0^{2\pi}+3\pi\} = a^3\pi(2\pi-3\sin 2\pi-0+3\pi) =$$

$$= 5a^3\pi^2 \text{ térfogategység.}$$

14. Határozzuk meg az $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ paraméteres alakban adott körív forgatásával keletkező gömb térfogatát (79. ábra)!

A határok π és 0, mert így a görbén a pozitív X-tengely irányában megyünk végig.

$$\dot{x} = -r\sin t.$$



79. ábra

$$V = \pi \int_\pi^0 y^2\dot{x}\, dt = \pi \int_\pi^0 r^2\sin^2 t(-r\sin t)\, dt =$$

$$= -\pi r^3 \int_\pi^0 \sin^3 t\, dt = \pi r^3 \int_0^\pi \sin^3 t\, dt.$$

Felhasználjuk a következő linearizáló formulát:

$$\sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t-\sin 3t).$$

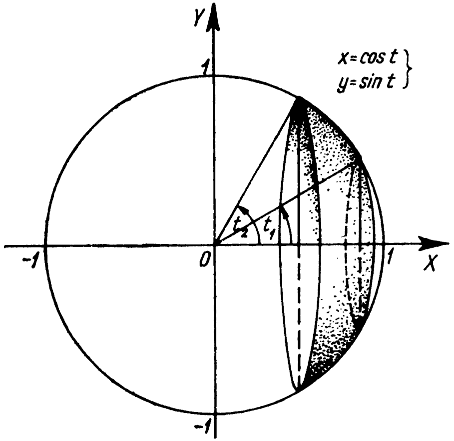
$$V = \frac{\pi r^3}{4}\int_0^\pi (3\sin t-\sin 3t)\, dt =$$

$$= \frac{r^3\pi}{4}\left[-3\cos t+\frac{\cos 3t}{3}\right]_0^\pi = \frac{r^3\pi}{4}\left(3-\frac{1}{3}+3-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{r^3\pi}{4}\cdot\frac{16}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Valóban a gömb térfogatképletét kaptuk.

15. Forgassuk meg az $x=\cos t$, $y=\sin t$, paraméteres alakban adott egységsugarú körív $t_1=\frac{\pi}{6}$ és $t_2=\frac{\pi}{3}$ paraméterű pontjai által határolt darabját az X-tengely körül! Számítsuk ki az így kapott gömbréteg térfogatát (80. ábra)!



80. ábra

$$x=\cos t;\quad y=\sin t;\quad \dot{x}=-\sin t.$$

$$V_x=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2\dot{x}\,dt=\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}(\sin^2 t)(-\sin t)\,dt=$$

$$=-\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin^3 t\,dt.$$

Az integrandus $\sin^3 t$. Most az előző példában alkalmazott linearizáló formula helyett (gyakorlásképpen) szorzattá alakítjuk az integrandust. Ekkor $\sin^3 t=\sin^2 t\sin t=(1-\cos^2 t)\sin t$, így

$$V_x=-\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1-\cos^2 t)\sin t\,dt=$$

$$=\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}(-\sin t)\,dt-\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}(-\cos^2 t)\sin t\,dt=$$

$$=\pi[\cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\pi\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\pi\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{3}-\cos^3\frac{\pi}{6}\right)=$$

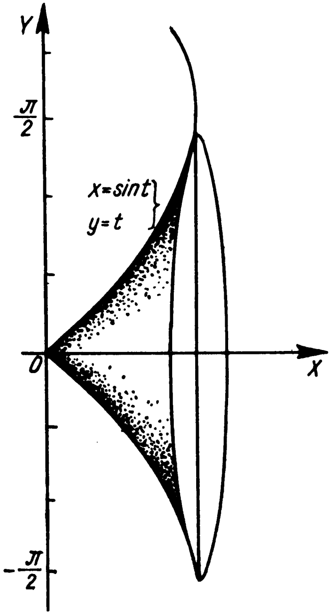
$$=\pi(\cos 60^\circ-\cos 30^\circ)-\frac{\pi}{3}(\cos^3 60^\circ-\cos^3 30^\circ)\approx$$

$$\approx\pi(0{,}5-0{,}866)-\frac{\pi}{3}(0{,}5^3-0{,}866^3)\approx$$

$$\approx 3{,}14(-0{,}366)-1{,}05(0{,}125-0{,}65)\approx-0{,}598 \text{ térfogategység.}$$

Eredményül azért kaptunk negatív számot, mert t növekedésével az x csökken, és így integrálásirány nem az X-tengely pozitív irányával egyezett meg, hanem azzal ellentétes volt.

16. Mekkora az $x=\sin t$, $y=t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe X-tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogata, ha $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ (81. ábra)?



81. ábra

(A görbe explicit egyenlete $y=\text{arc}\ \sin x$.)

$$V_x=\int_0^{\pi/2} y^2\dot{x}\,dt=\pi\int_0^{\pi/2} t^2\cos t\,dt.$$

Az integrált a parciális integrálás módszerével határozzuk meg. Legyen $u=t^2$ és $v'=\cos t$; vagyis $u'=2t$; $v=\sin t$.

$$V_x=\pi\int_0^{\pi/2} t^2\cos t\,dt=\pi[t^2\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi\int_0^{\pi/2}2t\sin t\,dt.$$

Ismét parciálisan integrálunk:

$$u_1=2t;\quad v_1'=\sin t;\quad u_1'=2;\quad v_1=-\cos t.$$

$$V_x=\pi[t^2\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi\left\{[-2t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\pi/2}2(-\cos t)\,dt\right\}=$$

$$=\pi[t^2\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\pi[2t\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}-\pi[2\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}-0\right)+\pi\left(\pi\cos\frac{\pi}{2}-0\right)-\pi\left(2\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=$$

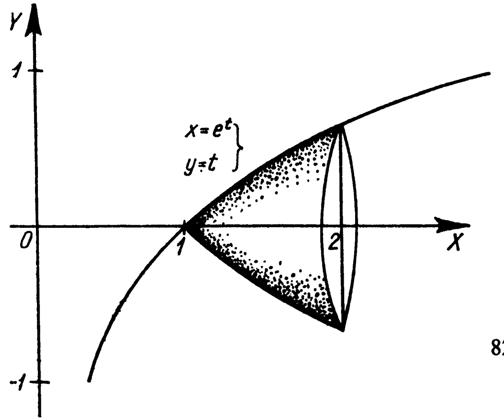
$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\approx 1{,}47\ \text{térfogategység.}$$

17. Határozzuk meg az $x=e^t$, $y=t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe X-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha $1\leqq t\leqq 2$ (82. ábra). (A t paramétert kiküszöbölve $y=\ln x$.)

$$V_x=\pi\int_1^2 y^2\dot{x}\,dt=\pi\int_1^2 t^2e^t\,dt.$$

Legyen $u=t^2$, $v'=e^t$, ekkor $u'=2t$ és $v=e^t$.

$$V_x=\pi\int_1^2 t^2e^t\,dt=\pi[t^2e^t]_1^2-\pi\int_1^2 2te^t\,dt.$$



82. ábra

Ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét:

$$u_1=2t;\quad v_1'=e^t;\quad u_1'=2;\quad v_1=e^t.$$

$$V_x=\pi[t^2e^t]_1^2-\pi\left\{[2te^t]_1^2-\int_1^2 2e^t\,dt\right\}=$$

$$=\pi[t^2e^t]_1^2-\pi[2te^t]_1^2+\pi[2e^t]_1^2=$$

$$=\pi(4e^2-e-4e^2+2e+2e^2-2e)=\pi(2e^2-e)\approx$$

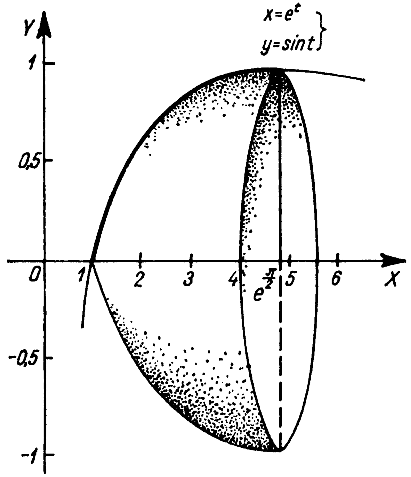
$$\approx 3{,}14(2\cdot 7{,}4-2{,}72)=3{,}14(14{,}8-2{,}72)=$$

$$=3{,}14\cdot 12{,}08\approx 37{,}8\ \text{térfogategység.}$$

18. Határozzuk meg az $x=e^t$, $y=\sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott függvény görbéje X-tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, a $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ tartományban (83. ábra)!

$$V_x=\pi\int_0^{\pi/2} y^2\dot{x}\,dt=\pi\int_0^{\pi/2}(\sin^2 t)e^t\,dt=\pi\int_0^{\pi/2}e^t\,\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt.$$

$$V_x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}e^t\,dt-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}e^t\cos 2t\,dt.$$



83. ábra

Az első integrál közvetlenül megkapható. A másodikat parciálisan integráljuk. Legyen $u=e^t$ és $v'=\cos 2t$; vagyis $u'=e^t$ és $v=\frac{1}{2}\sin 2t$.

$$\int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t\,dt = \left[\frac{e^t}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{e^t}{2}\sin 2t\,dt.$$

Legyen $u_1 = \frac{e^t}{2}$ és $v_1' = \sin 2t$, vagyis $u_1' = \frac{e^t}{2}$ és $v_1 = \frac{-\cos 2t}{2}$.

$$\int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t\,dt = \left[\frac{e^t}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left\{\left[-\frac{e^t\cos 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{-e^t\cos 2t}{4}\,dt\right\} =$$

$$= \left[\frac{e^t}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{e^t\cos 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} e^t\cos 2t\,dt.$$

Rendezve az azonosságot:

$$\frac{5}{4}\int_0^{\pi/2} e^t\cos 2t\,dt = \left[\frac{e^t\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{e^t\cos 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\sin\pi - 0 + \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}\cos\pi - \frac{1}{4}e^0\cos 0 \approx$$

$$\approx \frac{1}{4}e^{1,57}(-1) - \frac{1}{4}\cdot 1 \approx -\frac{4,8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-5,8}{4}.$$

$$\int_0^{\pi/2} e^t\cos 2t\,dt = -\frac{5,8}{5} = -1,16.$$

$$V_x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} e^t\,dt - \frac{\pi}{2}(-1,16) =$$

$$= \frac{\pi}{2}[e^t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1,16\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(e^{1,57} - 1 + 1,16) \approx$$

$$\approx 1,57(4,8+0,16) \approx 7,8 \text{ térfogategység.}$$

19. Határozzuk meg az $x=\operatorname{sh} t$ és $y=\operatorname{ch} t$ egyenletrendszerrel adott hiperbola X-tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogatát, ha $0\leq t\leq 2$ (84. ábra)!

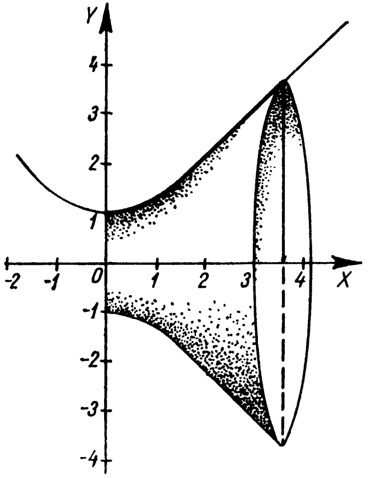
$$x=\operatorname{sh} t;\quad y=\operatorname{ch} t;\quad \dot{x}=\operatorname{ch} t.$$

$$V_x = \pi\int_0^2 y^2\dot{x}\,dt = \pi\int_0^2 \operatorname{ch}^2 t\operatorname{ch} t\,dt =$$

$$= \pi\int_0^2 (1+\operatorname{sh}^2 t)\operatorname{ch} t\,dt = \pi\int_0^2 \operatorname{ch} t\,dt + \pi\int_0^2 \operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch} t\,dt =$$

$$= \pi[\operatorname{sh} t]_0^2 + \pi\left[\frac{\operatorname{sh}^3 t}{3}\right]_0^2 = \pi\left(\operatorname{sh} 2 - \operatorname{sh} 0 + \frac{\operatorname{sh}^3 2}{3} - \frac{\operatorname{sh}^3 0}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(\operatorname{sh} 2 + \frac{\operatorname{sh}^3 2}{3}\right).$$



84. ábra

$$\operatorname{sh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx \frac{7{,}4 - \frac{1}{7{,}4}}{2} \approx \frac{7{,}4 - 0{,}14}{2} = \frac{7{,}26}{2} = 3{,}63.$$

$$V_x = \pi\left(3{,}63 + \frac{3{,}63^3}{3}\right) = \pi\left(3{,}63 + \frac{48}{3}\right) =$$

$$= \pi(3{,}63 + 16) = 19{,}63\pi \approx 61{,}6 \text{ térfogategység.}$$

6. Numerikus integrálás

Numerikus integrálással határozott integrálok értékét (közelítő pontossággal) tudjuk meghatározni. Numerikus integrálási módszert többnyire a következő esetekben alkalmazunk:

1. Az integrandus grafikusan adott.
2. Az integrandus analitikus alakban adott, de a primitív függvényt nem tudjuk analitikus alakban meghatározni, ill. igen bonyolult a meghatározása.
3. Az integrandus függvénytáblázattal adott.

Mindhárom esetben az integrandus bizonyos számú ismert pontja segítségével kapjuk meg az integrál közelítő értékét.

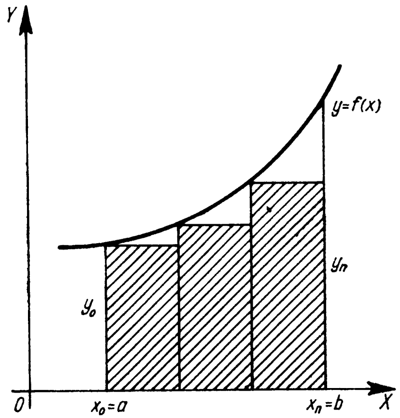
A numerikus integrálás esetenkénti alkalmazhatóságát az eredmény várható pontossága dönti el. A hiba nagyságának elméleti meghatározásával nem foglalkozunk; csak azt mutatjuk meg, milyen módon kell alkalmazni az egyes közelítő módszereket.

1. *Téglány-szabály*. Az $\int_a^b f(x)\,dx$ határozott integrált, vagyis az $f(x)$ görbe $[a, b]$ szakasza alatti területet téglalapok területösszegével közelítjük. Az eredmény általában annál pontosabb, minél sűrűbb felosztást alkalmazunk.

Tekintsünk egyenlőközű felosztást, vagyis osszuk az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő hosszú részre. Jelölje egy ilyen részintervallum hosszát h, vagyis legyen $h = \frac{b-a}{n}$; jelölje továbbá az egyes osztópontokat $x_0 = a$; $x_1 = a + h$; $x_2 = a + 2h$; ... ...; $x_{n-1} = a + (n-1)h$; $x_n = a + nh = b$, továbbá az osztópontok ordinátáit $y_0 = y(x_0)$; $y_1 = y(x_1)$; ...; $y_{n-1} = y(x_{n-1})$; $y_n = y(x_n)$. Ekkor — a szakaszok kezdőpontjaihoz tartozó ordinátaértékekkel képezve a téglalapokat — az

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

integrál közelítő értéke (85. ábra)

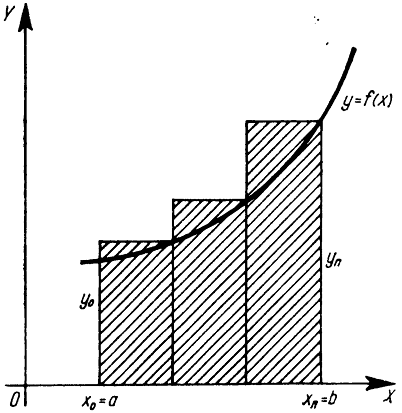


85. ábra

$$I \approx I_k = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1});$$

a szakaszok végpontjaihoz tartozó ordinátaértékeket választva viszont (86. ábra)

$$I \approx I_v = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$



86. ábra

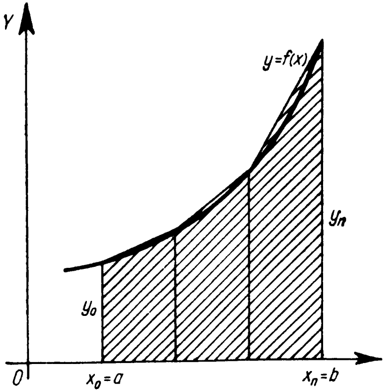
Ha a függvény az $[a, b]$ integrálási intervallumban monoton növekedő (csökkenő), akkor I_k az integrál alsó (felső) korlátja, I_v pedig az integrál felső (alsó) korlátja.

2. *Trapéz-szabály.* A határozott integrált, vagyis a függvény görbéje alatti területet trapézokkal közelítjük meg. Az $[a, b]$ intervallumot osztópontokkal egyenlő hosszú részintervallumokra osztjuk, majd a 87. ábrán látható módon közelítjük meg a görbe alatti területet. Ha egy részintervallum hossza h, akkor az I határozott integrál közelítő értéke

$$I \approx h\left(\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right) =$$

$$= h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2}\right).$$

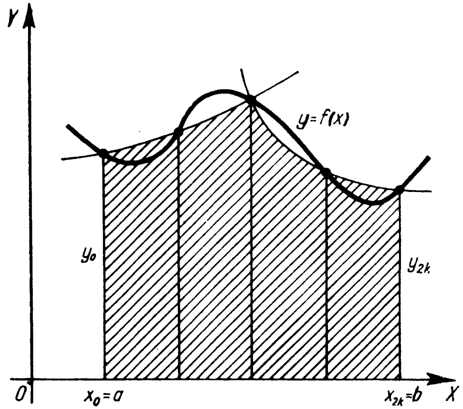
3. *Simpson-szabály.* A szabály alapgondolata az, hogy három (nem egy egyenesbe eső) ponton át mindig húzható egy és csak



87. ábra

egy másodfokú parabola, így a görbe ilyen parabolaívekkel közelíthető meg. A parabolaívek általában jobban közelítik meg a görbét, mint az egyenes szakaszok. Az $[a, b]$ intervallumot $n = 2k+1$ páratlan számú osztóponttal $n = 2k$ páros, h szélességű részintervallumra osztva és két-két szomszédos részintervallumban a 88. ábrán látható módon helyettesítve a függvény görbéjét egy-egy ilyen parabolaívvel, az integrál így adódó közelítő értéke:

$$I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$



88. ábra

Az első és az utolsó ordinátától eltekintve a páratlan indexű ordináták együtthatója 4, a páros indexűké 2.

Gyakorló feladatok

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$ A feladatot megoldjuk közvetlenül és a téglány-szabállyal is, hogy a pontos értéket ismerve, a közelítő eredmény hibáját kiszámíthassuk.

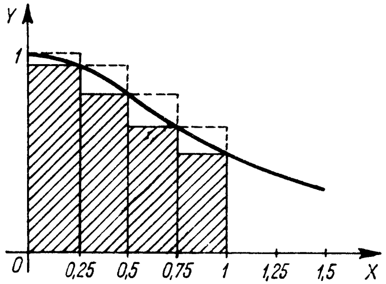
I. Megoldás:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arc\,tg} x]_0^1 =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

II. Megoldás:

Az integrálandó függvény görbéje a 89. ábrán látható. A [0; 1] intervallumot négy (egyenlő szélességű) részintervallumra osztjuk, és erre alkalmazzuk a téglány-szabályt.



89. ábra

Az összetartozó koordináták meghatározása:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 1.$$

$$x_1 = 0{,}25 = \frac{1}{4}; \quad y_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{16}} = \frac{16}{17} \approx 0{,}94.$$

$$x_2 = 0{,}5 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$x_3 = 0{,}75 = \frac{3}{4}; \quad y_3 = \frac{1}{1+\frac{9}{16}} = \frac{16}{25} = 0{,}64.$$

$$x_4 = 1; \quad y_4 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ha mindegyik részintervallum szélességét szorozzuk a bal oldali végpontban felvett függvényértékkel (amely ez esetben az intervallumhoz tartozó legnagyobb függvényérték), akkor

$$I < I_1 = 0{,}25(1+0{,}94+0{,}8+0{,}64) = 0{,}25 \cdot 3{,}38 = 0{,}845.$$

Ha mindegyik intervallum szélességét a jobb oldali végponthoz tartozó függvényértékkel szorozzuk (mely esetünkben az intervallumhoz tartozó legkisebb függvényérték), akkor

$$I > I_2 = 0{,}25(0{,}94+0{,}8+0{,}64+0{,}5) = 0{,}25 \cdot 2{,}88 = 0{,}72.$$

A százalékban kifejezett hibát p-vel jelölve:

$$p_1 = \frac{0{,}845-0{,}785}{0{,}785} \cdot 100\% = \frac{0{,}060}{0{,}785} \cdot 100\% = \frac{6}{0{,}785}\% \approx 7{,}6\%.$$

$$p_2 = \frac{0{,}785-0{,}72}{0{,}785}\, 100\% = \frac{0{,}065}{0{,}785}\, 100\% = \frac{6{,}5}{0{,}785} \approx 8{,}3\%.$$

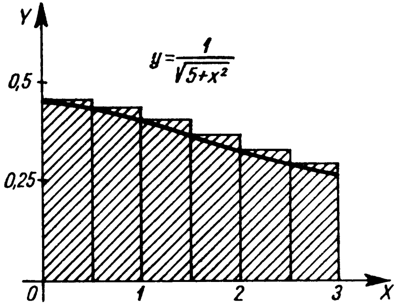
A hibaszázalék nyilván azért nagy viszonylag, mert az intervallum felosztása durva volt.

2. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét téglány-szabállyal, trapéz-szabállyal és Simpson-szabállyal!

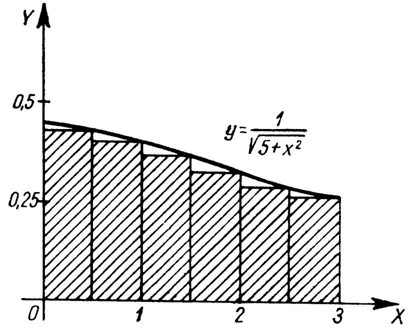
$$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} = ?$$

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A [0; 3] intervallumot hat részintervallumra osztjuk. *a)* Minden részintervallum hosszát a bal oldali végponthoz tartozó ordinátával szorozzuk (90. ábra). *b)* Minden részintervallum hosszát a jobb oldali végponthoz tartozó ordinátával szorozzuk (91. ábra).



90. ábra



91. ábra

Megjegyzés: Az *X*- és *Y*-tengelyen felvett hosszegységek a következő ábrákon célszerűségi szempontból általában nem egyenlők; ez a görbe alatti területet ugyan torzítja, de a határozott integrál értékét és számítását nem befolyásolja.

A számításhoz szükséges függvényértékek:

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}45; \quad y(0{,}5) = \frac{1}{\sqrt{5+0{,}5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}25}} \approx 0{,}436;$$

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt{5+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}408;$$

$$y(1{,}5) = \frac{1}{\sqrt{5+1{,}5^2}} = \frac{1}{\sqrt{7{,}25}} \approx 0{,}371;$$

$$y(2) = \frac{1}{\sqrt{5+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0{,}333;$$

$$y(2{,}5) = \frac{1}{\sqrt{5+2{,}5^2}} = \frac{1}{\sqrt{11{,}25}} \approx 0{,}299;$$

$$y(3) = \frac{1}{\sqrt{5+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \approx 0{,}267.$$

a) $I \approx I_1 = 0{,}5(0{,}45+0{,}436+0{,}408+0{,}371+0{,}333+0{,}299) =$

$= 0{,}5 \cdot 2{,}297 = 1{,}1485 \approx 1{,}15.$

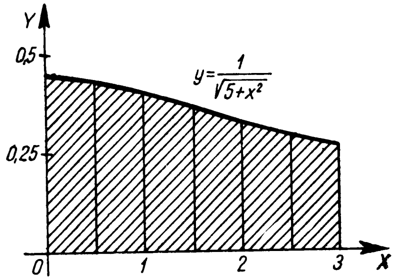
b) $I \approx I_2 = 0{,}5(0{,}436+0{,}408+0{,}371+0{,}333+0{,}299+0{,}267) =$

$= 0{,}5 \cdot 2{,}124 = 1{,}062 \approx 1{,}06.$

Mivel a függvény a [0, 3] intervallumban monoton, az integrál számértéke 1,06 és 1,15 közé esik.

II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A 92. ábrán látható trapézok területének összegét határozzuk meg.



92. ábra

Az intervallumok szélessége most is 0,5.

$$I \approx I_3 = 0{,}5\left[\frac{y(0)}{2} + y(0{,}5) + y(1) + y(1{,}5) + y(2) + y(2{,}5) + \frac{y(3)}{2}\right] =$$

$$= 0{,}5\left(\frac{0{,}45}{2} + 0{,}436 + 0{,}408 + 0{,}371 + 0{,}333 + 0{,}299 + \frac{0{,}267}{2}\right) =$$

$$= 0{,}5(0{,}225 + 1{,}847 + 0{,}1335) = 0{,}5 \cdot 2{,}2055 = 1{,}102\,75 \approx 1{,}1028.$$

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

Az intervallumot most is 6 részintervallumra osztjuk, vagyis $h=0,5$.

$$I \approx I_4 = \frac{h}{3}[y(0)+4y(0,5)+2y(1)+4y(1,5)+2y(2)+4y(2,5)+y(3)] \approx$$

$$\approx \frac{0,5}{3}(0,45+4\cdot 0,436+2\cdot 0,408+4\cdot 0,371+2\cdot 0,333+4\cdot 0,299+0,267) =$$

$$= \frac{0,5}{3}[0,717+4(0,436+0,371+0,299)+2(0,408+0,333)] =$$

$$= \frac{0,5}{3}(0,717+4\cdot 1,106+2\cdot 0,741) =$$

$$= \frac{0,5}{3}(0,717+4,424+1,482) =$$

$$= \frac{0,5}{3}\cdot 6,623 \approx \frac{3,311}{3} \approx 1,104.$$

A három különböző módszerrel kapott közelítő értékeket egybevéve, az integrál értéke feltehetően 3 jegy pontossággal 1,10.

3. Határozzuk meg az alábbi integrál közelítő és pontos értékét:

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

A közelítő értéket a tégIány-szabállyal, a trapéz-szabállyal és a Simpson-szabállyal határozzuk meg.

I. Megoldás (tégIány-szabállyal):

Az adott intervallumot hat részintervallumra osztjuk. *a)* A részintervallumok hosszát a bal oldali végpontokhoz tartozó függvényértékkel szorozzuk (93. ábra). *b)* A részintervallumok hosszát a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel szorozzuk (94. ábra).

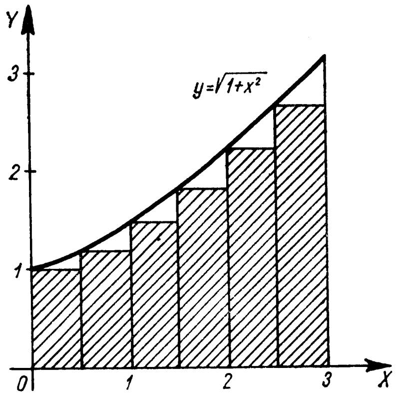
Az integrál meghatározásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

$y(0) = 1;$ $\qquad y(0,5) = \sqrt{1+0,25} = \sqrt{1,25} \approx 1,12;$

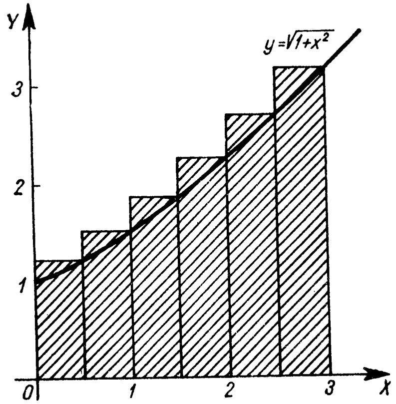
$y(1) = \sqrt{2} \approx 1,41;$ $\qquad y(1,5) = \sqrt{1+2,25} = \sqrt{3,25} \approx 1,80;$

$y(2) = \sqrt{5} \approx 2,24;$ $\qquad y(2,5) = \sqrt{1+6,25} = \sqrt{7,25} \approx 2,70;$

$y(3) = \sqrt{10} \approx 3,16.$



93. ábra



94. ábra

a) $I \approx I_1 = 0,5(1+1,12+1,41+1,80+2,24+2,70) = 0,5\cdot 10,27 =$

$= 5,135 \approx 5,14.$

$I \approx I_2 = 0,5(1,12+1,41+1,80+2,24+2,70+3,16) = 0,5\cdot 12,43 =$

$= 6,215 \approx 6,22.$

A függvény a [0; 3] intervallumban monoton növekedő, ezért az integrál alsó korlátja 5,14 és felső korlátja 6,22.

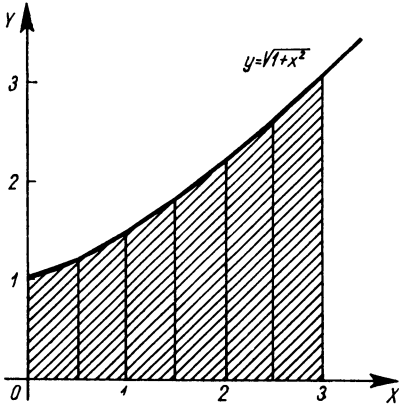
II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti területet — a 95. ábrán látható módon — trapézokkal közelítjük meg.

$$I \approx I_3 = h\left[\frac{y(0)}{2} + y(0{,}5) + y(1) + y(1{,}5) + y(2) + y(2{,}5) + \frac{y(3)}{2}\right] =$$

$$= 0{,}5(0{,}5 + 1{,}12 + 1{,}41 + 1{,}80 + 2{,}24 + 2{,}70 + 1{,}58) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 11{,}35 = 5{,}675.$$



95. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

Most is 6 részintervallummal számolunk

$$I \approx I_4 =$$

$$= \frac{h}{3}[y(0) + 4y(0{,}5) + 2y(1) + 4y(1{,}5) + 2y(2) + 4y(2{,}5) + y(3)] =$$

$$= \frac{0{,}5}{3}(1 + 4 \cdot 1{,}12 + 2 \cdot 1{,}41 + 4 \cdot 1{,}8 + 2 \cdot 2{,}24 + 4 \cdot 2{,}7 + 3{,}16) =$$

$$= \frac{0{,}5}{3}[4{,}16 + 4(1{,}12 + 1{,}8 + 2{,}7) + 2(1{,}41 + 2{,}24)] =$$

$$= \frac{1}{6}(4{,}16 + 4 \cdot 5{,}62 + 2 \cdot 3{,}65) =$$

$$= \frac{1}{6}(4{,}16 + 22{,}48 + 7{,}30) = \frac{33{,}94}{6} \approx 5{,}66.$$

IV. Megoldás:

A függvény primitív függvénye könnyen meghatározható, ezért a határozott integrált így is kiszámíthatjuk!

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx = ?$$

$x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel átalakítjuk az integrandust.

$dx = \operatorname{ch} t\,dt$; $t = \operatorname{ar\,sh} x$.

Az új határokat egyelőre csak jelöljük.

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,\operatorname{ch} t\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{ch}^2 t\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4}\right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{1}{2}[t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}[\operatorname{ar\,sh} x + x\sqrt{x^2+1}]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{x^2+1}]_0^3 =$$

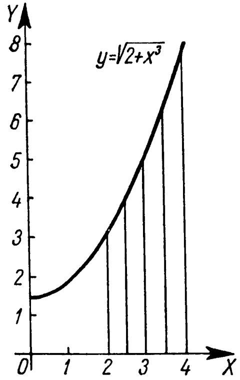
$$= \frac{1}{2}[\ln(3+\sqrt{10}) + 3\sqrt{10} - 0] \approx \frac{1}{2}[\ln(3+3{,}16) + 3 \cdot 3{,}16] =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 6{,}16 + 9{,}48) \approx \frac{1{,}82 + 9{,}48}{2} = \frac{11{,}30}{2} = 5{,}65.$$

4. Határozzuk meg az alábbi integrál közelítő értékét:

$$I = \int_2^4 \sqrt{2+x^3}\,dx.$$

Az integrandus görbéje a 96. ábrán látható. Az intervallumot négy egyenlő részre osztjuk.



96. ábra

I. Megoldás (tégláný-szabállyal):

Az integrál közelítő meghatározásához szükséges függvényértékek:

$$y(2) = \sqrt{2+8} = \sqrt{10} \approx 3{,}16;$$

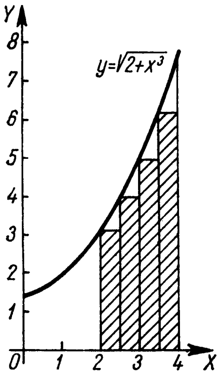
$$y(2{,}5) = \sqrt{2+2{,}5^3} \approx \sqrt{17{,}63} \approx 4{,}20;$$

$$y(3) = \sqrt{2+3^3} = \sqrt{29} \approx 5{,}40;$$

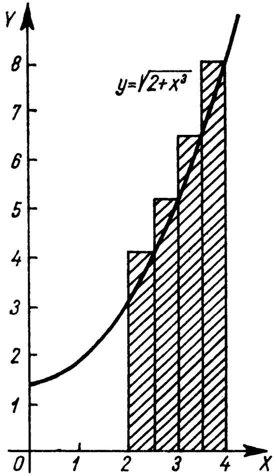
$$y(3{,}5) = \sqrt{2+3{,}5^3} \approx \sqrt{44{,}88} \approx 6{,}70;$$

$$y(4) = \sqrt{2+4^3} = \sqrt{66} \approx 8{,}13.$$

a) (97. ábra) $I \approx I_1 = 0{,}5(3{,}16+4{,}20+5{,}40+6{,}70) =$
$= 0{,}5\cdot 19{,}46 = 9{,}73.$



97. ábra



98. ábra

b) (98. ábra) $I \approx I_2 = 0{,}5(4{,}20+5{,}40+6{,}70+8{,}13) =$
$= 0{,}5\cdot 24{,}43 = 12{,}215 \approx 12{,}22.$

A függvény az integrálási intervallumban monoton növekedő, ezért I_1 az integrál egyik alsó korlátja, míg I_2 egy felső korlát.

II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti területet a 99. ábrán látható módon trapézokkal közelítjük meg.

$$I \approx I_3 = 0{,}5\left[\frac{y(2)}{2}+y(2{,}5)+y(3)+y(3{,}5)+\frac{y(4)}{2}\right] =$$

$$= 0{,}5(1{,}58+4{,}20+5{,}40+6{,}70+4{,}065) =$$

$$= 0{,}5\cdot 21{,}945 = 10{,}9725 \approx 10{,}97.$$

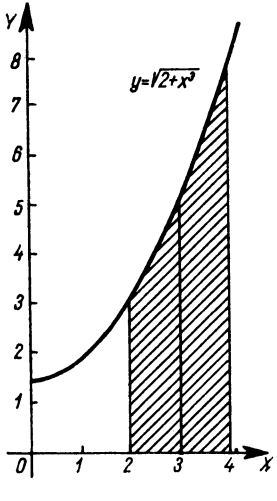
III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx I_4 = \frac{h}{3}[y(2)+4y(2{,}5)+2y(3)+4y(3{,}5)+y(4)] \approx$$

$$\approx \frac{0{,}5}{3}(3{,}16+4\cdot 4{,}2+2\cdot 5{,}4+4\cdot 6{,}7+8{,}13) =$$

$$= \frac{0{,}5}{3}(3{,}16+16{,}8+10{,}8+26{,}8+8{,}13) =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 65{,}69}{3} = 0{,}5\cdot 21{,}89 = 10{,}945.$$



99. ábra

5. Határozzuk meg az $I=\int_0^2 \sqrt{10-x^3}\,dx$ határozott integrál közelítő értékét a téglány-szabállyal, a trapéz-szabállyal, és a Simpson-szabállyal. Az intervallumot négy részintervallumra osztjuk ($h=0,5$).

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

$$y(0)=\sqrt{10}\approx 3,16;$$

$$y(0,5)=\sqrt{10-0,5^3}=\sqrt{10-0,125}=\sqrt{9,875}\approx 3,14;$$

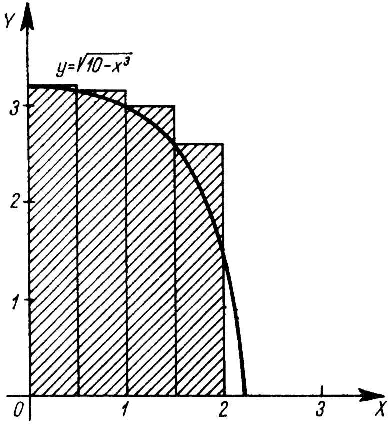
$$y(1)=\sqrt{10-1}=3; \qquad y(1,5)=\sqrt{10-1,5^3}\approx\sqrt{6,64}\approx 2,58;$$

$$y(2)=\sqrt{10-2^3}=\sqrt{2}\approx 1,41.$$

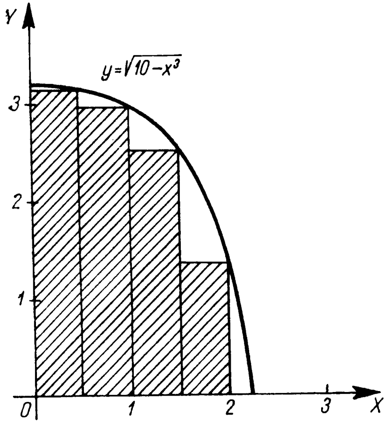
a) (100. ábra) $I\approx I_1=0,5(3,16+3,14+3+2,58)=0,5\cdot 11,88=5,94.$

b) (101. ábra) $I\approx I_2=0,5(3,14+3+2,58+1,41)=0,5\cdot 10,13\approx 5,06.$

Megjegyzés: A függvény monoton csökkenő, ezért I_1 a határozott integrál felső korlátját, I_2 pedig alsó korlátját adja.



100. ábra



101. ábra

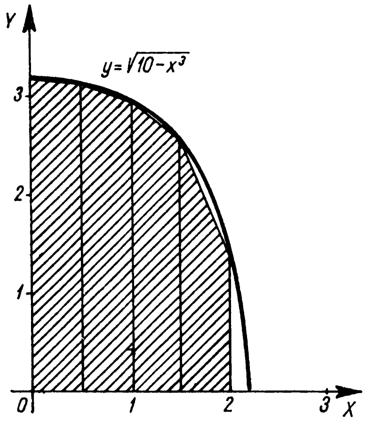
II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti területet megközelítő trapézok a 102. ábrán láthatók.

$$I\approx I_3=h\left[\frac{y(0)}{2}+y(0,5)+y(1)+y(1,5)+\frac{y(2)}{2}\right].$$

$$I_3=0,5\left(\frac{3,16}{2}+3,14+3+2,58+\frac{1,41}{2}\right)=$$

$$=0,5(1,58+3,14+3+2,58+0,705)=0,5\cdot 11,005\approx 5,5.$$



102. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx I_4 = \frac{h}{3}[y(0)+4y(0,5)+2y(1)+4y(1,5)+y(2)] \approx$$

$$\approx \frac{0,5}{3}(3,16+4\cdot 3,14+2\cdot 3+4\cdot 2,58+1,41) =$$

$$= \frac{0,5}{3}(3,16+12,56+6+10,32+1,41) =$$

$$= \frac{0,5}{3}\,33,45 \approx 5,58.$$

6. Határozzuk meg ln 5 közelítő értékét az alábbi integrál kiszámításával:

$$I = \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx.$$

Legyen $h=1$, tehát a részintervallum hossza 1 egység.

I. Megoldás (tégläny-szabállyal):

A részintervallumok határpontjaihoz tartozó függvényértékek:

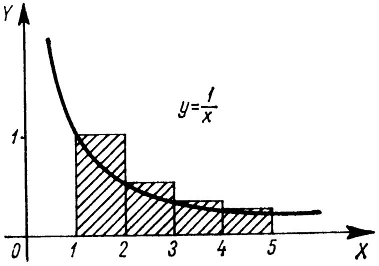
$$y(1) = 1; \quad y(2) = \frac{1}{2} = 0,5; \quad y(3) = \frac{1}{3} \approx 0,33;$$

$$y(4) = \frac{1}{4} = 0,25; \quad y(5) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

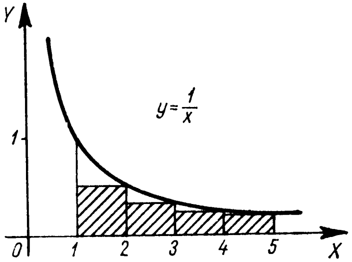
a) (103. ábra) $I \approx I_1 = 1(1+0,5+0,33+0,25) = 1\cdot 2,08 = 2,08.$

b) (104. ábra) $I \approx I_2 = 1(0,5+0,33+0,25+0,2) = 1\cdot 1,28 = 1,28.$

Megjegyzés: A függvény monoton csökkenő, ezért I_1 a határozott integrál egy felső korlátja, I_2 pedig egy alsó korlát.



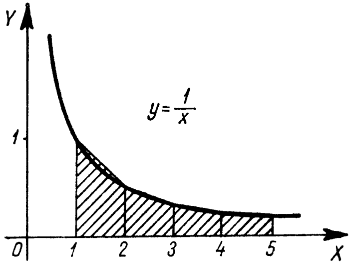
103. ábra



104. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti terület megközelíthető a 105. ábrán látható trapézokkal is.



105. ábra

$$I \approx h\left[\frac{y(1)}{2}+y(2)+y(3)+y(4)+\frac{y(5)}{2}\right].$$

$$y(1) = 1; \quad y(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5; \quad y(3) = \frac{1}{3} \approx 0{,}333;$$

$$y(4) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad y(5) = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

$$I \approx 1\left(\frac{1}{2}+0{,}5+0{,}333+0{,}25+\frac{0{,}2}{2}\right) =$$

$$= 0{,}5+0{,}5+0{,}333+0{,}25+0{,}1 = 1{,}683.$$

III. Megoldás (Simpson-szabály):

A részintervallumok száma páros, ezért

$$I \approx \frac{h}{3}[y(1)+4y(2)+2y(3)+4y(4)+y(5)] \approx$$

$$\approx \frac{1}{3}(1+4\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}333+4\cdot 0{,}25+0{,}2) =$$

$$= \frac{1}{3}(1+2+0{,}666+1+0{,}2) = \frac{4{,}866}{3} = 1{,}622.$$

Megjegyzés: $\ln 5 \approx 1{,}609$ (más módon számolva) és így a Simpson-szabállyal kapott érték a legjobb közelítés.

7. $I = \int\limits_3^7 \frac{dx}{\ln x} = ?$ Az intervallumot 4 részintervallumra osztjuk.

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek:

$$y(3) = \frac{1}{\ln 3} \approx \frac{1}{1{,}1} \approx 0{,}91; \qquad y(4) = \frac{1}{\ln 4} \approx \frac{1}{1{,}385} \approx 0{,}723;$$

$$y(5) = \frac{1}{\ln 5} \approx \frac{1}{1{,}61} = 0{,}622; \qquad y(6) = \frac{1}{\ln 6} \approx \frac{1}{1{,}79} \approx 0{,}558;$$

$$y(7) = \frac{1}{\ln 7} \approx \frac{1}{1{,}945} \approx 0{,}514.$$

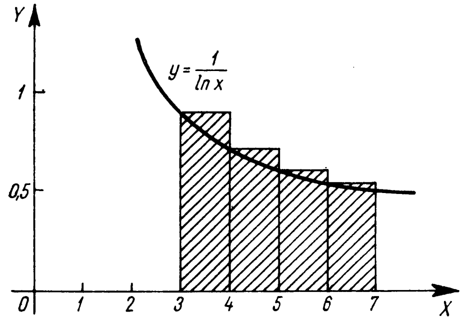
a) (106. ábra) $I \approx I_1 = 1[y(3)+y(4)+y(5)+y(6)] =$

$= 1(0{,}91+0{,}723+0{,}622+0{,}558) = 2{,}813.$

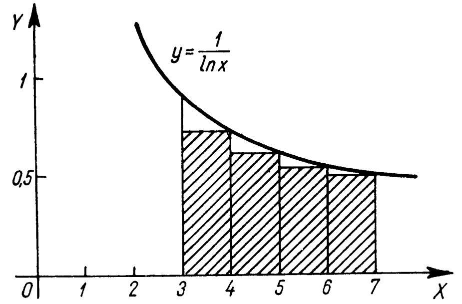
b) (107. ábra) $I \approx I_2 = 1[y(4)+y(5)+y(6)+y(7)] =$

$= 1(0{,}723+0{,}622+0{,}558+0{,}514) = 2{,}417$ területegység.

A határozott integrál alsó korlátja 2,417, felső korlátja pedig 2,813.



106. ábra



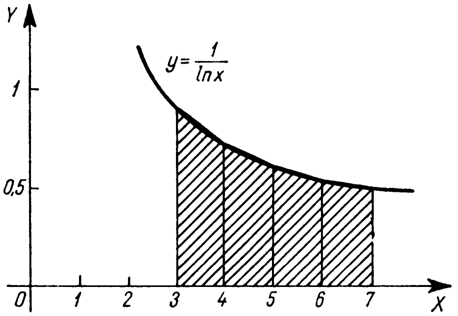
107. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (108. ábra):

$$I \approx I_3 = h\left[\frac{y(3)}{2}+y(4)+y(5)+y(6)+\frac{y(7)}{2}\right].$$

$$I \approx 1\left(\frac{0{,}91}{2}+0{,}723+0{,}622+0{,}558+\frac{0{,}514}{2}\right) =$$

$$= 0{,}455+0{,}723+0{,}622+0{,}558+0{,}257 = 2{,}615.$$



108. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx \frac{h}{3}[y(3)+4y(4)+2y(5)+4y(6)+y(7)] \approx$$

$$\approx \frac{1}{3}(0{,}91+4\cdot 0{,}723+2\cdot 0{,}622+4\cdot 0{,}558+0{,}514) =$$

$$= \frac{1}{3}(0{,}91+2{,}892+1{,}244+2{,}232+0{,}514) = \frac{7{,}792}{3} = 2{,}597.$$

8. Határozzuk meg az $I = \int\limits_3^9 \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ integrál közelítő értékét.

Az intervallumot 6 részintervallumra osztjuk.

I. Megoldás (tégläny-szabállyal).

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek:

$$y(3) = \sqrt[3]{1+3^2} = \sqrt[3]{1+9} = \sqrt[3]{10} \approx 2{,}16;$$

$$y(4) = \sqrt[3]{1+4^2} = \sqrt[3]{1+16} = \sqrt[3]{17} \approx 2{,}57;$$

$$y(5) = \sqrt[3]{1+5^2} = \sqrt[3]{1+25} = \sqrt[3]{26} \approx 2{,}96;$$

$$y(6) = \sqrt[3]{1+6^2} = \sqrt[3]{1+36} = \sqrt[3]{37} \approx 3{,}33;$$

$$y(7) = \sqrt[3]{1+7^2} = \sqrt[3]{1+49} = \sqrt[3]{50} \approx 3{,}68;$$

$$y(8) = \sqrt[3]{1+8^2} = \sqrt[3]{1+64} = \sqrt[3]{65} \approx 4{,}02;$$

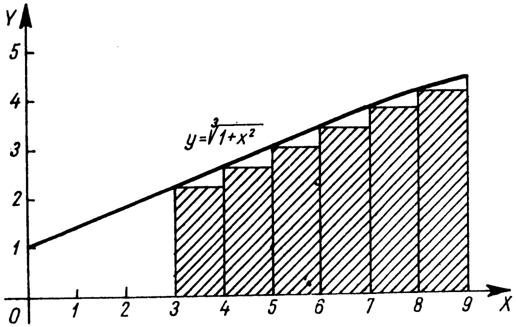
$$y(9) = \sqrt[3]{1+9^2} = \sqrt[3]{1+81} = \sqrt[3]{82} \approx 4{,}35.$$

a) (109. ábra) $I \approx I_1 = h[y(3)+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8)] =$

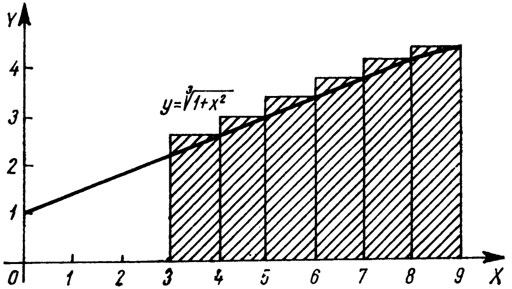
$= 1(2{,}16+2{,}57+2{,}96+3{,}33+3{,}68+4{,}02) = 18{,}72.$

b) (110. ábra) $I \approx I_2 = h[y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8)+y(9)] =$

$= 1(2{,}57+2{,}96+3{,}33+3{,}68+4{,}02+4{,}35) = 20{,}91.$



109. ábra



110. ábra

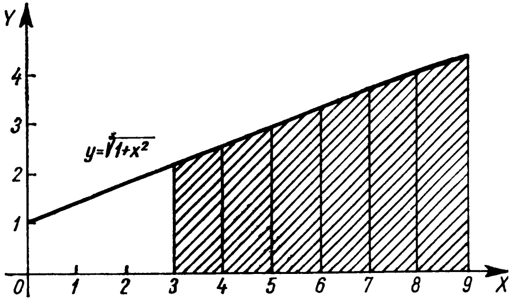
Megjegyzés: A határozott integrál alsó korlátja 18,72, felső korlátja 20,91.

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (111. ábra):

$$I \approx I_3 = h\left[\frac{y(3)}{2}+y(4)+y(5)+y(6)+y(7)+y(8)+\frac{y(9)}{2}\right].$$

$$I \approx 1\left(\frac{2{,}16}{2}+2{,}57+2{,}96+3{,}33+3{,}68+4{,}02+\frac{4{,}35}{2}\right) =$$

$$= 1{,}08+2{,}57+2{,}96+3{,}33+3{,}68+4{,}02+2{,}175 = 19{,}815.$$



111. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx \frac{h}{3}[y(3)+4y(4)+2y(5)+4y(6)+2y(7)+4y(8)+y(9)] \approx$$

$$\approx \frac{1}{3}(2{,}16+4\cdot 2{,}57+2\cdot 2{,}96+4\cdot 3{,}33+2\cdot 3{,}68+4\cdot 4{,}02+4{,}35) =$$

$$= \frac{1}{3}(2{,}16+10{,}28+5{,}92+13{,}32+7{,}36+16{,}08+4{,}35) =$$

$$= \frac{59{,}47}{3} \approx \mathbf{19{,}89.}$$

9. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét numerikus integrálási eljárásokkal:

$$I = \int_5^9 \frac{1}{\sqrt[4]{100+x^3}}\,dx.$$

Az intervallumot négy részintervallumra osztjuk, vagyis $h=1$.

I. Megoldás (tégläny-szabállyal):

A szükséges függvényértékek:

$$y(5) = \frac{1}{\sqrt[4]{100+5^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+125}} = \frac{1}{\sqrt[4]{225}} \approx \frac{1}{3{,}87} \approx 0{,}258;$$

$$y(6) = \frac{1}{\sqrt[4]{100+6^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+216}} = \frac{1}{\sqrt[4]{316}} \approx \frac{1}{4{,}22} \approx 0{,}237;$$

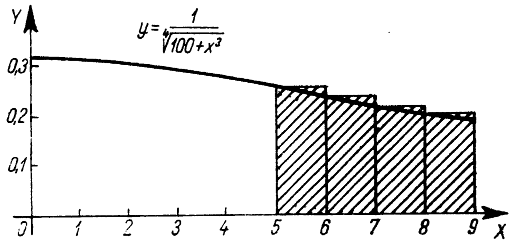
$$y(7) = \frac{1}{\sqrt[4]{100+7^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+343}} = \frac{1}{\sqrt[4]{443}} \approx \frac{1}{4{,}58} \approx 0{,}218;$$

$$y(8) = \frac{1}{\sqrt[4]{100+8^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+512}} = \frac{1}{\sqrt[4]{612}} \approx \frac{1}{4{,}98} \approx 0{,}201;$$

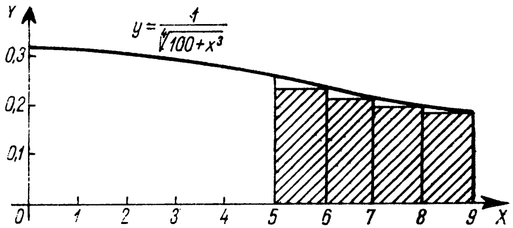
$$y(9) = \frac{1}{\sqrt[4]{100+9^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+729}} = \frac{1}{\sqrt[4]{829}} \approx \frac{1}{5{,}36} \approx 0{,}186.$$

a) (112. ábra) $I \approx I_1 = h[y(5)+y(6)+y(7)+y(8)] =$
$= 1(0{,}258+0{,}237+0{,}218+0{,}201) = \mathbf{0{,}914.}$

b) (113. ábra) $I \approx I_2 = h[y(6)+y(7)+y(8)+y(9)] =$
$= 1(0{,}237+0{,}218+0{,}201+0{,}186) = \mathbf{0{,}842.}$



112. ábra



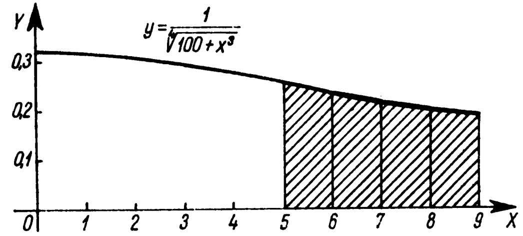
113. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (114. ábra):

$$I \approx I_3 = h\left[\frac{y(5)}{2}+y(6)+y(7)+y(8)+\frac{y(9)}{2}\right].$$

$$I \approx 1\left(\frac{0{,}258}{2}+0{,}237+0{,}218+0{,}201+\frac{0{,}186}{2}\right) =$$

$$= 0{,}129+0{,}237+0{,}218+0{,}201+0{,}093 = \mathbf{0{,}878.}$$



114. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx \frac{h}{3}[y(5)+4y(6)+2y(7)+4y(8)+y(9)] \approx$$

$$\approx \frac{1}{3}(0{,}258+4\cdot 0{,}237+2\cdot 0{,}218+4\cdot 0{,}201+0{,}186) =$$

$$= \frac{1}{3}(0{,}258+0{,}948+0{,}436+0{,}804+0{,}186) = \frac{2{,}632}{3} = 0{,}877.$$

10. Határozzuk meg az alábbi trigonometrikus függvény integrálját: $I = \int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin x\, dx = ?$ Az intervallumot 4 részintervallumra osztjuk, ezért egy részintervallum hossza $\frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$ radián $= 30°$. A függvényértékek kiszámításakor a független változó értékét fokban helyettesítjük be.

A függvény ($\sin x$) a $\left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$ intervallumban nem monoton, és így a téglány-szabályt alkalmazva nem kapunk alsó és felső korlátot, ezért az integrál közelítő értékét csak a trapéz-szabállyal, valamint a Simpson-szabállyal határozzuk meg.

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

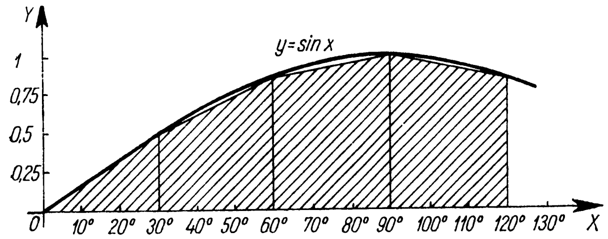
$y(0) = \sin 0° = 0$; $y(30°) = \sin 30° = 0{,}5$; $y(60°) = \sin 60° \approx 0{,}866$;

$y(90°) = \sin 90° = 1$; $y(120°) = \sin 120° \approx 0{,}866$.

I. Megoldás (trapéz-szabállyal) (115. ábra):

$$I \approx I_1 = h\left[\frac{y(0)}{2}+y(30°)+y(60°)+y(90°)+\frac{y(120°)}{2}\right] =$$

$$= 0{,}524\left(0+0{,}5+0{,}866+1+\frac{0{,}866}{2}\right) = 0{,}524\cdot 2{,}799 \approx 1{,}465.$$



115. ábra

II. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx \frac{h}{3}[y(0)+4y(30°)+2y(60°)+4y(90°)+y(120°)] =$$

$$= \frac{0{,}524}{3}(0+4\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}866+4\cdot 1+0{,}866) \approx$$

$$\approx 0{,}175(2+1{,}732+4+0{,}866) = 0{,}175\cdot 8{,}598 \approx 1{,}5.$$

II. Megoldás (integrálással):

$$\int\limits_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{2}{3}\pi} = -\cos 120° + \cos 0° =$$

$$= \cos 60° + \cos 0° = 0{,}5+1 = 1{,}5.$$

Megjegyzés: A Simpson-szabállyal — kerekítések után — kapott érték megegyezik a most kapott pontos értékkel.

11. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx$.

Igazolni lehet, hogy az integrandus primitív függvénye zárt alakban nem határozható meg. Ezért az integrál értékét csak közelítő módszerrel tudjuk meghatározni.

A $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumot négy részintervallumra osztjuk, vagyis $h=\frac{\pi}{8}\approx 0{,}393$.

I. Megoldás (tégläny-szabállyal):

Az integrandus $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$-ben monoton, így alsó és felső korlátot kapunk. A feladat megoldásához szükséges függvényértékek:

$$y(0)=\sqrt{1+0}=1;$$

$$y(22{,}5^\circ)=\sqrt{1+\sin^2 22{,}5^\circ}\approx\sqrt{1+0{,}388^2}\approx\sqrt{1+0{,}147}\approx 1{,}07;$$

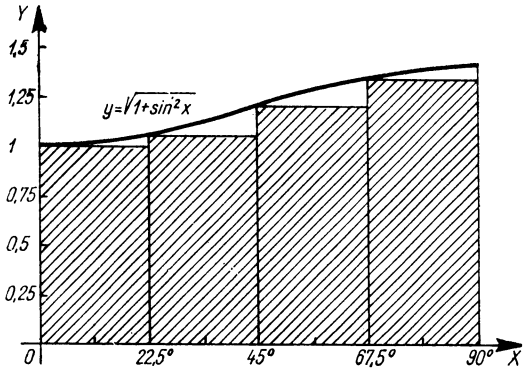
$$y(45^\circ)=\sqrt{1+\sin^2 45^\circ}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{1{,}5}\approx 1{,}225;$$

$$y(67{,}5^\circ)=\sqrt{1+\sin^2 67{,}5^\circ}\approx\sqrt{1+0{,}922^2}\approx\sqrt{1+0{,}85}=\sqrt{1{,}85}\approx 1{,}36.$$

$$y(90^\circ)=\sqrt{1+\sin^2 90^\circ}=\sqrt{2}\approx 1{,}41.$$

a) (116. ábra) $I>I_2=h[y(0)+y(22{,}5^\circ)+y(45^\circ)+y(67{,}5^\circ)]=$

$=0{,}393(1+1{,}07+1{,}225+1{,}36)=0{,}393\cdot 4{,}655\approx 1{,}86.$



116. ábra

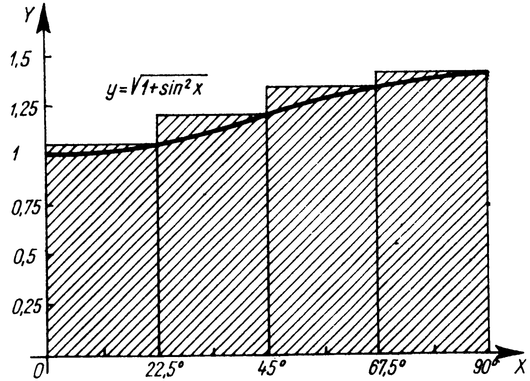
b) (117. ábra) $I<I_2=h[y(22{,}5^\circ)+y(45^\circ)+y(67{,}5^\circ)+y(90^\circ)]=$

$=0{,}393(1{,}07+1{,}225+1{,}36+1{,}41)=0{,}393\cdot 5{,}065\approx 1{,}99.$

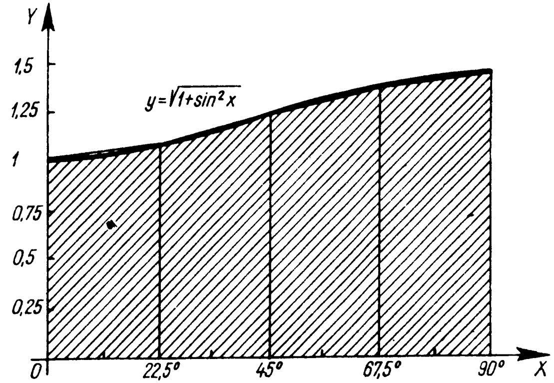
II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (118. ábra):

$$I\approx I_3=h\left[\frac{y(0)}{2}+y(22{,}5^\circ)+y(45^\circ)+y(67{,}5^\circ)+\frac{y(90^\circ)}{2}\right].$$

$I\approx 0{,}393(0{,}5+1{,}07+1{,}225+1{,}36+0{,}705)=0{,}393\cdot 4{,}86\approx 1{,}91.$



117. ábra



118. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx \frac{h}{3}[y(0)+4y(22{,}5°)+2y(45°)+4y(67{,}5°)+y(90°)] \approx$$

$$\approx \frac{0{,}393}{3}(1+4\cdot 1{,}07+2\cdot 1{,}225+4\cdot 1{,}36+1{,}41) =$$

$$= 0{,}131(1+4{,}28+2{,}45+5{,}44+1{,}41) = 0{,}131\cdot 14{,}58 \approx 1{,}91.$$

Mivel a trapéz-szabállyal és a Simpson-szabállyal ugyanazt az eredményt kaptuk, mely a tégläny-szabályból adódó korlátok között van, feltehető, hogy 1,91 három értékes jegyre pontos.

12. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét:

$I = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$. A $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumot 6 részintervallumra osztjuk, vagyis $h = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}1745$.

I. Megoldás (tégläny-szabállyal):

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 0°}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707;$$

$$y(10°) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 10°}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}985^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}97}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1{,}97}} \approx \frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}712;$$

$$y(20°) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 20°}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}94^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}88}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1{,}88}} \approx \frac{1}{1{,}37} \approx 0{,}73;$$

$$y(30°) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 30°}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}865^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}75}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1{,}75}} \approx \frac{1}{1{,}32} \approx 0{,}755;$$

$$y(40°) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 40°}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}766^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}59}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1{,}59}} \approx \frac{1}{1{,}26} \approx 0{,}794;$$

$$y(50°) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 50°}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}644^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0{,}414}} =$$

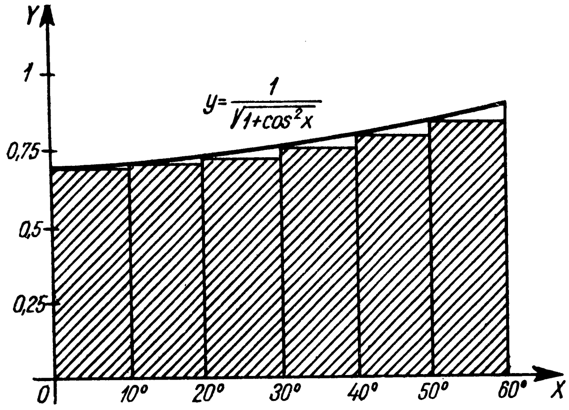
$$= \frac{1}{\sqrt{1{,}414}} \approx \frac{1}{1{,}19} \approx 0{,}842;$$

$$y(60°) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 60°}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}894.$$

a) $I \approx I_1 = h[y(0)+y(10°)+y(20°)+y(30°)+y(40°)+y(50°)] =$

$= 0{,}1745(0{,}707+0{,}712+0{,}73+0{,}755+0{,}794+0{,}842) =$

$= 0{,}1745\cdot 4{,}540 \approx 0{,}966.$ (119. ábra)

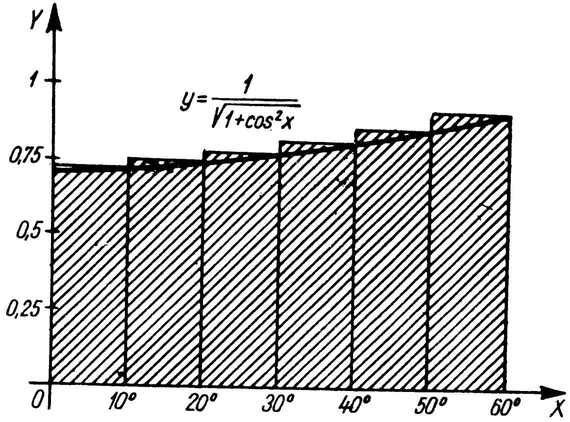


119. ábra

b) $I \approx I_2 = h[y(10°)+y(20°)+y(30°)+y(40°)+y(50°)+y(60°)] =$

$= 0{,}1745(0{,}712+0{,}73+0{,}755+0{,}794+0{,}842+0{,}894) =$

$= 0{,}1745\cdot 4{,}727 \approx 0{,}826.$ (120. ábra)

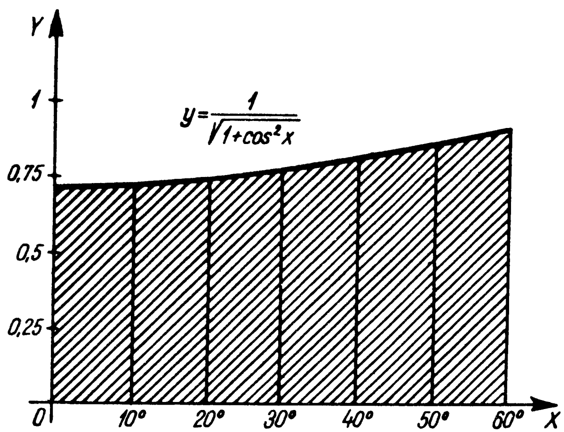


120. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (121. ábra):

$$I \approx I_3 = h\left[\frac{y(0)}{2}+y(10^\circ)+y(20^\circ)+y(30^\circ)+y(40^\circ)+y(50^\circ)+\frac{y(60^\circ)}{2}\right].$$

$$I \approx 0{,}1745(0{,}3535+0{,}712+0{,}73+0{,}735+0{,}749+0{,}842+0{,}447) =$$
$$= 0{,}1745\cdot 4{,}6135 \approx 0{,}808.$$



121. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx \frac{h}{3}[y(0)+4y(10^\circ)+2y(20^\circ)+4y(30^\circ)+2y(40^\circ)+4y(50^\circ)+y(60^\circ)] \approx$$
$$\approx \frac{0{,}1745}{3}(0{,}707+4\cdot 0{,}712+2\cdot 0{,}73+$$
$$+4\cdot 0{,}755+2\cdot 0{,}794+4\cdot 0{,}842+0{,}894) =$$
$$= \frac{0{,}1745}{3}(0{,}707+2{,}848+1{,}46+3{,}02+1{,}588+3{,}368+0{,}894) =$$
$$= \frac{0{,}1745\cdot 13{,}885}{3} \approx 0{,}808.$$

7. Fizikai feladatok

A fizikában sok alkalmazási területe van a határozott integrálnak. Ezekre mutatunk most néhány feladatot.

Gyakorló feladatok

1. Valamely test $a=10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ állandó gyorsulással mozog. Határozzuk meg a test által megtett utat és a test pillanatnyi sebességét mint az idő függvényét, ha x_0 a test helyét és v_0 a kezdősebességét jelentik a $t_0=0$ időpillanatban. Legyen $x_0=3$ m, és $v_0=12\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ha egy test X-tengely irányú sebessége a $t=t_0$ időpontban v_0, és gyorsulása mint az idő függvénye $a=a(t)$, akkor sebessége tetszőleges $t>t_0$ időpontban

$$v = v(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau + v_0;$$

ha a test a t_0 időpontig x_0 utat (elmozdulást) tett meg és sebessége $v=v(t)$, akkor a megtett út (elmozdulás) tetszőleges $t>t_0$ időpontig

$$x = \int_{t_0}^{t} v(t)\,d\tau + x_0.$$

Amennyiben a gyorsulás állandó, akkor

$$v = \int_{t_0}^{t} a\,d\tau + v_0 = [a\tau]_{t_0}^{t} + v_0 = a(t-t_0) + v_0;$$

$$x = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau + x_0 = \int_{t_0}^{t} [a(\tau - t_0) + v_0]\,d\tau + x_0 =$$

$$= \left[a\frac{(\tau - t_0)^2}{2} + v_0\tau \right]_{t_0}^{t} + x_0 = a\frac{(t-t_0)^2}{2} + v_0(t-t_0) + x_0.$$

A feladat megoldása tehát:

$v = 10t + 12$, és $x = 5t^2 + 12t + 3$.

2. Valamely testet a nehézségi erőtérben $v_0 = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró irányban elhajítunk. (Az ilyen típusú mozgást nevezzük ferde hajításnak.) Határozzuk meg a test helyzetét az elhajítás időpontjától számított 3 s múlva!

A test kezdősebességének *X*- és *Y*-tengely irányú összetevői meghatározhatók, ezekből az *X*- és *Y*-tengely irányú elmozdulásuk is kiszámítható.

$$v_{x0} = v_0 \cos\alpha = 50\cos 30° \approx 50 \cdot 0{,}866 = 43{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$v_{y0} = v_0 \sin\alpha = 50\sin 30° = 50 \cdot 0{,}5 = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A test által az *X*-tengely irányában megtett út az

$$s_x = \int_0^t v_x\,d\tau = \int_0^t v_0\cos\alpha\,d\tau = [v_0\tau\cos\alpha]_0^t = v_0 t\cos\alpha$$

képlettel határozható meg.

Az *Y*-tengely irányú sebesség pillanatnyi értéke:

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0\sin\alpha - gt.$$

Ha v_y-t t szerint integráljuk, akkor megkapjuk az *Y*-tengely irányában megtett utat mint az idő függvényét.

$$s_y = \int_0^t v_y\,d\tau = \int_0^t (v_0\sin\alpha - g\tau)\,d\tau =$$

$$= \left[v_0\tau\sin\alpha - g\frac{\tau^2}{2} \right]_{t_0}^{t} = v_0 t\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2.$$

Behelyettesítjük az állandók értékét:

$s_x = 43{,}3t$; $s_y = 25t - 5t^2$.

Felírtuk a mozgásegyenletet. Ha most t helyébe hármat írunk, megkapjuk a test helyzetét jellemző koordinátákat, ezek: $s_x(3) = 43{,}3 \cdot 3 = 129{,}9$ m; $s_y(3) = 25 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = 75 - 45 = 30$ m.

3. Legyen valamely tömegpont gyorsulása az időnek színuszfüggvénye, például

$a = -12\sin 4t$.

Ha az időt másodpercben mérjük, akkor a gyorsulást $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-ben kapjuk. Megjegyezzük, hogy a 4-nek mértékegysége van $\left(\frac{1}{\text{s}}\right)$, ugyanis csak mértékegység nélküli viszonyszámnak határozhatjuk meg a színuszát.

Határozzuk meg a mozgó pont pillanatnyi sebességét és elmozdulását mint az idő függvényét, ha a $t_0 = 0$, időpillanatban $v_0 = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $x_0 = 0$, továbbá a mozgó pont helyzetét a $t = 0{,}6$ s időpillanatban!

A t időpontbeli sebesség:

$$v = \int_0^t (-12\sin 4\tau)\,d\tau + v_0 = \left[\frac{12\cos 4\tau}{4} \right]_0^t + v_0 =$$

$$= [3\cos 4\tau]_0^t + v_0 = 3\cos 4t - 3 + 3 = 3\cos 4t.$$

A test pillanatnyi elmozdulását x-szel jelölve

$$x = \int_0^t v\,d\tau + x_0.$$

v helyébe a pillanatnyi sebességet írva és figyelembe véve, hogy $x_0=0$, az elmozdulás mint az idő függvénye, az alábbi:

$$x = \int_0^t 3\cos 4\tau\, d\tau = \left[\frac{3}{4}\sin 4\tau\right]_0^t = \frac{3}{4}\sin 4t.$$

A $t=0{,}6$ s időpillanatban az elmozdulás:

$$x(0{,}6) = \frac{3}{4}\sin(4\cdot 0{,}6) = \frac{3}{4}\sin 2{,}4.$$

A radiánban adott szöget átszámítjuk fokba, majd leolvassuk logarlécen a szög színuszát:

$$2{,}4 \approx 2{,}4\cdot 57{,}3° \approx 137{,}5°.$$

$$x(0{,}6) = \frac{3}{4}\sin 137{,}5° = \frac{3}{4}\sin 42{,}5° \approx 0{,}75\cdot 0{,}676 \approx 0{,}507 \text{ m}.$$

4. Bármely rugó rugalmas megnyúlása egyenesen arányos a rugóra ható erővel: $F=Dx$, ahol D a rugóállandó (x a megnyúlást, F az erőt jelöli). Mivel a munka az erő út szerinti integrálja, ezért ahhoz, hogy a rugó eredeti hosszát x_{max}-szal megnyújtsuk, a következő munkát kell végeznünk:

$$W = \int_0^{x_{max}} F\,dx = \int_0^{x_{max}} Dx\,dx = \left[D\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_{max}} = \frac{D}{2}x_{max}^2.$$

Tehát a végzett munka arányos a rugó hosszúságváltozásának négyzetével.

Mekkora a $D=6\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}}$ rugóállandójú rugó 4 cm-es megnyújtásához szükséges munka?

$$W = \frac{6}{2}\cdot 16 = 48 \text{ kp cm} = 0{,}48 \text{ mkp}.$$

5. Mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy négyszeres Földsugár távolságra vigyünk egy 2 t tömegű űrhajót? A Földsugár $R=6370$ km; a gravitáció állandó értéke:

$$k = 6{,}67\cdot 10^{-8}\frac{\text{cm}^3}{\text{gs}^2} = 6{,}67\cdot 10^{-8}\frac{10^{-6}\text{m}^3}{10^{-3}\text{ kg s}^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}.$$

A test és a Föld között ható erő a tömegvonzás törvénye értelmében arányos a két test tömegével, és fordítva arányos tömegközpontjaik távolságának négyzetével:

$$F = k\frac{Mm}{r^2}.$$

A munka — mely az erő út szerinti integrálja — kiszámítható, ha a Föld tömegét is ismerjük, ami $M \approx 6\cdot 10^{24}$ kg.

$$W = \int_R^{4R} k\frac{mM}{r^2}dr = kmM\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{4R} =$$

$$= kmM\left(-\frac{1}{4R}+\frac{1}{R}\right) = kmM\frac{3}{4R}.$$

Az adatokat behelyettesítjük, és a végzett munkát kiszámítjuk.

$$W = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}\cdot 2\cdot 10^3\text{ kg } 6\cdot 10^{24}\text{ kg}\frac{3}{4\cdot 6{,}37\cdot 10^6\text{ m}} =$$

$$= \frac{6{,}67\cdot 9}{3{,}37}\cdot 10^{10}\text{ kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \approx 9{,}42\cdot 10^{10}\text{ joule} \approx 9{,}42\cdot 10^9\text{ mkp}.$$

6. A testen végzett elemi munka a következő módon is megadható:

$$dW = F\,ds = m\frac{dv}{dt}ds = mv\,dv.$$

A végzett munka, miközben az m tömegű test sebessége v_1-ről v_2-re változik:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv = \left[\frac{mv^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

A test mozgásmennyiségének a sebesség szerinti határozott integrálja a test mozgási energiájának megváltozását adja meg.

Legyen a test tömege 5 kg, kezdősebessége $10\frac{m}{s}$, végsebessége $16\frac{m}{s}$.

A végzett munka ekkor

$$W = \frac{5\cdot 16^2}{2} - \frac{5\cdot 10^2}{2} = 2{,}5(256-100) = 2{,}5\cdot 156 =$$

$$= 390\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 390\,\text{joule}.$$

7. Egy m tömegű testre az időben színuszosan változó F erő hat. Számítsuk ki a test mozgásmennyiségének megváltozását, ha

$$F = 2\sin 3t\,[\text{N}];\quad t_1 = 0{,}1\text{ s};\quad t_2 = 0{,}2\text{ s};\quad m = 3\text{ kg}.$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F d\tau = \int_{t_1}^{t_2} 2\sin 3\tau\, d\tau = \left[-\frac{2}{3}\cos 3\tau\right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cos 3t_2 + \frac{2}{3}\cos 3t_1 = -\frac{2}{3}\cos 0{,}6 + \frac{2}{3}\cos 0{,}3.$$

A radiánban kapott szögeket fokba átszámítjuk:

$$0{,}6 \approx 57{,}3°\cdot 0{,}6 = 34{,}38°;\quad 0{,}3 \approx 17{,}19°.$$

Igy

$$I = \frac{2}{3}(\cos 17{,}19° - \cos 34{,}38°) \approx \frac{2}{3}(0{,}955 - 0{,}825) =$$

$$= \frac{2\cdot 0{,}13}{3} \approx 0{,}0866\text{ Ns} = 8{,}66\cdot 10^{-2}\text{ Ns}.$$

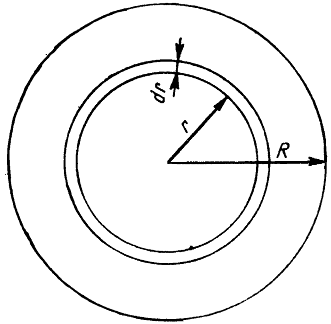
8. Határozzuk meg a körlemez szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Ha a lemez sugara R, vastagsága v, a lemez anyagának sűrűsége ϱ és a lemez tehetetlenségi nyomatéka Θ (122. ábra), akkor egy dr szélességű csíkjának tömege:

$$dm = 2r\pi v\, dr\varrho;$$

ezen csík tehetetlenségi nyomatéka:

$$d\Theta = r^2 dm = 2r^3\pi v\varrho\, dr;$$



122. ábra

tehát a teljes lemez tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \int_0^R 2r^3\pi v\varrho\, dr = 2\pi v\varrho\int_0^R r^3\, dr =$$

$$= 2\pi v\varrho\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2\pi v\varrho R^4}{4} = R^2\pi v\varrho\frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2}.$$

Legyen $R = 20$ cm; $\varrho = 7{,}9\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; $v = 2$ cm; $\Theta = ?$

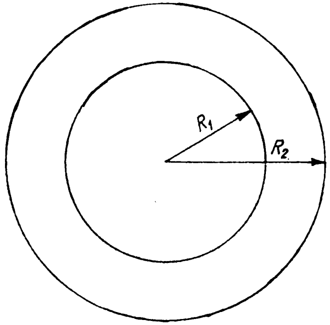
$$\Theta = \frac{R^4\pi v\varrho}{2} = \frac{2^4\pi\cdot 0{,}2\cdot 7{,}9}{2}\text{ kg dm}^2 \approx$$

$$\approx 16\cdot\pi\cdot 0{,}79 \approx 39{,}7\text{ kg dm}^2 = 0{,}397\text{ kg dm}^2.$$

9. Határozzuk meg egy körgyűrű alakú lendítőkerék tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. A belső kör sugara R_1, a külső köré R_2, a lendítőkerék vastagsága v, az anyag sűrűsége ϱ (123. ábra)!

Az elemi tehetetlenségi nyomaték az előbbi példával megegyezik, de az integrálás határai nem.

$$d\Theta = 2r^3\pi v\varrho\, dr;$$



123. ábra

$$\Theta = \int_{R_1}^{R_2} 2r^3 \pi v \varrho \, dr = 2\pi v \varrho \left[\frac{r^4}{4}\right]_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{2\pi v \varrho}{4}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi v \varrho}{2}(R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2) =$$

$$= \frac{\pi (R_2^2 - R_1^2) v \varrho}{2}(R_2^2 + R_1^2).$$

A szorzat első tényezője a test tömegének a fele, így

$$\Theta = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2).$$

Legyen $R_1 = 1$ m; $R_2 = 1{,}2$ m; $v = 1{,}5$ dm; $\varrho = 7{,}9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; $\Theta = ?$

$$\Theta = \frac{(R_2^2 - R_1^2)\pi v \varrho}{2}(R_2^2 + R_1^2) = \frac{(12^2 - 10^2)\pi \cdot 1{,}5 \cdot 7{,}9}{2}(1{,}2^2 + 1^2).$$

A test tömegét kg-ban, a tömeg szorzótényezőjét pedig m-ben helyettesítettük azért, hogy a tehetetlenségi nyomatékot kg m²-ben kapjuk.

$$\Theta = \frac{44 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 7{,}9 \cdot 2{,}44}{2} \approx 2000 \text{ kg m}^2.$$

10. Valamely tengely mentén rögzített testre állandó forgatónyomaték hat. A test tehetetlenségi nyomatéka Θ, a forgatónyomaték M, a test kezdeti szögsebessége ω_0, szöge pedig α_0. Határozzuk meg szögsebességét és elfordulási szögét mint az idő függvényét!

A forgatónyomaték állandó, ezért

$$\omega = \int_0^t \beta \, d\tau + \omega_0,$$

ahol β a test szöggyorsulása, amely a testre ható forgatónyomatékkal és a test tehetetlenségi nyomatékával a következő kapcsolatban van:

$$\beta = \frac{M}{\Theta}.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\omega = \int_0^t \frac{M}{\Theta} d\tau + \omega_0 = \left[\frac{M\tau}{\Theta}\right]_0^t + \omega_0 = \frac{Mt}{\Theta} + \omega_0.$$

A test szögelfordulását mint az idő függvényét, ω idő szerinti integrálja adja:

$$\alpha = \int_0^t \omega \, d\tau + \alpha_0 = \int_0^t \left(\frac{M\tau}{\Theta} + \omega_0\right) d\tau + \alpha_0 =$$

$$= \left[\frac{M\tau^2}{2\Theta} + \omega_0 \tau\right]_0^t + \alpha_0 = \frac{Mt^2}{2\Theta} + \omega_0 t + \alpha_0.$$

Legyen $M = 5$ Nm; $\Theta = 2$ kg m²; $\omega_0 = 2 \frac{1}{\text{s}}$; $\alpha = 0{,}5$.

Ekkor

$$\omega = \frac{5t}{2} + 2 = 2{,}5t + 2,$$

és

$$\alpha = \frac{5}{4}t^2 + 2t + 0{,}5.$$

11. Ha egy gáz állandó hőmérsékleten tágul, akkor tágulási munkát végez. Az elemi tágulási munka:

$$dW = p\,dV.$$

A V_1-ről V_2-re való tágulás közben végzett munka:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

A gáz nyomása és térfogata közötti kapcsolatot (állandó hőmérsékleten) a Boyle—Mariotte-törvény adja meg:

$$pV = k, \quad \text{ebből} \quad p = \frac{k}{V}.$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k}{V}\,dV = k\,[\ln V]_{V_1}^{V_2} = k\,(\ln V_2 - \ln V_1) = k \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Legyen $V_1 = 5\ \mathrm{m^3}$; $p_1 = 2\ \mathrm{atm}$; $V_2 = 20\ \mathrm{m^3}$; $W = ?$

A Boyle—Mariotte-törvény arányossági tényezője: $p_1 V_1 = 10\ \mathrm{m^3\ atm}$.

$$W = 10 \ln \frac{20}{5} = 10 \ln 4 \approx 10 \cdot 1{,}39 = 13{,}9\ \mathrm{m^3\ atm}.$$

A végzett munkát mkp-ba számítjuk át:

$$W = 13{,}9\ \mathrm{m^3} \cdot 1{,}033 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m^2}} \approx 14{,}4 \cdot 10^4\ \mathrm{mkp}.$$

12. Határozzuk meg a pontszerű Q töltéstől r távolságban a potenciál értékét. A potenciál a térerősség r-től ∞-ig vett improprius integrálja. A pontszerű töltéstől x távolságban a térerősség: $E = k\dfrac{Q}{x^2}$, ahol $k = 9 \cdot 10^9\ \dfrac{\mathrm{Cm^2}}{\mathrm{C^2}}$ az MKSA-rendszerben.

$$U = \int_r^\infty k\frac{Q}{x^2}\,dx = \left[-k\frac{Q}{x}\right]_r^\infty = k\frac{Q}{r}.$$

Legyen $Q = 10^{-6}\ \mathrm{C}$ (coulomb); $r = 30\ \mathrm{cm} = 0{,}3\ \mathrm{m}$; $U = ?$

$$U = 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\ \frac{10^{-6}\ \mathrm{C}}{0{,}3\ \mathrm{m}} = 30 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^4\ \mathrm{V}.$$

13. Határozzuk meg a C kapacitású és Q töltésű kondenzátor elektromos energiáját!

A kondenzátor energiáját úgy növeljük, hogy az egyik fegyverzetről dq töltést viszünk a másik lemezre. A töltés átvitele közben végzett elemi munka $dW = U\,dq$, ahol U a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség, amely a lemezeken levő töltéstől függ:

$$U = \frac{q}{C}.$$

$$W = \int_0^Q U\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q = \frac{Q}{2C}.$$

Legyen $Q = 10^{-6}\ C$ és $C = 3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}$, ekkor $W = \dfrac{Q}{2C} = \dfrac{10^{-6} \cdot C}{6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}} = \dfrac{1}{6}$ joule.

14. Határozzuk meg a színuszosan váltakozó áram effektív értékét! Valamely váltakozó áram effektív értékén annak az egyenáramnak értékét értjük, amely ugyanabban a vezetőben ugyanannyi idő alatt ugyanannyi hőt fejleszt, mint a váltakozó áram. Kiszámítását úgy végezzük, hogy négyzetének teljes periódusra számított átlagértékéből négyzetgyököt vonunk.

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_0^2}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t\,dt} = \sqrt{\frac{I_0^2}{T}\int_9^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_0^2}{T}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right]_0^T} = \sqrt{\frac{I_0^2}{T}\left(\frac{T}{2} - \frac{\sin 2\omega T}{4\omega} - 0\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_0^2}{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Vagyis a színuszosan váltakozó áram effektív értékét megkapjuk, ha a maximális értéket (az amplitúdót) osztjuk $\sqrt{2}$-vel.

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Szűcs Péter igazgató

Athenaeum Nyomda, 92.0845
Felelős vezető: Vida József igazgató

Felelős szerkesztő: Votisky Zsuzsa matematika–fizika tanár
A 6. kiadást gondozta: Dr. Ráczné Nagy Borbála okl. villamosmérnök
Műszaki vezető: Dornizs László
Műszaki szerkesztő: Marekné Marosi Katalin
A kötést tervezte: Kováts Tibor
A könyv formátuma: Fr5
Ívterjedelme: 17,6 (A5) ív
Ábrák száma: 123
Papír minősége: 70 g fm. ofszet
Betűcsalád és méret: New Times 10/10
Azonossági szám: 10136
MŰ: 4537-i-9295
Készült az MSZ 5601–1983 és 5602–1983 szerint
Az 5. kiadás változatlan utánnyomása