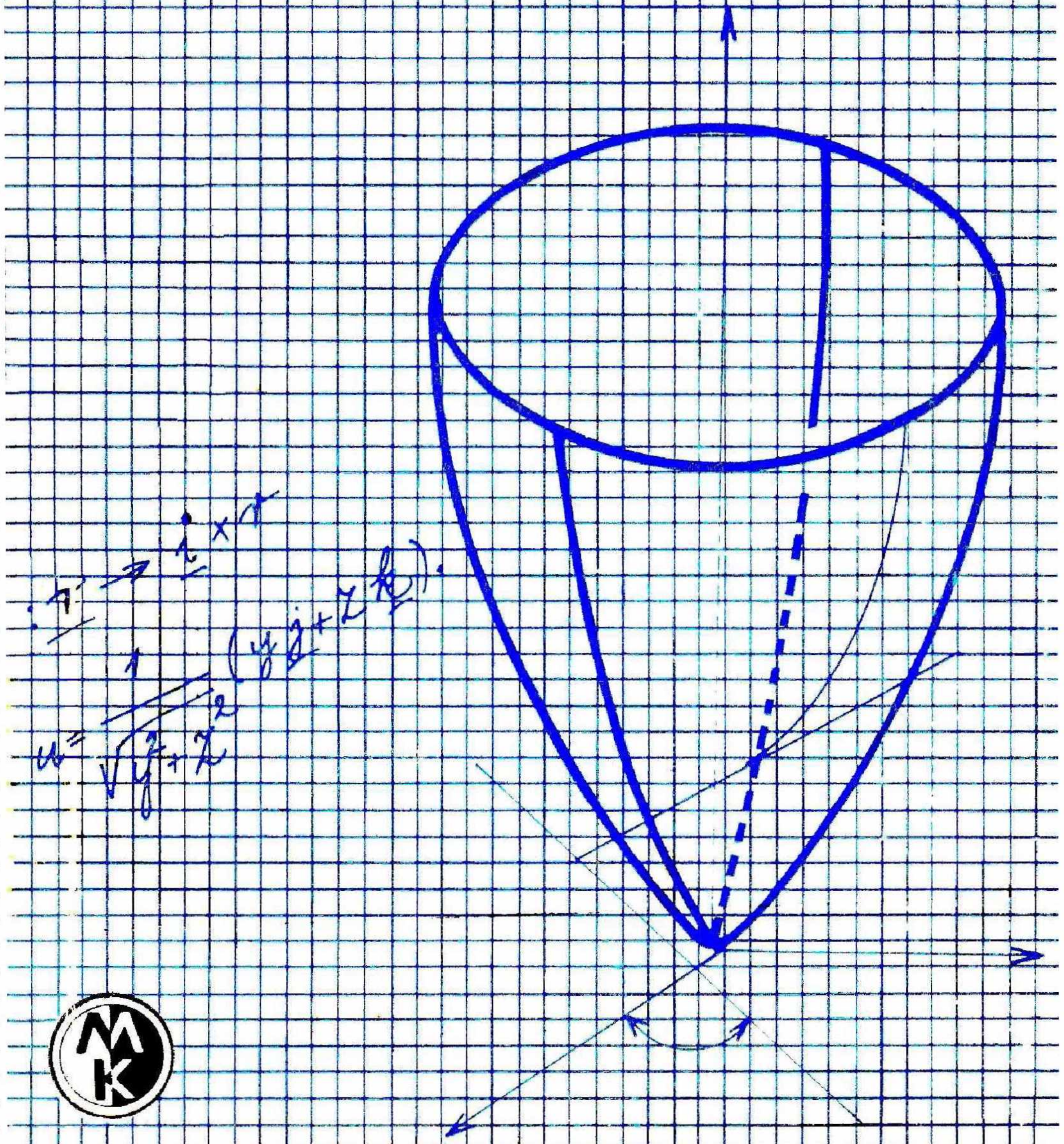
45,— Ft

FEKETE–ZALAY

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISE

PÉLDATÁR



FEKETE ZOLTÁN — ZALAY MIKLÓS

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISE

PÉLDATÁR

FEKETE ZOLTÁN—ZALAY MIKLÓS

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ANALÍZISE

PÉLDATÁR

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1985

Lektorálta:

URBÁN JÁNOS
okl. matematikus

ETO: 517.2
517.3
517.55

ISBN 963 10 5692 9

Felelős szerkesztő: Tóth Ildikó matematika—fizika tanár

TARTALOM

ELŐSZÓ

Könyvünkkel a többváltozós függvények és a vektoranalízis témakörével ismerkedő Olvasók számára kívántunk segítséget nyújtani. Olvasóinkról feltételezzük az egyváltozós függvények analízisének és a vektoralgebrának bizonyos szintű ismeretét.

Könyvünk felépítése a Bolyai-sorozat első kiadott könyveinek felépítését követi. A rövid elméleti bevezetők során csak arra törekedtünk, hogy a lényegesebb fogalmakat definiáljuk, a fontosabb tételeket (bizonyítás nélkül) kimondjuk. A feladatok során igyekeztünk e tételek szükséges és elégséges feltételeit megvilágítani. Sok olyan feladatot is talál Olvasónk, amelyek a gyakorlati felhasználás lehetőségeire utalnak — a fizikai látásmód igényével —, bár e területen sem törekedhettünk teljességre.

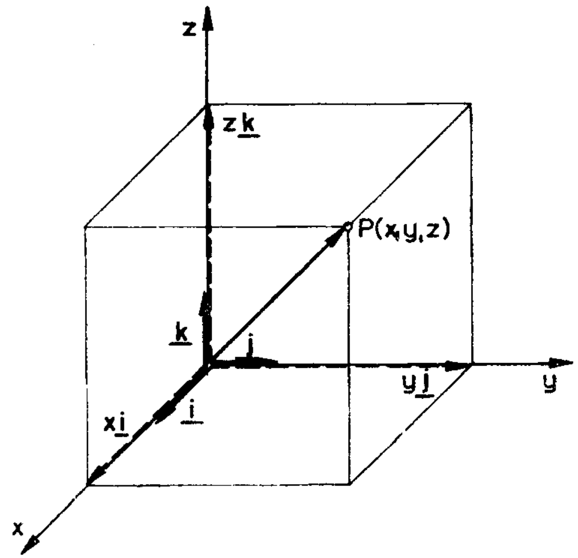
Reméljük, hogy könyvünk elérte célját, sikerült az Olvasóban a témakör mélyebb megismerése utáni vágyat felébreszteni és az alkalmazáshoz szükséges alapvető ismereteket megadni.

Végül köszönjük a lektornak rendkívül nagy segítséget jelentő, minden részletre kiterjedő munkáját.

A szerzők

I. KOORDINÁTA-RENDSZEREK

A feladatok megoldása során leggyakrabban a térbeli Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert fogjuk alkalmazni, amelynek egymásra merőleges tengelyei jobbrendszert alkotnak (1. ábra).



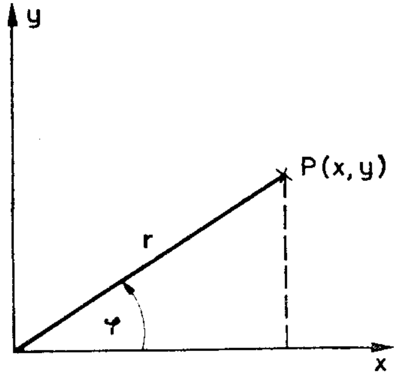
1. ábra

Egy tetszőleges *P* pont helyzete egyértelműen jellemezhető egy valós számokból álló rendezett számhármassal. Ha felvesszük a tengelyek irányába mutató **i**, **j**, **k** egységvektorokat, akkor a *P* pont $\overrightarrow{OP}$-helyvektora a következőképpen írható fel:

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Természetesen e koordináta-rendszer mellett a feladat jellegének megfelelően más koordinátákat is alkalmazunk.

Bizonyos esetekben (pl. kétváltozós függvények határértékének meghatározásánál, síkbeli tartományok megadásánál stb.) célszerű a síkbeli *polárkoordináták* alkalmazása. A sík pontjait ekkor az origótól való távolsággal és az x tengely pozitív irányával bezárt szöggel jellemezzük (2. ábra).



2. ábra

Ha a φ-re a $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$ megszorítást tesszük, akkor a transzformáció, az origó kivételével, kölcsönösen egyértelmű.

A 2. ábráról leolvashatjuk, hogy

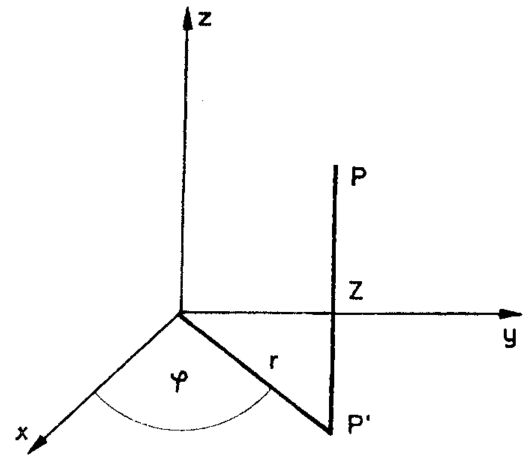
$$x=r\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi,$$

az inverz transzformáció pedig

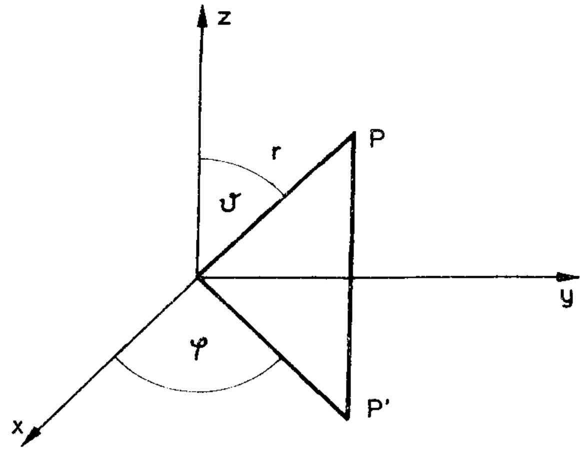
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{ha } x>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{ha } x<0\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x=0 \text{ és } y>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x=0 \text{ és } y<0.\end{cases}$$

Az origó esetén φ nem egyértelmű.



3. ábra



4. ábra

A tér pontjait *hengerkoordinátákkal* is jellemezhetjük, és ekkor a pont helyzete a pont xy síkra való vetületének polárkoordinátáival és a pont xy síktól való távolságával adható meg (3. ábra). A z tengely pontjaiban φ nem egyértelmű.

Használni fogjuk a *gömbi koordinátákat* (térbeli polárkoordinátákat) is:

Egy tetszőleges P pont helyzetét az $\overrightarrow{OP}$ vektor abszolút értékével, e vektornak a z tengely pozitív irányával bezárt szögével, valamint az $\overrightarrow{OP'}$ (ahol P' a P pont xy síkra vett merőleges vetülete) és az x tengely pozitív irányával bezárt szögével jellemezzük (4. ábra). (φ, ϑ jelentése a földgömbön szokásos hosszúsági, ill. szélességi körhöz hasonló, ha az északi sarkot tekintjük a 0. szélességi körnek.)

A 4. ábráról láthatóan:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta,$$
$$z = r\cos\vartheta.$$

(A hengerkoordinátákhoz hasonlóan a z tengely pontjaiban φ nem egyértelmű.)

Esetenként (pl. felületek tárgyalásánál) az előzőektől eltérő koordinátákat is bevezetünk.

II. KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK

1. A kétváltozós függvények értelmezési tartománya

A többváltozós függvények témakörében elsőként a kétváltozós valós függvényekkel foglalkozunk. Mint a bevezetőben is említettük, sem itt, sem más fejezetekben nem törekedhettünk az elméleti alapok részletes tárgyalására, csak a leglényegesebb fogalmakat emeltük ki.

Definícióink n-változós esetre is könnyen általánosíthatók. Elsőként $R \times R = R^2$ részhalmazainak néhány tulajdonságát definiáljuk, amelyek e fejezetben, ill. a későbbiekben szükségesek lesznek.

Egy $P_0 \in R^2$ pont r *sugarú* ($r > 0$) *környezetét* azok a P pontok alkotják, amelyekre

$$|\overrightarrow{P_0P}| < r,$$

tehát:

$$K_{P_0,r} = \{P \in R^2 \mid |\overrightarrow{P_0P}| < r\}.$$

A P_0 pont egy $D \subset R^2$ halmaz *torlódási pontja,* ha minden környezetében végtelen sok D-hez tartozó pont van.

A P_0 pont egy $D \subset R^2$ halmaz *határpontja,* ha P_0 minden környezetében van D-hez és $R^2 \setminus D$-hez tartozó pont is. A határpontok halmaza D *határát* alkotja. Ha D minden határpontját tartalmazza, *zárt halmazról,* ha egyet sem, *nyílt halmazról* beszélünk. (Mindkét tulajdonság igen speciális; a halmazok nagy része se nem nyílt, se nem zárt!)

A D halmaz *korlátos,* ha létezik az origónak olyan véges r sugarú környezete, hogy

$$D \subset K_{0,r} \subset R^2.$$

A korlátos, zárt halmazt *kompakt halmaznak* nevezzük.)

Az f függvény *kétváltozós valós függvény,* ha értelmezési tartománya a valós számsíknak, tehát R^2-nek részhalmaza, képhalmaza pedig R:

$$f: D_f \to R \qquad D_f \subset R^2.$$

f értelmezési tartománya tehát az xy sík részhalmaza, azaz:

$$f: (x, y) \mapsto f(x, y) \qquad (x, y) \in D_f \subset R^2,$$

tehát a D_f halmaz minden pontjához (más szóval az e pontba mutató helyvektorhoz) egy-egy valós számot rendelünk hozzá.

A függvény csak értelmezési tartományával együtt adható meg.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg R^2-nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

kifejezés értelmezhető!

Mivel a tört nevezője nulla nem lehet, ezért a kifejezés nem értelmezhető az $x^2+y^2=1$ kör pontjaiban.

Az értelmezési tartomány így:

$$(x, y) \in R^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}.$$

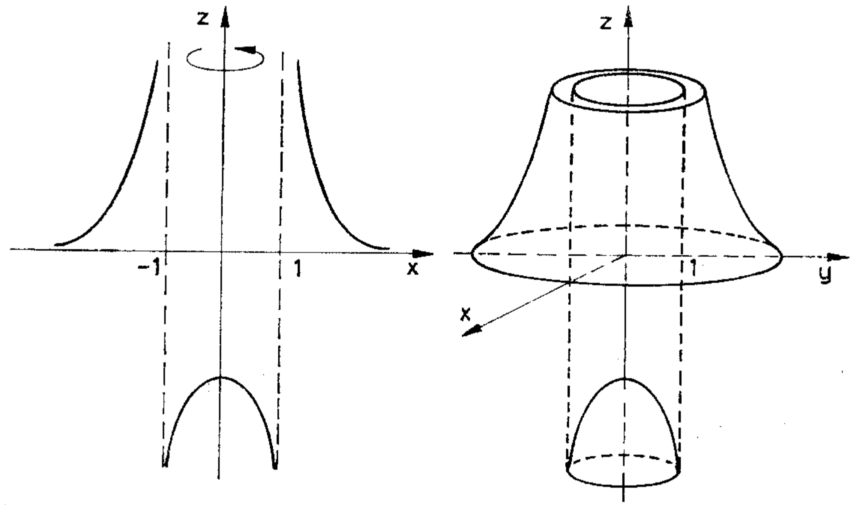
Megjegyzés: Az ezen a halmazon értelmezett

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

függvény grafikonját az

$$x \mapsto \frac{1}{x^2-1} \qquad x \in R \setminus \{-1; 1\}$$

függvény grafikonjának z tengely körüli forgatásával származtathatjuk (5. ábra).



5. ábra

2. R^2 mely részhalmazán értelmezhető a

$$\sqrt{x^2-y},$$

ill. az

$$\ln(x^2-y)$$

kifejezés?

a) Mivel a négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, így az

$$x^2-y \geqq 0,$$

azaz

$$x^2 \geqq y$$

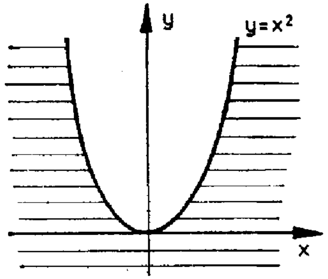
egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

Az értelmezési tartomány tehát:

$$D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 \geqq y\}.$$

Ezt a zárt, nem korlátos halmazt a 6. ábrán vonalkázással jelöltük.

b) $\ln(x^2-y)$ esetén az értelmezési tartomány nyílt halmaz, hiszen D határpontjai, amelyekre $y=x^2$, nem tartoznak e halmazba.



6. ábra

3. Határozza meg R^2-nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{1}{\arcsin\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)}$$

kifejezés értelmezhető!

Mivel $x^2+y^2 \geqq 0$ mindig teljesül, így az értelmezési tartomány meghatározásakor két dolgot kell figyelembe vennünk:
Egyrészt a nevező nem lehet nulla, tehát

$$\sqrt{x^2+y^2}-2 \neq 0,$$

azaz

$$x^2+y^2 \neq 4.$$

Másrészt, mivel az arcsin függvény értelmezési tartománya a

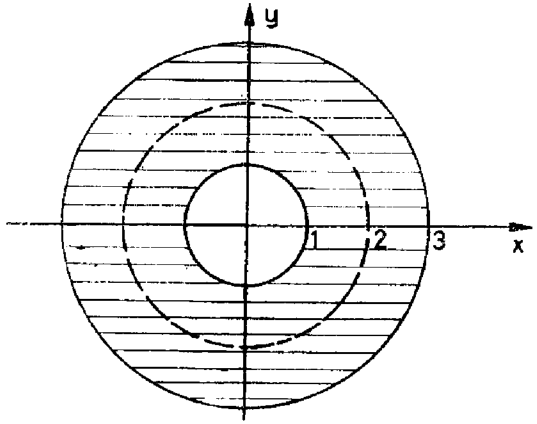
$[-1; 1]$ intervallum, így

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}-2\right| \leqq 1,$$

amelyből

$$1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9.$$

Az értelmezési tartomány tehát egy körgyűrű, amelyből az $r=2$ sugarú kör pontjai hiányoznak (7. ábra),



7. ábra

$$D: \{(x, y) \in R^2 \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 9,\ x^2+y^2 \neq 4\}$$

tehát korlátos, de nem zárt halmaz.

4. Határozza meg R^2-nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{1-|x+y|}}$$

kifejezés értelmezhető!

Külön-külön megállapítjuk a két tag értelmezési tartományát, majd vesszük e két halmaz közös részét.

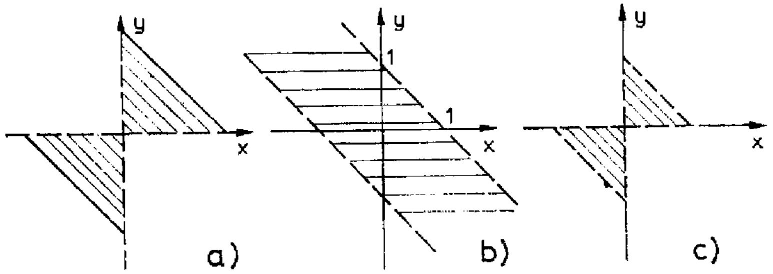
a) $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ akkor van értelmezve, ha $xy>0$. Ez az első és a harmadik síknegyedben igaz. A tengelyek pontjai természetesen nem tartoznak bele a halmazba, hiszen azokra $xy=0$.

b) A második tagban

$$|x+y|<1$$

teljesülése szükséges, amely

$$-1<x+y \quad \text{és} \quad x+y<1$$



8. ábra

együttes fennállását jelenti. Ez az

$$y=1-x \quad \text{és} \quad y=-1-x$$

párhuzamos egyenesek közötti nyílt sáv.

c) A közös megoldás a 8c ábrán látható korlátos nyílt halmaz, a két részmegoldás közös része:

$$D=\{(x, y)\in R^2 \mid xy>0,\ |x+y|<1\}.$$

5. R^2 mely pontjaiban értelmezhető a

$$\sqrt{\ln \cos \frac{2\pi x}{y}}$$

kifejezés?

Mivel a négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, így

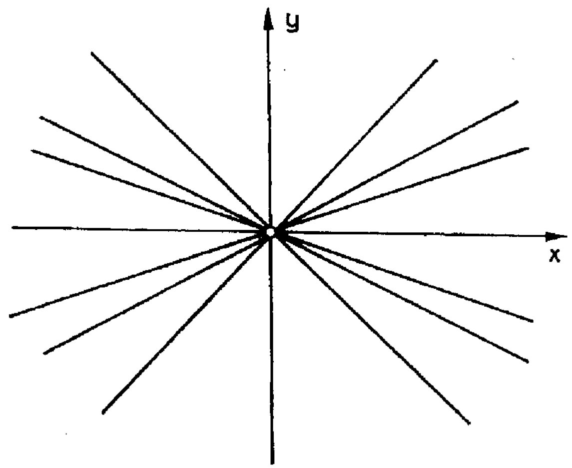
$$\ln \cos \frac{2\pi x}{y} \geqq 0,$$

amelyből az ln függvény monotonitása miatt következik a

$$\cos \frac{2\pi x}{y} \geqq 1$$

egyenlőtlenség.
A koszinuszfüggvény értéke viszont egynél nagyobb nem lehet, tehát:

$$\cos \frac{2\pi x}{y} = 1.$$



9. ábra

Ez csak akkor teljesül, ha

$$\frac{2\pi x}{y} = k2\pi, \quad \text{ahol} \quad k\in Z.$$

Az értelmezési tartomány tehát a 9. ábrán látható egyenessereg, amelyre

$$x=ky \mid y\neq 0 \quad k\in Z.$$

(Az origó nem tartozik bele e tartományba!)

Megjegyzés: A kifejezés értéke a tartomány minden pontjában nulla, így az

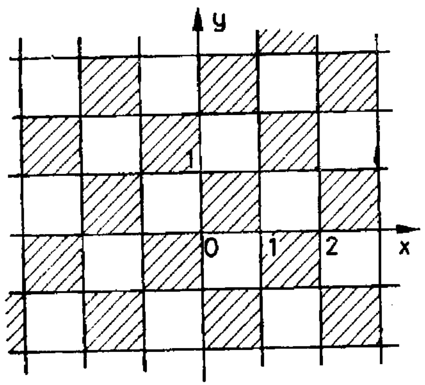
$$f:(x, y)\mapsto \sqrt{\ln \cos \frac{2\pi x}{y}} \qquad (x, y)\in D$$

függvény értékkészlete egyetlen elemből áll.

6. Határozza meg R^2-nek azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a

$$\sqrt{\sin \pi x \sin \pi y}$$

kifejezés értelmezhető!



10. ábra

Mivel a négyzetgyök alatt negatív szám nem állhat, e

$$\sin \pi x \sin \pi y \geqq 0.$$

Vizsgáljuk meg, mikor nulla ez a kifejezés!

$$\sin \pi x = 0$$

esetén

$$\pi x = k\pi \qquad k \in Z,$$

azaz

$$x = k.$$

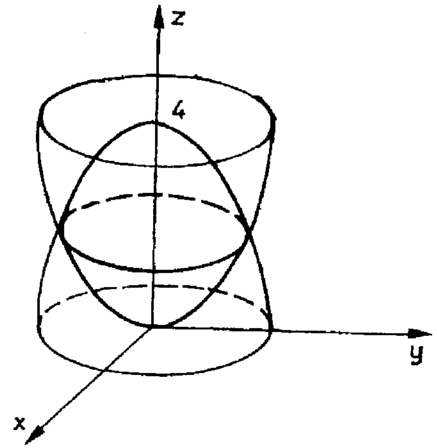
Az előjelváltási pontok tehát az egész koordinátájú helyeken vannak x és y esetén egyaránt. Mivel az egységnégyzetben mindkét tényező pozitív, így az értelmezési tartomány a 10. ábrán látható sakktáblaszerű nemkorlátos zárt halmaz:

$$D = \{(x; y) \in R^2 \mid \operatorname{sg} \sin \pi x = \operatorname{sg} \sin \pi y\}.$$

7. Határozza meg, hogy R^3 mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a

$$\sqrt{z - x^2 - y^2} + \sqrt{z + x^2 + y^2 - 4}$$

kifejezés!



11. ábra

A $z \geqq x^2 + y^2$

és a

$$z \leqq 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2)$$

egyenlőtlenségeknek egyszerre kell teljesülniük.

Az első feltétel egy forgási paraboloid (l. a II.2. 1. feladatát!) feletti pontokra teljesül — a határoló felület pontjait is beleértve.

A második feltételnek megfelelő pontok egy fordított forgási paraboloid alatt helyezkednek el (11. ábra).

Az értelmezési tartomány e két halmaz közös része, korlátos zárt halmaz:

$$D : \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 \leqq z \leqq 4 - x^2 - y^2\}.$$

2. A kétváltozós függvények szemléltetése

Az

$$f : (x; y) \mapsto f(x; y) \qquad (x; y) \in D_f \subset R^2$$

kétváltozós függvény *grafikonja* a háromdimenziós térben a

$$P = \{(x, y, z) \in R^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D_f\}$$

halmaz. E pontok általában (de nem minden esetben) egy felületet alkotnak.

E felületet a $z=f(x, y)$, $(x, y)\in D_f$ egyenlettel jellemezhetjük. Szemléltetése történhet a felületnek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal való metszésvonalai alapján szerkesztett axonometrikus képpel. A másik szemléltetési mód — a térkép készítéséhez hasonlóan — a $z=$állandó síkokkal történő metszésvonalaknak (az ún. *szintvonalaknak*) az xy síkba történő vetítése.

A gyakorló feladatok során mindkét ábrázolási módra mutatunk példát.

Háromváltozós függvények esetén a szemléltetésre csak a szintvonalas szemléltetési mód általánosítása, a szintfelületekkel történő szemléltetés kínálkozik. Ennek lényege: az $f(x, y, z)=$állandó egyenlettel jellemzett szintfelületeket ábrázoljuk, paraméterként feltüntetve a függvényértéket.

Gyakorló feladatok

1. Szemléltesse az

$$f:(x, y)\mapsto x^2+y^2 \qquad (x, y)\in R^2$$

függvényt!

a) Végezzük először a szemléltetést a koordinátasíkokkal való metszetek alapján!

Ha a

$$z=x^2+y^2$$

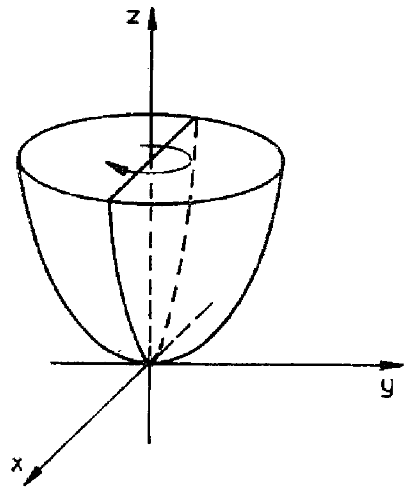
felületet elmetsszük a zy síkkal, amelynek egyenlete $x=0$, akkor a metszetgörbe a $z=y^2$ parabola. Hasonlóan a zx síkkal való metszéskor is parabola a metszésvonal.

Az xy síkkal párhuzamos síkkal történő metszés esetén tehát, ha

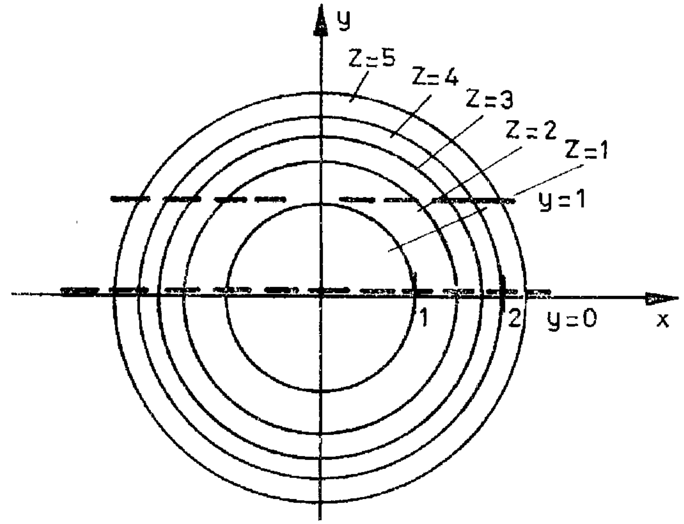
$$z=r^2:$$
$$r^2=x^2+y^2,$$

a metszésvonal egy r sugarú kör. A felület tehát a $z=x^2 x\in R$ parabola z tengely körüli forgatásával adódó forgási paraboloid (12. ábra).

b) Ugyanezt a felületet szemléltethetjük a szintvonalas ábrázolási móddal is.



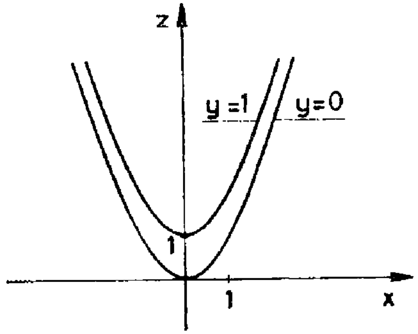
12. ábra



13. ábra

Az *a)* részben láttuk, hogy az xy síkkal párhuzamos síkokkal való metszésvonalak körök. E metszésvonalakat az alapsíkra vetítve kapjuk a felület szintvonalas képét (13. ábra). (A vonalakon a z paraméter, a „magasság” értékeit adja meg.)

c) Sok esetben szükséges az előző szintvonalas képről zx síkbeli, ill. ezzel párhuzamos síkbeli metszet képét előállítani, amelyekben y a paraméter. E metszésvonalak pontjait megkaphatjuk, ha a szintvonalak $y=c$ (c állandó) pontjait ábrázoljuk az xz síkon (14. ábra).



14. ábra

2. Szemléltesse a

$$z^2=x^2+y^2 \qquad (x, y)\in R^2$$

egyenlettel jellemzett felületet!

Ha a felületet elmetsszük az $x=0$ egyenletű yz síkkal, a metszésvonal $x^2=y^2$, azaz két egyenes:

$$z=y, \quad \text{ill.} \quad z=-y.$$

Hasonlóan az xz síkkal való metszéskor is két egyenest kapunk.

Az xy síkkal párhuzamos síkmetszet, amelyben $z=r$, ahol r konstans, az $r^2=x^2+y^2$ kör.

A felület tehát egy kettőskúp (15. ábra).

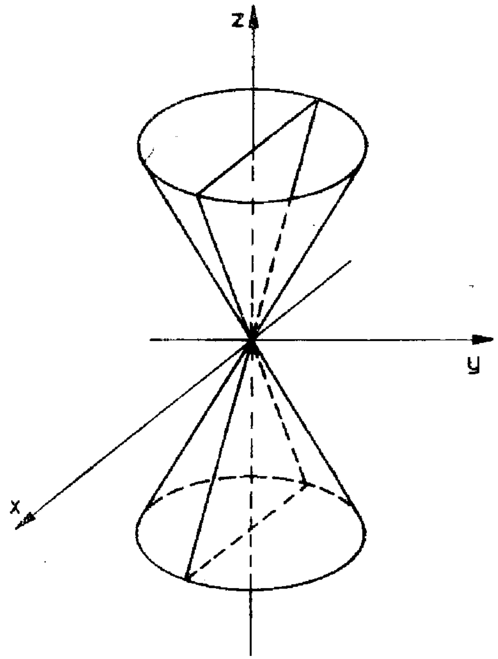
Megjegyzés: E felület az

$$f_1:(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x,y)\in R^2$$

és az

$$f_2:(x,y)\mapsto-\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x,y)\in R^2$$

függvények grafikonja.



15. ábra

3. Szemléltesse metszetei segítségével a

$$z^2=x^2+y^2-1 \qquad (x,y)\in R^2\setminus\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

egyenlettel jellemzett felületet!

Az xz síkkal ($y=0$) metszve a metszésvonal az

$$x^2-z^2=1$$

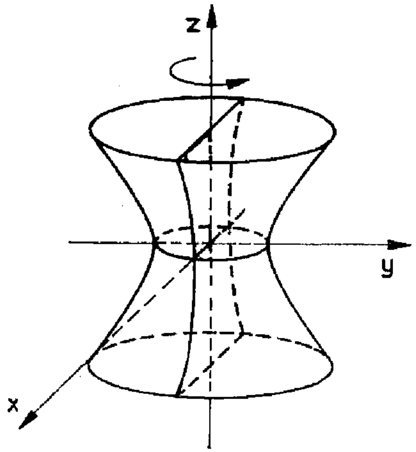
egyenletű hiperbola.

Hasonlóan hiperbolametszet adódik, ha a felületet az $x=0$ síkkal metsszük el.

Az xy síkkal ($z=0$) metszve a metszésvonal az

$$x^2+y^2=1$$

egységsugarú kör. Hasonlóan körök adódnak a $z=c$ (c konstans) síkokkal való metszéskor is. A felület tehát egy egyköpenyű forgáshiperboloid, amely az $x^2-z^2=1$ hiperbola z tengely körüli forgatásával adódik (16. ábra).



16. ábra

Megjegyzés: A felület tartalmazza az

$$y=1;\ z=x$$

és

$$y=1;\ z=-x$$

egyenletrendszerű egyeneseket, amiről behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk. A felület származtatható e két egyenes z tengely körüli forgatásával is. Ebből könnyen belátható, hogy e felület minden pontján áthalad két olyan egyenes, amely illeszkedik a felületre.

4. Szemléltesse metszetei segítségével a

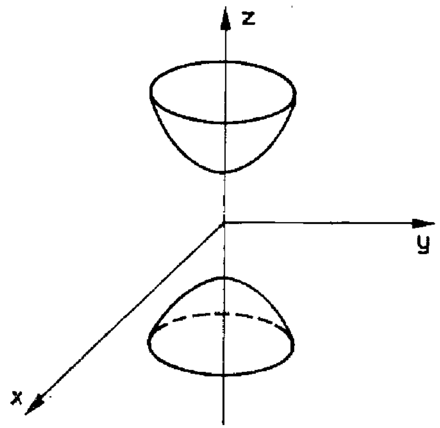
$$z^2=x^2+y^2+1 \qquad (x, y)\in R^2$$

egyenlettel jellemzett felületet!

Ha a felületet az xz síkkal ($y=0$) metsszük, akkor a metszésvonal a $z^2-x^2=1$ hiperbola. Az yz síkkal történő metszéskor is hiperbola adódik metszésvonalként.

Ha a $z=c$ egyenletű síkkal ($|c|>1$), metsszük el a felületet, akkor a metszésvonal kör.

A felület tehát egy forgásfelület, amelyet a $z^2-x^2=1$ hiperbola z tengely körüli forgatásával származtathatunk (kétköpenyű hiperboloid) (17. ábra).



17. ábra

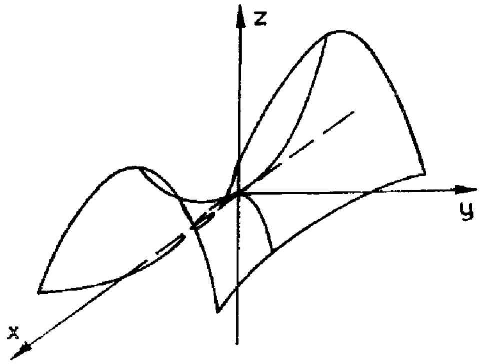
5. Szemléltesse az

$$f:(x, y)\mapsto x^2-y^2 \qquad (x, y)\in R^2$$

függvényt!

Ha a $z=x^2-y^2$ felületet az xz síkkal metsszük, a metszésvonal a $z=x^2$ parabola. Az yz síkkal való metszéskor a $z=-y^2$ parabolát kapjuk.

A felületet úgy képzelhetjük el szemléletesen, hogy a $z=x^2$ parabolán „végigcsúszik" a $z=-y^2$ parabola. Így adódik a 18. ábrán látható nyeregfelület, amely az xy síkot az $x=y$, ill. $x=-y$ egyenesekben metszi.



18. ábra

Megjegyzés: Ha bevezetjük az

$$u = x + y$$

és

$$v = x - y$$

új változókat, akkor a felület egyenlete

$$z = uv$$

alakban írható.

A transzformáció lényegében az xy sík z tengely körüli 45°-os elforgatását jelenti. Ugyanis α szögű elforgatáskor az új koordináták a következők:

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$
$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

$\alpha = -45°$ esetén:

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (x - y),$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (x + y).$$

A $z = uv$ felület esetén az

$$u = u_0$$

és

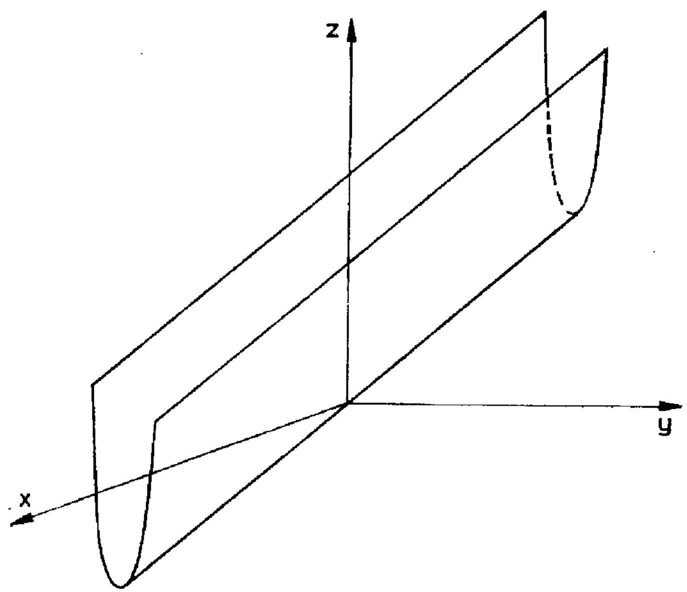
$$v = v_0 \quad (u_0, v_0 \text{ állandó})$$

síkokkal való metszésvonalak egyenesek, így a felület minden pontján áthalad két-két, a felületre illeszkedő egyenes. (Természetesen ugyanez igaz az eredeti nyeregfelületre is, hiszen ennek forgatásával adódott a $z = uv$ felület.)

6. Szemléltesse a

$$z = x^2 + y \qquad (x, y) \in R^2$$

felületet!



19. ábra

Az yz síkban ($x = 0$) a metszésvonal a $z = y$ egyenes.

Az xz síkban ($y = 0$) adódó metszésvonal a $z = x^2$ parabola.

A felületet a $z = x^2$ parabolának a $z = y$ egyenesen való „csúsztatásával” származtathatjuk, és így parabolikus hengert kapunk (19. ábra).

7. Szintfelületei segítségével szemléltesse az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \qquad (x, y, z) \in R^3$$

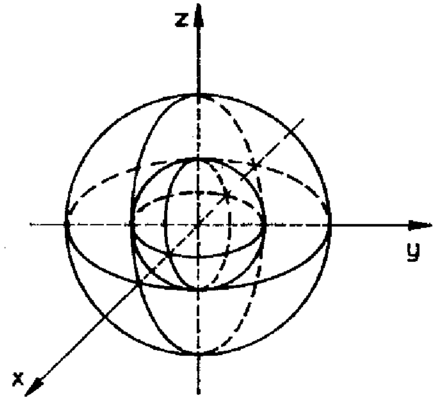
háromváltozós függvényt!

A *szintfelület* az $f(x, y, z) = c$ (c konstans) egyenlettel jellemzett felületet jelenti.

$c = r^2 > 0$ esetén a felület egyenlete

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ami egy origóközéppontú r sugarú gömb egyenlete; f szintfelületei tehát gömbök (20. ábra).



20. ábra

8. Szemléltesse szintfelületei segítségével az

$$f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2-z^2 \qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvényt!

a) $f(x, y, z)=0$ esetén a szintfelület egyenlete

$$z^2=x^2+y^2$$

Ez a felület a 2. feladatban tárgyalt kettőskúp.

b) $f(x, y, z)=1$ esetben a szintfelület

$$z^2=x^2+y^2-1,$$

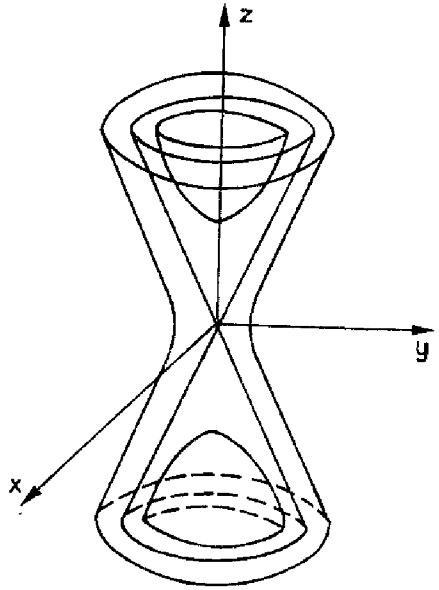
amely a 3. feladatban tárgyalt egyköpenyű hiperboloid. $f(x, y, z)=c>0$ esetében mindig egyköpenyű hiperboloidot kapunk.

c) $f(x, y, z)=-1$ esetén a szintfelület

$$z^2=x^2+y^2+1,$$

amely a 4. feladatban tárgyalt kétköpenyű hiperboloid.

A szintfelületeket a 21. ábrán láthatjuk.



21. ábra

3. A kétváltozós függvények határértéke, folytonossága

Legyen a P_0 pont az

$$f: D_f \to R \qquad D_f \subset R^2$$

függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! Az *f határértéke* a $P_0(x_0, y_0)$ pontban A, ha minden $\varepsilon>0$-hoz tartozik P_0-nak egy olyan δ sugarú környezete, hogy

$$|f(P)-A|<\varepsilon \qquad \text{ha } P\in D_f\cap K_{P_0,\delta}\setminus\{P_0\}.$$

(A határérték létezésének vizsgálatakor tehát P_0 környezetének csak az értelmezési tartományba tartozó pontjait kell figyelembe venni!)

Az előzővel egyenértékű a következő definíció: A P_0 pontban csak akkor van határértéke az f függvénynek, ha tetszőleges, P_0-hoz tartozó $\{P_n\}$, $n\in N$ $(P_n\neq P_0)$ pontsorozatra, amelyre $P_n\in D_f$, a függvényértékek sorozata A-hoz tart. Tehát, ha két különböző pontsorozaton közeledve P_0-hoz a függvényértékek sorozata két különböző számhoz tart, akkor a függvénynek biztosan nincs határértéke e pontban.

A határérték létezéséhez azonban nem elegendő, hogy tetszőleges P_0-hoz tartó egyenes mentén mindig ugyanazt a határértéket kapjuk.

Az

$$f: D_f \to R \qquad D_f \subset R^2$$

függvényt *folytonosnak* mondjuk egy P_0 pontban, ha * $P_0 \in D_f$, * P_0-ban létezik f-nek határértéke (tehát P_0 D_f-nek torlódási pontja),

$$* \quad f(P_0) = \lim_{P_0} f.$$

E definíció alapján a II.1. 5. feladatában szereplő függvény az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, mivel értelmezési tartományának minden pontja torlódási pont, a határérték és helyettesítési érték e pontokban egyaránt nulla.

Az egyváltozós függvények körében megismert összeg-, különbség-, szorzat-, hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételek a kétváltozós függvények körében is érvényesek.

Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} + y \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } xy \neq 0 \\ & (x, y) \in R^2 \\ 0 & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos az origóban!

Mivel az origóban a függvényérték nulla, azt kell belátnunk, hogy a határérték is ennyi. A tengelyeken a függvényérték azonosan nulla, a tengelyeken kívül pedig:

$$\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|,$$

hiszen

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1,$$

viszont

$$\lim (|x| + |y|) = 0 = f(0; 0),$$

amivel megmutattuk, hogy a függvény az origóban valóban folytonos.

Megjegyzés:

a) Adott $\varepsilon > 0$ esetén az origó mely környezetében teljesül az

$|f(x, y)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség?

Láttuk, hogy

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y|.$$

Mivel

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

és

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

ahol $\sqrt{x^2 + y^2}$ az origó és a $P(x, y)$ pont távolsága, így az

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

egyenlőtlenség biztosan teljesül akkor, ha a P pont az origó $\frac{\delta}{2}$ sugarú környezetében van.

b) Az x és y tengely más pontjaiban a függvénynek nincs határértéke, itt ugyanis az összegnek csak egyik tagja tart nullához, a másikban a szinuszos tényező erősen oszcillál.

2. Van-e határértéke az origóban az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad (x, y) \in R^2 \setminus \{0; 0\}$$

függvénynek?

Közeledjünk az origóhoz az

$y=mx \qquad (m\in R)$ egyenesen!

Az egyenes pontjaiban a függvényérték

$$f(x, mx)=\frac{2m}{1+m^2},$$

amely — m értékétől függően — minden egyenesen más és más, tehát f-nek az origóban nincs határértéke.

3. Igazolja, hogy az

$$f:(x, y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^4+y^4}, & \text{ha } y\neq 0 \\ & (x, y)\in R^2\setminus\{0; 0\} \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{ha } y=0 \text{ és } x\neq 0\end{cases}$$

függvénynek nincs határértéke az origóban, bár tetszőleges egyenes mentén közeledve az origóhoz mindig ugyanaz a határérték adódik.

a) Az $y=mx$ $m\in R\setminus\{0\}$ egyenesen közeledve:

$$f(x; mx)=\frac{m^2x^2}{x^4+m^4x^4}=\frac{m^2}{x^2(1+m^2)},$$

ami $+\infty$-hez tart, ha x nullához tart. (Ugyanez adódik $m=0$ esetén az x tengely pontjaira is, mert $f(x, 0)=\frac{1}{x^2}$.)

b) Közelítsünk az origóhoz az $y=x^4$ görbén! Ekkor

$$f(x, x^4)=\frac{x^8}{x^4+x^{16}}=\frac{x^4}{1+x^{12}},$$

ami nullához tart, ha x nullához közeledik. Tehát f-nek valóban nincs határértéke az origóban annak ellenére, hogy tetszőleges egyenes mentén ugyanazt az értéket kaptuk.

4. Igazolja, hogy az

$f:(x, y)\mapsto 0 \qquad D_f=\{(x, y)\in R^2 | xy\in Q\}$

függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos!

A függvény az xy síknak csak azon pontjaiban értelmezett, amelyekben az xy szorzat racionális szám. E pontok mindenütt sűrűn helyezkednek el a síkon, de ugyancsak sűrűn mindenütt vannak olyan pontok is, amelyek nem tartoznak hozzá D_f-hez. Mivel D_f minden pontja torlódási pont, a függvényérték minden pontban nulla, így tetszőleges $P\in D_f$ esetén

$$\lim_{P} f=0=f(P),$$

azaz f valóban folytonos D_f minden pontjában.

5. Igazolja, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right)\neq\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right)!$$

Vizsgáljuk előbb a bal oldalt:

$$\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=0,$$

mivel a szinuszfüggvény argumentuma rögzített x esetén nullához tart. Tehát

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right)=\lim_{x\to\infty} 0=0.$$

Hasonlóan a jobb oldal:

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

tehát a két oldal értéke valóban különböző.

6. Igazolja, hogy az

$$f:(x, y)\mapsto\frac{x^2y}{x^2+y^2}\qquad (x, y)\in R^2\setminus\{0;0\}$$

függvénynek az origóban van határértéke!

A bizonyításhoz polárkoordinátákra térünk át; ekkor:

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=r\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Ez utóbbi viszont r nullához tartása esetén nullához tart, φ értékétől függetlenül.

Tehát

$$\lim_{(0;0)} f=0.$$

Megjegyzés: Hasonlóan látható be, hogy a

$$g:(x, y)\mapsto\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\qquad (x, y)\in R^2\setminus\{0;0\}$$

függvénynek az origóban nincs határértéke. Ekkor ugyanis polárkoordinátákra áttérve:

$$\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}=\frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi},$$

aminek, ha r nullához tart, nincs határértéke, hiszen $\varphi=0$ esetén értéke nulla,

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\text{ esetén pedig }\frac{1}{2}.$$

7. Igazolja, hogy az

$$f:(x, y, z)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & \text{ha } x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0 & \text{ha } x^2+y^2+z^2=0\end{cases}\qquad (x, y, z)\in R^3$$

függvény folytonos R^3 minden pontjában!

Az állítás bebizonyításához elegendő az origóbeli folytonosságot igazolni. Egy törtfüggvény ugyanis, amelynek számlálója és nevezője is folytonos, folytonos minden olyan pontban, ahol nevezője nem nulla. Határozzuk meg a függvény határértékét az origóban! Gömbi koordinátákkal:

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{r^3\sin^2\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi}{r^2[\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\vartheta]}=$$
$$=r\sin^2\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi,$$

amely az origóhoz közeledve nullához tart. A függvénynek tehát van az origóban határértéke, ez egyenlő a függvényértékkel, tehát f az origóban is folytonos.

8. Értelmezze a g kétváltozós függvényt úgy, hogy az

$$f:(x, y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}, & \text{ha } x-y\neq 0\\ g(x, y) & \text{ha } x-y=0\end{cases}\qquad (x, y)\in R^2$$

függvény folytonos legyen R^2 minden pontjában!

Alakítsuk át a számlálót a következőképpen:

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

ekkor:

$$\lim_{(x-y)\to 0}\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\lim_{(x-y)\to 0}\frac{\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}=\cos x,$$

mivel

$$\lim_{0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Tehát a

$$g:(x, y)\mapsto\cos x\qquad D_g=\{(x, y)\in R^2\mid x-y=0\}$$

választás mellett f az R^2 minden pontjában folytonos lesz.

9. Értelmezze a g kétváltozós függvényt úgy, hogy az

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2-y^2}, & \text{ha } x^2-y^2\neq 0\\ g(x,y) & \text{ha } x^2-y^2=0\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2$$

függvény folytonos legyen R^2 minden pontjában!

Az előző feladathoz hasonlóan átalakítjuk a számlálót:

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Ezt alkalmazva:

$$\frac{\cos x-\cos y}{x^2-y^2}=-\frac{1}{2}\,\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\dfrac{x+y}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\dfrac{x-y}{2}},$$

ahonnan látszik, hogy a függvény az origóban folytonossá tehető, ha ott a függvényértéket $\left(-\frac{1}{2}\right)$-nek választjuk, a többi pontban pedig

$x^2-y^2=0$, ami $x=y$, ill. $x=-y$ teljesülését jelenti.

Ha $x=y$, akkor

$$\frac{x+y}{2}=x,$$

másrészt

$$\lim_{(x-y)\to 0}\frac{\sin\dfrac{x-y}{2}}{\dfrac{x-y}{2}}=1.$$

E pontokban tehát g-t célszerű $-\frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{x}$-nek választani.

Ha $x=-y$, akkor $\frac{x-y}{2}=x$, s a szorzatalak másik tényezőjének a határértéke egy.

Tehát, ha g-t a következőképpen választjuk:

$$g:(x,y)\mapsto\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x=\pm y \text{ és } xy\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & \text{ha } x=y=0,\end{cases}\qquad D_g=\{(x,y)\in R^2\mid x^2=y^2\}$$

akkor f a sík minden pontjában folytonos lesz.

III. A KÉTVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLÁSA

1. Parciális deriváltak

A parciális deriváltakat az egyváltozós függvények deriváltját általánosítva, különbségi hányados határértékeként definiáljuk, s megmutatjuk, hogy geometriai jelentésük bizonyos esetekben érintők iránytangenseként adható meg.

Tekintsük az

$$f: D_f \mapsto R \qquad D_f \subset R^2$$

kétváltozós függvényt! Legyen a $P_0(x_0, y_0)$ pont a D_f torlódási pontja!

Ekkor, ha rögzített (állandó) y mellett létezik és véges a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x; y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

ill. rögzített x mellett létezik és véges a

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

határérték, akkor ezeket az f függvény P_0 *pontbeli parciális differenciálhányadosainak* nevezzük.

Jelölésük:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = f'_x(x_0, y_0), \qquad \text{ill.} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = f'_y(x_0, y_0).$$

Ha egy $T \subset D_f$ tartomány pontjaiban léteznek a parciális differenciálhányadosok, akkor az $f'_x: T \to R$ függvényt, amely minden $(x_0, y_0) \in T$-hez az $f'_x(x_0, y_0)$ értéket rendeli, az x szerinti *parciális derivált függvénynek* nevezzük.

Hasonlóan értelmezhető f'_y is.

A feladatok során megmutatjuk, hogy a parciális deriváltak adott pontbeli létezése még a függvény adott pontbeli folytonosságát sem feltételezi, de a folytonosság nem mindig biztosítja a parciális derivált létezését.

Az eddigiekből már világos, de külön is kiemeljük, hogy a parciális deriváltak kiszámításakor az egyváltozós függvényeknél megismert differenciálási szabályokat kell alkalmazni, figyelembe véve, hogy az a változó, amely szerint *nem* differenciálunk, konstansnak tekintendő.

Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ pontban létezik az x és y szerinti parciális deriváltja! A P_0 ponton áthaladó, xz síkkal párhuzamos $y=y_0$ egyenletű sík a függvény grafikonját alkotó felületet a $z=f(x, y_0)$ síkgörbében metszi. Ha ennek a görbének az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban van érintője, akkor az érintő iránytangense:

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

hasonlóképpen:

$$f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$$

(22. ábra).

A parciális deriváltak általában továbbra is kétváltozós függvények. Amennyiben ezek is parciálisan differenciálhatók, képezhetjük mindkét változó szerint újabb parciális deriváltjaikat. Így a *másodrendű parciális deriváltakat* kapjuk. Ezek jelölése:

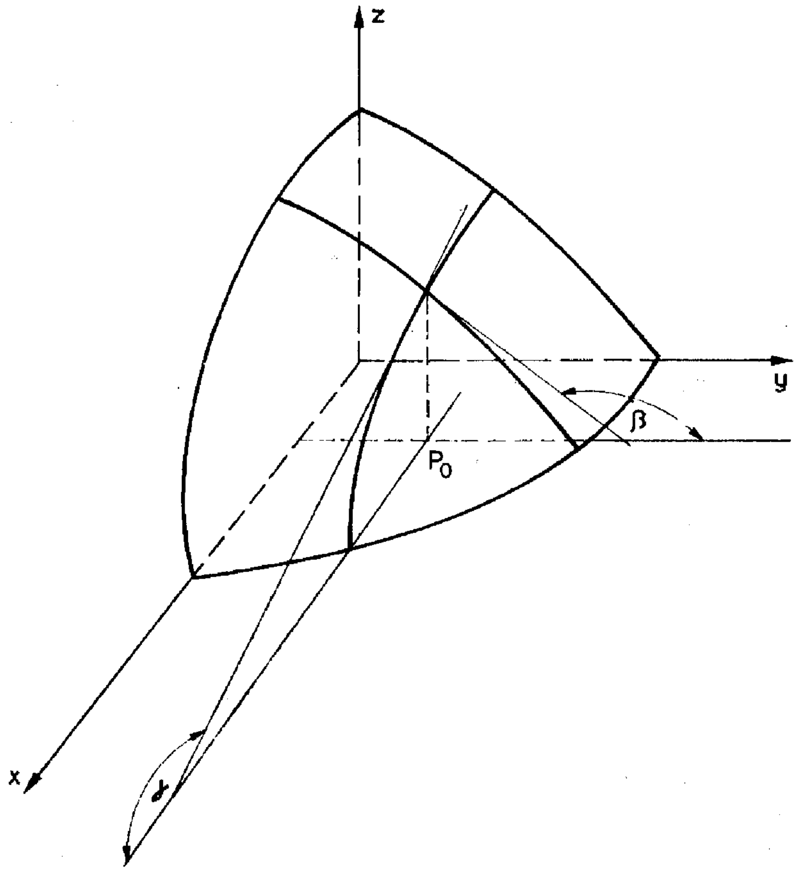
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

f''_{xx}-et és f''_{yy}-t *tiszta*, f''_{xy} és f''_{yx}-et *vegyes* másodrendű parciális deriváltaknak szokás nevezni. Elég általános feltételek mellett igaz, hogy:

$$f''_{xy} = f''_{yx};$$

azaz: a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, a deriválás sorrendje felcserélhető. Bizonyítás nélkül közöljük



22. ábra

ennek elégséges feltételét. Ha a $P_0(x_0, y_0)$ pont egy környezetében f''_{xy} és f''_{yx} léteznek és a P_0 pontban folytonosak, akkor:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Hasonlóan értelmezhetők a harmadrendű parciális deriváltak amelyekre például az

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

egyenlőség áll fenn, az előzőhöz hasonló feltételek teljesülése esetén.

Az elmondottak általánosíthatók három, négy stb. változó esetére is, minden lényeges változtatás nélkül.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

Ha x szerint deriválunk, akkor y állandó, tehát y^3 deriváltja zérus.

$$f'_x: (x, y) \mapsto 3x^2 - 3y \qquad (x, y) \in R^2,$$

$$f'_y: (x, y) \mapsto 3y^2 - 3x \qquad (x, y) \in R^2.$$

2. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto x^y \qquad y \in R, \qquad x \in R^+$$

függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

Az x szerinti parciális derivált kiszámításakor y állandónak tekintendő, tehát hatványfüggvényként kell deriválni:

$$f'_x: (x, y) \mapsto yx^{y-1} \qquad (x, y) \in D_f.$$

Az y szerinti parciális deriváláskor x állandó, tehát a függvényt exponenciális függvényként kell deriválni:

$$f'_y: (x, y) \mapsto x^y \ln x \qquad (x, y) \in D_f.$$

3. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^{y^z} \qquad x \in R^+, \ y \in R^+, \ z \in R^+$$

függvény parciális deriváltjait!

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el:

$$f'_x : (x, y, z) \mapsto x^{y^z-1} \quad y^z,$$

$$f'_y : (x, y, z) \mapsto x^{y^z} \quad (\ln x) z y^{z-1},$$

$$f'_z : (x, y, z) \mapsto x^{y^z} \quad (\ln x) y^z (\ln y).$$

Mindhárom parciális derivált értelmezési tartománya azonos D_f-fel.

A továbbiakban csak akkor fogjuk feltüntetni a parciális deriváltak értelmezési tartományát, ha ez az eredeti függvényétől különböző.

A következő feladatokban is az elsőrendű parciális deriváltakat kell meghatározni:

4. $f : (x, y, z) \mapsto (xy)^z = x^z y^z \qquad x \in R^+, \qquad y \in R^+, \qquad z \in R.$

$$f'_x : (x, y, z) \mapsto y^z z x^{z-1},$$

$$f'_y : (x, y, z) \mapsto x^z z y^{z-1},$$

$$f'_z : (x, y, z) \mapsto (xy)^z \ln (xy).$$

5. $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x}} \qquad x \in R \setminus \{0\},\ y \in R \setminus \{0\}.$

$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{1}{y} e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right),$$

$$f'_y : (x, y) \mapsto \frac{-x}{y^2} e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x}} \frac{1}{x} = e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right).$$

6. $g : (x, y) \mapsto \arcsin \frac{x}{y}, \qquad D_g = \left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, \left| \frac{x}{y} \right| \leq 1 \right\}.$

$$g'_x : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}},$$

$$g'_y : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

g'_x és g'_y értelmezési tartománya szűkebb, mint g-é, hiszen $y^2 = x^2$ feltétel esetén a deriváltak nem léteznek. (E feltétel a D_g halmaz határpontjait jelöli.)

7. $f : (x, y) \mapsto y^2 \ln \sqrt{xy} + \operatorname{arsh}(xy) \qquad x \in R^+, y \in R^+.$

Deriválás előtt alakítsuk át $\ln \sqrt{xy}$-t!

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} y^2 \ln x + \frac{1}{2} y^2 \ln y + \operatorname{arsh}(xy),$$

$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{y^2}{2x} + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 y^2}},$$

$$f'_y : (x, y) \mapsto y \ln x + y \ln y + \frac{y^2}{2y} + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 y^2}} =$$

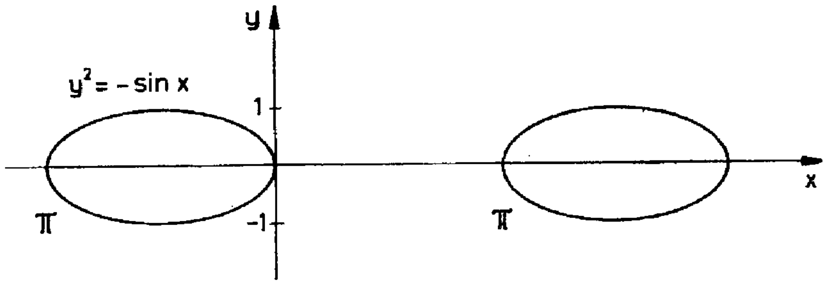
$$= y \ln (xy) + \frac{y}{2} + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 y^2}}.$$

8. $f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 e^y}{\sin x + y^2} \qquad (x, y) \in R^2 \setminus \{(x, y) \mid y^2 = -\sin x\}.$

Az $y^2 = -\sin x$ feltételnek eleget tevő pontok halmazát a 23. ábrán látható görbék adják.

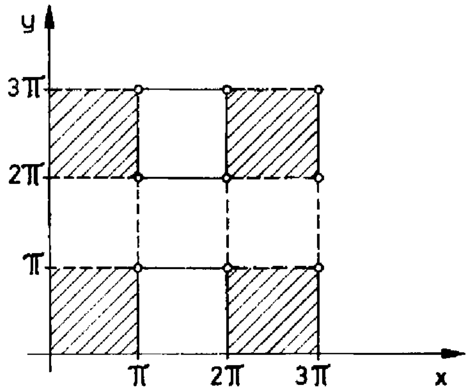
$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{3x^2 e^y (\sin x + y^2) - x^3 e^y (\cos x)}{(\sin x + y^2)^2},$$

$$f'_y : (x, y) \mapsto \frac{x^3 e^y (\sin x + y^2) - x^3 e^y 2y}{(\sin x + y^2)^2}.$$



23. ábra

9. $f: (x, y) \mapsto \sqrt{\sin x} \sin \sqrt{y} + \sin \ln x \ln \sin y$,
$D_f: x \in R^+ \setminus \{x \mid \sin x < 0\},\ y \in R^+ \setminus \{y \mid \sin y \leqq 0\}$.



24. ábra

A feltételnek eleget tevő pontok az első síknegyedben egy sakktábla-szerű elrendezést adnak. (A D_g-hez tartozó határpontokat vastagítással jelöltük.) (24. ábra)

$$f'_x: (x, y) \mapsto \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \sin \sqrt{y} + \frac{\cos \ln x}{x} \ln \sin y,$$

$$f'_y: (x, y) \mapsto \sqrt{\sin x}\, \frac{\cos \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} + \sin \ln x \frac{\cos y}{\sin y}.$$

(f'_y értelmezési tartománya azonos D_f-fel, f'_x-é ennél szűkebb: nem tartalmazza a határpontokat.)

10. Az előző fejezetben láttuk, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban.

Igazolja, hogy e függvény parciálisan differenciálható az origóban!

A definíció szerint: $(x_0 = 0,\ y_0 = 0)$.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = 0.$$

Hasonlóan $f'_y(0; 0) = 0$.

A parciális derivált adott pontbeli létezéséhez tehát valóban nem szükséges, hogy a függvény e pontban folytonos legyen.

11. Határozza meg az előző feladat mintájára az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{ha } x^4+y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^4+y^4 = 0 \end{cases}$$

függvény tiszta másodrendű parciális deriváltjainak értékét az origóban!

Az előző fejezetben láttuk, hogy a függvény nem folytonos az origóban.

Az origó kivételével:

$$f'_x : (x, y) \mapsto \frac{2xy^2(x^4+y^4)-4x^3x^2y^2}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2xy^6-2x^5y^2}{(x^4+y^4)^2}.$$

Az origóban a definíció alapján $f'_x(0, 0)=0$.

Legyen

$$g=f'_x : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{2xy^6-2x^5y^2}{(x^4+y^4)^2}, & \text{ha } x^4+y^4 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^4+y^4=0. \end{cases}$$

Arról, hogy g sem folytonos az origóban, könnyen meggyőződhetünk, ha az $y=2x$ egyenes mentén tartunk az origóhoz.

Ekkor

$$\lim_0 \frac{128x^7-8x^7}{(x^4+16x^4)^2} = \lim_0 \frac{120x^7}{289x^8} = \lim_0 \frac{120}{289x},$$

ez utóbbi viszont nem korlátos, így g valóban nem folytonos az origóban.

Számítsuk ki g origóbeli parciális differenciálhányadosait!

$$g'_x(0,0)=f''_{xx}(0,0)=\lim_0 \frac{g(0+\Delta x, 0)-g(0,0)}{\Delta x}=0,$$

mivel a számláló azonosan nulla.

Hasonlóan látható be, hogy

$$g'_y(0,0)=f''_{xy}(0,0)=0.$$

A számítást nem részletezve: $f''_{yx}(0, 0)=0$.

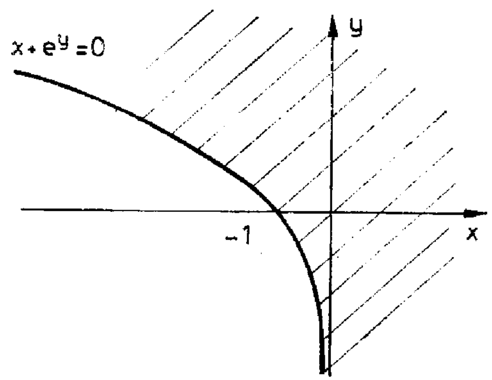
Megjegyzés: A feladat nem tesz eleget a vegyes másodrendű parciálisok egyenlőségére felírt elégséges feltételnek, a vegyes parciális deriváltak mégis egyenlők az origóban.

Az említett feltétel tehát *elégséges*, de nem *szükséges* feltétele a vegyes parciális deriváltak egyenlőségének.

A következő feladatokban a vegyes parciális deriváltak egyenlőségét kell igazolni.

12.

$$f : (x, y) \mapsto \ln (x+e^y) \qquad D_f = \{(x, y) \in R^2 \mid (x+e^y) > 0\}.$$



25. ábra

Az értelmezési tartomány az ábrán látható nyílt halmaz (25. ábra).

$$f'_x = \frac{1}{x+e^y},$$

$$f'_y = \frac{e^y}{x+e^y},$$

$$f''_{xy} = -\frac{e^y}{(x+e^y)^2},$$

$$f''_{yx} = -\frac{e^y}{(x+e^y)^2}.$$

A vegyes parciális deriváltak tehát valóban egyenlők D_f minden pontjában.

Megjegyzés: Tekintsük a

$$g : (x, y) \mapsto \ln |x+e^y| \; (x, y) \in R^2 \setminus \{(x, y) \mid x+e^y=0\}$$

függvényt! Könnyen igazolható, hogy g parciális deriváltjai formailag azonosak f megfelelő parciálisaival, de $D_f \subset D_g$, és $D_f \neq D_g$ miatt $f'_x = g'_x$ nem teljesül. $(x_0, y_0) \in D_f$ esetén $f'_x(x_0, y_0) = g'_x(x_0, y_0)$.

13.

$$f : (x, y) \mapsto x^y \qquad x \in R^+, \qquad y \in R.$$

$$f'_x = yx^{y-1},$$

$$f'_y = x^y \ln x$$

$$f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$f''_{yx} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = yx^{y-1} + x^{y-1}.$$

14. $f: (x, y) \mapsto \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \qquad x \in R,\ y \in R \setminus \{0\}.$

$$f'_x = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$f'_y = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2},$$

$$f''_{xy} = \frac{x^2+y^2-y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{yx} = \frac{-(x^2+y^2)-(-x)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tehát a vegyes parciális deriváltak D_f minden pontjában megegyeznek. (A parciális deriváltak értelmezési tartománya természetesen nem lehet D_f-nél bővebb halmaz. Bár látszatra csak az origóban nincsenek értelmezve, de ahol a függvény nem értelmezett, deriváltja sem lehet.)

15. Igazolja, hogy az

$$f: (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0 \end{cases} \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény esetében

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

$$f'_x = \begin{cases} y \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f'_y = \begin{cases} x \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

[$f'_x(0, 0)$, ill. $f'_y(0, 0)$ értékét a 10. példához hasonlóan a definíció alapján számolhatjuk.]

Azt, hogy f, f'_x, f'_y az origóban folytonos, egyszerűen igazolhatjuk polárkoordinátákra való áttéréssel.
Ekkor ugyanis:

$$x^2+y^2 = r^2,$$

a számlálóban viszont r magasabb hatványa szerepel, tehát a határérték valóban nulla.
A definíció szerint:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{0} \frac{\left(\Delta y \dfrac{0-(\Delta y)^2}{0+(\Delta y)^2} + 0\right) - 0}{\Delta y} = -1.$$

Hasonlóképpen

$$f''_{yx}(0, 0) = 1.$$

A vegyes másodrendű parciálisok értékei tehát az origóban különbözőek. Ennek oka az, hogy nem teljesülnek a tétel elégséges feltételei: a második parciális deriváltak nem folytonosak az origóban, ugyanis

$$f''_{xy} = \begin{cases} \dfrac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{12xy^2(x^2+y^2)-16x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ -1, \quad \text{ha } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Itt is polárkoordinátákra áttérve: a számláló megjelölt tagja r^5 szerint, a nevező r^6 szerint tart nullához, így f''_{xy} nem korlátos.

16. Igazolja, hogy az

$$f:(x, y)\mapsto \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \qquad x\in R,\ y\in R\setminus\{0\}$$

függvény kielégíti az

$$f''_{xx}+f''_{yy}=0$$

parciális differenciálegyenletet! (Síkbeli Laplace-egyenlet.)

E függvény elsőrendű parciális deriváltjait a 14. feladatban már meghatároztuk.
A tiszta másodrendű parciálisok:

$$f''_{xx}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f''_{yy}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tehát f valóban kielégíti az

$$f''_{xx}+f''_{yy}=0$$

egyenletet.

17. Igazolja, hogy az

$$f:(x, y, z)\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (x, y, z)\in R^3\setminus\{0, 0, 0\}$$

függvény kielégíti az

$$f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}=0$$

parciális differenciálegyenletet (Laplace-egyenlet).

$$f'_x=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x,$$

$$f''_{xx}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}4x^2-\frac{1}{2}\cdot 2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Mivel f szimmetrikus a három változójában f''_{yy} és f''_{zz} hasonló alakú.
Összegezve a tiszta másodrendű parciálisokat:

$$\frac{3x^2-(x^2+y^2+z^2)+3y^2-(x^2+y^2+z^2)+3z^2-(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=0.$$

Így f valóban kielégíti az egyenletet.

18. Igazolja, hogy az

$$f:(x, t)\mapsto A\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) \qquad (x, t)\in R^2$$

függvény (A, ω, c állandók) eleget tesz az

$$f''_{xx}=\frac{1}{c^2}f''_{tt}$$

parciális differenciálegyenletnek (hullámegyenlet)!

$$f'_x=A\left(-\frac{\omega}{c}\right)\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

$$f'_t=A\omega\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

$$f''_{xx}=-A\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

$$f''_{tt}=-A\omega^2\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right).$$

Megjegyzés: Könnyen belátható, hogy bármilyen kétszer differenciálható f függvény, amelyre tetszőleges $f(x, t)\in R^2$ esetén teljesül az $f(x, t)=\varphi\left(t-\frac{x}{c}\right)$ egyenlőség, eleget tesz a hullámegyenletnek.

19. Határozza meg az f'''_{xzy} függvényt, ha

$$f:(x, y, z)\mapsto e^{xyz} \qquad (x, y, z)\in R^3.$$

Mivel a függvény is és parciális deriváltjai is folytonosak, így a deriválás sorrendje tetszőleges

$$f'_x = e^{xyz}yz,$$

$$f''_{xy} = e^{xyz}xyz^2 + e^{xyz}z = e^{xyz}(xyz^2+z),$$

$$f'''_{xyz} = e^{xyz}xy(xyz^2+z) + e^{xyz}(2xyz+1) = e^{xyz}(x^2y^2z^2+3xyz+1).$$

Megjegyzés: Várható, hogy f'''_{xyz} szimmetrikus három változójában, hiszen f is ilyen tulajdonságú volt.

20. Határozza meg a

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^m \partial y^n}$$

derivált függvényt, ha

$$f:(x, y) \mapsto (x-a)^m (y-b)^n \qquad (x, y) \in R^2.$$

Mivel f is és parciálisai is folytonosak, így a deriválás sorrendje tetszőleges.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = m(x-a)^{m-1}(y-b)^n,$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = m!(y-b)^n,$$

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = m!n!.$$

21. Határozza meg a $\dfrac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$ függvényt, ha

$$f:(x, y) \mapsto x^4 \sin y + y^4 \cos x \qquad (x, y) \in R^2$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = x^4 \sin y + 4! \cos x,$$

és mivel $\sin y$ y szerinti negyedik deriváltja önmaga,

$$\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} = 4!(\sin y + \cos x).$$

22. Igazolja, hogy az

$$f:(x, t) \mapsto \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \qquad x \in R,\ t \in R^+ \setminus \{0\}$$

függvény, ahol $a \neq 0$ állandó, kielégíti az

$$a^2 f''_{xx} = f'_t$$

parciális differenciálegyenletet (lineáris hővezetés egyenlete)!

$$f'_x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(\frac{-2x}{4a^2 t}\right),$$

$$f''_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(\frac{-2x}{4a^2 t}\right)^2 + e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(-\frac{2}{4a^2 t}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}} \left(\frac{x^2}{4a^2 t^2} + \frac{-1}{2t}\right).$$

$$f'_t = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}} \frac{x^2}{4a^2 t^2} =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) t^{-1} + \frac{x^2}{4a^2 t^2}\right].$$

Tehát az f függvény valóban kielégíti a lineáris hővezetés differenciálegyenletét.

2. Teljes differenciál. Hibaszámítás

A parciális deriváltak a függvény megváltozását csak a felületből az y, ill. x tengelyre merőleges síkokkal kimetszett síkgörbék mentén jellemezték. E speciális síkgörbék esetében az egyik változó rögzített érték volt. Ahhoz, hogy a függvény megváltozását tetszőleges irányban vizsgálhassuk, definiálni kell a differenciálhatóság és a teljes differenciál fogalmát.

Tekintsük az $f: D_f \to R$ $D_f \subset R^2$ kétváltozós függvényt!

Legyen a $P_0(x_0, y_0) \in D_f$ pont a D_f torlódási pontja, $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D_f$ egy P_0-tól különböző pont, és

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

jelölje a függvény megváltozását.

Az f függvényt a P_0 pontban *totálisan differenciálhatónak* nevezzük, ha léteznek olyan A_1, A_2 valós számok, amelyekre

$$\left| \frac{\Delta f - A_1 x - A_2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \to 0,$$

ha a nevező nullához tart.

Tehát, ha f differenciálható a P_0 pontban, akkor

$$\Delta f = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

ahol $\varepsilon(\Delta x; \Delta y)$ nullához tart, ha a P ponttal P_0-hoz közeledünk; így f a P_0 környezetében egy lineáris függvénnyel közelíthető.

A P_0 pontbeli totális differenciálhatóságból már következik a parciális differenciálhányadosok létezése a P_0-ban, és az $A_1 = f'_x(x_0, y_0)$, ill. $A_2 = f'_y(x_0, y_0)$ is fennáll. A parciális deriváltak létezése a P_0 pontban azonban nem elégséges feltétele a totális differenciálhatóságnak. Elégséges — de nem szükséges — feltétele viszont a parciális deriváltak folytonossága az adott pontban.

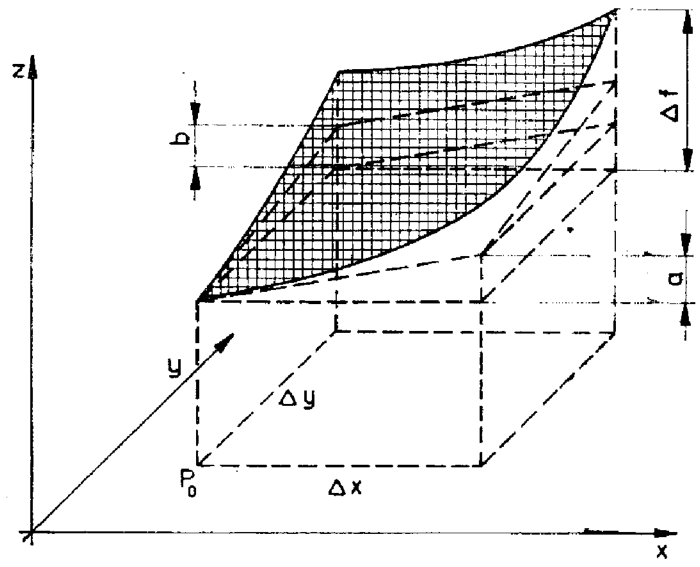
A P_0 pontbeli differenciálhatóság egyben azt jelenti, hogy a $z = f(x, y)$ felületnek az (x_0, y_0, z_0) pontban létezik érintősíkja. E kérdéssel bővebben a IV.3. szakaszban foglalkozunk.

A 26. ábrán az f felülethez a P_0 pontban húzható érintősíkot láthatjuk, amelyet az $x = x_0$, ill. $y = y_0$ síkok által a felületből kimetszett síkgörbék érintői határoznak meg.

Mivel ezek iránytangensét a P_0-beli parciális deriváltak adják, így az ábra jelölései szerint:

$$a = f'_x(x_0; y_0)\Delta x,$$

$$b = f'_y(x_0; y_0)\Delta y$$



26. ábra

és

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \approx a + b = f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

Természetesen a közelítés annál pontosabb, minél kisebb a $\overline{PP_0}$ távolság:

$$\overline{PP_0} = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Az egyváltozós függvények differenciáljának megfelelően definiáljuk a kétváltozós függvény P_0-beli teljes differenciálját.

Ha a

$$g: x \to g(x) \qquad x \in R$$

függvény differenciálható az x_0 helyen, akkor differenciálja:

$$dg = g'(x_0)dx.$$

E fogalmat általánosítva:

Ha f a P_0 pontban differenciálható, akkor P_0-beli teljes differenciálja

$$df=f_x'(x_0, y_0)\Delta x+f_y'(x_0, y_0)\Delta y,$$

azaz f-nek P_0 pontbeli érintősíkjáig való megváltozása.

Tekintve, hogy az

$$f=x \qquad (x, y)\in R^2$$

függvény esetén

$$df=dx=\Delta x,$$

így a teljes differenciál szokásos alakja:

$$df=f_x'(x_0, y_0)\, dx+f_y'(x_0, y_0)\, dy.$$

Ha f a $T\subset D_f$ tartomány minden pontjában differenciálható, akkor T-ben *differenciálhatónak* nevezzük, és differenciálja a

$$df:(x, y)\mapsto f_x'\, dx+f_y'\, dy \qquad (x, y)\in T$$

függvény.

Hasonlóan értelmezhető három-, ill. többváltozós függvények differenciálhatósága is.

Sok esetben szükséges a következő kérdés eldöntése: Teljes differenciál-e a

$$\delta f=p\, dx+q\, dy$$

kifejezés, ahol p és q egy $T\subset R^2$ tartományban differenciálható függvények. (A δ-val jelezzük, hogy ez nem biztos.)

Annak feltétele, hogy δf teljes differenciál legyen, az, hogy

$$p_x'=q_y'$$

teljesüljön T minden pontjában. Ugyanis, ha teljes differenciál, akkor

$$f_x'=p \qquad \text{és} \qquad f_y'=q,$$

így a vegyes parciális deriváltak egyenlőségéből:

$$p_y'=f_{xy}''=f_{yx}''=q_x'$$

következik.

A teljes differenciál lényeges alkalmazási területe a *hibaszámítás:*

Minden mérés elvégzése egy névleges értéket ad (legyen ez x), meghatározott hibakorláttal (legyen ez Δx). A mért mennyiség valódi értéke tehát az $[x-\Delta x;\, x+\Delta x]$ intervallumba esik.

Elnevezések:

Δx abszolút hiba (korlát),

$x\neq 0$ esetén $\dfrac{\Delta x}{x}$ relatív hiba (korlát),

$\dfrac{\Delta x}{x}\cdot 100$ százalékos hiba.

x, y mért értékeiből valamilyen f kétváltozós függvény értékét határozzuk meg. Mivel x és y nem pontos, így $f(x, y)$ sem lesz az. Ha f totálisan differenciálható az (x, y) helyen, akkor abszolút hibája (hibakorlátja):

$$\Delta f=|f_x'(x, y)\Delta x|+|f_y'(x, y)\Delta y|.$$

(*Megjegyzés:* feltételezzük, hogy nem mind a két parciális derivált értéke nulla. Ekkor ugyanis $\Delta f=0$ adódna, ami hibakorlátra lehetetlen. Ezzel az esettel a III.5. szakaszban foglalkozunk.)

Az öröklött hiba meghatározásánál gyakran használhatók a következő szabályok:

1. Összeg és különbség hibája egyenlő a tagok hibájának összegével:

$$\Delta(f\pm g)=\Delta f+\Delta g.$$

2. Szorzat és hányados relatív hibája a tényezők relatív hibáinak összegével egyenlő (ha ezek léteznek):

$$\frac{\Delta(fg)}{fg}=\frac{\Delta f}{f}+\frac{\Delta g}{g},$$

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\dfrac{f}{g}}=\frac{\Delta f}{f}+\frac{\Delta g}{g}.$$

3. Hatvány relatív hibája az alap relatív hibájának és a kitevőnek a szorzata:

$$\frac{\Delta(f^a)}{f^a}=a\frac{\Delta f}{f} \qquad (a\in R).$$

Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy az

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{ha } x^2+y^2=0,\end{cases} \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény folytonos az origóban, **léteznek** a parciális deriváltak, de a függvény nem differenciálható az origóban!

a) A folytonosságot polárkoordináták segítségével könnyen beláthatjuk:

$$\lim_{(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2}=0=f(0,0).$$

b)

$$f'_x(0,0)=\lim_{0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

hiszen a számláló mindkét tagja nulla.
Hasonlóan

$$f'_y(0,0)=0,$$

$$f'_x:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{ha } x^2+y^2=0\end{cases} \qquad (x,y)\in R^2.$$

Az *a)* alatti módszerrel könnyen igazolható, hogy f'_x *nem* folytonos az origóban.

c) Vizsgáljuk meg, hogy differenciálható-e az origóban!

$$\lim_{(0,0)}\frac{|f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$$

$$=\lim_{(0,0)}\frac{\left|\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Szintén polárkoordinátákra áttérve, a következő határértéket kell vizsgálnunk:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\,|\sin\varphi\cos^2\varphi|}{r^3(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}=\lim_{r\to 0}|\sin\varphi\cos^2\varphi|.$$

Ez a határérték viszont nem létezik, mivel φ értékétől nem független.
Tehát a függvény nem differenciálható az origóban.

2. Igazolja, hogy az

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}xy, & \text{ha } xy \text{ racionális}\\ 0, & \text{ha } xy \text{ irracionális}\end{cases} \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény differenciálható az origóban!

a) A függvény folytonos az origóban, mivel

$$|f|\leq|xy|,$$

xy határértéke viszont itt nulla.

b) A parciális deriváltak értéke az origóban nulla, mivel mindkét tengelyen azonosan nulla a függvény értéke:

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0.$$

c) A differenciálhatósághoz a

$$\lim_{(0,0)}\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

egyenlőség teljesülése szükséges.
Ennek teljesülése polárkoordinátákra való áttéréssel azonnal látható. Vagy

más módon:

$$\frac{|\Delta x\,\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \le \frac{|\Delta x\,\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}} = \left|\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x}\right|,$$

ez utóbbi viszont az origóban nullához tart. A függvény tehát valóban differenciálható az origóban.

Megjegyzés: E függvény parciális deriváltjai nem folytonosak az origó környezetében (és másutt sem).

Legyen pl. $P_0(x_0, y_0)$ olyan pont, melyre x_0 és y_0 racionális ($x_0y_0 \ne 0$). Ekkor

$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \begin{cases} y_0, & \text{ha } \Delta x \text{ racionális} \\ -\dfrac{x_0y_0}{\Delta x}, & \text{ha } \Delta x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

tehát e helyen az x szerinti parciális derivált nem létezik.

Az origóbeli differenciálhatósághoz tehát nem szükséges feltétel, hogy itt a parciális deriváltak folytonosak legyenek.

3. Legyen

$$f: (x, y) \mapsto x^2+y^2 \qquad (x, y) \in R^2.$$

Határozza meg a $z=f(x, y)$ felülethez a P_0 (4; 3; 25) pontban húzható érintősík egyenletét!

A függvény differenciálható a P_0 pontban, tehát *létezik érintősík.*

Meg kell határoznunk az érintősík normálvektorát. A 26. ábra szerinti két speciális görbe érintőinek irányvektorai:

$$\mathbf{v}_1(1; 0; f'_x(x_0, y_0)),$$

$$\mathbf{v}_2(0; 1; f'_y(x_0, y_0)).$$

Az érintősík normálvektora e két vektorra merőleges, tehát választható ezek vektoriális szorzatának:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

A determináns értékét meghatározva:

$$\mathbf{n}(-f'_x(x_0, y_0); -f'_y(x_0, y_0); 1);$$

esetünkben $\mathbf{n}(-8; -6; 1)$, az érintősík egyenlete tehát:

$$-8(x-4)-6(y-3)+z-25=0,$$

azaz

$$8x+6y-z=15.$$

4. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{x^2}{y} \qquad x \in R \Delta y \in R \setminus \{0\}$$

függvény esetén a lehetséges megváltozások pontos értékeit, ha

$$x_0 = y_0 = 100 \qquad \text{és} \qquad \Delta x = \Delta y = 1.$$

Határozza meg Δf közelítő értékét teljes differenciállal is, majd hasonlítsa össze a kapott eredményeket!

a) A lehetséges megváltozások:

$$\begin{aligned} f(101; 101) - f(100; 100) &= 1, \\ f(99; 99) - f(100; 100) &= -1, \\ f(101; 99) - f(100; 100) &= 3{,}04, \\ f(99; 101) - f(100; 100) &= -2{,}96. \end{aligned}$$

A maximális érték tehát:

$$\Delta f = 3{,}04 \approx 3,$$

b) Differenciálással megkeresve f hibakorlátját:

$$\Delta f = |f'_x(x_0, y_0)\Delta x| + |f'_y(x_0, y_0)\Delta y| =$$

$$= \left|\frac{2x_0}{y_0}\Delta x\right| + \left|\frac{-x_0^2}{y_0^2}\Delta y\right| = 3,$$

tehát látható, hogy a két módon számított érték igen jó közelítéssel egybeesik.

Megjegyzés: A Δf értékét műveletek hibáira vonatkozó szabályok alapján is meghatározhatjuk:

$$\frac{\Delta f}{f}=\frac{2\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}=0{,}03,$$

tehát $\Delta f=f(x_0, y_0)\cdot 0{,}03=3.$

5. Egy anyag törésmutatóját az

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right);\ \beta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

összefüggésből számoljuk.

Határozza meg n névleges értékét és hibáját, ha a mért adatok

$\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, és a mérés pontossága mindkét szög esetén 0,01 (radián)!

A névleges érték:

$$n=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=1{,}22475,$$

a hibakorlát:

$$\Delta n=|f'_\alpha(\alpha, \beta)\Delta\alpha|+|f'_\beta(\alpha, \beta)\Delta\beta|=$$

$$=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ}\Delta\alpha+\left|-\frac{\sin 60^\circ\cos 45^\circ}{\sin^2 45^\circ}\Delta\beta\right|=0{,}019,$$

n értékéből tehát maximálisan három tizedesjegyet érdemes figyelembe venni.

A törésmutató értéke így:

$n=1{,}225\pm0{,}019.$

6. Ellenállások névleges értékei

$R_1=150\ \Omega, \qquad R_2=500\ \Omega.$

Mindkét érték 2% pontosságú, azaz

$\Delta R_1=3\ \Omega, \qquad \Delta R_2=10\ \Omega.$

Határozza meg soros, ill. párhuzamos kapcsolások esetén az eredő relatív hibáját!

a) Soros kapcsolás esetén a névleges érték:

$$R_s=R_1+R_2=650\ \Omega.$$

Mivel összeg hibája a tagok hibáinak összegével egyenlő, így:

$$\Delta R_s=13\ \Omega,$$

a relatív hiba pedig:

$$\frac{\Delta R_s}{R_s}=0{,}02,$$

tehát az eredő ellenállás ugyancsak 2% pontosságú.

b) Párhuzamos kapcsolás esetén:

$$R_p=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=115{,}4\ \Omega,$$

$$\Delta R_p=|f'_{R_1}(R_1, R_2)\Delta R_1|+|f'_{R_2}(R_1, R_2)\Delta R_2|=$$

$$=\frac{R_2(R_1+R_2)-R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_1+\frac{R_1(R_1+R_2)-R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\Delta R_2,$$

rendezve:

$$R_p=\frac{R_2^2\Delta R_1+R_1^2\Delta R_2}{(R_1+R_2)^2}=2{,}3\ \Omega.$$

A relatív hiba

$$\frac{\Delta R_p}{R_p}=0{,}02,$$

tehát az eredő ellenállás most is 2% pontosságú. Lássuk be általánosan is, hogy ez nem véletlenül egyezik meg az összetevők pontosságával!

Alakítsuk át a ΔR_p-re kapott alakot!

$$\Delta R_p=\frac{R_2^2\Delta R_1+R_1^2\Delta R_2}{(R_1+R_2)^2}=\frac{R_2^2R_1\frac{\Delta R_1}{R_1}+R_1^2R_2\frac{\Delta R_2}{R_2}}{(R_1+R_2)^2};$$

ha

$$\frac{\Delta R_1}{R_1}=\frac{\Delta R_2}{R_2},$$

tehát R_1 és R_2 azonos pontosságú, akkor e közös tényezőt kiemelve:

$$\Delta R_p=\frac{\Delta R_1}{R_1}\cdot\frac{R_2R_1(R_2+R_1)}{(R_2+R_1)^2}=\frac{\Delta R_1}{R_1}R_p,$$

így

$$\frac{\Delta R_p}{R_p}=\frac{\Delta R_1}{R_1}.$$

Azonos pontosságú elemekből tehát soros, ill. párhuzamos kapcsolásokkal ugyanakkora pontosságú eredőt kapunk.

7. Megmérjük egy derékszögű háromszög befogóit:

$a=80$ m,
$b=60$ m;

a mérés pontossága mindkét befogó esetén 1 m. Határozza meg az átfogó és a háromszög egyik hegyesszögének abszolút, ill. relatív hibáját! (Feltéve, hogy a derékszög pontosan 90°.)

$$c=\sqrt{a^2+b^2}\qquad a\in R^+,\ b\in R^+,$$

$$\Delta c=|c'_a(a,b)\Delta a|+|c'_b(a,b)\Delta b|=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta a+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Delta b=1{,}4\ \text{m},$$

$$\frac{\Delta c}{c}=0{,}014.$$

Megjegyzés: Ugyanezt kapjuk, ha a

$$c^2=a^2+b^2$$

implicit függvény (l. III.4.) differenciálját képezzük:

$$2c\Delta c=2a\Delta a+2b\Delta b,$$

ebből

$$\Delta c=\frac{1}{c}(a\Delta a+b\Delta b)=1{,}4\ \text{m},$$

ami az előzővel megegyezik.

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\qquad a\in R^+,\ b\in R^+,$$

$$\Delta\alpha=|\alpha'_a(a,b)\Delta a|+|\alpha'_b(a,b)\Delta b|=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}}\left(\frac{1}{b}\Delta a+\frac{a}{b^2}\Delta b\right)=0{,}014,$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha}=0{,}0151.$$

Megjegyzés:

A $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$

implicit függvény differenciálját képezve:

$$\left|\frac{1}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha\right|=\left|\frac{\Delta a}{b}\right|+\left|\frac{a}{b^2}\Delta b\right|,$$

$$\Delta\alpha=\cos^2\alpha\left(\frac{\Delta a}{b}+\frac{a\Delta b}{b^2}\right)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\left(\frac{\Delta a}{b}+\frac{a\Delta b}{b^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}}\left(\frac{\Delta a}{b}+\frac{a\Delta b}{b^2}\right).$$

Az eredmény tehát az előzővel megegyezik.

8. Matematikai inga hosszát és lengésidejét méréssel állapítjuk meg. A mért adatokból számoljuk ki g névleges értékét és hibakorlátját!

Az adatok:

$$T=1\text{ s} \qquad \Delta T=5\cdot 10^{-4}\text{ s},$$
$$l=0{,}99\text{ m} \qquad \Delta l=10^{-3}\text{ m}.$$

Mivel

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$g=\frac{\pi^2 l}{T^2}=9{,}77\text{ m/s}^2,$$

g relatív hibáját a műveletek hibáira vonatkozó összefüggések segítségével számítjuk ki:

$$\frac{\Delta g}{g}=\frac{2\Delta T}{T}+\frac{\Delta l}{l}=10^{-3}+\frac{10^{-3}}{0{,}99}\approx 2\cdot 10^{-3},$$

ahonnan

$$\Delta g=9{,}77(2\cdot 10^{-3})=1{,}95\cdot 10^{-3}\approx 0{,}02\text{ m/s}^2,$$

tehát g értékét 2‰ pontossággal tudjuk megállapítani.

9. Határozza meg az

$$u=\frac{x^3}{\sqrt{y}\sqrt[3]{z}} \qquad (x,y,z)\in R^{+3}$$

függvény relatív hibáját, ha

$$\frac{\Delta x}{x}=0{,}02; \qquad \frac{\Delta y}{y}=0{,}04; \qquad \frac{\Delta z}{z}=0{,}03.$$

Melyik változó pontosabb mérése csökkentené lényegesen u relatív hibáját?

A műveletek hibáira vonatkozó összefüggések alapján:

$$\frac{\Delta u}{u}=3\frac{\Delta x}{x}+\frac{1}{2}\frac{\Delta y}{y}+\frac{1}{3}\frac{\Delta z}{z},$$

$$\frac{\Delta u}{u}=0{,}09.$$

$\frac{\Delta u}{u}$ alakjából látszik, hogy x relatív hibájának csökkentésével érhető el $\frac{\Delta u}{u}$ lényeges csökkenése.

10. Téglatest éleit méréssel állapítjuk meg. A mért értékek:

$$a=50\text{ cm}; \qquad b=30\text{ cm}; \qquad c=40\text{ cm}.$$

Az adatok hibakorlátai:

$$a=1\text{ cm}; \qquad b=0{,}5\text{ cm}; \qquad c=0{,}5\text{ cm}.$$

Határozza meg a felszín és a térfogat hibakorlátját!

A névleges értékek:

$$A=2ab+2ac+2bc=9400\text{ cm}^2,$$
$$V=abc=60\,000\text{ cm}^3.$$

A felszín abszolút hibája:

$$\Delta A=\left|\frac{\partial A}{\partial a}\Delta a\right|+\left|\frac{\partial A}{\partial b}\Delta b\right|+\left|\frac{\partial A}{\partial c}\Delta c\right|=$$
$$=2(b+c)\Delta a+2(a+c)\Delta b+2(a+b)\Delta c,$$
$$\Delta A=310\text{ cm}^2,$$

tehát

$$\frac{\Delta A}{A}=\frac{310}{9400}=0{,}033=3{,}3\%.$$

A térfogat esetében célszerűbb először a relatív hibát meghatározni:

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}=0{,}049=4{,}9\%$$

Innen az abszolút hiba értéke:

$$V=V\cdot 0{,}049=2940\text{ cm}^3.$$

11. Egy henger sugara és magassága:

$$M=20 \text{ cm}, \qquad R=15 \text{ cm}.$$

Mennyivel csökkentsük a henger sugarát, hogy a felszíne lehetőleg ne változzék, ha a magassága $\Delta M=1$ cm-rel növekszik?

$$A=2R^2\pi+2R\pi M,$$

$$\Delta A=A'_R(R, M)\Delta R+A'_M(R, M)\Delta M=$$
$$=(4R\pi+2\pi M)\Delta R+2R\pi\Delta M.$$

A feladat feltételei miatt $\Delta A=0$, amiből következik, hogy

$$\Delta R=-\frac{R\Delta M}{2R+M}=-0{,}3 \text{ cm}.$$

(A felszín nem pontosan egyezik meg az eredetivel, de változása M és R változásánál jóval kisebb.)

12. Tekintsük a következő differenciálható függvényt:

$$i_a=i_a(U_a, U_g) \qquad U_a\in R^+, \qquad U_g\in R^+.$$

Hogyan változtassuk U_a változásától függően U_g értékét, hogy i_a változatlan maradjon?

(A feladatban a trióda rácsfeszültsége, anódfeszültsége, anódárama változásai közötti összefüggést keressük.)

$$\Delta i_a=\frac{\partial i_a}{\partial U_a}\Delta U_a+\frac{\partial i_a}{\partial U_g}\Delta U_g=0.$$

Ezt átalakítva (feltéve, hogy $\Delta U_g\neq 0$)

$$\frac{\partial i_a}{\partial U_g}=-\frac{\partial i_a}{\partial U_a}\frac{\Delta U_a}{\Delta U_g}\approx-\frac{\partial i_a}{\partial U_a}\cdot\frac{\partial U_a}{\partial U_g}.$$

Megjegyzés: Ez az ún. Barkhausen-egyenlet. A parciális deriváltak fizikai tartalma:

$$\frac{\partial i_a}{\partial U_g}=s$$

áthatás,

$$\frac{\partial i_a}{\partial U_a}=\frac{1}{r_b},$$

ahol r_b a belső ellenállás,

$$-\frac{\partial U_a}{\partial U_g}=\mu$$

erősítés.

13. Teljes differenciál-e az alábbi kifejezés?

$$\delta f=(3x^2e^{\frac{\sin y}{x}}-xe^{\frac{\sin y}{x}}\sin y)dx+$$
$$+x^2e^{\frac{\sin y}{x}}\cos y\, dy \qquad x\in R\setminus\{0\},\ y\in R.$$

A $df=P\,dx+Q\,dy \qquad (x, y)\in D_P\cap D_Q$

akkor és csak akkor teljes differenciál, ha

$$P'_y=Q'_x \qquad \forall(x, y)\in D_P\cap D_Q$$

esetén, feltéve, hogy P'_y és Q'_x léteznek.

A feladatban

$$P=e^{\frac{\sin y}{x}}(3x^2-x\sin y),$$

$$Q=x^2e^{\frac{\sin y}{x}}\cos y.$$

$$P'_y=e^{\frac{\sin y}{x}}\frac{\cos y}{x}(3x^2-x\sin y)-e^{\frac{\sin y}{x}}x\cos y=e^{\frac{\sin y}{x}}(2x-\sin y)\cos y,$$

$$Q'_x=2xe^{\frac{\sin y}{x}}\cos y+x^2e^{\frac{\sin y}{x}}\left(\frac{-\sin y}{x^2}\right)\cos y=$$
$$=e^{\frac{\sin y}{x}}(2x-\sin y)\cos y,$$

azaz az értelmezési tartomány minden pontjában $P'_y=Q'_x$, tehát a kifejezés teljes differenciál.

Megjegyzés: Az f függvény meghatározásával a VII.1-ben foglalkozunk.

14. Teljes differenciál-e az alábbi kifejezés:

$$\delta f = (2x \sin y - 6x)\, dx + (x^2 \sin y + x + 6)\, dy \qquad (x, y) \in R^2?$$

E feladatnál

$$P = 2x \sin y - 6x,$$
$$Q = x^2 \sin y + x + 6.$$
$$P'_y = 2x \cos y; \qquad Q'_x = 2x \sin y.$$

Tehát

$$P'_y \neq Q'_x,$$

ezért nem teljes differenciál.

15. Határozza meg a

$$\varphi : y \mapsto \varphi(y) \qquad y \in R$$

függvényt úgy, hogy a

$$\delta f = \varphi(y) \sin y\, e^{x^2-x}(2x-1)\, dx + 2\varphi(y) e^{x^2-x} \cos y\, dy$$
$$(x, y) \in R^2$$

teljes differenciál legyen!

$$P = \varphi(y) \sin y e^{x^2-x}(2x-1),$$
$$Q = 2\varphi(y) e^{x^2-x} \cos y,$$
$$P'_y = \varphi'(y) e^{x^2-x}(2x-1) \sin y + \varphi(y)(2x-1) e^{x^2-x} \cos y,$$
$$Q'_x = 2\varphi(y) e^{x^2-x}(2x-1) \cos y.$$

A $P'_y = Q'_x$ egyenlőség mindkét oldalát osztjuk $e^{x^2-x} \neq 0$-val, és rendezzük a kifejezést, így azt kapjuk, hogy

$$\varphi'(y) \sin y(2x-1) = \varphi(y) \cos y(2x-1).$$

(Mivel a két oldal azonosan egyenlő, tehát nemcsak $x = \frac{1}{2}$ esetén):

$$\varphi'(y) \sin y = \varphi(y) \cos y.$$

Feltételezve, hogy

$$\varphi(y) \neq 0,$$

és

$$\sin y \neq 0,$$

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{\cos y}{\sin y},$$

azaz:

$$\ln |\varphi(y) = \ln |\sin y| = \ln c \qquad c \in R^+.$$

Tehát:

$$\varphi : y \mapsto c \sin y \qquad y \in R,$$

amelyről helyettesítéssel látható, hogy $y = k\pi$ esetén is megoldása az egyenletnek.

Megjegyzés: A kapott kifejezés az

$$f = c \sin^2 y e^{x^2-x} \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény teljes differenciálja, ugyanis helyettesítés után

$$df = c \sin^2 y e^{x^2-x}(2x-1)\, dx + 2c \sin y \cos y e^{x^2-x}\, dy.$$

16. Határozza meg a

$$\varphi : x \mapsto \varphi(x) \qquad x \in R$$

függvényt úgy, hogy

$$\delta g := \frac{2xy\varphi(x)}{1 + ye^{x^2}}\, dx + \frac{\varphi(x)}{1 + ye^{x^2}}\, dx \qquad (x, y) \in R^{+2}$$

teljes differenciál legyen!

A feladatban

$$P = \frac{2xy\varphi(x)}{1 + ye^{x^2}}; \qquad Q = \frac{\varphi(x)}{1 + ye^{x^2}}.$$

Ahhoz, hogy δg teljes differenciál legyen, a $P'_y = Q'_x$ azonosságnak kell teljesülnie D_g minden pontjában;

$$P'_y = 2x\varphi(x)\frac{\left(1+ye^{x^2}\right)-ye^{x^2}}{\left(1+ye^{x^2}\right)^2} = \frac{2x\varphi(x)}{\left(1+ye^{x^2}\right)^2},$$

$$Q'_x = \frac{\varphi'(x)\left(1+ye^{x^2}\right)-\varphi(x)2xye^{x^2}}{\left(1+ye^{x^2}\right)^2}.$$

A kettő egyenlőségéből:

$$\varphi'(x)\left(1+ye^{x^2}\right) = \varphi(x)2xye^{x^2}+2x\varphi(x) = 2x\varphi(x)\left(1+ye^{x^2}\right)$$

adódik, amiből

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 2x$$

és így

$$\ln|\varphi(x)| = x^2+\ln c$$

következik. Vagyis:

$$\varphi: x \mapsto \varphi(x) = ce^{x^2} \qquad x\in R,$$

amelyet az eredeti feladatba helyettesítve a

$$dg = \frac{2xyce^{x^2}}{1+ye^{x^2}}dx + \frac{ce^{x^2}}{1+ye^{x^2}}dy \qquad (x, y)\in R^{+2}$$

kifejezést kapjuk, ami a

$$g = c\ln\left(1+ye^{x^2}\right) \qquad (x, y)\in R^{+2}$$

függvény teljes differenciálja.

3. A többváltozós összetett függvények deriválása

Többváltozós függvények körében az összetett függvény előállítására többféle lehetőség nyílik. Először az általános esetet definiáljuk, itt vizsgáljuk a differenciálhatóságot, majd külön-külön tárgyalunk néhány speciális esetet.

a) Adott n számú m-változós függvény, értelmezési tartományaik közös részét jelölje $D\subset R^m$:

$$\varphi_i: D\to R \qquad i=1, \ldots, n,$$

továbbá egy

$$f: D_f\to R \qquad D_f\subset R^n$$

n-változós függvény, amelynek értelmezési tartománya minden $P(x_1, \ldots, x_m)\in D$ esetén tartalmazza a $Q(\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots, \varphi_n(P))$ pontokat. Ekkor értelmezhető a

$$g = f\circ(\varphi_1, \ldots, \varphi_n): (x_1, \ldots, x_m)\mapsto$$
$$\mapsto f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m))$$

összetett függvény, amelynek értelmezési tartománya $D\subset R_m$. Továbbá, ha a $\varphi_i\,(i=1, \ldots, n)$ függvények totálisan differenciálhatók egy $P_0(x_1, \ldots, x_m)\in D$ pontban, akkor az előzőekben értelmezett g is totálisan differenciálható a P pontban, és parciális deriváltjai:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_P = \sum_{i=1}^{h}\left.\frac{\partial f}{\partial y_i}\right|_Q\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right|_P \qquad k=1, \ldots, m.$$

Megjegyzés: a mondott feltételek g differenciálhatóságának elégséges, de nem szükséges feltételei. Nézzünk néhány speciális esetet!

b) Legyen

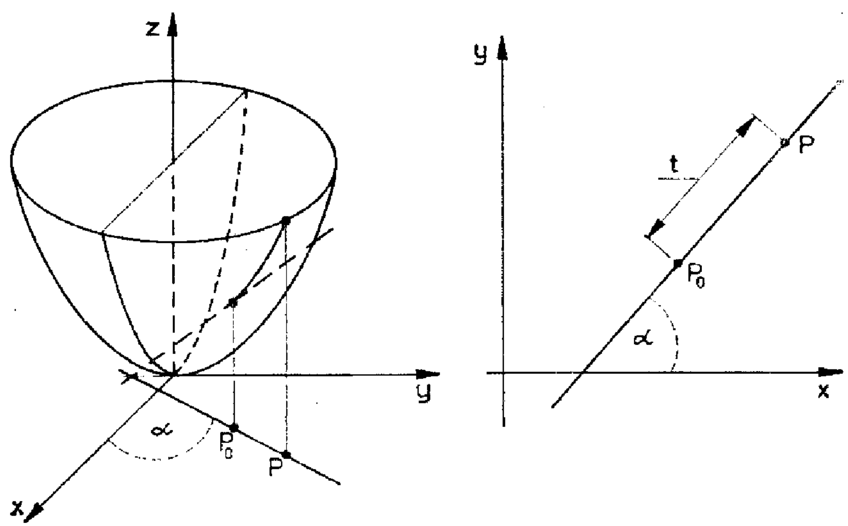
$$f: D_f\to R, \qquad D_f\subset R \text{ egyváltozós,}$$
$$\varphi: D\to R, \qquad D\subset R^2 \text{ pedig kétváltozós függvény.}$$

Ekkor, ha D_f tartalmazza a $\varphi(x, y)$ pontokat minden $(x, y)\in D$ esetén, és teljesülnek a differenciálhatóságra vonatkozó *a)*-ban tett kikötések, akkor:

$$dg = d(f\circ\varphi) = (x, y)\mapsto(f'\circ\varphi)\,d\varphi \qquad (x, y)\in D.$$

c) Legyenek

$$\varphi_i: D\to R \qquad D\subset R \qquad i=1, 2 \text{ egyváltozós,}$$
$$f: D_f\to R \qquad D_f\subset R^2 \text{ pedig kétváltozós függvények.}$$



27. ábra

Ha az *a)*-beli kikötések teljesülnek:

$$d\,g|_{t_0} = d(f\circ(\varphi_1, \varphi_2))|_{t_0} =$$

$$= f'_x(\varphi_1(t_0); \varphi_2(t_0))\varphi'_1(t_0)\,dt +$$

$$+ f'_y(\varphi_1(t_0); \varphi_2(t_0))\varphi'_2(t_0)\,dt \qquad t_0 \in D.$$

d) Legyenek

$$\varphi_i : D \to R \qquad D \subset R^2 \qquad i = 1, 2$$

és

$f : D_f \to R \qquad D_f \subset R^2$ kétváltozós függvények.

Az *a)*-beli feltételek teljesülése esetén:

$g = f\circ(\varphi_1, \varphi_2) : D \to R$ kétváltozós függvény differenciálható

és:

$$d\,g = \frac{\partial g}{\partial u}\,du + \frac{\partial g}{\partial v}\,dv \qquad (u, v) \in D.$$

A parciális deriváltak:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_P = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_Q \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right|_P + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_Q \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right|_P,$$

ahol $P(u, v) \in D$ és $Q(\varphi_1(u, v); \varphi_2(u, v)) \in D_f$. (Hasonlóan írható fel a v szerinti parciális derivált is.)

e) Vizsgáljuk meg *c)* egy speciális esetét! Legyen adott az

$$f : D_f \to R \qquad D_f \subset R^2$$

kétváltozós függvény és egy rögzített $P_0(x_0, y_0) \in D_f$ pont, továbbá legyen

$$x : t \mapsto x_0 + t\cos\alpha \qquad t \in R,$$
$$y : t \mapsto y_0 + t\sin\alpha \qquad t \in R,$$

azaz haladjunk a rögzített P_0 pontból egy egyenes mentén, és vizsgáljuk f változási sebességét! (A t paraméter abszolút értéke a $\overline{PP_0}$ távolság.) (27. ábra)

Ha létezik a

$$g = f\circ(x, y) : R \to R$$

függvény t szerinti deriváltja, akkor ezt az f függvény P_0 pontbeli *iránymenti deriváltjának* nevezzük:

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{P_0} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha.$$

Az iránymenti derivált jelölésére a $\frac{df}{d\alpha}$, ill. $\frac{df}{d\mathbf{e}}$ jelölés is használatos, amellyel azt hangsúlyozzuk, hogy a deriválást az **e** vektor irányában végezzük. Ha f differenciálható a P_0 pontban, akkor az iránymenti derivált tetszőleges α érték mellett létezik. A P_0 pontbeli parciális deriváltak speciálisan az $\alpha = 0$, ill. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ irányhoz tartozó iránymenti deriváltak, ezek létezéséhez nem szükséges az f P_0-beli differenciálhatósága.

Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$f : u \mapsto \sqrt{u} \qquad u \in R^+$$

és

$$\varphi : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \qquad (x, y) \in R^2.$$

Határozza meg a $g=f\circ\varphi$ függvény teljes differenciálját!

$$dg=(f'\circ\varphi)\,d\varphi|_{(x\ y)}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x\,dx+2y\,dy)\qquad (x,y)\in R^2\mid\{(0,0)\}.$$

2. Legyen

$$f:(x,y)\mapsto x^3+y^2-6x\qquad (x,y)\in R^2$$

és

$$\varphi_1: t\mapsto 3\operatorname{ch} t\qquad t\in R$$
$$\varphi_2: t\mapsto 5\operatorname{sh} t\qquad t\in R;$$

határozza meg a $g=f\circ(\varphi_1,\varphi_2)$ függvény deriváltját!

$$\frac{dg}{dt}=f'_x\circ(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_1'+f'_y\circ(\varphi_1,\varphi_2)\cdot\varphi_2'=$$
$$=\big(3(3\operatorname{ch}t)^2-6\big)3\operatorname{sh}t+2(5\operatorname{sh}t)\cdot 5\operatorname{ch}t=$$
$$=(27\operatorname{ch}^2 t-6)3\operatorname{sh}t+50\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t=$$
$$=\operatorname{sh}t(81\operatorname{ch}^2 t+50\operatorname{ch}t-18).$$

Határozzuk meg g' értékét más úton is! A helyettesítést elvégezve:

$$g: t\mapsto 27\operatorname{ch}^3 t+25\operatorname{sh}^2 t-18\operatorname{ch}t\qquad t\in R,$$
$$g'_y t\mapsto 81\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh}t+50\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t-18\operatorname{sh}t=$$
$$=\operatorname{sh}t(81\operatorname{ch}^2 t+50\operatorname{ch}t-18),$$

ami az előzővel megegyezik.

Megjegyzés: A kapott eredmény úgy értelmezhető, hogy vizsgáljuk f változási sebességét az

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$$

hiperbolán elmozdulva.

3. Határozza meg g deriváltját, ha

$$f:(x,y)\mapsto x^2e^{\frac{x}{y}}\qquad x\in R,\ y\in R\setminus\{0\},$$
$$\varphi_1: t\mapsto\ln(1+t^4)\qquad t\in R,$$

$$\varphi_2: t\mapsto(t^2+1)^3\qquad t\in R,$$

és

$$g=f\circ(\varphi_1,\varphi_2).$$

Mivel $\varphi_2(t)>0$ minden t esetén, és f, φ_1, φ_2 az értelmezési tartományaik minden pontjában differenciálhatók, így g is differenciálható minden $t\in R$ esetén:

$$g'=f'_x\circ(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_1'+f'_y\circ(\varphi_1,\varphi_2)\varphi_2',$$

$$f'_x=2xe^{\frac{x}{y}}+x^2e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}=xe^{\frac{x}{y}}\left(2+\frac{x}{y}\right),$$

$$f'_y=x^2e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{-x}{y^2}\right)=-\frac{x^3}{y^2}e^{\frac{x}{y}},$$

$$\varphi_1'=\frac{4t^3}{1+t^4},\qquad \varphi_2'=3(t^2+1)^2 2t.$$

A g' képletébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$g'=e^{\frac{\ln(1+t^4)}{(1+t^2)^3}}\ln(1+t^4)\left(2+\frac{\ln(1+t^4)}{(1+t^2)^3}\right)\frac{4t^3}{1+t^4}-$$
$$-\frac{\ln^3(1+t^4)}{(1+t^2)^6}e^{\frac{\ln(1+t^4)}{(1+t^2)^3}}\cdot 6t(t^2+1)^2\qquad t\in R.$$

Megjegyzés: Ha elvégezzük a helyettesítést és a kapott függvényt közvetlenül deriváljuk t szerint, természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk.

4. Legyen

$$\varphi_1=\varphi_2: t\mapsto\begin{cases}1, & \text{ha } t \text{ racionális}\\ -1 & \text{ha } t \text{ irracionális}\end{cases}\qquad t\in R,$$

továbbá

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{ha } x^4+y^4\neq 0\\ 1, & \text{ha } x^4+y^4=0\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2.$$

Határozza meg $g'(0)$ értékét, ha

$$g = f \circ (\varphi_1, \varphi_2).$$

φ_1 és φ_2 sehol sem folytonosak, f az origóban nem folytonos, így a differenciálhatóságra kimondott elégséges feltételek nem teljesülnek. $g'(0)$ létezése egyben azt mutatja, hogy ezek a feltételek nem szükségesek.

Ha a helyettesítést elvégezzük, akkor azt kapjuk, hogy

$$g : t \mapsto 1 \qquad t \in R,$$

amelynek deriváltja azonosan nulla, tehát $g'(0) = 0$.

5. Határozza meg g parciális deriváltjait, ha

$$g = f \circ (\varphi_1, \varphi_2),$$

ahol:

$$f : (x, y) \mapsto xye^{x+y} \qquad (x, y) \in R^2,$$
$$\varphi_1 : (u, v) \mapsto \operatorname{tg}(u^2 + v^2),$$
$$(u, v) \in R^2 \setminus \{(u, v) \mid \cos(u^2 + v^2) = 0\},$$
$$\varphi_2 : (u, v) \mapsto u \sin v \qquad (u, v) \in R^2.$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} =$$

$$= \left(ye^{x+y}(1+x)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}\right) \frac{2u}{\cos^2(u^2+v^2)} +$$

$$+ \left(xe^{x+y}(1+y)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}\right) \sin v =$$

$$= e^{u \sin v + \operatorname{tg}(u^2+v^2)} \left\{ [1 + \operatorname{tg}(u^2+v^2)] u \sin v \frac{2u}{\cos^2(u^2+v^2)} + \right.$$

$$\left. + \sin v (1 + u \sin v) \operatorname{tg}(u^2+v^2) \right\}.$$

Hasonlóan a v szerinti parciális derivált:

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} =$$

$$= \left(ye^{x+y}(1+x)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}\right) \frac{2v}{\cos^2(u^2+v^2)} +$$

$$+ \left(xe^{x+y}(1+y)|_{x=\varphi_1, y=\varphi_2}\right) u \cos v =$$

$$= e^{\operatorname{tg}(u^2+v^2) + u \sin v} \left\{ [1 + \operatorname{tg}(u^2+v^2)] u \sin v \frac{2v}{\cos^2(u^2+v^2)} + \right.$$

$$\left. + [1 + u \sin v] \operatorname{tg}(u^2+v^2) u \cos v \right\}.$$

(Ugyanerre az eredményre juthattunk volna a helyettesítés elvégzése után kapott függvény u, ill. v szerinti deriválásával is.)

6. Igazolja, hogy ha a $g : R \mapsto R$ függvény differenciálható, akkor:

$$yh'_x = xh'_y,$$

ahol $h = g(x^2 + y^2) \qquad (x, y) \in R^2$.

Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint:

$$h'_x = 2xg'(u),$$

$$h'_y = 2yg'(u),$$

így a h függvény valóban eleget tesz a felírt parciális differenciálegyenletnek.

Megjegyzés: Az $f : x \mapsto f(x)$ $x \in D_f$ függvény grafikonjának $z = f(x)$-nek z tengely körüli forgatásakor keletkező felület a $z = f(x^2 + y^2)$ függvény grafikonja.

7. Igazolja, hogy ha g_1 és g_2 differenciálható egyváltozós függvények, akkor

$$h''_{xx} - 2h''_{xy} + h''_{yy} = 0,$$

ahol $h = xg_1(x+y) + yg_2(x-y) \qquad (x, y) \in R^2$.

$$h'_x = g_1 + xg'_1 + yg'_2,$$

$$h''_{xx} = 2g'_1 + xg''_1 + yg''_2,$$

$$h'_y = xg'_1 + g_2 + yg'_2,$$

$$h''_{yy}=xg''_1+2g'_2+yg''_2,$$

$$h''_{xy}=g'_1+xg''_1+g'_2+yg''_2.$$

Behelyettesítve a parciális differenciálegyenletbe:

$$(2g'_1+xg''_1+yg''_2)-2(g'_1+g'_2+xg''_1+yg''_2)+$$

$$+(xg''_1+yg''_2+2g'_2)=0,$$

tehát h-ra valóban teljesül az egyenlet.

8. Fejezzük ki az

$$f: D_f \to R \qquad D_f \subset R^2$$

függvény parciális deriváltjait polárkoordinátákkal!

A polártranszformáció egyenletrendszere:

$$x=r\cos\varphi \qquad r\in R^+,\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$y=r\sin\varphi,$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (x,y)\in R^2\setminus\{0;0\},$$

$$\varphi=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{ha } x>0\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{ha } x<0\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x=0,\ y>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } x=0,\ y<0. \end{cases}$$

(Az origó esetén φ-t nem értelmezzük, de azt kizártuk.)

Értelmezzük a g függvényt a következőképpen:

$$g(r,\varphi)=f(r\cos\varphi;r\sin\varphi) \qquad r\in R^+,\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right),$$

ekkor:

$$f'_x=\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

és hasonlóan

$$f'_y=\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Először külön meghatározzuk az r és φ függvények x, ill. y szerinti parciálisait:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{r}=\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(\frac{-y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-y}{r^2}=-\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

(Látjuk, hogy az origó kizárása lényeges volt; az y tengely origótól különböző pontjai esetén viszont parciálisaira a fenti értékeket kapjuk. Ezt külön nem igazoljuk.)

Ennek alapján:

$$f'_x=\frac{\partial g}{\partial r}\cos\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\sin\varphi,$$

$$f'_y=\frac{\partial g}{\partial r}\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\cos\varphi.$$

9. Írjuk fel a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

síkbeli Laplace-egyenlet polárkoordinátákban kifejezett alakját!

A megoldáshoz felhasználjuk az előző feladat eredményeit. A g függvényt a 9. feladatban már értelmeztük. Ezzel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\cos\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\sin\varphi\right)\frac{1}{r}\sin\varphi=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos^2\varphi+\frac{1}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi\partial r}\sin\varphi\cos\varphi\right)-$$

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial g}{\partial r}\sin^2\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\sin^2\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\cos\varphi\sin\varphi\right),$$

hasonlóan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial y}\cos\varphi\right)\sin\varphi+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\cos\varphi\right)\frac{\cos\varphi}{r}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\sin^2\varphi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi\partial r}\sin\varphi\cos\varphi\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial g}{\partial r}\cos^2\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\cos^2\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\right)\frac{1}{r}.$$

A két eredmény összegzéséből

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi).$$

Végeredményben tehát:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}.$$

Megjegyzés: Ez az átalakítás olyan parciális differenciálegyenletek megoldásakor hasznos, amelyekben a peremfeltételek hengerszimmetrikusak.

10. Mely irányokban létezik az

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{ha } x^2+y^2=0\end{cases}\qquad (x,y)\in R^2$$

függvény iránymenti deriváltja az origóban?

Az iránymenti derivált definíciója alapján azt kell vizsgálnunk, hogy α milyen értékeire létezik az alábbi határérték:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\, y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t},$$

hol $x_0=0$, $y_0=0$.

a A

$$\lim_{t\to 0}\frac{2t^2\cos\alpha\sin\alpha}{t^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}\cdot\frac{1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{t}$$

határérték csak akkor létezhet, ha

$$\sin 2\alpha=0,\ \text{azaz, ha}\ \alpha=k\frac{\pi}{2}\qquad k=0,\pm 1,\ldots.$$

Ez azt jelenti, hogy az iránymenti derivált csak a tengelyek irányában létezik, ezek pedig a parciális deriváltak. Az iránymenti deriváltak tehát bizonyos irányokra létezhetnek anélkül, hogy a függvény differenciálható lenne.

11. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto(x-y)^2\qquad (x,y)\in R^2$$

függvény iránymenti deriváltját a P_0 (2; 3) pontban az $\alpha=\frac{\pi}{3}$ irányban!

f minden pontban, így a P_0 pontban is differenciálható, tehát létezik az iránymenti deriváltja:

$$\left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{P_0}=f'_x(2;3)\cos\alpha+f'_y(2;3)\sin\alpha,$$

$$\left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{P_0}=2(-1)\cos\frac{\pi}{3}+(-2)(-1)\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-1.$$

12. Határozza meg, mely irány esetén nulla az

$$f:(x,y)\mapsto x^3+y^3-3xy+e^y \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény iránymenti deriváltja a P_0 (2; 0) pontban!

Mivel f az R^2 minden pontjában differenciálható, így a P_0 pontban tetszőleges α esetén létezik az iránymenti derivált:

$$f'_x(2;0)=(3x^2-3y)|_{P_0}=12,$$

$$f'_y(2;0)=(3y^2-3x+e^y)|_{P_0}=-5.$$

Az iránymenti derivált:

$$\frac{df}{d\alpha}=12\cos\alpha-5\sin\alpha=0,$$

amiből

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}=2{,}4,$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}2{,}4+k\pi, \qquad k=0,\ \pm1,\ \dots .$$

13. Határozza meg, mely irány(ok) esetén maximális az előző feladatban szereplő függvény P_0 pontbeli iránymenti deriváltja!

Az előző feladatban láttuk, hogy az iránymenti derivált a P_0 pontban:

$$g:\alpha\mapsto 12\cos\alpha-5\sin\alpha \qquad \alpha\in[0;2\pi]$$

Ennek azon értékei esetén lehet maximuma, melyekre deriváltja nullával egyenlő:

$$g'(\alpha)=-12\sin\alpha-5\cos\alpha=0.$$

Ebből:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}.$$

Szélsőérték tehát az

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)+k\pi \qquad (k=1,\ 2)$$

irányokban lehet.
Valóban maximuma van g-nek, ha ezen a helyen a második derivált értéke negatív: $k=2$ esetén

$$g''=-12\cos\alpha+5\sin\alpha,$$

$$g'\left(\operatorname{arctg}\frac{-5}{12}+2\pi\right)=g''\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)=\frac{-12-5\,\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2}}<0.$$

Tehát az $\alpha=\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)$ helyen maximum van. Ez az irány az előző feladatban kapott irányra merőleges. Azt, hogy ez általánosan is igaz, a gradiens-vektor értelmezésénél mutatjuk meg. (*Megjegyzés:* $k=1$ esetén g-nek minimuma van.)

14. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto\frac{25x^2y}{x^2+y^3} \qquad (x,y)\in R^2\setminus\{(x,y)\mid x^2+y^3=0\}$$

függvény iránymenti deriváltját a $P_0(2,1)$ pontban az $x+3y=5$ egyenes irányvektora irányában!

Az egyenes irányvektora:

$$\mathbf{v}(-3;1),$$

a $\mathbf{v}$ irányába mutató egységvektor:

$$\mathbf{e}_v\left(-\frac{3}{\sqrt{10}};\frac{1}{\sqrt{10}}\right),$$

tehát $\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=25\cdot\frac{2xy(x^2+y^3)-x^2y2x}{(x^2+y^3)^2};\qquad f'_x(2;1)=4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=25\cdot\frac{x^2(x^2+y^3)-x^2y3y^2}{(x^2+y^3)^2};\qquad f'_y(2;1)=8,$$

tehát az iránymenti derivált értéke a P_0 pontban:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|_{P_0}=4\cdot\frac{-3}{\sqrt{10}}+8\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{4}{\sqrt{10}}=-\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

15. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto x^2e^y \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény iránymenti deriváltját a $P_0(2;0)$ pontban, az **a** $(3;4)$ vektorra merőleges irányokban!

Az **a**-ra merőleges vektorok: **b**$(-4;3)$ és **c** $(4;-3)$. Egységvektoraik:

$\mathbf{e}_b\left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)$, tehát $\cos\beta=-\frac{4}{5}$; $\sin\beta=\frac{3}{5}$,

$\mathbf{e}_c\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$, tehát $\cos\gamma=\frac{4}{5}$; $\sin\gamma=-\frac{3}{5}$.

A parciális deriváltak értéke a P_0 pontban:

$f'_x(2;0)=4,\qquad f'_y=(2;0)=4,$

$$\left.\frac{df}{d\beta}\right|_{P_0}=-\frac{4}{5},$$

$$\left.\frac{df}{d\gamma}\right|_{P_0}=\frac{4}{5},$$

ami természetesen nem véletlen, hiszen $\gamma=\pi+\beta$ és $\cos(\pi+\beta)=-\cos\beta$, valamint $\sin(\pi+\beta)=-\sin\beta$.

16. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto x^2+y^2 \qquad (x,y)\in R^2$$

forgási paraboloid $P_0\,(3;1)$ pontjában az iránymenti derivált értékét a felület P_0 ponton áthaladó szintvonalának P_0-beli érintője irányában!

A szintvonal az xy síkkal párhuzamos síkban fekszik, tehát érintője is párhuzamos az xy síkkal, így az iránymenti derivált értéke nulla lesz (l. a 12. feladat megjegyzését!).

Ellenőrizzük számítással!

A szintvonal egyenlete:

$x^2+y^2=10.$

(28. ábra).

Az $OP_0\,(3;1)$, egy rá merőleges vektor **a** $(-1;3)$, így az egységvektor

$$\mathbf{e}_a\left(-\frac{1}{10};\frac{3}{10}\right);$$

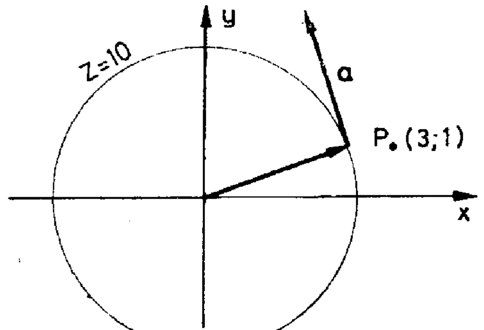
$f'_x(3;1)=6,$

$f'_y(3;1)=2,$

tehát az iránymenti derivált értéke:

$$\frac{df}{d\alpha}=6\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)+2\cdot\frac{3}{10}=0,$$

amint azt vártuk.



28. ábra

4. Implicit függvények és deriválásuk

Síkgörbék megadhatók az

$$F(x, y) = 0$$

egyenlettel is.

Legyen például

$$F : (x, y) \mapsto y - x^2 \qquad (x, y) \in R^2,$$

ekkor az $F(x, y) = y - x^2 = 0$ egyenletet kielégítő (x, y) koordinátájú pontok halmaza a síkon egy parabola. Ez a parabola az

$$x \mapsto x^2 \qquad x \in R$$

függvény grafikonjával azonos.

Általában is érdemes vizsgálni azt a kérdést, milyen feltételek teljesülése esetén létezik olyan

$$f : D_f \to R \qquad D_f \subset R$$

egyváltozós függvény, amelyre teljesül, hogy

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \text{minden } x \in D_f \text{ esetén.}$$

Szemléletesen: az $F(x, y) = 0$ egyenlet annak a síkgörbének az egyenlete, amelyet a $z := F(x, y)$ egyenletű felületből a $z = 0$ sík metsz ki. Természetesen megtörténhet, hogy nincs metszésvonal, vagy több metszésvonal van.

Például a

$$z = x^2 + y^2 + 25 \qquad (x, y) \in R^2$$

felületnél nincs metszésvonal (hiszen $z \geqq 25$). Láttuk, hogy a

$$z = x^2 - y^2 \qquad (x, y) \in R^2$$

felület esetén a metszésvonal az $y = x$, ill. $y = -x$ egyenes. Igazolható, hogy ha F-re egy $(x_0, y_0) \in D_f$ esetén teljesülnek a következő feltételek:

$F(x_0, y_0) = 0$,
F az (x_0, y_0) környezetében folytonos,

F'_y létezik és nemnulla az (x_0, y_0) pont egy környezetében, akkor van az x_0-nak olyan D_f környezete, amelyben egyetlen olyan

$$x \mapsto f(x) \qquad x \in D_f$$

függvény létezik, amelyre $f(x_0) = y_0$ és

$$F(x, f(x)) = 0 \qquad \text{minden } x \in D_f\text{-re.}$$

Továbbá, ha F differenciálható a P_0 pontban, akkor y is differenciálható az x_0 helyen és:

$$y'(x_0) = \frac{-F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Hasonlóan az $F(x, y, z) = 0$ egyenlet bizonyos esetekben egy $z := z(x, y)$ felületet definiál, amely egy háromváltozós függvény szintfelületének tekinthető (l. II.2.!). E kétváltozós implicit függvény létezésére és egyértelműségére az előbbihez hasonló feltételek teljesülése szükséges. A parciális deriváltak:

$$z'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

$$z'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Könnyű megmutatni, hogy amennyiben az implicit módon definiált függvények léteznek, a deriváltjaikat valóban így kell meghatározni.

Vizsgáljuk meg ezt az egyváltozós esetben!

Tegyük fel, hogy F-re teljesülnek az implicit függvény létezésének elégséges feltételei az (x_0, y_0) pontban, továbbá, hogy f is differenciálható az x_0 pontban. Ekkor a közvetett függvény differenciálási szabálya szerint:

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0) f'(x_0) = 0,$$

ahonnan

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

A parciális deriváltak általában ismét kétváltozós függvények, így, ha az előzőekben említett feltételek teljesülnek, tovább folytathatjuk a differenciálást, meghatározhatjuk y'' értékét is.

Differenciáljuk x szerint az előbb kapott

$$F'_x + F'_y y' = 0$$

egyenletet!

$$F''_{xx} + F''_{xy} y' + (F''_{xy} + F''_{yy} y') y' + F'_y y'' = 0,$$

a második derivált:

$$y'' = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xy} y' + F''_{yy} y'^2}{F'_y}.$$

Hasonlóan számíthatók ki kétváltozós függvény esetén is a magasabb rendű parciális deriváltak.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg y' értékét a $P_0\,(2;4)$ pontban, ha

$$x^y = y^x.$$

Legyen

$$F: (x, y) \mapsto x^y - y^x \qquad (x, y) \in R^{+2}.$$

A $P_0\,(2;4)$ pont a görbe egy pontja, mivel $2^4 = 4^2$. E pontban $F'_y \neq 0$, így e pont környezetében létezik egy olyan függvény, amelyre $F(x, y) = 0$.

Deriváltja:

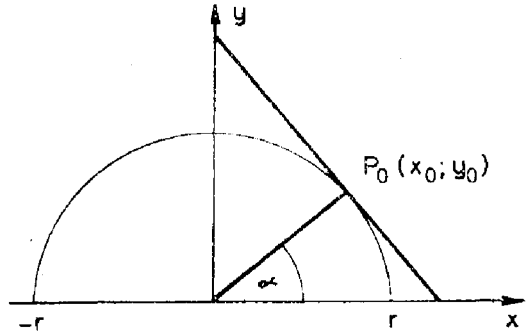
$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

Felhasználva, hogy $x^y = y^x$,

$$y' = -\frac{\dfrac{yx^{y-1}}{x^y} - \dfrac{y^x \ln y}{y^x}}{\dfrac{x^y \ln x}{x^y} - \dfrac{xy^{x-1}}{y^x}} = \frac{\dfrac{y}{x} - \ln y}{\dfrac{x}{y} - \ln x},$$

$$y'(2) = \frac{2 - \ln 4}{\dfrac{1}{2} - \ln 2}.$$

2. Állapítsa meg, milyen feltételek mellett határoz meg az $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ $(x, y) \in R^2$ egyenlet egy differenciálható függvényt és adja meg a deriváltját!



29. ábra

A feladatban egy origó középpontú r sugarú kör egyenlete szerepel. Ha $y > 0$, akkor az egyenlet egyértelműen definiálja az

$$y: x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2} \qquad x \in (-r, r)$$

függvényt (29. ábra).

E félkör $P_0(x_0, y_0)$ pontbeli érintője merőleges az adott pontba húzott sugárra, amelynek iránytangense:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0},$$

így az érintő iránytangense:

$$-\frac{x_0}{y_0} = y'(x_0).$$

Természetesen ugyanezt kapjuk implicit függvényként való deriválással:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x}{y}.$$

3. Határozza meg y' értékét, ha $x_0 = y_0 \neq 0$ és $F(x_0, y_0) = 0$, ahol $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

A feladatban

$$F: (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3axy \qquad (x, y) \in R^2 \setminus \{(0; 0)\},$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

Mivel $x_0 = y_0$, így $y'(x_0) = -1$. [Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a $P_0\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$ pont kielégíti az egyenletet, és $a \neq 0$ esetben teljesülnek a deriválhatóságra vonatkozó kikötések, hiszen ekkor $y^2 - ax \neq 0$.]

4. Határozza meg, mely pontokban nulla az előző feladatbeli

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

egyenlettel definiált y függvény deriváltja!

Az előző feladatból:

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} \qquad y^2 \neq ax.$$

Ha $y' = 0$, akkor $ay - x^2 = 0$, tehát $y = \frac{x^2}{a}$. Ezt az értéket az eredeti egyenletbe helyettesítve:

$$x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3ax\frac{x^2}{a} = 0,$$

vagyis

$$x^3\left(1 + \frac{x^3}{a^3} - 3\right) = 0,$$

amely egyenlet gyökei:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = a\sqrt[3]{2}.$$

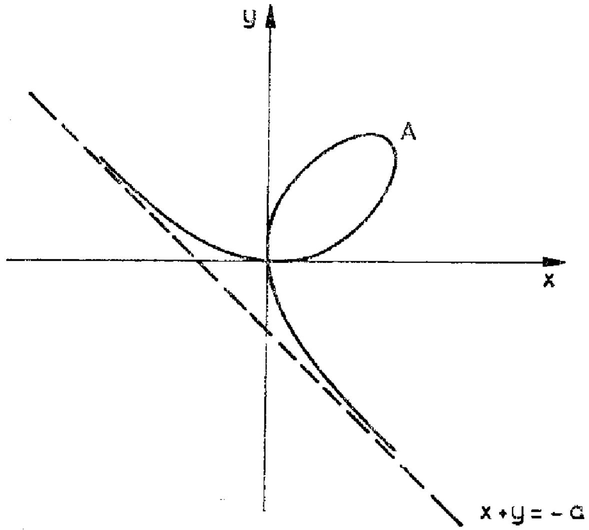
Az $x_1 = 0$ esetben: $y_1 = 0$, így $F'_y = 0$, tehát az implicit függvény létezésére kimondott tétel kikötései nem teljesülnek. (Speciálisan, ha $a = 0$, akkor az egyenlet az $y = -x$ függvényt határozza meg, amelynek origóbeli deriváltja nemnulla.)

$$x_2 = a\sqrt[3]{2} \text{ esetében } y_2 = a\sqrt[3]{4}$$

és

$$y_2^2 \neq ax_2, \text{ így e helyen } y' = 0.$$

Megjegyzés: A 3. és a 4. feladatban szereplő implicite adott függvény képe, az ún. Descartes-féle levél. ($a \neq 0$ esetben l. a 30. ábrát!)



30. ábra

E görbe paraméteres alakban is megadható:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}; \qquad y = \frac{3at^2}{1 + t^3} \qquad t \in R \setminus \{-1\}.$$

Amint a grafikonból látható is, igazolható, hogy az origó kivételével a görbe minden pontjának van olyan környezete, amelyben egyetlen olyan

$$x \mapsto y(x) \qquad x \in D_y$$

függvény van, amely kielégíti az egyenletet. Az origóban a koordinátatengelyek érintik a görbét. Mivel a görbe szimmetrikus az $y=x$ egyenesre, így az

$A\left(\frac{3a}{2}; \frac{3a}{2}\right)$ pontbeli érintője erre merőleges.

5. Határozza meg y' értékét a $P_0\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ pontban, ha

$$F(x, y)=x \sin y-\cos y+\cos 2y=0.$$

A P_0 pont koordinátái kielégítik az egyenletet:

$$F'_x=\sin y,$$

$$F'_y=x\cos y+\sin y-2\sin 2y \qquad \text{és} \qquad F'_y\left(1, \frac{\pi}{2}\right)\neq 0,$$

így az egyenlet P_0 környezetében egy függvényt határoz meg.

$$y'=\frac{-\sin y}{x\cos y+\sin y-2\sin 2y},$$

$$y'(1)=-1.$$

Megjegyzés: Ha $\sin y\neq 0$, akkor az $F(x, y)=0$ egyenlet egyértelműen meghatároz egy $x\mapsto x(y)$ függvényt, amelyre

$$x\mapsto\frac{\cos y-\cos 2y}{\sin y} \qquad y\in R\setminus\{y \mid \sin y=0\}.$$

Deriváltja:

$$\left(\frac{\cos y-\cos 2y}{\sin y}\right)'=\frac{(-\sin y+2\sin 2y)\sin y-(\cos y-\cos 2y)\cos y}{\sin^2 y}.$$

Ennek értéke az $y=\frac{\pi}{2}$ helyen: -1, amint az várható volt, hiszen az előző függvény inverzének deriváltját számítottuk ki, ami a most kapott érték reciproka.

6. Határozza meg

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_0}$$

értékét, ha

$$x^3+y^3+z^3-3z=0$$

és

$$P_0(-1; 1; 0).$$

$$F: (x, y, z)\mapsto x^3+y^3+z^3-3z \qquad (x, y, z)\in R^3.$$

A bevezetőben láttuk, hogy

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{-3x^2}{3z^2-3}=\frac{x^2}{1-z^2},$$

hasonlóan

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{3y^2}{3z^2-3}=\frac{y^2}{1-z^2}.$$

Mivel F mindenütt folytonos és differenciálható,

$$F'_z(-1; 1; 0)\neq 0,$$

így z'_x, ill. z'_y létezik a P_0 pontban.

A keresett másodrendű parciális derivált:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z'_y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2zx^2y^2}{(1-z^2)^3},$$

amelynek az értéke a P_0 pontban

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{P_0}=0.$$

7. Igazolja, hogy létezik olyan $y: x\mapsto y(x)$ $x\in D_f\subset R$ függvény, amely az origó környezetében egyértelmű megoldása a

$$2ye^x-xe^y=0$$

egyenletnek!

Az origó koordinátái kielégítik az egyenletet;

$$F: (x, y)\mapsto 2ye^x-xe^y \qquad (x, y)\in R^2$$

mindenütt folytonos és differenciálható;

$$F'_y = 2e^x - xe^y$$

folytonos és az origóban nullától különbözik.

Így valóban létezik olyan y függvény, amely az origó környezetében egyértelmű megoldása az

$F(x, y) = 0$ egyenletnek.

Deriváltja:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2ye^x - e^y}{2e^x - xe^y} \qquad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

8. Legyen z az a $D_z \to R$, $D_z \subset R^2$ típusú függvény, amelynek értékét minden alkalmas $(x, y) \in R^2$-re az

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$$

egyenlet definiálja.

Igazolja, hogy e függvény másodrendű vegyes parciális deriváltjai egyenlőek!

Legyen

$$F: (x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5, \qquad (x, y, z) \in R^3.$$

Ekkor a

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x - 4}{2x + 2} = \frac{2 - x}{1 + z},$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-4y}{2z + 2} = \frac{2y}{1 + z}$$

parciálisok minden olyan pontban léteznek, amelyre

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad \text{és} \qquad z \neq -1.$$

(A $z_0 = -1$ eset azt jelenti, hogy a fenti egyenletet mint z-re vonatkozó másodfokú egyenletet megoldva a diszkrimináns értéke nulla, így a deriváláskor nullával kellene osztanunk.)

A másodrendű vegyes parciálisok:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial_y} = \frac{\partial z'_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2y}{(1+z)^2} \cdot \frac{2-x}{1+z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial z'_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2-x}{(1+z)^2} \cdot \frac{2y}{1+z},$$

valóban egyenlők.

9. Határozza meg az

$$F(x, y, z(x, y)) = 0$$

egyenlettel definiált z függvény teljes differenciálját! (Tegyük fel, hogy F differenciálható és $F'_z \neq 0$.)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = -\frac{F'_x}{F'_z}\, dx - \frac{F'_y}{F'_z}\, dy,$$

amit átalakítva és rendezve:

$$F'_x\, dx + F'_y\, dy + F'_z\, dz = 0.$$

Utóbbit megkapjuk, ha az $F: D_F \to R$ $D_f \subset R^3$ háromváltozós függvény teljes differenciálját írjuk fel. Ez indokolja a hibaszámításnál látott alkalmazásokat: implicit alakból is meghatározható a teljes differenciál.

10. A hibaszámításnál láttuk, hogy az adott függvényt implicit függvénynek tekintve sokszor egyszerűbben juthatunk eredményhez.

Lássunk erre egy feladatot!

Határozzuk meg az

$$ax^2 + bx + c = 0$$

egyenletből a gyökök relatív hibáját, ha

$$a = 1 \qquad \Delta a = 0{,}05,$$
$$b = -4 \qquad \Delta b = 0{,}1,$$
$$c = -5 \qquad \Delta c = 0{,}1.$$

A megoldandó egyenlet

$x^2 - 4x - 5 = 0$, ahonnan $x_1 = 5$; $x_2 = -1$.

Legyen

$$F\big(a, b, c, x(a, b, c)\big)=ax^2+bx+c.$$

F teljes differenciálja:

$$F'_a\Delta a+F'_b\Delta b+F'_c\Delta c+F'_x\Delta x=0.$$

A parciálisokat meghatározva, majd rendezve:

$$x^2\Delta a+x\Delta b+\Delta c+\Delta x(2ax+b)=0,$$

$$\Delta x=\left|-\frac{x^2\Delta a+x\Delta b+\Delta c}{2ax+b}\right|,$$

ahonnan

$$\Delta x_1=\frac{25\cdot 0{,}05+5\cdot 0{,}1+0{,}1}{10-4}=0{,}32,$$

$$\Delta x_2=\left|\frac{(-1)^2\cdot 0{,}05+0{,}1+0{,}1}{-2-4}\right|=0{,}042,$$

tehát a relatív hibák:

$$\frac{\Delta x_1}{x_1}=0{,}064, \qquad \frac{\Delta x_2}{x_2}=0{,}042.$$

Megjegyzés: A $2ax+b=0$ esetben $x=-\dfrac{b}{2a}$, vagyis ekkor $x_1=x_2$. Ekkor a Δx csak a műveletek hibáira vonatkozó szabályok alapján határozható meg.

11. Igazolja, hogy az

$$\frac{e^{axy}}{axy}-e^{ax}=0 \qquad (a>0 \text{ állandó})$$

egyenlettel definiált $y: x\mapsto y(x)$ $x\in R^+$ függvénynek az

$$x_0=\frac{e-1}{a}, \qquad y_0=\frac{e}{e-1}$$

pontban szélsőértéke van!

Legyen

$$F:(x, y)\mapsto\frac{e^{axy}}{axy}-e^{ax}, \qquad (x, y)\in R^{+2}.$$

Ekkor

$$F(x_0, y_0)=0, \text{ tehát } P_0 \text{ a görbén van,}$$

és

$$F'_x=\frac{aye^{axy}axy-aye^{axy}}{a^2x^2y^2}-ae^{ax}=e^{axy}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{ax^2y}\right)-ae^{ax},$$

$$F'_x|_{P_0}=e^{a\frac{e-1}{a}\cdot\frac{e}{e-1}}\left(\frac{a}{e-1}-\frac{a^2(e-1)}{a(e-1)^2e}\right)-ae^{a\frac{e-1}{a}}=$$

$$=e^e\left(\frac{a}{e-1}-\frac{a}{e(e-1)}\right)-ae^{e-1}=e^e\frac{ae-a}{e(e-1)}-ae^{e-1}=e^e\frac{a}{e}-ae^{e-1}=0,$$

$$F'_y=\frac{e^{axy}axaxy-e^{axy}ax}{a^2x^2y^2}=e^{axy}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{axy^2}\right),$$

$$F'_y|_{P_0}=e^{a\frac{e-1}{a}\cdot\frac{e}{e-1}}\left(\frac{e-1}{e}-\frac{a(e-1)^2}{a(e-1)e^2}\right)=e^e\left(\frac{e-1}{e}-\frac{e-1}{e^2}\right)=$$

$$=e^{e-2}(e-1)^2>0.$$

Mivel

$$F'_y(x_0, y_0)\neq 0,$$

így $y'(x_0)$ létezik és

$$y'(x_0)=0.$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele tehát teljesül.

Be kell még látni, hogy $y''(x_0)\neq 0$.

A bevezetőben láttuk, hogy

$$y''=-\frac{F''_{xx}+2F''_{xy}y'+F''_{yy}y'^2}{F'_y}.$$

Mivel a P_0 pontban $y'=0$, így csak $F''_{xx}|_{P_0}$ értékét kell meghatároznunk:

$$F''_{xx}=e^{axy}\left[ay\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{ax^2y}\right)+\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax^3y}\right)\right]-a^2e^{ax}=$$

$$=e^{axy}\frac{(axy-1)^2+1}{ax^3y}-a^2e^{ax},$$

$$F''_{xx}|_{P_0}=e^{a\frac{e-1}{a}\cdot\frac{e}{e-1}}\frac{\left(a\frac{e-1}{a}\cdot\frac{e}{e-1}-1\right)^2+1}{a\left(\frac{e-1}{a}\right)^3\cdot\frac{e}{e-1}}=\frac{e^{e-1}a^2}{(e-1)^2}>0,$$

tehát $y''(x_0)<0$, így a függvénynek az adott pontban maximuma van.

Megjegyzés: Ha az eredeti egyenletet átalakítjuk, rövidebben adódik ugyanez az eredmény:

$$\frac{e^{axy}}{axy}=e^{ax},$$

mivel $(x, y)\in R^{+2}$, vehetjük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát:

$$axy-\ln a-\ln x-\ln y=ax.$$

Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton, így e függvénynek ugyanott van szélsőértéke, mint ahol az eredeti függvénynek.
Tehát:

$$F:=axy-\ln a-\ln x-\ln y-ax \qquad (x, y)\in R^{+2},$$

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{ay-\frac{1}{x}-a}{ax-\frac{1}{y}},$$

$$y'(x_0)=-\frac{a\frac{e}{e-1}-\frac{a}{e-1}-a}{a\frac{e-1}{a}-\frac{e-1}{e}}=0.$$

A nevező: $\frac{(e-1)^2}{e}>0.$

Az előzőhöz hasonlóan a második derivált adott pontbeli értékének meghatározásához csak $F''_{xx}|_{P_0}$ szükséges.

$$F''_{xx}|_{P_0}=\frac{1}{x_0^2}>0,$$

tehát $y''(x_0)<0$, így a függvénynek az adott pontban maximuma van.

E megoldásból az is látszik, hogy több szélsőértékhely nem lehet, ugyanis, ha $y'=0$, akkor $ay-\frac{1}{x}-a=0$. Így

$$x=\frac{1}{a(y-1)},$$

amelyet behelyettesítve az

$$axy-\ln a-\ln x-\ln y=ax$$

egyenletbe, átalakítások után

$$\ln(y-1)-\ln y+1=0$$

adódik, amiből pedig

$$y=\frac{e}{e-1}.$$

12. Legyen $\varphi: D\to R$ differenciálható egyváltozós függvény, továbbá

$$z: D_z\to R \qquad D_z\subset R^2$$

olyan kétváltozós függvény, amelyet a

$$z=x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$$

egyenlet definiál. (Feltesszük, hogy $(x, y)\in D_z$ esetén $\frac{z}{y}\in D$.)

Igazoljuk, hogy e kétváltozós függvény megoldása az

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

differenciálegyenletnek!

Jelölje a $z-x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)=0$ egyenlet bal oldalán álló függvényt F, vagyis

$$F:=z-x\varphi\left(\frac{z}{y}\right) \qquad D_F\subset R^3.$$

Mivel

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{és} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},$$

az $F'_z\neq 0$ feltétel teljesülése esetén az igazolásra váró egyenlőség az

$$xF'_x+yF'_y+zF'_z=0$$

egyenlettel ekvivalens.

$$F'_x=-\varphi\left(\frac{z}{y}\right),$$

$$F'_y=-x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\left(-\frac{z}{y^2}\right),$$

$$F'_z=1-x\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}.$$

(Mivel φ egyváltozós függvény, helyes a φ' jelölés.) Behelyettesítve:

$$z-x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{xz}{y}\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)-\frac{xz}{y}\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)=-x\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+z=0,$$

hiszen ebből indultunk ki!

A fenti implicit függvény tehát valóban megoldása a parciális differenciálegyenletnek, amely a kúpfelületek jellemző egyenlete.

13. Legyen $\varphi: D\to R$ differenciálható egyváltozós függvény, továbbá

$$z: D_z\to R \qquad D_z\subset R^2$$

olyan kétváltozós függvény, amelyet az

$$x-az=\varphi(y-bz)$$

egyenlet definiál. (Feltesszük, hogy $(x, y)\in D_z$ esetén $y-bz\in D$.)

Igazoljuk, hogy e kétváltozós függvény megoldása az

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

differenciálegyenletnek!

Az előző feladathoz hasonlóan legyen

$$F:=\varphi(y-bz)-x+az \qquad D_F\subset R^3.$$

Ekkor az igazolandó egyenlőség ($F'_z\neq 0$ esetén)

$$aF'_x+bF'_y+F'_z=0.$$

F parciálisai:

$$F'_x=-1; \qquad F'_y=\varphi'(y-bz); \qquad F'_z=-b\varphi'(y-bz)+a.$$

(φ'-vel jelöltük a φ egyváltozós függvény deriváltját.)

Helyettesítéssel:

$$-a+b\varphi'(y-bz)-b\varphi'(y-bz)+a=0.$$

A z függvény tehát valóban megoldása a parciális differenciálegyenletnek, a hengerfelületek jellemző egyenleteinek.

5. A kétváltozós függvények Taylor-sora

Ismert, hogy bármely, egy P_0 pont környezetében $n+1$-szer differenciálható egyváltozós függvényt e pont környezetében elég pontosan közelíthetünk egy n-edfokú polinommal: a függvény Taylor-polinomjával. Ennek általánosításaként értelmezzük a kétváltozós függvény Taylor-polinomját.

Ha az

$$f: D\to R \qquad D\subset R^2$$

kétváltozós függvény a $P_0(x_0, y_0)$ és a $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ pontokban, valamint a $\overline{P_0P}$ szakasz pontjaiban értelmezett, és a pontokban a függvény $(n+1)$-ed és ennél alacsonyabb rendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, akkor itt f a Δx és Δy n-edfokú polinomjával közelíthető.

Tekintsük ugyanis a következő egyváltozós függvényt:

$$h: t \mapsto f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y) \qquad t\in[0;1].$$

Az f-re tett kikötések teljesülése esetén h $n+1$-szer differenciálható, így a 0 helyhez tartozó Taylor-polinomja a maradéktaggal:

$$h: t\mapsto h(0)+\frac{h'(0)}{1!}t+\frac{h''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{h^{(n)}(0)}{n!}t^n+$$

$$+\frac{h^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}t^{n+1} \qquad t\in[0;1],$$

ahol $0<\xi<t$.

Az összetett függvény differenciálási szabálya (I. III.3.c) miatt:

$$h'(0)=f'_x(x_0;y_0)\Delta x+f'_y(x_0;y_0)\Delta y,$$

$$h''(0)=f''_{xx}(x_0;y_0)(\Delta x)^2+2f''_{xy}(x_0;y_0)\Delta x\Delta y+$$

$$+f''_{yy}(x_0;y_0)(\Delta y)^2.$$

(Felhasználtuk, hogy $f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$ a parciálisok folytonossága miatt.)

Formálisan h'' a következőképpen írható:

$$h''=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^2 f$$

Hasonlóan írható fel a h függvény n-edik deriváltja is:

$$h^{(n)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f|_{P_0}.$$

Figyelembe véve még, hogy:

$$h(1)=f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y),$$

h Taylor-polinomjából adódik az f kétváltozós függvény n-edfokú Taylor-polinomja a maradéktaggal:

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)=$$

$$=f(x_0;y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f|_{P_0}+$$

$$+\frac{1}{n+1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f|_{P_1},$$

ahol $P_1=\overline{P_0P}$ szakasz pontja.

Ha f tetszőlegesen sokszor differenciálható a P_0 pont előbbi környezetében, akkor f Taylor-sora a P_0 pontban:

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f|_{P_0}.$$

Gyakorló feladatok

1. Írja fel az

$$f:(x,y)\mapsto\sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad D_f=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leqq 1\}$$

függvény $P_0(0;0)$ helyhez tartozó Taylor-sorának néhány tagját!

A feladat megoldásánál alkalmazzuk az egyváltozós függvények köréből ismert binomiális sort:

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\ldots; \qquad z\in(-1;1),$$

esetünkben:

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=[1+(-x^2-y^2)]^{\frac{1}{2}},$$

tehát f Taylor-sora:

$$(x,y)\mapsto 1+\frac{1}{2}(-x^2-y^2)+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(-x^2-y^2)^2+\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^3\ldots$$

Mivel az értelmezési tartomány pontjaiban $x^2+y^2\leqq 1$, így a sor az egységsugarú körlap határpontjai kivételével előállítja a függvényt.

2. Írja fel az

$$f:(x,y)\mapsto\frac{1}{(1-x)(3-y)}\qquad x\in R\setminus\{1\},\ y\in R\setminus\{3\}$$

függvény origóhoz tartozó Taylor-sorának néhány tagját!

Ismert, hogy

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\qquad \text{ha } |x|<1 \text{ (geometriai sor),}$$

hasonlóan:

$$\frac{1}{3-y}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{y}{3}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{y}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{y^3}{27}+\ldots\right),$$

ha $|y|<3$.

Ha az $|x|<1$ és $|y|<3$ feltételek teljesülése esetén képezzük a két végtelen sor Cauchy-szorzatát, amely az abszolút konvergencia miatt átrendezhető, kapjuk, hogy:

$$(x,y)\mapsto\frac{1}{3}\left(1+x+\frac{y}{3}+x^2+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}+x^3+\frac{x^2y}{3}+\frac{xy^2}{9}+\frac{y^3}{27}\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{x}{3}+\frac{y}{9}+\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{9}+\frac{y^2}{27}+\ldots,$$

$$D=\{x\in R\mid |x|<1,\ y\in R\mid |y|<3\}.$$

A sor tehát csak az $|x|<1$ és $|y|<3$ feltételek teljesülése esetén állítja elő az f függvényt.

3. Határozzuk meg f abszolút hibáját, ha

$$f:(x,y,z)\to\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$$
$$(x,y,z)\in R^3$$

és

$$x_0=y_0=z_0=0,$$

valamint

$$\Delta x=\Delta y=\Delta z=0{,}1.$$

A függvény minden elsőrendű parciálisa az origóban nulla, hiszen $\sin 0=0$. Mivel azonban hibakorlát nem lehet nulla, így a feladat egyenértékű azzal, hogy f Taylor-sorának első el nem tűnő tagját kell megkeresnünk. Felhasználva, hogy

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-+\ldots\qquad t\in R,$$

tehát:

$$\cos(x+y+z)=1-\frac{(x+y+z)^2}{2!}+\frac{(x+y+z)^4}{4!}-+\ldots.$$

Hasonlóan:

$$\cos x\cos y\cos z=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\right)\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}\ldots\right)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\ldots\right).$$

Mindkét tagból csak a legfeljebb másodfokú tagokat figyelembe véve (az abszolút konvergencia miatt a sor átrendezhető):

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z=$$
$$=1-\frac{(x+y+z)^2}{2!}+\ldots-\left[1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)+\ldots\right]=$$
$$=-(xy+yz+xz)+\ldots,$$

tehát $\Delta f=0{,}03$.

4. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto\frac{\cos x}{\cos y}\qquad x\in R,\ y\in R\mid \cos y\neq 0$$

függvény origóhoz tartozó Taylor-polinomjának legfeljebb másodfokú tagjait!

$\cos x$ és $\cos y$ origóhoz tartozó Taylor-sorából egyaránt csak az első két tagot vesszük figyelembe, és a nevezőt geometriai sorral közelítjük:

$$\frac{1-\frac{x}{2!}}{1-\frac{y^2}{2!}}=\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)\left[1+\frac{y^2}{2!}+\left(\frac{y^2}{2!}\right)^2+\ldots\right]=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\ldots.$$

Megjegyzés: Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha meghatározzuk az első- és másodrendű parciálisok értékét az origóban, s ezek segítségével írjuk fel a Taylor-polinomot.
Ugyanis:

$$f'_x=-\frac{\sin x}{\cos y}; \qquad f'_x(0;0)=0,$$

$$f'_y=\frac{\sin y\cos x}{\cos^2 y}; \qquad f'_y(0;0)=0,$$

$$f''_{xx}=-\frac{\cos x}{\cos y}; \qquad f''_{xx}(0;0)=-1,$$

$$f''_{xy}=-\frac{\sin x\sin y}{\cos^2 y}; \qquad f''_{xy}(0;0)=0,$$

$$f''_{yy}=\cos x\,\frac{\cos^3 y+2\sin^2 y\cos y}{\cos^4 y}; \quad f''_{yy}(0;0)=1.$$

Innen:

$$f(x,y)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{y^2}{2!}\dots.$$

Ha további tagokat akarunk meghatározni f Taylor-sorából, akkor a deriválás folytatása helyett egy másik módszer célravezetőbb.

Írjuk fel $\cos x$ és $\cos y$ sorának néhány tagját, és végezzük el a kijelölt osztást a legalacsonyabb kitevőjű tagokkal kezdve!

$$\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\dots\right):\left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}-\dots\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}.$$

$$\frac{-\left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}\dots\right)}{-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{y^4}{24}-\frac{x^6}{720}\dots},$$

$$\frac{-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2y^2}{4}-\frac{x^2y^4}{48}\dots\right)}{\frac{y^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^2y^2}{4}-\frac{y^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^2y^4}{48}\dots},$$

$$\frac{-\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}-\frac{y^6}{48}-\dots\right)}{\frac{x^4}{24}+\frac{5y^4}{24}-\frac{x^2y^2}{4}-\frac{x^6}{720}\dots}.$$

Az osztást a fenti módon folytatva f Taylor-sorának negyedfokú tagjai:

$$\frac{x^4}{24}+\frac{5y^4}{24}-\frac{x^2y^2}{4}.$$

(Ha még további tagok is szükségesek, akkor $\cos x$ és $\cos y$ sorának magasabb rendű tagját is figyelembe kell vennünk!)

5. Igazolja, hogy ha $A>a$ és $B>b>0$, akkor

$$\frac{A+a}{B+b}=\frac{A}{B}\left(1+\frac{a}{A}-\frac{b}{B}-\frac{ab}{AB}+\frac{b^2}{B^2}+\dots\right).$$

$$\frac{A+a}{B+b}=\frac{A}{B}\left(1+\frac{a}{A}\right)\frac{1}{1+\frac{b}{B}}.$$

Mivel $\left|\frac{b}{B}\right|<1$, így az utolsó tényező:

$$\frac{1}{1+\frac{b}{B}}=1-\frac{b}{B}+\frac{b^2}{B^2}-+\dots \qquad \text{(geometriai sor).}$$

Ezt figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$\frac{A+a}{B+b}=\frac{A}{B}\left(1+\frac{a}{A}\right)\left(1-\frac{b}{B}+\frac{b^2}{B^2}-+\dots\right)=$$

$$=\frac{A}{B}\left(1+\frac{a}{A}-\frac{b}{B}-\frac{ab}{AB}+\frac{b^2}{B^2}\dots\right),$$

amivel állításunkat igazoltuk.

6. A kétváltozós függvények szélsőértéke, feltételes szélsőérték

A P_0 pontot az f kétváltozós függvény *lokális maximum- (minimum-) helyének* nevezzük, ha P_0-nak van olyan környezete, amelyben $f(P_0)$-nál nagyobb (kisebb) függvényérték nincs.

A P_0 pont az f *abszolút maximum-*, ill. *minimumhelye,* ha $f(P_0)>f(P)$ (ill. $f(P_0)<f(P)$) minden $P \in D_f, P \neq P_0$ esetén. Ha az f kétváltozós függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ pontban lokális szélsőértéke van, és e pontban a függvény differenciálható, akkor:

$$f'_x(x_0, y_0)=0 \quad \text{és} \quad f'_y(x_0, y_0)=0.$$

E feltétel *szükségessége* azonnal látható, hiszen ha a P_0 pont lokális szélsőértékhely, akkor az

$$x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{és} \quad y \mapsto f(x_0, y)$$

egyváltozós függvényeknek is lokális szélsőértékük van az x_0, ill. y_0 helyen.

A feltétel azonban nem elégséges feltétele a lokális szélsőérték létezésének. Lehetséges ugyanis, hogy az előbb említett két egyváltozós függvénynek külön-külön szélsőértéke van a P_0 pontban, de ezek különböző minőségűek. (Például a II.2.-ben látott nyeregfelületnek az origóban rögzített x mellett maximuma, rögzített y mellett pedig minimuma van.)

Hasonlóképpen előfordulhat, hogy ezen egyváltozós függvények valamelyikének vagy mindkettőnek inflexiós pontja van a P_0 pontban. Ilyen például az

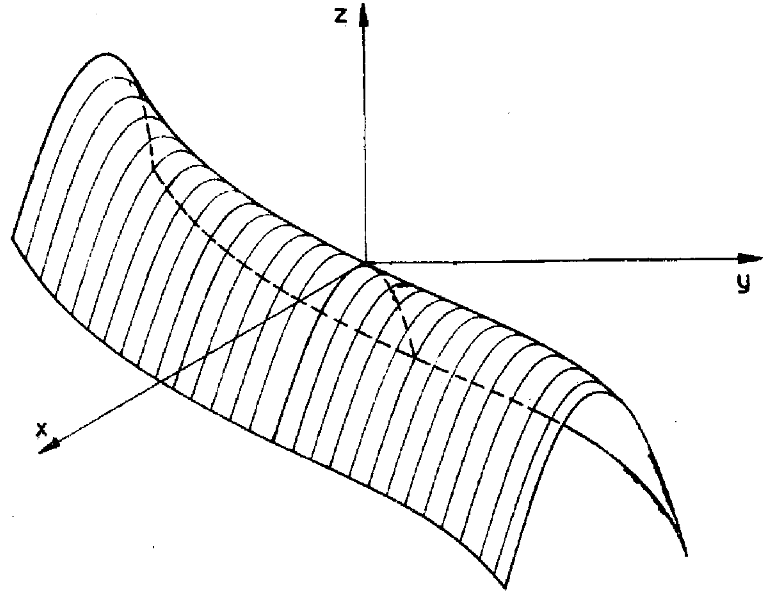
$$f:(x, y) \mapsto -x^2-y^3 \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény, amelynek grafikonját a 31. ábra mutatja. E függvénynek az origóban rögzített y mellett maximuma, rögzített x mellett pedig inflexiós pontja van.

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele III.5. alapján adható meg.

Mivel a P_0 pontban az elsőrendű parciálisok nullák, így P_0 kis környezetében Δf előjelét az

$$f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2+f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y$$



31. ábra

kvadratikus alak határozza meg. Ha ezen kvadratikus alak előjele állandó, azaz, ha ez (pozitív vagy negatív) definit, akkor a P_0 pontban biztosan *van* szélsőérték.

Ez akkor teljesül, ha

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{xy}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Ha $f''_{xx}(x_0; y_0)$ pozitív, akkor f-nek a P_0 pontban minimuma, ha negatív, maximuma van. Ha a determináns értéke negatív, biztosan nincs szélsőérték, ha nulla, akkor további vizsgálat döntheti el, hogy van-e szélsőérték, azonban ezzel könyvünkben nem foglalkozunk.

A lokális szélsőértéket tehát a következő módon kereshetjük meg: az

$$f'_x=0 \quad \text{és} \quad f'_y=0$$

egyenletrendszerből megkapjuk a lehetséges szélsőértékhelyeket, majd e pontokban megvizsgálva a fenti determináns előjelét, megállapítjuk, hogy van-e valóban szélsőérték.

Három, ill. több változó esetén hasonlóan járhatunk el. (A változókat $x_1, x_2, \ldots, x_n$-nel jelölve.) A lehetséges szélsőértékhelyeket az

$$f'_{x_i}=0 \qquad i=1, \ldots, n$$

egyenletrendszer megoldásai adják.

Ezekben a P pontokban megvizsgáljuk a következő sorozat előjelét:

$$1;\ f''_{x_1x_1}(P);\ \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P) f''_{x_1x_2}(P) \\ \\ f''_{x_2x_1}(P) f''_{x_2x_2}(P) \end{vmatrix};\ \ldots;\ \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P)\ldots f''_{x_1x_n}(P) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f''_{x_nx_1}(P)\ldots f''_{x_nx_n}(P) \end{vmatrix}.$$

Ha e sorozat állandó, ill. váltakozó előjelű, akkor az adott pontban minimuma, ill. maximuma van a függvénynek. Az abszolút szélsőértékre vonatkozik a következő tétel:

Ha az f kétváltozós függvény folytonos a $T \subset R^2$ korlátos, zárt tartományban, akkor itt f felveszi legnagyobb, ill. legkisebb értékét.

Abszolút szélsőértékhely keresésekor először a tartomány belsejében, majd a tartomány határán keressük meg a szélsőértékhelyeket, s ezen, általában véges sok függvényérték közül már kiválasztható a legkisebb, ill. legnagyobb.

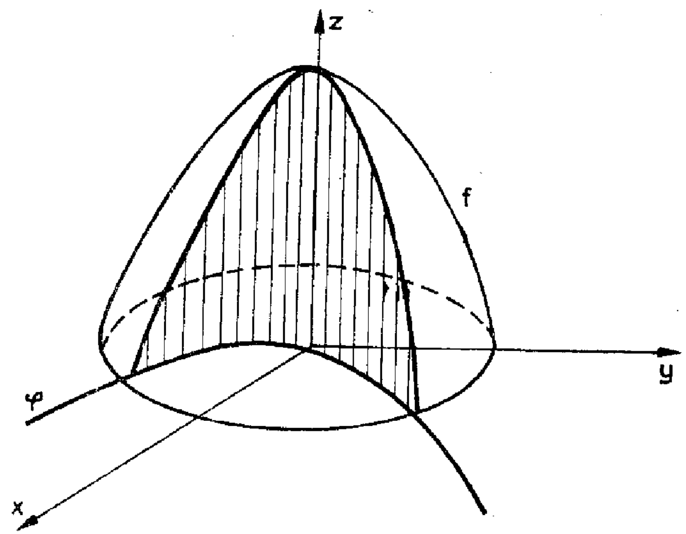
Sok esetben szükséges az f kétváltozós függvény szélsőértékének meghatározása a $\varphi(x, y)=0$ feltétel mellett. Szemléletesen: az f függvény grafikonjából a $\varphi(x, y)=0$ egyenletű görbére állított z tengellyel párhuzamos alkotójú henger egy térbeli görbét metsz ki. E térgörbén keressük f maximumát, ill. minimumát (32. ábra).

A feladat — a szükséges feltétel szempontjából — egyenértékű a következővel:

Keressük az

$$F:(x, y, \lambda) \mapsto f(x, y)+\lambda\varphi(x, y) \qquad \lambda \in R, \qquad (x, y) \in D_f \cap D_\varphi$$

függvény *feltétel nélküli* szélsőértékét.



32. ábra

Ugyanis φ minden pontjában $\varphi(x, y)=0$, tehát e pontokban

$$F'_x=f'_x; \qquad F'_y=f'_y; \qquad F'_\lambda=\varphi$$

Háromváltozós függvény esetén maximálisan két feltétel adhat[ó] meg. Az eljárás az előzőhöz hasonló: Ha tehát a g háromváltozós függvény szélsőértékét keressük a $\varphi_1(x, y, z)=0$ é[s] $\varphi_2(x, y, z)=0$ feltételek mellett, akkor ez a

$$G:(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto f(x, y, z)+\lambda_1\varphi_1(x, y, z)+\lambda_2\varphi_2(x, y, z),$$
$$\lambda_1 \in R, \qquad \lambda_2 \in R, \qquad (x, y, z) \in D_f \cap D_{\varphi_1} \cap D_{\varphi_2}$$

feltétel nélküli szélsőértékének meghatározását jelenti.

Gyakorló feladatok

1. Keresse meg az

$$f:(x, y) \mapsto 2x^2+y^2-2xy+4x-2y+5 \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

f parciális deriváltjai:

$$f'_x = 4x - 2y + 4,$$

$$f'_y = 2y - 2x - 2.$$

Szélsőérték abban a pontban lehet, amelyben mindkét parciális derivált értéke nulla, azaz

$$4x - 2y + 4 = 0,$$
$$2y - 2x - 2 = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_0 = -1; \quad y_0 = 0,$$

a másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(-1;0) = 4; \qquad f''_{yy}(-1;0) = 2; \qquad f''_{xy}(-1;0) = -2,$$

a determináns tehát:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

A $(-1; 0)$ pontban van szélsőérték, és ez minimumhely, mivel itt $f''_{xx} > 0$.

2. Határozza meg, mely pontban van az

$$f: (x, y) \mapsto (x^2 - 6x)(y^2 - 4y) \qquad (x, y) \in R^2$$

függvénynek lokális szélsőértéke!

Az elsőrendű parciálisok:

$$f'_x = (2x - 6)(y^2 - 4y),$$

$$f'_y = (x^2 - 6x)(2y - 4).$$

Szélsőérték csak azokban a pontokban lehet, amelyekre:

$$(2x - 6)y(y - 4) = 0$$

és

$$x(x - 6)(2y - 4) = 0.$$

Az első egyenletből $x = 3$ vagy $y = 0$, ill. $y = 4$; hasonlóan a másodikból $y = 2$ vagy $x = 0$, ill. $x = 6$. Ennek megfelelően a lehetséges szélsőértékhelyek:

$$P_1(3; 2); P_2(0; 0); P_3(0; 4); P_4(6; 0); P_5(6; 4).$$

A második deriváltak:

$$f''_{xx} = 2(y^2 - 4y), \qquad f''_{yy} = 2(x^2 - 6x), \qquad f''_{xy} = (2x - 6)(2y - 4).$$

A P_1 pontban a determináns:

$$\begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} > 0,$$

tehát van szélsőérték, s mivel $f''_{xx}(P_1) < 0$, így ez maximum.

A többi pontban a determináns értéke negatív, így e pontokban szélsőérték nincs.

Megjegyzés: Az

$$f(x, y) = x(x - 6)y(y - 4)$$

alakból azonnal látszik, hogy $x = 0$; 6, ill. $y = 0$; 4 esetben f-nek nem lehet szélsőértéke, hiszen f e helyek környezetében pozitív és negatív értékeket egyaránt felvesz.

3. Mérési eredmények kiértékelésekor gyakran találkozunk az alábbi feladattal.

A mérés eredményeként a $P_1(x_1; y_1) \ldots P_n(x_n; y_n)$ pontokat kapjuk.

Határozza meg azt az $y = Ax + B$ egyenletű egyenest, amely a legjobban közelíti az adott mérési pontokat!

A legjobb közelítés azt jelenti, hogy A, B értékét úgy kell meghatározni, hogy az

$$f: (A, B) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (Ax_i + B - y_i)^2 \qquad (A, B) \in R^2$$

függvénynek minimuma legyen.

Az elsőrendű parciálisok:

$$f'_A(A, B)=\sum_{i=1}^{n} 2x_i(Ax_i+B-y_i),$$

$$f'_B(A, B)=\sum_{i=1}^{n} 2(Ax_i+B-y_i);$$

a szükséges feltételek:

1. $A \sum_{i=1}^{n} x_i^2+B \sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=0,$

2. $A \sum_{i=1}^{n} x_i+nB-\sum_{i=1}^{n} y_i=0.$

Jelöljük az x_i értékek számtani közepét $\bar{x}$-sa

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$$

hasonlóan:

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

ekkor 2. a következőképpen írható:

$$B=-A\bar{x}+\bar{y}.$$

Ezt 1.-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$A=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i-\bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\bar{x}^2}$$

(A nevező az úgynevezett *empirikus szórásnégyzet*, amelyet σ_n^2-tel jelölnek, $\sigma_n^2>0$.)

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A^2}=2\sum_{i=1}^{n} x_i^2>0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}=2n,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial A\,\partial B}=2\sum_{i=1}^{n} x_i=2n\bar{x}.$$

A determináns értéke tehát:

$$\begin{vmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2n\bar{x} \\ 2n\bar{x} & 2n \end{vmatrix}=4n^2\sigma_n^2>0,$$

így van szélsőérték, és az minimum, mert az A szerinti második parciális derivált is pozitív.

Megjegyzés: Ha a mérési pontok közelítőleg az $y=be^{Ax}$ egyenletű görbére illeszkednek, A és b meghatározása az előző feladatra visszavezethető. Ugyanis:

$$\ln y=\ln b+Ax$$

(feltéve, hogy $b>0$, és $y_i>0$), ekkor $\ln y=Y$ és $\ln b=B$ helyettesítéssel $Y=Ax+B$ adódik. Hasonlóan vezethető vissza az alapfeladatra az $y=bx^A$ kapcsolat is.

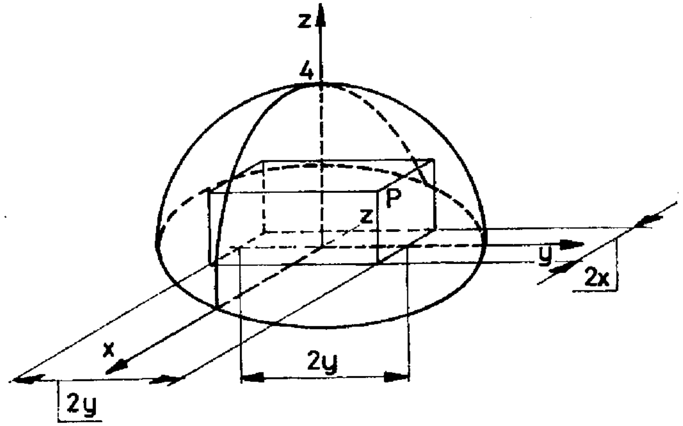
4. Határozza meg a

$$z=4-x^2-2y^2 \qquad (x, y)\in R^2$$

egyenletű felület $z\geqq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak!

a) Az ábrából láthatóan

$$V=4xyz,$$



33. ábra

ahol, mivel a P pont a felületen van

$$z=4-x^2-2y^2.$$

Tehát a

$$V=4xy(4-x^2-2y^2)=16xy-4x^3y-8xy^3,$$
$$D_V=\{(x, y)\in R^2 \mid x, y\geq 0,\ x^2+2y^2\leq 4\}$$

kétváltozós függvény abszolút szélsőértékét keressük. Mivel a függvény értéke a határokon mindenütt nulla, belül pozitív, ezért a maximumhely csak lokális szélsőértékhely lehet.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$V'_x=16y-12x^2y-8y^3=4y(4-3x^2-2y^2),$$
$$V'_y=16x-4x^3-24xy^2=4x(4-x^2-6y^2).$$

Mivel $x=0$, ill. $y=0$ esetén a térfogat nem lehet maximális, így a lehetséges szélsőértékhelyeket az alábbi egyenletrendszer szolgáltatja:

$$3x^2+2y^2=4,$$
$$x^2+6y^2=4,$$

amelynek megoldása (csak a pozitív értékek figyelembevételével): $x=1$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$; tehát $z=2$. Így a téglatest oldalai: 2; $\sqrt{2}$; 2.

Mivel egy korlátos, zárt tartományon folytonos függvény itt felveszi legnagyobb értékét, s a tartomány határain $f(x, y)=0$, biztos, hogy e pont valóban maximumhely. Azt, hogy tényleg a maximális térfogatú téglatest adatait határoztuk meg, az elégséges feltétel vizsgálatával is beláthatjuk:

$$V''_{xx}\left(1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-12\sqrt{2}<0,$$

$$V''_{yy}\left(1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-24\sqrt{2},$$

$$V''_{xy}\left(1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-8.$$

A determináns

$$\begin{vmatrix} -12\sqrt{2} & -8 \\ -8 & -24\sqrt{2} \end{vmatrix}=512>0,$$

tehát van szélsőérték, és az maximum, mert V''_{xx} e helyen negatív.

b) Oldjuk meg a feladatot feltételes szélsőértékfeladatként!

Keressük a

$$V=4xyz \qquad (x, y, z)\in R^{+3}$$

függvény maximumát azzal a feltétellel, hogy a $P(x, y, z)$ pont az x^2+ $+2y^2+z-4=0$ felületen van. Keressük tehát az

$$f=4xyz-\lambda(x^2+2y^2+z-4) \qquad (x, y, z)\in R^{+3},\ \lambda\in R$$

függvény maximumát.

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az összes változó szerinti parciális derivált nulla legyen:

$$F'_x(x, y, z, \lambda)=4yz-2\lambda x=0,$$

$$F'_y(x, y, z, \lambda)=4xz-4\lambda y=0,$$

$$F'_z(x, y, z, \lambda)=4xy-\lambda=0,$$
$$F'(x, y, z, \lambda)=-x^2+2y^2+z-4=0.$$

Az első egyenletet x-szel, a másodikat y-nal, a harmadikat z-vel szorozzuk:

$$4xyz = 2\lambda x^2 = 4\lambda y^2 = \lambda z;$$

mivel a maximumhelyen $xyz \neq 0$, tehát:

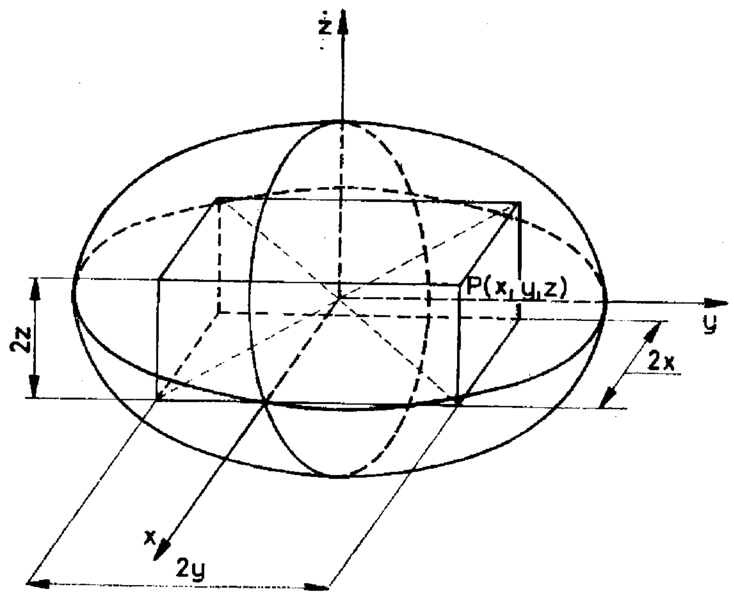
$$z = 2x^2 = 4y^2.$$

Ezt az utolsó egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $z=2$, tehát $x=1$ és $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ami megfelel előző eredményünknek.

5. Határozza meg a

$$2x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$$

egyenletű ellipszoidba írt maximális térfogatú hasáb adatait! (A hasáb lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.)



34. ábra

a) A 34. ábrából leolvasható, hogy $V=8xyz$.

A téglatest csúcsa a felületen van, ezért

$$y = \sqrt{1-2x^2-4z^2}.$$

Keressük tehát a

$$V = xz\sqrt{1-2x^2-4z^2}, \qquad D_V = \{(x, z) \in R^{+2} \mid 1-2x^2-4z^2 \geqq 0\}$$

függvény maximumát.

A tartomány határain $V(x, z)=0$, belsejében pedig értéke pozitív, így a keresett szélsőértékhely lokális maximumhely.
$V \geqq 0$, így ugyanott van maximuma, ahol az

$$u = \frac{V^2}{64}$$

függvénynek, tehát az

$$u = x^2z^2 - 2x^4z^2 - 4x^2z^4 \qquad (x, z) \in D_v$$

maximumát kell keresnünk.

u elsőrendű parciálisai:

$$u'_x = 2xz^2 - 8x^3z^2 - 8xz^4 = 2xz^2(1-4x^2-4z^2),$$

$$u'_z = 2x^2z - 4x^4z - 16x^2z^3 = 2zx^2(1-2x^2-8z^2)$$

Tudjuk, hogy $x=0$, ill. $z=0$ esetén nincs maximum, így a lehetséges maximumhelyet az

$$1-4x^2-4z^2=0,$$
$$1-2x^2-8z^2=0$$

egyenletrendszer megoldása adja, amely

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6}; \qquad z = \frac{\sqrt{12}}{12}; \qquad \text{így} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Az, hogy itt valóban maximumhely van, az előző feladat meggondolásából következik.

b) Oldjuk meg a feladatot feltételes szélsőérték feladatként! Keressük a $V=8xyz$ $(x, y, z) \in R^{+3}$ függvény maximumát, azzal a feltétellel, hogy a $P(x, y, z)$ pont az ellipszoidon van. Keressük tehát az

$$F=8xyz+\lambda(2x^2+y^2+4z^2-1) \qquad \lambda\in R, \qquad (x, y, z)\in R^{+3}$$

függvény feltétel nélküli szélsőértékét.

F elsőrendű parciálisai:

$$F'_x=8yz+\lambda 4x,$$

$$F'_y=8xz+\lambda 8y,$$

$$F'_z=8xy+\lambda 8z,$$

$$F'_\lambda=2x^2+y^2+4z^2-1,$$

ebből az előző feladatban látotthoz hasonló átalakításokkal

$$-8xyz=\lambda 4x^2=\lambda 2y^2=\lambda 8z^2\neq 0, \qquad y^2=2x^2=4z^2$$

adódik, amit az utolsó egyenletbe behelyettesítve:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

adódik, ami az előző eredménnyel megegyező.

6. Határozza meg az

$$f:(x, y, z)\mapsto\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z} \qquad (x, y, z)\in R^{+3}$$

függvény minimumát, ha

$$x+y+z=12.$$

Meg kell keresni az

$$F=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}+\lambda(x+y+z-12) \qquad \lambda\in R, (x, y, z)\in D$$

függvény feltétel nélküli szélsőértékét.

A parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, z, \lambda)=-\frac{1}{x^2}+\lambda=0,$$

$$F'_y(x, y, z, \lambda)=-\frac{4}{y^2}+\lambda=0,$$

$$F'_z(x, y, z, \lambda)=-\frac{9}{z^2}+\lambda=0,$$

$$F'_\lambda(x, y, z, \lambda)=x+y+z-12=0$$

Az első három egyenletből $\frac{1}{\lambda}$-t kifejezve (mivel $\lambda\neq 0$):

$$\frac{1}{\lambda}=x^2=\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9},$$

de mert x, y, z egyaránt pozitív,

$$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

Ezt a feltételbe helyettesítve: $x=2$; $y=4$; $z=6$ a megoldás.

7. Határozza meg a

$\sin x\sin y\sin z$ szorzat maximumát, ha x, y, z egy háromszög szögei, azaz:

$$x+y+z=\pi \qquad \text{és} \qquad x, y, z>0.$$

a) A feltételből

$$z=\pi-x-y,$$

tehát

$$\sin z=\sin(x+y).$$

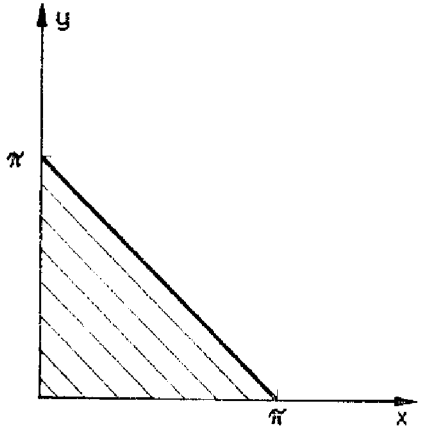
Keresnünk kell a

$$g:(x, y)\mapsto\sin x\sin y\sin(x+y) \qquad D_g=\{(x, y)\in R^{+2} \mid x+y\leqq\pi\}$$

függvény maximumát. Az értelmezési tartományt bővítettük az $x=0$, $y=0$ határpontokkal. E pontokban $g(x, y)=0$, tehát a keresett maximumhely lokális szélsőértékhely lesz. (g értelmezési tartományát a 35. ábra mutatja.)

g elsőrendű parciálisai:

$$g'_x=\cos y\sin y\sin(x+y)+\sin x\sin y\cos(x+y),$$



35. ábra

$$g'_y = \sin x \cos y \sin (x+y) + \sin x \sin y \cos (x+y)$$

Mivel maximumhelyet keresünk, így $\sin x \sin y \neq 0$, a szélsőértékhely koordinátái tehát a következő egyenletrendszerből adódnak:

$$\cos x \sin (x+y) + \sin x \cos (x+y) = 0,$$
$$\cos y \sin (x+y) + \sin y \cos (x+y) = 0.$$

Az első egyenlet:

$$\sin \big((x+y)+x\big) = 0,$$

azaz

$$2x+y = k\pi \qquad k \in Z.$$

Mivel háromszög szögeiről van szó, így csak $k=1$-nek van értelme, tehát:

$$2x+y=\pi,$$

hasonlóan a második egyenletből:

$$x+2y=\pi.$$

A két egyenletből:

$$x=y=z=\frac{\pi}{3},$$

azaz a szorzat szabályos háromszög esetén maximális. Mivel korlátos, zárt

tartományban kerestük g maximumát (g folytonos), s e tartomány határain a függvényérték nulla, a belső pontokban $g>0$, így a maximumhely a tartomány belsejében levő egyetlen lehetséges szélsőértékhely.

b) A feladatot feltételes szélsőérték-feladatként is megoldhatjuk:

Keressük az

$$F = \sin x \sin y \sin z + \lambda(x+y+z-\pi) \quad \lambda \in R, \quad (x, y, z) \in [0;\, \pi]^3$$

függvény maximumát.

A lehetséges szélsőértékhelyet szolgáltató egyenletrendszer:

$$F'_x(x, y, z, \lambda) = \cos x \sin y \sin z + \lambda = 0,$$

$$F'_y(x, y, z, \lambda) = \sin x \cos y \sin z + \lambda = 0,$$

$$F'_z(x, y, z, \lambda) = \sin x \sin y \cos z + \lambda = 0,$$

$$F'_\lambda(x, y, z, \lambda) = x+y+z-\pi = 0.$$

Az első három egyenletből:

$$-\lambda = \cos x \sin y \sin z,$$
$$-\lambda = \sin x \cos y \sin z,$$
$$-\lambda = \sin x \sin y \cos z,$$

mivel a maximumhelyen $\sin x \sin y \sin z \neq 0$, így ezekből átrendezéssel:

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y,$$

ill.

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} z,$$

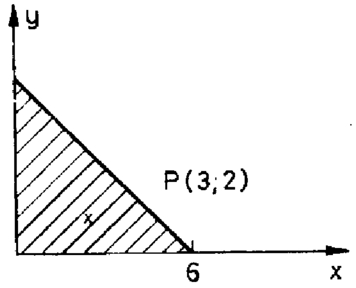
és mert egy háromszög szögeiről van szó:

$$x=y=z=\frac{\pi}{3}.$$

8. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto (x^2-6x)(y^2-4y) \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x=0$, $y=0$, $x+y=6$ egyenesekkel határolt zárt tartományban!



36. ábra

Korlátos, zárt tartományról van szó, ezért f itt biztosan felveszi legkisebb és legnagyobb értékeit. A 2. feladatban láttuk, hogy a függvénynek csak a $P(3;2)$ pontban van lokális maximuma. E pont a tartomány belsejében van, és itt

$$f(3;2)=36.$$

Vizsgáljuk meg f viselkedését a tartomány határain!

Ha $x=0$, vagy $y=0$, akkor $f=0$.
Ha $x+y=6$, azaz $x=6-y$,

akkor a függvény

$$y \mapsto (y^2-6y)(y^2-4y) \qquad y\in[0;6].$$

Keressük ezen egyváltozós függvény szélsőértékhelyeit. ($y=0$, ill. 6 esetén a függvényérték zérus, így csak belső pontban lehet szélsőérték.) A függvény deriváltja:

$$y \mapsto (2y-6)(y^2-4y)+(y^2-6y)(2y-4).$$

A derivált zérushelyei:

$$y_1=0; \qquad y_2=\frac{3}{4}(5+\sqrt{3}); \qquad y_3=\frac{3}{4}(-\sqrt{3}).$$

Mivel $x=6-y$, így

$$x_1=6; \qquad x_2=\frac{3}{4}(3-\sqrt{3}); \qquad x_3=\frac{3}{4}(3+\sqrt{3}).$$

f helyettesítési értékei e pontokban:

$$f(P_1)=0,$$

$$f(P_2)\approx -25{,}43,$$
$$f(P_3)\approx 33{,}08.$$

A függvény tehát adott tartománybeli legnagyobb értékét a tartomány belsejében, a $P(3;2)$ pontban; legkisebb értékét a tartomány határán a

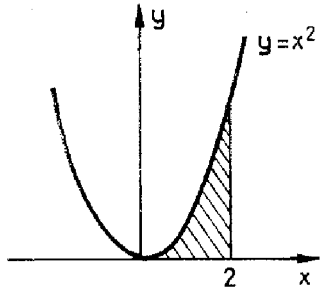
$$P_2\left(\frac{3}{4}(5+\sqrt{3});\ \frac{3}{4}(3-\sqrt{3})\right)$$

pontban veszi fel.

10. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto y(2x-3) \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény legnagyobb és legkisebb értékét a 37. ábrán látható zárt tartományon!



37. ábra

Mivel a tartomány korlátos és zárt, így f valóban felveszi legkisebb és legnagyobb értékeit.

f elsőrendű parciálisai:

$$f'_x=2y$$

és

$$f'_y=2x-3,$$

így lokális szélsőértékhely csak a $P(1{,}5;0)$ pontban lehet (e pont a tartomány határán van), itt pedig a függvényérték nulla.

Vizsgáljuk meg f viselkedését a tartomány határain!

Ha $y=0$, akkor $f(x;0)=0$.

Ha $x=2$, akkor $f(2;y)=y$ $y\in[0;4]$, itt $0\leq f(2;y)\leq 4$.

Ha $y=x^2$, akkor a függvény:

$x\mapsto x^2(2x-3)$ $x\in[0;2]$.

Ezen egyváltozós függvény lokális szélsőértékei az $x_1=0$ és az $x_2=1$ pontban lehetnek. Mivel $y=x^2$, tehát $y_1=0$ és $y_2=1$.

A függvényértékek:

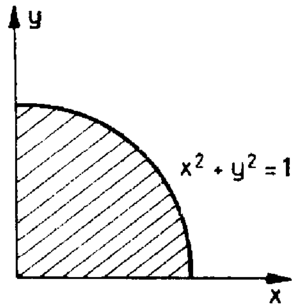
$f(P_1)=0$; $f(P_2)=-1$.

(Az $x=0$, ill. $x=2$ esetet már előzőleg figyelembe vettük.)
A függvény tehát legkisebb értékét az (1; 1) pontban, legnagyobb értékét a (2; 4) pontban veszi fel.

11. Határozza meg az

$f:(x,y)\mapsto x^2-y^2$ $(x,y)\in R^2$

függvénynek a 38. ábrán látható zárt tartományon felvett legkisebb, ill. legnagyobb értékét!



38. ábra

Mivel f-nek, mint azt már láttuk, lokális szélsőértékhelye nincs, így az abszolút szélsőértékhelyeket a tartomány határán kell keresnünk.
A tengelyeken:

$x=0$ esetén $-1\leq f(0;y)\leq 0$,
$y=0$ esetén $0\leq f(x,0)\leq 1$.

A körív esetében célszerű polárkoordinátára áttérnünk; $r=1$, ezért a körív mentén a függvény

$$\varphi\mapsto\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos 2\varphi \qquad \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

$\cos 2\varphi$ a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő, így maximumát a $\varphi=0$ helyen, tehát a $P_1(1;0)$ pontban, minimumát a $\varphi=\frac{\pi}{2}$ helyen, a $P_2(0;1)$ pontban veszi fel. Tehát f legnagyobb értéke 1, legkisebb -1 e tartományban.

IV. VEKTORVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ÉS DERIVÁLÁSUK

1. Egyparaméteres vektor-skalár függvény. Térgörbék

Tekintsünk egy térben mozgó pontszerű testet! E test tartózkodási helyét a mozgás időtartama alatt minden egyes időpillanatban egy-egy helyvektorral adhatjuk meg, azaz minden t (skalár) értékhez a tér egy-egy vektorát rendeljük hozzá.

A pálya tehát az

$$\mathbf{r}: t \mapsto \mathbf{r}(t) \qquad t \in D \subset R$$

függvénnyel, egyparaméteres vektor-skalár függvénnyel jellemezhető. (Természetesen nem minden vektor-skalár függvény tekinthető egy mozgó test pályájának.)

Ha a térben rögzítjük a koordináta-rendszert, akkor:

$$\mathbf{r}: t \mapsto \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad t \in D \subset R.$$

azaz e függvény mindhárom koordinátájában t-től függő egyváltozós függvény.

Az

$$L = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \mid t \in D\}$$

halmaz pontjai általában egy térgörbét alkotnak.

Egyszerű ívnek nevezzük az egyenes szakasz *topologikus*, azaz kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos leképezéssel nyert képét. A leképezést akkor nevezzük *kölcsönösen folytonosnak*, ha a leképezést szolgáltató függvénnyel együtt annak inverze is folytonos. Ha véges sok egyszerű ívet úgy csatlakoztatunk, hogy csak ezek végpontjai legyenek közös pontok, görbét kapunk.

Ha az

$$L = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \mid t \in [a, b]\}$$

térgörbe, és $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, akkor *zárt görbéről* beszélünk. E függvény határértékét, folytonosságát külön nem definiáljuk, ezt az Olvasó a többváltozós függvények körében megismert definíciók analógiájaként könnyen elvégezheti. Csak annyit jegyzünk meg, hogy a határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele a koordináták határértékének létezése az adott helyen.

A

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) \qquad t \in D$$

függvényt *differenciálhatónak* nevezzük a $t_0 D$ helyen, ha a

$$\lim_{0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$$

határérték létezik és véges. A t_0 pontbeli differenciálhányados jelölése:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t_0}$$

Rögzített koordináta-rendszer esetén:

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{x}(t_0)\mathbf{i} + \dot{y}(t_0)\mathbf{j} + \dot{z}(t_0)\mathbf{k}.$$

Ha a térgörbe t_0 pontjában létezik a deriváltvektor, és $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, akkor $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ a görbe érintőjének irányvektora. Ha a görbe egy pontmozgás pályájának tekinthető, akkor a deriváltvektor a mozgó pont pillanatnyi sebességvektora a t_0 helyen. (Amennyiben $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$ is létezik, ennek fizikai jelentése: a pillanatnyi gyorsulás vektora a t_0 helyen.)

Legyen a térgörbe kezdőpontja $\mathbf{r}(a) = A$, végpontja $\mathbf{r}(b) = B$, s írjunk e térgörbére töröttvonalat úgy, hogy csúcsai a görbén helyezkedjenek el, kezdő-, ill. végpontja A, ill. B legyen, s a csúcsok a haladási iránynak megfelelően kövessék egymást! Ha a beírt töröttvonalak hosszából álló számhalmaznak létezik felső határa, ezt a görbe ívhosszának nevezzük.

Ha $\dot{\mathbf{r}}(t)$ folytonos $[a, b]$-ben, akkor a görbének van ívhossza és:

$$S = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\, dt.$$

(Szemléletesen: pontmozgás esetén a sebesség nagyságának idő szerinti integrálja egyenlő a megtett úttal.)

Ha létezik a görbének olyan paraméterezése, amelyben az ívhossz a paraméterértékek különbségével egyenlő, akkor a görbe természetes paraméterezéséről beszélünk:

$$\mathbf{r} : s \mapsto \mathbf{r}(s) \qquad s \in D \subset R.$$

A természetes paraméter szerinti deriváltak szokásos jelölése: $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$.

Igazolható, hogy $|\mathbf{r}'| = 1$.

Az $\mathbf{r}'$ egységvektort a továbbiakban $\mathbf{t}$-vel is jelöljük. Könnyen belátható az is, hogy

$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = 1$, $t \in D$ teljesülése esetén t természetes paraméter.

Jelölje $\Delta\alpha$ a térgörbe P_0, ill. P pontjában levő érintőinek hajlásszögét, és Δs a P_0P ív hosszát!

Ekkor a görbe P_0 pontbeli görbülete:

$$\varkappa = \lim_{P \to P_0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s},$$

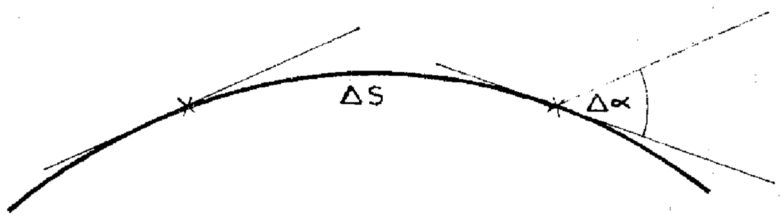
ha a határérték létezik és véges (39. ábra). (Igazolható, hogy a görbület csak egyenes esetén egyenlő azonosan zérussal.)

Ha az

$$\mathbf{r} : t \mapsto \mathbf{r}(t) \qquad t \in D$$

függvény a t_0 helyen kétszer differenciálható, és $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$, akkor a görbület:

$$\varkappa = |\mathbf{r}''| = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$



39. ábra

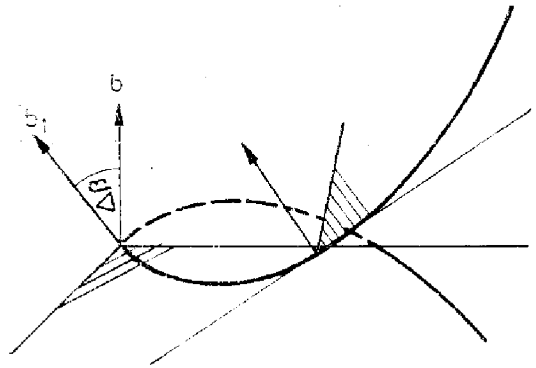
Ha $\mathbf{r}''(t_0) \neq 0$, akkor egységvektorát *főnormális egységvektornak* nevezik:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}''}{\varkappa} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|}.$$

Az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{t}$ által kifeszített sík a görbe t_0 pontbeli *simulósíkja*. A simulósík egy normálvektora:

$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ a binormális egységvektor.

A $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ egységvektorok alkotta vektorhármast a térgörbe *kísérő triéderének* nevezzük.



40. ábra

Síkgörbe esetén a binormális egységvektor iránya állandó, így célszerű a görbe torzióját $\mathbf{b}$ változásával definiálni:

Legyen a térgörbe P_0, ill. P pontjaiban vett simulósíkok hajlásszöge $\Delta\beta$, a P_0P ív hossza Δs, ekkor a görbe P_0 pontbeli torziója (40. ábra):

$$|\tau| = \lim_{P \to P_0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}.$$

(τ pozitív, ha a P_0-beli érintővektor $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ irányából nézve P_0-hoz közeledő pontokban vett simulósíkok pozitív forgást végeznek.)

Ha $\dddot{\mathbf{r}}(t_0)$ létezik és folytonos, $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ és $\varkappa(t_0)$ nem zérus, akkor:

$$\tau=\frac{\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2}=\frac{br'''}{\varkappa}.$$

Gyakorló feladatok

1. Adja meg az $A(1;2;5)B(4;7;9)$ pontokat összekötő egyenesszakasz vektoregyenletét!

Az egyenes irányvektora:

$$\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k},$$

így az AB szakasz egyenlete:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_A+\mathbf{v}t=(1+3t)\mathbf{i}+(2+5t)\mathbf{j}+(5+4t)\mathbf{k} \qquad t\in[0;\,1].$$

Ha irányvektorként egységvektort választunk, akkor természetes paraméterezéssel is megadható a görbe.

$$\mathbf{e}_v=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{3}{\sqrt{50}}\mathbf{i}+\frac{5}{\sqrt{50}}\mathbf{j}+\frac{4}{\sqrt{50}}\mathbf{k},$$

tehát: $\mathbf{r}: s\mapsto \mathbf{r}_A+\mathbf{e}_v s=$

$$=\left(1+\frac{3}{\sqrt{50}}s\right)\mathbf{i}+\left(2+\frac{5}{\sqrt{50}}s\right)\mathbf{j}+\left(5+\frac{4}{\sqrt{50}}s\right)\mathbf{k} \qquad s\in[0;\,\sqrt{50}].$$

Ez esetben:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{e}_v, \quad \text{tehát} \quad |\mathbf{r}'|=1,$$
$$\mathbf{r}''=0, \quad \text{így} \quad \varkappa=0.$$

Megjegyzés: Természetesen más paraméterválasztás is lehetséges. Például az

$$\mathbf{r}: t\mapsto(1+3t^2)\mathbf{i}+(2+5t^2)\mathbf{j}+(5+4t^2)\mathbf{k} \qquad t\in[0;\,1]$$

függvény szintén az AB szakasz egy lehetséges megadási módja. (Az anyagi pont ekkor gyorsulva futja be az AB szakaszt.)
Ekkor

$$\dot{\mathbf{r}}: t\mapsto 6t\mathbf{i}+10t\mathbf{j}+8t\mathbf{k} \qquad t\in[0;\,1]$$

és

$$\ddot{\mathbf{r}}: t\mapsto 6\mathbf{i}+10\mathbf{j}+8\mathbf{k} \qquad t\in[0;\,1].$$

Mivel minden egyes t_0 időpillanatban $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ és $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$ párhuzamos, így vektoriális szorzatuk zérus, tehát a görbület most is zérussal egyenlő.

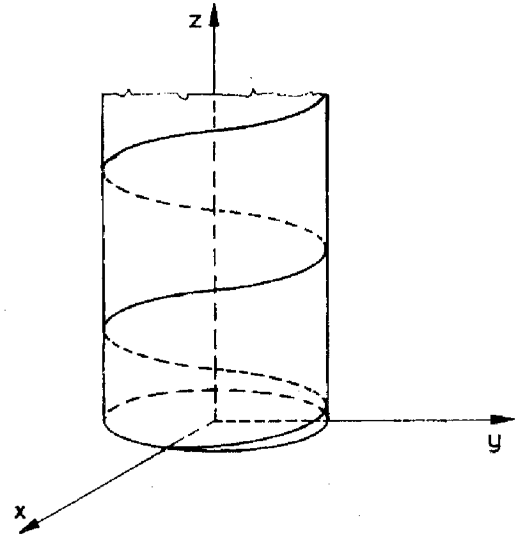
2. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r}: t\mapsto\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k} \qquad t\in R$$

függvénnyel adott térgörbe illeszkedik az

$$x^2+y^2=1$$

(henger)felületre!



41. ábra

Mivel

$$x(t)=\cos t,$$
$$y(t)=\sin t,$$
$$z(t)=t, \qquad t\in R,$$

látható, hogy minden t esetén

$$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1,$$

azaz a görbe valóban illeszkedik a hengerfelületre.

Megjegyzés: A feladatban szereplő görbe egy hengerfelületre írt csavarvonal (41. ábra), amelynek az xy síkra eső vetülete kör; az xz síkra való vetülete:

$$x=\cos z, \qquad z\in R,$$

hiszen a $P(\cos t_0, \sin t_0, t_0)$ vetülete az xz síkra a $P'(\cos t_0, 0, t_0)$ pont.

3. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r}: t\mapsto e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}, \qquad t\in R$$

függvénnyel adott térgörbe illeszkedik a

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (x, y)\in R^{+2}$$

kúpfelületre!

A görbe minden pontjában

$$x(t)=e^t\cos t,$$
$$y(t)=e^t\sin t,$$
$$z(t)=e^t>0, \qquad t\in R.$$

Tehát minden pontban:

$$x^2+y^2=e^{2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)=e^{2t}=z^2,$$

azaz a görbe valóban illeszkedik a felületre (kúpfelületre csavart csavarvonal).

4. Határozza meg a 2. feladatban szereplő térgörbe ívhosszát a $t\in[0; 2\pi]$ intervallumban!

Mivel $\mathbf{r}$ minden koordinátájában folytonosan differenciálható függvény, így $\dot{\mathbf{r}}$ létezik és korlátos:

$$\dot{\mathbf{r}}: t\mapsto -\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\mathbf{k}, \qquad t\in R,$$

ahonnan

$$|\dot{\mathbf{r}}|=\sqrt{2}.$$

Így az ívhossz:

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt=2\pi\sqrt{2}.$$

Megjegyzés: A megoldásból látszik, hogy az $s=t\sqrt{2}$ paramétertranszformációval a görbe természetes paraméterezését kapjuk.

5. Igazolja, hogy a 2. feladatban szereplő csavarvonal görbülete és torziója állandó!

Az előző feladat eredményét felhasználva:

$$\mathbf{r}: s\mapsto \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}, \qquad s\in R,$$

ahol s a természetes paraméter.

$$\mathbf{r}': s\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\mathbf{k}\right), \qquad s\in R,$$

$$\mathbf{r}'': s\mapsto\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{i}-\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right), \qquad s\in R.$$

Tehát a görbület:

$$\varkappa=|\mathbf{r}''|=\frac{1}{2}=\text{állandó}.$$

A torzió meghatározásához szükségesek az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{b}$ vektorok.

$$\mathbf{n}=\frac{r''}{\varkappa}=-\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right),$$

azaz $\mathbf{n}$ minden esetben párhuzamos az xy síkkal. A binormális egységvektor:

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}+\mathbf{k}\right),$$

$$\mathbf{r}''':s\mapsto\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{i}-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j}\right),$$

így a torzió:

$$\tau=\frac{\mathbf{b}\mathbf{r}'''}{\varkappa}=\frac{1}{2}=\text{állandó}.$$

Tehát csavarvonal esetén τ és $\varkappa$ valóban állandó.

Megjegyzés: Igazolható, hogy az egyetlen olyan nem síkbeli görbe, amelynek görbülete és torziója állandó, a csavarvonal.

Ha a csavarvonalat az

$$\mathbf{r}:t\mapsto R_0\cos t\mathbf{i}+R_0\sin t\mathbf{j}+mt\mathbf{k},\qquad t\in R$$

függvény jellemzi, akkor

$$\tau=\frac{m}{R_0^2+m^2};\qquad \varkappa=\frac{R_0}{R_0^2+m^2},$$

így τ és $\varkappa$ értéke a csavarvonal jellemző paramétereit egyértelműen meghatározza.

6. Határozza meg a 3. feladatban szereplő térgörbe ívhosszát a $[0;1]$ intervallumban!

$$\dot{\mathbf{r}}:t\mapsto(e^t\cos t-e^t\sin t)\mathbf{i}+(e^t\cos t+e^t\sin t)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k},\qquad t\in R.$$

Tehát:

$$|\dot{\mathbf{r}}|=e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2+1}=\sqrt{3}e^t.$$

Így az ívhossz:

$$S=\int_0^1\sqrt{3}e^t\,dt=\sqrt{3}(e-1).$$

Megjegyzés: A feladat megoldásából látható, hogy a $[0,t_0]$ intervallum esetén az ívhossz:

$$S=\sqrt{3}(e^{t_0}-1).$$

Ha elvégezzük a

$$t=\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+c\right),\qquad \text{ahol } c\geqq 0 \text{ állandó}$$

helyettesítést, akkor s természetes paraméter, ugyanis:

$$\mathbf{r}'=\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{3}e^t},$$

azaz $|\mathbf{r}'|=1$, így valóban természetes paraméter.

7. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r}:t\mapsto\frac{t}{\sqrt{3}}\cos\ln\frac{t}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i}+\frac{t}{\sqrt{3}}\sin\ln\frac{t}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j}+\frac{t}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},\qquad t\in R^+$$

függvény esetén t természetes paraméter, és határozza meg a görbületet a $t_0=1$ helyen!

Azt kell belátnunk, hogy $|\dot{\mathbf{r}}|=1$ minden $t\in R^+$ helyen; ebből már következik, hogy t természetes paraméter;

$$\dot{\mathbf{r}}:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\cos\ln\frac{t}{\sqrt{3}}-\sin\ln\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{i}+\left(\sin\ln\frac{t}{\sqrt{3}}+\cos\ln\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{j}+\mathbf{k}\right].$$

Ebből

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2=\frac{1}{3}\left[\left(\cos\ln\frac{t}{\sqrt{3}}-\sin\ln\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sin\ln\frac{t}{\sqrt{3}}+\cos\ln\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]=1,$$

tehát t valóban természetes paraméter, azaz

$$\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{r}'.$$

Az adott pontbeli görbület meghatározásához $\mathbf{r}''$ szükséges:

$$\mathbf{r}'' : t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{3}} \left[\left(-\sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} - \cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{i} + \left(\cos \ln \frac{t}{\sqrt{3}} - \sin \ln \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \mathbf{j} \right].$$

Tehát:

$$\mathbf{r}''(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j}.$$

Így a görbület:

$$\varkappa(1) = \mathbf{r}''(1) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Megjegyzés: A térgörbe a 3. feladatban szereplő kúpfelületre írt csavarvonal, csak más a paraméterezése.

8. Határozza meg az

$$\mathbf{r} : t \mapsto t\mathbf{i} + \frac{t^2}{2} \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \qquad t \in R$$

függvénnyel adott térgörbe $t_0 = 0$ pontjában a kísérő triédert!

Határozza meg e térgörbének a kísérő triéder síkjaira eső vetületét!

Mivel

$$\dot{\mathbf{r}} : t \mapsto \mathbf{i} + t\mathbf{j} + 3t^2 \mathbf{k},$$

így

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{i} = \mathbf{t},$$

hiszen

$$|\dot{\mathbf{r}}(0)| = 1.$$

A főnormális egységvektor irányát az

$$(\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0)) \times \dot{\mathbf{r}}(0)$$

vektor adja meg.

$$\ddot{\mathbf{r}} : t \mapsto \mathbf{j} + 6t\mathbf{k},$$

tehát

$$\ddot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{j},$$

így $\mathbf{n}$ iránya:

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

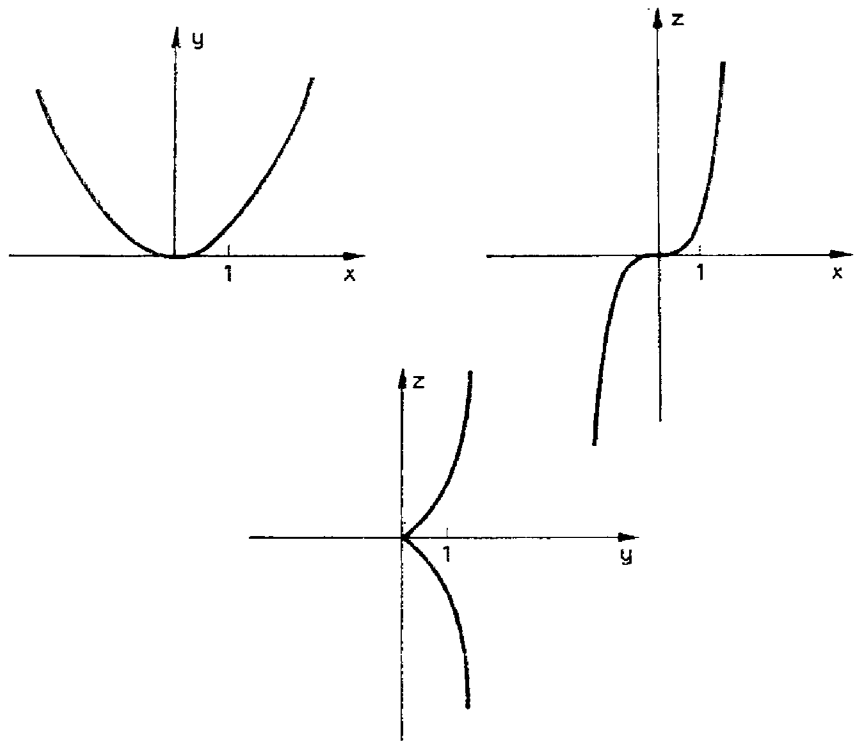
Mivel egységvektort kaptunk, így ez egyben a főnormális egységvektor:

$$\mathbf{n} = \mathbf{j}.$$

A görbe $t_0 = 0$-hoz tartozó simulósíkja az xy sík, amelynek normálvektora:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{k}.$$

Az origóhoz tartozó kísérőtriéder egységvektorai tehát megegyeznek a tengelyirányú egységvektorokkal, így a vetületek meghatározása a koordinátatengelyek síkjára való vetítést jelenti.



42. ábra

Mivel a $P(x, y, z)$ pont vetülete az xy síkra a $P_1(x, y, 0)$ pont; így az xy síkra eső vetületgörbe egyenlete:

$$y=\frac{x^2}{2}, \qquad x\in R.$$

Hasonlóan a zx síkra eső vetület:

$$z=x^3, \qquad x\in R,$$

és a zy síkra eső vetület:

$$z^2=8y^3, \qquad y\in R^+ \text{ (42. ábra).}$$

Megjegyzés: Igazolható, hogy ha a térgörbét előállító $\mathbf{r}$ függvény valamely pontban háromszor folytonosan differenciálható, e pontban a görbület és a torzió nem zérus, akkor e pont kis környezetében a térgörbe vetületei a kísérőtriéder síkjaira hasonlóak a 42. ábrán látható vetületekhez.

9. Határozza meg, mely pontokban párhuzamos, ill. merőleges a térgörbe érintője a

$$3x+5y+6z=20$$

síkkal, ha a térgörbét a következő függvény állítja elő:

$$\mathbf{r}: t\mapsto (t^2+2)\mathbf{i}+(6t-4)\mathbf{j}+(2t^2+5t)\mathbf{k}, \qquad t\in R.$$

A sík normálvektora:

$$\mathbf{n}(3; 5; 6).$$

Az érintő egyenese akkor párhuzamos a síkkal, ha az érintő irányvektora és a sík normálvektora egymásra merőleges, azaz, ha skalárszorzatuk zérus.

$$\dot{\mathbf{r}}: t\mapsto 2t\mathbf{i}+6\mathbf{j}+(4t+5)\mathbf{k},$$

így a skalárszorzat:

$$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{n}=6t+30+24t+30.$$
$\dot{\mathbf{r}}\mathbf{n}$ akkor zérus, ha $t=-2$.
$$\dot{\mathbf{r}}(-2)=6\mathbf{i}-16\mathbf{j}-2\mathbf{k},$$

tehát az érintő a $P(6, -16, -2)$ pontban párhuzamos a síkkal. E pontban

az érintő irányvektora:

$$\mathbf{v}(-4; 6; -3),$$

tehát az érintő egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x-6&=-4u,\\ y+16&=6u,\\ z+2&=-3t. \end{aligned}$$

Az érintő akkor merőleges a síkra, ha irányvektora párhuzamos a sík normálvektorával; azaz, ha van olyan t_0 pont, amelyre

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0)=\lambda\mathbf{n}, \qquad \lambda\in R\setminus\{0\}.$$

Mivel

$$\mathbf{n}(3; 5; 6)$$

és

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0)=2t_0\mathbf{i}+6\mathbf{j}+(4t_0+5)\mathbf{k},$$

így az egyenlőség a második koordináták egyenlősége miatt csak $\lambda=1{,}2$ esetén teljesülhetne, ekkor azonban a

$$\begin{aligned} 3{,}6&=2t_0,\\ 7{,}2&=4t_0+5. \end{aligned}$$

egyenleteknek kellene egyszerre teljesülniük. Ez lehetetlen, tehát nincs olyan pont, amelyhez tartozó érintő a síkra merőleges lenne.

10. Gravitációs térben a $P_0(4; 20; 60)$ pontból $\mathbf{v}_0(5; 20; 40)$ kezdősebességgel elhajítunk egy pontszerű testet. Írja fel a pálya egyenletét! Milyen magasra emelkedik a test; hol éri el az xy síkot? (Feltételezzük, hogy a test gyorsulása $-g\mathbf{k}$.)

A test x és y irányban egyenletesen mozog, így a pálya egyenlete:

$$\mathbf{r}=(4+5t)\mathbf{i}+(20+20t)\mathbf{j}+\left(60+40t-\frac{g}{2}t^2\right)\mathbf{k}, \qquad t\in R^+.$$

A test sebességét $\dot{\mathbf{r}}$ adja:

$$\dot{\mathbf{r}}: t\mapsto 5\mathbf{i}+20\mathbf{j}+(40-gt)\mathbf{k},$$

azaz a sebesség első két koordinátája állandó. A pálya tetőpontján a sebesség z irányú komponense zérus. (Itt $z(t)$-nek maximuma van, tehát $\dot{z}(t_0)=0$.)

$$40-gt_0=0,$$
$$t_0\approx 4,$$

így a tetőpont koordinátái: $T(24;\,100;\,140)$.
Az xy sík egyenlete $x=0$.
Tehát a metszéspont időpontját a

$$60+40t-\frac{g}{2}t^2=0$$

egyenlet pozitív megoldása adja. Ez $t_1\approx 9{,}29$.
E pont koordinátái: $B(50{,}45;\,205{,}8;\,0)$.

Megjegyzés: A mozgás pályája síkgörbe. Könnyen belátható ugyanis, hogy a pálya minden pontja a

$$4x-y=-4$$

egyenletű síkban van. Belátható az is, hogy a pálya parabola.

11. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r}: t\mapsto R\cos\omega t\,\mathbf{i}+R\sin\omega t\,\mathbf{j},\qquad t\in R^+$$

(R, ω állandó) függvénnyel jellemzett pontmozgás (egyenletes körmozgás) esetén

$$|\dot{\mathbf{r}}|\quad\text{és}\quad|\ddot{\mathbf{r}}|$$

állandó, és teljesül az

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\omega^2\mathbf{r}$$

differenciálegyenlet!

A periodikus mozgást végző pontszerű test sebességét minden t_0 időpillanatban $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$, gyorsulását $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$ adja. Tehát:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}: t\mapsto -R\omega\sin\omega t\,\mathbf{i}+R\omega\cos\omega t\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{a}=\ddot{\mathbf{r}}: t\mapsto -R\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i}-R\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}.$$

Látható, hogy:

$$|\mathbf{v}|=|\dot{\mathbf{r}}|=R\omega=\text{állandó},$$

és

$$\mathbf{v}\mathbf{r}=0,\qquad\text{tehát}\qquad\mathbf{v}\perp\mathbf{r},$$

valamint

$$|\mathbf{a}|=|\ddot{\mathbf{r}}|=R\omega^2.$$

Látszik továbbá, hogy

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\omega^2\mathbf{r},$$

azaz $\mathbf{r}$ valóban kielégíti a differenciálegyenletet.

Megjegyzés: Ha $|\dot{\mathbf{r}}|=c>0$, $t\in R$ (állandó sebességű mozgás), akkor $\dot{\mathbf{r}}$ és $\ddot{\mathbf{r}}$ minden időpillanatban merőlegesek egymásra. Ugyanis:

$$\dot{\mathbf{r}}^2=|\dot{\mathbf{r}}|^2=c^2$$

állandó, így

$$\frac{d}{dt}\dot{\mathbf{r}}^2=2\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}=\frac{dc^2}{dt}=0.$$

12. Határozza meg az

$$\mathbf{r}: t\mapsto R\cos\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{i}+R\sin\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{j},\qquad t\in R^+$$

(R, ω, α állandók) függvénnyel leírt pontmozgás gyorsulását, és bontsa fel $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ irányú összetevőkre! (Gyorsuló körmozgás.)

A pontmozgás sebessége:

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}: t\mapsto R(\omega+\alpha t)\left[-\sin\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{i}+\cos\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{j}\right],$$

a gyorsulás:

$$\mathbf{a}=\ddot{\mathbf{r}}: t\mapsto -R\alpha\left[\sin\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{i}-\cos\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{j}\right]-$$
$$-R(\omega+\alpha t)^2\left[\cos\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{i}+\sin\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}t^2\right)\mathbf{j}\right].$$

$\mathbf{r}$ és $\dot{\mathbf{r}}$ alakját figyelembe véve írhatjuk, hogy:

$$\mathbf{a}=-(\omega+\alpha t)^2\mathbf{r}+\frac{\alpha}{\omega+\alpha t}\dot{\mathbf{r}}.$$

Tudjuk, hogy

$$\mathbf{t}=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}=\dot{\mathbf{r}}\cdot\frac{1}{R(\omega+\alpha t)},$$

s mivel síkmozgásról van szó, azaz a simulósík az xy sík, így $\mathbf{n}$ a kör középpontja felé mutat, azaz:

$$\mathbf{n}=-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}=-\frac{\mathbf{r}}{R}.$$

Ezt figyelembe véve a gyorsulás felbontása:

$$\mathbf{a}=R(\omega+\alpha t)^2\mathbf{n}+\alpha R\mathbf{t}=\frac{|\mathbf{v}|^2}{R}\mathbf{n}+\alpha R\mathbf{t},$$

azaz a mozgás során az érintőirányú gyorsulás állandó, a normális irányába eső gyorsulás a sebesség négyzetével arányosan változik.

Megjegyzés: Egy tetszőleges mozgás gyorsulásvektora mindig felbontható $\mathbf{t}$ és $\mathbf{n}$ irányú összetevőkre, éspedig:

$$\mathbf{a}=\frac{d|\mathbf{v}|}{dt}\mathbf{t}+\frac{|\mathbf{v}|^2}{R}\mathbf{n},$$

ahol R a görbe görbületi sugara.

13. Igazolja, hogy centrális erőtérben végzett mozgás esetén (azaz a mozgás során az erő egy rögzített pont felé irányul) az

$$\mathbf{s}=\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})$$

összefüggéssel definiált területi sebességvektor állandó!

Vegyük fel a koordináta-rendszer kezdőpontját az erőcentrumban! Ekkor

$$\mathbf{F}=-\lambda\mathbf{r},\qquad(\lambda>0\text{ állandó}).$$

Newton II. törvénye szerint:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\ddot{\mathbf{r}}.$$

$\mathbf{F}$ két alakját összehasonlítva látjuk, hogy $\mathbf{r}$ és $\ddot{\mathbf{r}}$ párhuzamos vektorok, azaz vektoriális szorzatuk zérus:

$$\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{0}.$$

Határozzuk meg $\mathbf{s}$ deriváltját!

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}})+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}})=0,$$

hiszen az első tagban a két vektor azonos, így ez a vektoriális szorzat definíciója miatt zérus, a második tagról pedig az előzőekben láttuk be ugyanezt. Mivel $\mathbf{s}$ deriváltja zérus, így $\mathbf{s}$ állandó. Ebből az is következik, hogy e mozgás síkmozgás.

Megjegyzés: A feladatban Kepler II. törvényét igazoltuk.

14. Bontsuk fel síkmozgás esetén az $\dot{\mathbf{r}}$ és $\ddot{\mathbf{r}}$ vektorokat $\mathbf{r}$ irányú és r-re merőleges összetevőkre!

A feladat megoldásakor célszerű síkbeli polárkoordinátákat alkalmazni.
Ekkor

$$|\mathbf{r}|=r,$$

azaz

$$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r,$$

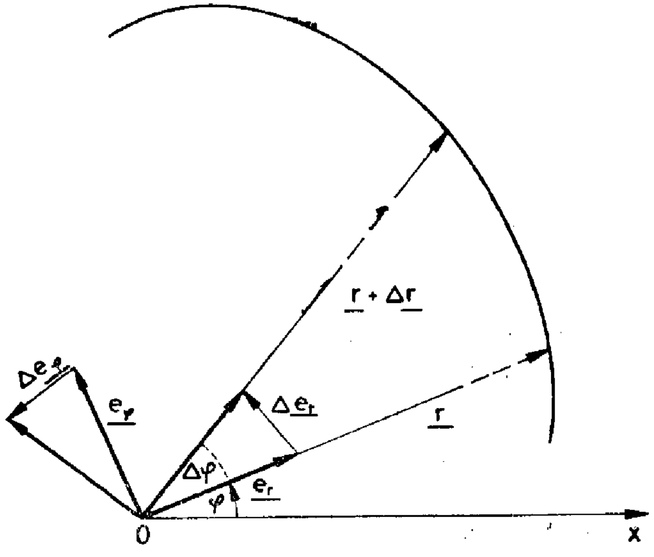
ahol $\mathbf{e}_r$ az $\mathbf{r}$ irányú egységvektor. Jelentsen $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_r$-re merőleges egységvektort, amelyet növekvő φ irányban való 90°-os forgatással kapunk $\mathbf{e}_r$-ből. A 11. feladat megjegyzése szerint egységvektor derivált vektora e vektorra merőleges vektor, így:

$$\dot{\mathbf{e}}_r=\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi;\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi=-\dot{\varphi}\mathbf{e}_r,$$

ahol $\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}$ (43. ábra).

Ezt alkalmazva:

$$\dot{\mathbf{r}}=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\dot{\mathbf{e}}_r=\dot{r}\mathbf{e}_r+r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$



43. ábra

amely éppen $\dot{\mathbf{r}}$ keresett felbontása. Ezt ismét differenciálva:

$$\ddot{\mathbf{r}}=\ddot{r}\mathbf{e}_r+\dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r+\mathbf{e}_\varphi(\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})+r\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Figyelembe véve $\dot{\mathbf{e}}_r$, $\dot{\mathbf{e}}_\varphi$ alakját:

$$\ddot{\mathbf{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r+(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi,$$

amely a gyorsulásvektor felbontása.

Megjegyzés: A területi sebességvektor állandóságának (13. feladat) és $\ddot{\mathbf{r}}$ felbontásának alkalmazásával határozható meg egy centrális erőtérben mozgó test pályája. (Kepler I. törvénye)

2. Kétparaméteres vektor-skalár függvény. Felületek

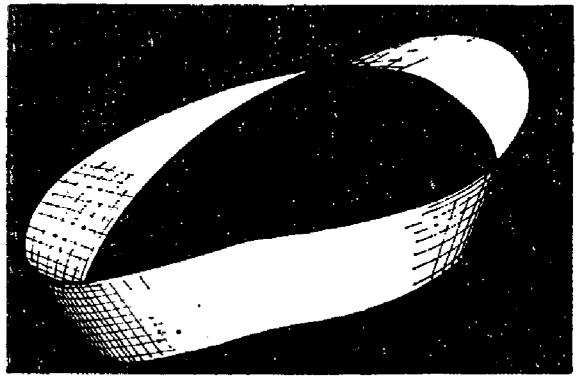
Felületekkel már a kétváltozós függvények szemléltetésekor is foglalkoztunk, de ott nem definiáltuk a felület fogalmát.

Elemi felületnek nevezzük, a körlemez topologikus (azaz kölcsönösen egyértelmű és kölcsönösen folytonos leképezéssel nyert) képét. A körlemez határpontjainak képe adja az elemi

felület határát. Elemi felületeket határaik mentén összeilleszthetünk. Az összeillesztést úgy végezzük, hogy csak véges sok határoló görbe mentén csatlakozzanak az elemi felületek, s a csatlakozó görbék belső pontjai a felületnek is belső pontjai legyenek. Véges sok elemi felületet így összeillesztve *felületet* kapunk. A felületek néhány lényeges tulajdonságát definiáljuk.

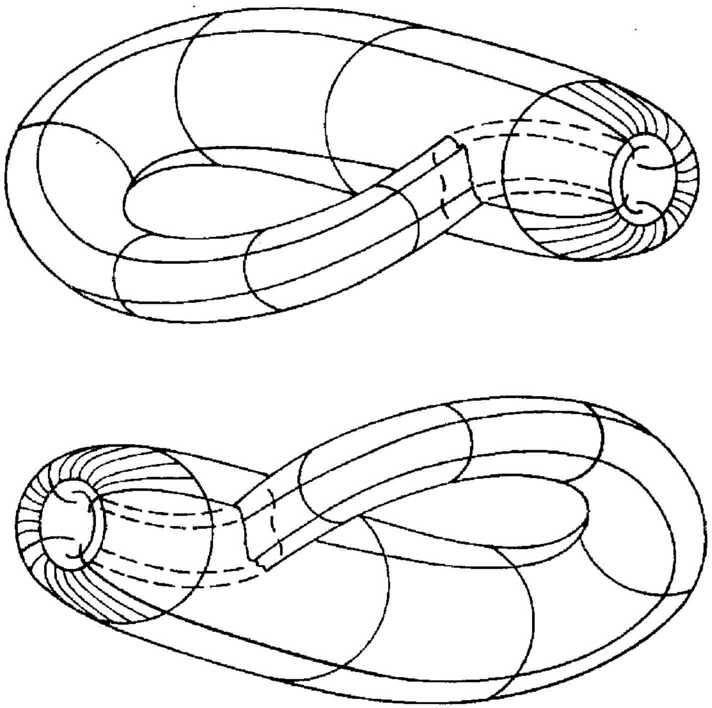
A felület *zárt,* ha korlátos és nincs határa. A felület *összefüggő,* ha bármely két felületi pont összeköthető a felületen haladó görbével; *egyszeresen összefüggő,* ha bármely felületre illeszkedő zárt görbe kettévágja.

Ha a felület egy rögzített P pontján áthaladó, a felületre illeszkedő, érintővel rendelkező görbék érintői egy síkban helyezkednek el, akkor ezt a síkot a felület P pontbeli *érintősíkjának,* a sík normálvektorát a felület P pontbeli *normálisának* nevezzük.



44. ábra

Tegyük fel, hogy a felület minden pontjában létezik az így értelmezett normálvektor. Mozgassuk el a normálvektort a felületre illeszkedő, a felület határpontjait nem tartalmazó zárt görbe mentén addig, míg kezdőpontja az eredeti helyzetbe kerül! Ha a kezdő- és végállapotban kapott vektor minden ilyen görbe esetén megegyezik, a felületet *irányíthatónak* (kétoldalú felületnek) nevezzük. A 44. ábrán látható Moebius-szalag egyoldalú felület. Hasonlóan egyoldalú, de zárt felület a Klein-féle palack (45. ábra).



45. ábra

Ha a felületbe írt, a felületre támaszkodó, háromszöglapokból álló, bizonyos szögkorlátozásoknak eleget tevő poliéderek felszínének határértéke, finomodó poliéder sorozat esetén létezik, akkor a felületet *mérhetőnek* nevezzük, s e határérték a felület felszínét adja.

II.2.-ben láttuk, hogy bizonyos felületek megadhatók kétváltozós függvényekkel, ebben a részben kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel való leírásukkal foglalkozunk.

Az

$$\mathbf{r} : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v), \qquad (u, v) \in D \subset R^2$$

függvényt, amely az R^2 (paramétersík) egy részhalmazához a háromdimenziós tér vektorait rendeli hozzá, *kétparaméteres vektor-skalár függvénynek* nevezzük.

Ha a térben rögzítjük a koordináta-rendszert, akkor:

$$\mathbf{r} : (u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \qquad (u, v) \in D,$$

azaz e függvény mindhárom koordinátája az u, v változók kétváltozós függvénye.

Az

$$F = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in D\}$$

halmaz pontjai általában egy felületet alkotnak. E függvény határértékét, folytonosságát külön nem definiáljuk, ezt az Olvasóra bízzuk.

Ha létezik és véges a

$$\lim_{0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

határérték, akkor ezt az $\mathbf{r}$ függvény $P_0(u_0, v_0)$ pontbeli u szerinti parciális deriváltjának nevezzük:

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0).$$

Hasonlóan értelmezhető $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ is.

(Szemléletesen: a zérustól különböző $r'_u(u_0, v_0)$ vektor az

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0), \qquad (u, v_0) \in D$$

függvénnyel definiált, a felületre illeszkedő térgörbe érintőjének irányvektorát adja.) Az így értelmezett parciálisok koordinátái megegyeznek a megfelelő koordináták parciálisaival.

Ha $\mathbf{r}$ a D tartományban folytonosan differenciálható, azaz parciálisai léteznek és folytonosak, és itt

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq 0,$$

akkor az $\mathbf{r}$ függvény által adott felület minden pontjában van érintősík, amelynek normálvektora a $P_0 \in D$ pontban:

$$\mathbf{r}'_u(P_0) \times \mathbf{r}'_v(P_0).$$

Ha a D tartomány mérhető területű és $\mathbf{r}$ folytonosan differenciálható D-n, akkor a felület felszíne:

$$A=\iint_D |\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v|\,du\,dv.$$

(A felszín kiszámításával a későbbiekben foglalkozunk.)

Gyakorló feladatok

1. Adja meg az A, B, C pontokat tartalmazó sík, és az A, B, C háromszöglap vektoregyenletét, ha

$$A(1;1;3);\qquad B(4;2;7)\qquad \text{és}\qquad C(5;4;9)!$$

A sík egyenlete:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_A+u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC},\qquad (u,v)\in R^2,$$

ugyanis a sík valamennyi vektora előállítható az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha az A, B, C pontok nem esnek egy egyenesbe.
Esetünkben:

$$\overrightarrow{AB}(3;1;4),$$

$$\overrightarrow{AC}(4;3;6),$$

tehát a sík egyenlete:

$$\mathbf{r}=(1+3u+4v)\mathbf{i}+(1+u+3v)\mathbf{j}+(3+4u+6v)\mathbf{k},\qquad (u,v)\in R^2.$$

Ha csak a háromszöglap szükséges, akkor az u, v számpárra megszorítást kell tennünk.
Mivel a BC szakasz tetszőleges P pontjára:

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}\qquad 0\leq\lambda\leq 1,$$

és

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

így

$$\overrightarrow{AP}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}.$$

A háromszöglap (belső- és határ-) pontjait kapjuk tehát, ha az előző függ-

vény értelmezési tartományát leszűkítjük:

$$D=\{(u,v)\in R^2 \mid u, v\geq 0,\ u+v\leq 1\}.$$

Megjegyzés:

A sík esetében:

$$\mathbf{r}'_u=\overrightarrow{AB},$$

$$\mathbf{r}'_v=\overrightarrow{AC},$$

tehát: $r'_u\times\mathbf{r}'_v=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, ami a síkra merőleges vektort ad.

2. Adja meg az R sugarú origó középpontú gömb vektoregyenletét!

Az első fejezetben megismert gömbi koordinátákat alkalmazva ($r=R=$állandó), a gömb egyenlete:

$$\mathbf{r}=R\sin u\cos v\mathbf{i}+R\sin u\sin v\mathbf{j}+R\cos u\mathbf{k}\ u\in[0;\pi],\qquad v\in[0;2\pi].$$

(A leképzés nem kölcsönösen egyértelmű, mivel $u=0$ esetén v-től függetlenül a $P(0;0;R)$ pontot kapjuk.)

3. Írja fel az

$$(x-3)^2+z^2=4$$

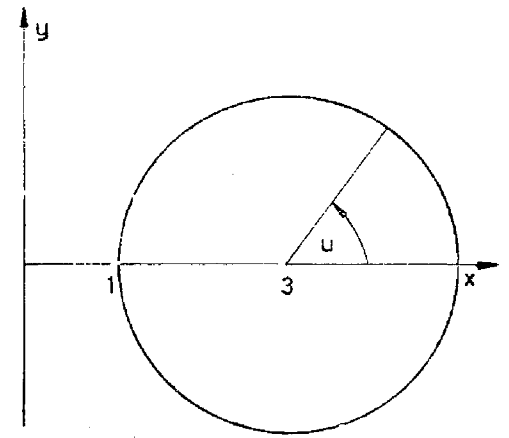
egyenletű körvonal z tengely körüli forgatásakor keletkező felület (tórusz) vektoregyenletét!

Az xz sík egy tetszőleges $P(x_0, z_0)$ pontját a z tengely körül φ szöggel elforgatva a keletkező pont koordinátái:

$$x_1=x_0\cos\varphi,$$
$$y_1=x_0\sin\varphi,$$
$$z_1=z_0,\qquad \varphi\in[0,2\pi].$$

A körvonal paraméteres előállítása (46. ábra):

$$x=3+2\cos u,$$
$$z=2\sin u,\qquad u\in[0;2\pi].$$



46. ábra

A felületet e pontoknak z tengely körüli forgatásával kapjuk, így az előző felhasználásával a felület egyenlete:

$$\mathbf{r}=(3+2\cos u)\cos\varphi\mathbf{i}+(3+2\cos u)\sin\varphi\mathbf{j}+2\sin u\mathbf{k},$$
$$(u;\ \varphi)\in[0;\ 2\pi].$$

A keletkező felület zárt, összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő.

Megjegyzés: Hasonlóan írható fel az xz síkban levő

$$x=x(t),$$
$$z=z(t), \qquad t\in D\subset R$$

paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe z tengely körüli forgatásakor keletkező felület egyenlete is:

$$\mathbf{r}=x(t)\cos\varphi\mathbf{i}+x(t)\sin\varphi\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} \qquad t\in D,\ \varphi\in[0;\ 2\pi].$$

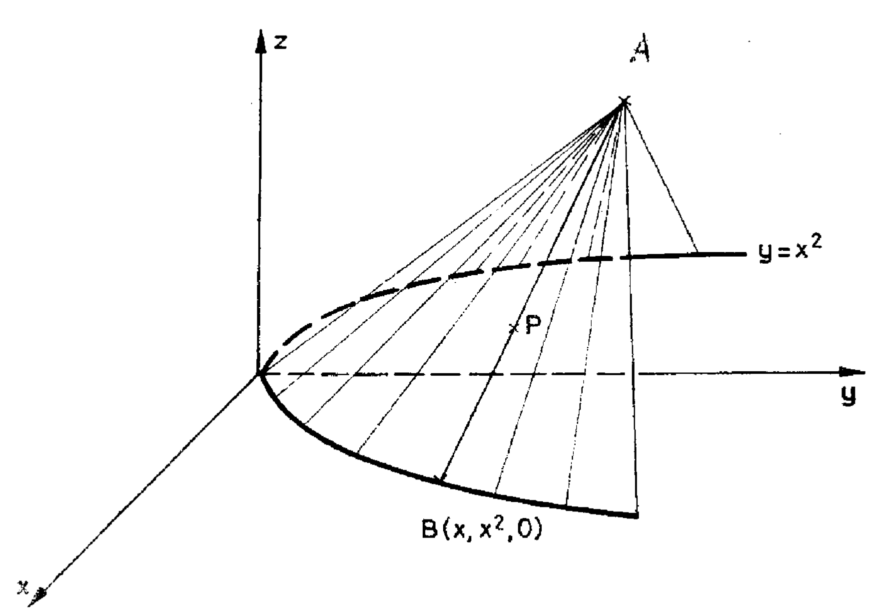
4. Írja fel annak a kúpfelületnek az egyenletét, amelynek csúcsa az $A(5;4;7)$ pont, vezérgörbéje pedig az

$$y=x^2, \qquad x\in R$$

parabola!

Jelölje B a parabola egy tetszőleges pontját! Ekkor az AB szakaszon levő P pont helyvektora (47. ábra):

$$\mathbf{r}_P=t\,\overrightarrow{AB}+\mathbf{r}_A=t(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A)+\mathbf{r}_A=(1-t)\mathbf{r}_A+t\mathbf{r}_B, \qquad t\in[0;\ 1],$$



47. ábra

így a felület egyenlete:

$$\mathbf{r}=(5-5t+tx)\mathbf{i}+(4-4t+tx^2)\mathbf{j}+(7-7t)\mathbf{k} \qquad (t,\ x)\in R^2.$$

Hasonló módon kaphatjuk meg tetszőleges csúcspontú és vezérgörbéjű kúpfelület egyenletét is.

5. Írja fel annak a hengerfelületnek az egyenletét, amelynek vezérgörbéje az

$$x^2-y^2=1$$

egyenletű hiperbola $x>0$ ága, alkotója pedig párhuzamos az $\mathbf{a}(2;4;5)$ vektorral!

A hiperbola paraméteres előállítása:

$$x=\operatorname{ch} t,$$
$$y=\operatorname{sh} t, \qquad t\in R,$$

hiszen

$$\text{ch}\, t > 0,$$

és

$$\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1.$$

A felület tetszőleges P pontját megkaphatjuk, ha a hiperbola valamely pontjából az a vektorral párhuzamosan haladunk. A P pont helyvektora tehát:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_B + u\mathbf{a}, \qquad u \in R.$$

ahol a B a hiperbola valamely pontja. Így a felület egyenlete:

$$\mathbf{r} = (\text{ch}\, t + 2u)\mathbf{i} + (\text{sh}\, t + 4u)\mathbf{j} + 5u\mathbf{k}, \qquad (t, u) \in R^2.$$

Hasonló módon adható meg tetszőleges hengerfelület egyenlete is.

6. Mozgassunk egy egyenest az

$$\mathbf{r} : t \mapsto \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad t \in R$$

csavarvonalon úgy, hogy az minden pontban a csavarvonal érintője irányába mutasson!

Írja fel az így keletkező felület egyenletét!

A felület tetszőleges pontjába eljuthatunk, ha a csavarvonal valamely P_0 pontjából a P_0 pontbeli érintő irányában mozdulunk el. (Könnyen látható az is, hogy így csak a felület pontjait kapjuk.)

Az érintő irányvektora a P_0 pontban:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = -\sin t_0\mathbf{i} + \cos t_0\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

így a felület egyenlete:

$$\mathbf{s} = (\cos t - u \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + u \cos t)\mathbf{j} + (t + u)\mathbf{k}, \qquad t \in [0; 2\pi], \qquad u \in R.$$

Igazolható, hogy az így keletkező felület — lefejthető vonalfelület — síkba kiteríthető.

7. Határozza meg az

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}, \qquad (x, y) \in R^2$$

felület $P_0(4; 3; 25)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

A feladatot a kétváltozós függvények tárgyalása során már megoldottuk. Most más úton keressük a megoldást. A felület P_0 pontbeli normálvektorát az

$$\mathbf{r}'_x(x_0, y_0) \times \mathbf{r}'_y(x_0, y_0)$$

vektor szolgáltatja.

Esetünkben:

$$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + 2x\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_y = \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}.$$

A P_0 pontban:

$$\mathbf{r}'_x(4; 3) = \mathbf{i} + 8\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_y(4; 3) = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Tehát az érintősík normálvektora (a P_0 pontbeli felületi normális):

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Így a P_0 pontbeli érintősík egyenlete:

$$8(x-4) + 6(y-3) - (z-25) = 0,$$

ami, természetesen az előző megoldás eredményével egyező.

Megjegyzés: A feladatban szereplő felület az

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény grafikonja. Kétváltozós függvénnyel adott felület kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel való megadása tehát történhet az x, y paraméterek választásával:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

8. Határozza meg az

$$r = 2 \sin u \cos v\mathbf{i} + 4 \sin u \sin v\mathbf{j} + 3 \cos u\mathbf{k},$$
$$u \in [0; \pi],\ v \in [0, 2\pi]$$

felület $u_0 = \frac{\pi}{4}$; $v_0 = \frac{\pi}{4}$ paraméterű pontbeli érintősíkját!

A felület ellipszoid, ugyanis teljesül az $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ egyenlőség, amelyet egy ellipszoid pontjai elégítenek ki; hiszen a felület síkmetszetei ellipszisek. E felület $P_0\left(1; 2; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ pontbeli érintősíkját keressük.

A felületi normális meghatározásához szükségesek a paraméterek szerinti parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u=2\cos u\cos v\mathbf{i}+4\cos u\sin v\mathbf{j}-3\sin u\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v=-2\sin u\sin v\mathbf{i}+4\sin u\cos v\mathbf{j}.$$

A P_0 pontban:

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}.$$

A P_0 pontbeli érintősík normálvektora:

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)\times\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)=3\sqrt{2}\mathbf{i}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}+4\mathbf{k}.$$

Így a keresett érintősík egyenlete:

$$3\sqrt{2}(x-1)+\frac{3\sqrt{2}}{2}(y-2)+4\left(z-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=0.$$

9. Határozza meg az origó középpontú 3 egység sugarú gömb $P_0(2; 2; 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Az érintősík egyenletét többféleképpen is megkaphatjuk. A megoldás során felhasználhatjuk a 2. feladat megoldásakor látott gömbi koordinátákkal történő paraméterezést, majd az előző feladathoz hasonlóan ebből meghatározhatjuk a P_0 pontbeli felületi normálist.

Célszerűbb azonban felhasználnunk a gömbnek azt a tulajdonságát, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintősíkra, így az érintősík normálvektora az $\overrightarrow{OP_0}$ vektor lehet.

Tehát

$$\mathbf{n}=\overrightarrow{OP_0}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k},$$

így az érintősík egyenlete:

$$2(x-2)+2(y-2)+(z-1)=0.$$

10. Állítsunk az előző feladatbeli érintősíkra merőleges síkot (ún. normálsíkot), amely a P_0 pontot és a z tengelyt tartalmazza.

Határozza meg a metszésvonal egyenletét és P_0 pontbeli görbületét! Hogyan változik a görbület, ha a metsző síkot az érintősík és normálsík metszésvonala körül forgatjuk?

A normálsík normálvektora merőleges az érintősík normálvektorára és a z tengelyre, így:

$$\mathbf{n}^*=\mathbf{n}\times\mathbf{k}=(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})\times\mathbf{k}=-2\mathbf{j}+2\mathbf{i}.$$

Mivel a sík tartalmazza az origót is, így egyenlete:

$$x=y.$$

E sík a gömböt egy 3 egység sugarú körben metszi, amelynek egy lehetséges paraméteres megadása:

$$\mathbf{s}: t\mapsto\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t\mathbf{i}+\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t\mathbf{j}+3\cos t\mathbf{k}, \qquad t\in[0; 2\pi].$$

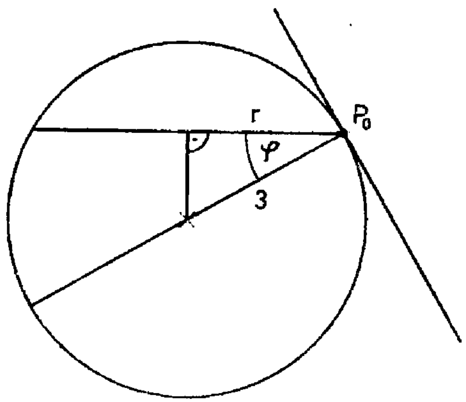
Mivel a metszetkör sugara 3, így görbülete a P_0 pontban és a metszetkör bármely pontjában:

$$\varkappa=\frac{1}{3}.$$

Ha a metszősíkot az érintősík és a normálsík metszésvonala körül forgatjuk, akkor a metszetkör sugara csökken. (A 48. ábrán, a P_0 ponton áthaladó, a fixen tartott egyenesre merőleges síkmetszetet ábrázoltuk.)

Az ábrából láthatóan:

$$r=3\cos\varphi,$$



48. ábra

így a görbület:

$$\varkappa_1 = \frac{1}{3\cos\varphi} = \frac{\varkappa}{\cos\varphi}, \qquad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Megjegyzés: A normálmetszet és a ferdemetszet görbülete közötti összefüggés, amelyet a feladatban gömb esetén igazoltunk, általánosan is érvényes (Meusnier tétele).

11. Határozza meg a 7. feladatban szereplő felület esetében azon P_0 pontbeli normálmetszet egyenletét és P_0 pontbeli görbületét, amely a z tengelyt tartalmazza!

A keresett sík normálvektora merőleges az érintősík normálvektorára és a z tengelyre, tehát a sík normálvektorának választható ezek vektoriális szorzata:

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{k} = 8\mathbf{j} - 6\mathbf{i}.$$

Így a normálsík egyenlete:

$$6x - 8y = 0.$$

A metszetgörbe egyenletét keresve válasszuk x-et paraméterként:

$$x = t!$$

Ekkor a sík egyenletéből:

$$y = \frac{3t}{4}.$$

Mivel $z = x^2 + y^2$, így

$$z = \frac{25}{16}t^2.$$

A metszetgörbe tehát:

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{3}{4}t\mathbf{j} + \frac{25}{16}t^2\mathbf{k}, \qquad t \in R,$$

vagyis parabola.

A P_0 pontbeli görbület meghatározásához szükségünk van az $\dot{\mathbf{r}}(4)$ és $\ddot{\mathbf{r}}(4)$ vektorokra.

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{25}{8}t\mathbf{k},$$

azaz:

$$\dot{\mathbf{r}}(4) = \mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} + 16\mathbf{k},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}(4) = \frac{50}{9}\mathbf{k}.$$

A P_0 pontbeli görbület:

$$\varkappa(4) = \frac{|\dot{\mathbf{r}}(4) \times \ddot{\mathbf{r}}(4)|}{|\dot{\mathbf{r}}(4)|^3}.$$

A számításokat elvégezve kapjuk, hogy:

$$\varkappa(4) = \frac{2}{101\sqrt{101}}.$$

12. Határozza meg, hogy a 8. feladatban szereplő felület érintősíkja mely pontban párhuzamos a

$$2x + y = 0$$

síkkal!

A feladat megoldása során meghatároztuk a paraméterek szerinti parciálisokat. Ezt felhasználva, a felületi normális:

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\cos u\cos v & 4\cos u\sin v & -3\sin u \\ -2\sin u\sin v & 4\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=12\sin^2 u\cos v\mathbf{i}+6\sin^2 u\sin v\mathbf{j}+16\sin u\cos u\mathbf{k}.$$

Az érintősík akkor párhuzamos a

$$2x+y=0$$

síkkal, ha az $\mathbf{n}$ vektor párhuzamos az $\mathbf{n}_1(2;1;0)$ vektorral, azaz van olyan $\lambda\neq 0$, hogy

$$\mathbf{n}=\lambda\mathbf{n}_1.$$

Mivel $\mathbf{n}_1$ harmadik koordinátája zérus, így:

$$16\sin u\cos u=0.$$

Tekintve, hogy

$$\sin u=0$$

esetében $\mathbf{n}$ mindhárom koordinátája zérus, csak

$\cos u=0$ lehetséges.

Ekkor

$$u=\frac{\pi}{2},\qquad \text{azaz}\qquad \sin u=1.$$

$\mathbf{n}$ első két koordinátája e pontokban:

$$n_x=12\cos v=\lambda\cdot 2,$$
$$n_y=6\sin v=\lambda\cdot 1.$$

E két egyenletből:

$$\operatorname{tg} v=1,$$

azaz

$$v_1=\frac{\pi}{4};\qquad v_2=\frac{5\pi}{4}.$$

A két pont tehát, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal:

$$P_1(\sqrt{2};2\sqrt{2};0),$$
$$P_2(-\sqrt{2};-2\sqrt{2};0),$$

e pontok tehát az xy síkban vannak.

Megjegyzés: Ha $u=0$, akkor $\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v=\mathbf{0}$, azaz nem határoz meg érintősíkot. Az $u=0$ paraméterű pont — v-től függetlenül — az $A(0;0;3)$ pont. Szemléletesen látszik, hogy e pontban van érintősík, és ez a

$$z=3 \text{ sík.}$$

A problémát a felület paraméterezése (2. feladat megjegyzése) okozza.

13. Határozza meg az

$$\mathbf{r}=(u+v)\mathbf{i}+(u-v)\mathbf{j}+4uv\mathbf{k},\qquad (u,v)\in R^2$$

felület origóbeli érintősíkját!

Mi a felület és az érintősík metszésvonala?

A felület nyeregfelület, ugyanis:

$$x=u+v,$$
$$y=u-v,$$

tehát:

$$2u=x+y\qquad \text{és}\qquad 2v=x-y,$$

így

$$z=4uv=(x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

A paraméterek szerinti parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u=\mathbf{i}+\mathbf{j}+4v\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v=\mathbf{i}-\mathbf{j}+4u\mathbf{k}.$$

Az origóban $u_0=v_0=0$, tehát

$$\mathbf{r}'_u(0;0)=\mathbf{i}+\mathbf{j}\qquad \text{és}\qquad \mathbf{r}'_v(0;0)=\mathbf{i}-\mathbf{j}.$$

A felületi normális tehát:

$$\mathbf{u}=(\mathbf{i}+\mathbf{j})\times(\mathbf{i}-\mathbf{j})=-2\mathbf{k};$$

ebből következően az origóbeli érintősík az xy sík:

$$z=0.$$

Láttuk (2.2-ben), hogy az xy sík a nyeregfelületet két egyenesben metszi. Ezek:

$$x=y, \qquad \text{ill.} \qquad x=-y.$$

Megjegyzés: Vizsgáljuk e felület esetén az origón átmenő normálmetszeteket! Ha a normálmetszet illeszkedik az y tengelyre ($z=-y^2$), akkor az origóból a görbületi középpontba mutató vektor a felületi normálissal azonos értelmű, az x tengelyre illeszkedő normálmetszet ($z=x^2$) esetén viszont ellentétes értelmű e két vektor. Az előbbi esetben a felületi görbe görbületét *pozitívnak*, az utóbbiban *negatívnak* nevezzük. A felületnek azon pontjait, amelyekhez tartozó normálmetszetek esetén a görbület pozitív és negatív is lehet *hiperbolikus pontoknak* nevezzük. Hiperbolikus pontok esetén a pontbeli érintősík tetszőleges kis környezetében, az érintősík által meghatározott mindkét féltérben van a felületnek pontja.

A nyeregfelület minden pontja hiperbolikus pont. Ha a P pontnak van olyan környezete, amelyben a felület a pontbeli érintősík által meghatározott féltérben van, a pontot *elliptikus pontnak* nevezzük. Ekkor a P ponton átmenő összes normálmetszet görbülete azonos előjelű. Ha valamennyi P pontbeli normálmetszet görbülete nemnegatív (ill. nempozitív) de van olyan metszet is, amelynél a görbület zérus, a P pont *parabolikus pont*.

14. Határozza meg az

$$\mathbf{r}=\operatorname{sh} u\mathbf{i}+\operatorname{ch} u \operatorname{sh} v\mathbf{j}+\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v\mathbf{k}, \qquad (u, v)\in R^2$$

felület $u_0=0$, $v_0=\operatorname{arsh} 1$ paraméterű pontbeli érintősíkjának egyenletét!

A felület a 2.2-ben tárgyalt kétköpenyű hiperboloid, ugyanis $\mathbf{r}$ koordinátáira teljesül a

$$z^2=x^2+y^2+1$$

egyenlőség.

Mivel

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} t)=t, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} t)=\sqrt{1+t^2},$$

így a $P_0(0;1;\sqrt{2})$ pontbeli érintősíkot keressük.

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u=\operatorname{ch} u\mathbf{i}+\operatorname{sh} u \operatorname{sh} v\mathbf{j}+\operatorname{sh} u \operatorname{ch} v\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v=\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v\mathbf{j}+\operatorname{ch} u \operatorname{sh} v\mathbf{k}.$$

A P_0 pontban:

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)=\mathbf{i},$$

$$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)=\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

A P_0 pontbeli felületi normális tehát:

$$\mathbf{n}=\mathbf{i}\times(\sqrt{2}\mathbf{j}+\mathbf{k})=(\sqrt{2}\mathbf{k}-\mathbf{j}).$$

Az érintősík egyenlete tehát:

$$-(y-1)+\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0,$$

azaz az érintősík párhuzamos az x tengellyel.

15. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r}=\cos 2u(1-v\sin u)\mathbf{i}+(\sin 2u+v\sin u\cos 2u)\mathbf{j}+ \\ +v\cos u\mathbf{k}, \qquad u\in[0;\pi]; \qquad v\in[0;1]$$

felület esetén a $P_0(1;0;0)$ pontban a felületi normális $v=0$, $u=0$ és $v=0$, $u=\pi$ esetén ellentétes értelmű, azaz a felület nem irányítható.

A $v=0$ paramétervonal pontjai az

$$\mathbf{r}(u, 0)=\cos 2u\mathbf{i}+\sin 2u\mathbf{j}, \qquad u\in[0;\pi]$$

görbén, egy xy síkbeli egységsugarú körön helyezkednek el. Ha e körön körbe mozgatjuk a felületi normálist, és a kezdő- és véghelyzet különböző, akkor a felület nem irányítható.

A paraméterek szerinti parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u=(-2\sin 2u-v\cos u\cos 2u+2v\sin 2u\sin u)\mathbf{i}+$$
$$+(2\cos 2u+v\cos u\cos 2u-2v\sin u\sin 2u)\mathbf{j}-v\sin u\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v=-\sin u\cos 2u\mathbf{i}+\sin u\cos 2u\mathbf{j}+\cos u\mathbf{k}.$$

A parciálisok értéke a P_0 pontban:

$$\mathbf{r}'_u(0;0)=\mathbf{r}'_u(\pi;0)=2\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}'_v(0;0)=-\mathbf{r}'_v(\pi;0)=\mathbf{k},$$

így az $\mathbf{n}=\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v$ felületi vektora:

$$\mathbf{n}(0;0)=-\mathbf{n}(\pi;0),$$

tehát $\mathbf{n}$ a kezdő-, ill. véghelyzetben ellentétes értelmű, azaz a felület nem irányítható.

3. Skalár-vektor függvények

Ha a háromdimenziós tér vektorainak egy D részhalmazát leképezzük a valós számok részhalmazára, akkor skalár-vektor függvényt értelmezünk:

$$u: D\to R, \qquad D\subset E^3.$$

u értelmezési tartománya tehát E^3 részhalmaza, értékkészletét a valós számok alkotják:

$$u: \mathbf{r}\mapsto u(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in D.$$

(Skalár-vektor függvény helyett szokásos a skalártér elnevezés is.)

Ha a térben rögzítjük az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektorokat, és ezzel együtt egy Descartes-féle koordináta-rendszert, akkor E^3 (a tér vektorai) és R^3 (a rendezett számhármasok halmaza) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozunk létre. (A továbbiakban nem teszünk különbséget E^3 és R^3 között.) Ekkor, mivel:

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$

a skalár-vektor függvény egy háromváltozós függvénnyel írható le:

$$\mathbf{r}\mapsto u(\mathbf{r})=f(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in D_f\subset R^3.$$

(Természetesen egy skalár-vektor függvényt reprezentáló háromváltozós függvény függ a koordináta-rendszer megválasztásától, azaz más-más koordináta-rendszerben különböző függvénnyel adható meg.)

A skalár-vektor függvény adott pontbeli határértéke, folytonossága a többváltozós függvényekhez hasonlóan definiálható, így azzal itt nem foglalkozunk, csak a differenciálhatóságot vizsgáljuk részletesebben.

Az

$$u: \mathbf{r}\mapsto u(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in D$$

függvényt a D tartomány $\mathbf{r}_0\in D$ torlódási pontjában *differenciálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan $\mathbf{d}$ vektor, amelyre:

$$\lim_{\Delta\mathbf{r}\to 0}\frac{|u(\mathbf{r}_0+\Delta\mathbf{r})-u(\mathbf{r}_0)-\mathbf{d}\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=\lim_{\Delta\mathbf{r}\to 0}\frac{|\Delta u-\mathbf{d}\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=0.$$

A $\mathbf{d}$ vektort a skalártér $\mathbf{r}_0$ helyen vett *derivált-* vagy *gradiensvektorának* nevezzük.

Jelölése:

$$\mathbf{d}=\left.\frac{du}{d\mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}_0}=\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0).$$

(A definíció a kétváltozós függvények differenciálhatóságának megfelelője.)

Ha a skalár-vektor függvény a $T\subset D$ tartomány minden pontjában differenciálható, akkor T-n differenciálhatónak nevezzük, és deriváltja az

$$\mathbf{r}\mapsto\frac{du}{d\mathbf{r}}=\operatorname{grad} u(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in T$$

(vektor-vektor) függvény.

Igazolható, hogy rögzített koordináta-rendszer esetén az

$$u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}) = u(x, y, z) \qquad \mathbf{r} \in D$$

függvény deriváltja:

$$\mathbf{r} \mapsto \operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r} \in T.$$

Tehát a gradiensvektor koordinátáit a megfelelő koordináták szerinti parciális deriváltak adják.

A kétváltozós függvények differenciálhatóságához hasonlóan grad $u(\mathbf{r}_0)$ létezésének szükséges feltétele u parciálisainak létezése az $\mathbf{r}_0$ helyen, elégséges feltétele a parciálisok folytonossága $\mathbf{r}_0$-ban.

III.3-hoz hasonlóan a skalár-vektor függvények esetében is értelmezhető az iránymenti derivált fogalma.

Legyen

$$u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in D$$

és

$$\mathbf{r} : t \mapsto \mathbf{r}_0 + \mathbf{e}t, \qquad t \in R \ (|\mathbf{e}| = 1),$$

ha létezik az

$$f = u \circ \mathbf{r} \qquad t \in R$$

egyváltozós függvény deriváltja a $t_0 = 0$ helyen, akkor ezt az u-nak az $\mathbf{r}_0$ helyhez tartozó $\mathbf{e}$ irányban vett *iránymenti deriváltjának* nevezzük; jelölése:

$$\left.\frac{du}{d\mathbf{e}}\right|_{\mathbf{r}_0}.$$

Ha grad $u(\mathbf{r}_0)$ létezik, akkor:

$$\left.\frac{du}{d\mathbf{e}}\right|_{\mathbf{r}_0} = \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0).$$

(Az iránymenti derivált létezésének nem szükséges feltétele az adott pontbeli differenciálhatóság.)

Mivel

$$\mathbf{e} \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) = |\mathbf{e}| \cdot |\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)| \cdot \cos\alpha,$$

ahol α az $\mathbf{e}$ és a grad $u(\mathbf{r}_0)$ vektorok szöge, így az iránymenti derivált grad $u(\mathbf{r}_0)$ irányában maximális.

A skalár-vektor függvények szemléltetése a háromváltozós függvények II.2-ben megismert szemléltetési módjával azonos.

Az

$$F = \{\mathbf{r} \mid u(\mathbf{r}) = c, \quad \mathbf{r} \in D\}$$

halmaz pontjai általában felületet alkotnak. E felületekkel, a skalár-vektor függvény $c \in R$ értékhez tartozó szintfelületeivel, szemléltethető a függvény.

Ha grad $u(\mathbf{r}_0)$ létezik és zérustól különböző, akkor az $\mathbf{r}_0$ ponton áthaladó szintfelületnek az $\mathbf{r}_0$ pontban van érintősíkja, és ennek normálvektora:

$$\mathbf{n} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0).$$

Megjegyzés: Mivel a gradiens a skalár-vektor függvény deriváltja, így a grad operátort a differenciálási szabályoknak megfelelően kell alkalmazni.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$u : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}^2, \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

függvény szintfelületeit és a gradiensfüggvényt!

A $c \in R^+$-hoz tartozó szintfelület egyenlete:

$$\mathbf{r}^2 = |\mathbf{r}|^2 = c,$$

amelynek megoldásai egy origó középpontú c sugarú gömb pontjai. A szintfelületek tehát origó középpontú koncentrikus gömbök.

Határozzuk meg a gradiensfüggvényt!

Mivel

$$\Delta u = (\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})^2 - \mathbf{r}^2 = 2\mathbf{r}(\Delta\mathbf{r}) + (\Delta\mathbf{r})^2,$$

tehát

$$\operatorname{grad} u = 2\mathbf{r},$$

hiszen ekkor

$$\lim_{\Delta\mathbf{r} \to \mathbf{0}} \frac{|\Delta u - \operatorname{grad} u \Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|} = \lim_{\Delta\mathbf{r} \to \mathbf{0}} \frac{(\Delta\mathbf{r})^2}{|\Delta\mathbf{r}|} = 0.$$

Rögzített koordináta-rendszer esetén

$$\mathbf{r}^2=x^2+y^2+z^2,$$

ebből számolva a gradiensfüggvényt:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}=2\mathbf{r},$$

ami természetesen az előzővel megegyező.

Megjegyzés:

a) Minden $\mathbf{r}_0$ pontban $\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)$ párhuzamos az $\mathbf{r}_0$ vektorral, így $\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)$ merőleges a szintfelületre, hiszen a gömb sugara a gömbfelületet merőlegesen metszi.

b) Könnyen látható, hogy az

$$u:\mathbf{r}\mapsto|\mathbf{r}|^n,\qquad \mathbf{r}\in R^3,\qquad n\in N\setminus\{0\}$$

függvény esetén is az előzőhöz hasonló gömbök a szintfelületek.

A feladat eredményét és az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva határozzuk meg e függvények deriváltját:

$n=1$ esetén

$$\operatorname{grad}|\mathbf{r}|=\operatorname{grad}\sqrt{|\mathbf{r}|^2}=\frac{1}{2\sqrt{|\mathbf{r}|^2}}2\mathbf{r},$$

azaz

$$\operatorname{grad}|\mathbf{r}|=\mathbf{e}_r,\qquad \mathbf{r}\in R^3\mid\mathbf{r}\neq\mathbf{0},$$

ennek felhasználásával:

$$\operatorname{grad}|\mathbf{r}|^n=n|\mathbf{r}|^{n-1}\cdot\operatorname{grad}|\mathbf{r}|=n|\mathbf{r}|^{n-1}\cdot\mathbf{e}_r.$$

2. Határozza meg az

$$u:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{n}\mathbf{r},\qquad \mathbf{r}\in R^3$$

($\mathbf{n}$ állandó vektor) függvény szintfelületeit, és a gradiensfüggvényt!

Mivel tetszőleges $c\in R$ esetén van olyan $\mathbf{r}_0$ vektor, amelyre

$$c=\mathbf{n}\mathbf{r}_0,$$

így a szintfelületek egyenlete:

$$\mathbf{n}\mathbf{r}=c=\mathbf{n}\mathbf{r}_0,$$

azaz

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0,$$

tehát a szintfelületek az $\mathbf{n}$ vektorra merőleges síkok.

Határozzuk meg a gradiensfüggvényt! Mivel

$$\Delta u=\mathbf{n}(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-\mathbf{n}\mathbf{r}=\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{r},$$

így:

$$\operatorname{grad} u=\mathbf{n},$$

azaz a szintfelületekre merőleges vektor.

Természetesen rögzített koordináta-rendszer esetén ugyanez az eredmény adódik.

3. Határozza meg az

$$u:\mathbf{r}\mapsto|\mathbf{i}\times\mathbf{r}|,\qquad \mathbf{r}\in R^3$$

függvény szintfelületeit, és e függvény gradiensét!

Mivel

$$|\mathbf{i}\times\mathbf{r}|=|\mathbf{i}|\cdot|\mathbf{r}|\sin(\mathbf{i},\mathbf{r})\sphericalangle=|\mathbf{r}|\cdot\sin(\mathbf{i},\mathbf{r})\sphericalangle,$$

amely érték az $\mathbf{r}$ vektor $\mathbf{i}$-re merőleges vetületének hossza, így minden $c\in R^+$ esetén a szintfelület egy olyan c sugarú hengerfelület, amelynek tengelye az x tengely, hiszen e felület minden pontja c távolságra van az x tengelytől.

A gradiens meghatározásához szükségünk van u koordinátás alakjára:

$$\mathbf{i}\times(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=y\mathbf{k}-z\mathbf{j},$$

tehát

$$u:\mathbf{r}\mapsto\sqrt{y^2+z^2},$$

ebből:

$$\operatorname{grad} u=\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}(y\mathbf{j}+z\mathbf{k}).$$

grad u tehát az x tengely pontjai kivételével minden pontban létezik, és iránya merőleges az x tengelyre, hiszen

$$\mathbf{i} \cdot \operatorname{grad} u = 0.$$

4. Határozza meg az

$$u : (x, y, z) \mapsto x^2y^4z^3 + 3x^2y, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

függvény $u=4$ szintfelületének

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

pontbeli érintősíkját!

A szintfelület normálvektora:

$$\mathbf{n} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0),$$

ha

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) \neq 0.$$

Mivel

$$\operatorname{grad} u = (2xy^4z^3 + 6xy)\mathbf{i} + (4x^2y^3z^3 + 3x^2)\mathbf{j} + 3x^2y^4z^2\mathbf{k},$$

így

$$\mathbf{n} = 8\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

azaz a sík egyenlete:

$$8(x-1) + 7(y-1) + 3(z-1) = 0.$$

5. Mely pontokban lesz az

$$u : (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 5z^2, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

függvény $u=10$-hez tartozó szintfelületének érintősíkja párhuzamos a

$$40x + 10y + 50z = 21$$

síkkal?

Adjon meg egy olyan pontot a szintfelületen, amelyben az érintősík merőleges az adott síkra!

A szintfelület a

$$4x^2 + y^2 + 5z^2 = 10$$

egyenletű ellipszoid.

Az adott sík akkor párhuzamos az érintősíkkal, ha normálvektora párhuzamos a grad $u(\mathbf{r}_0)$ vektorral. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\lambda \neq 0$ szám, amelyre:

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) = \lambda\mathbf{n}.$$

Mivel

$$\operatorname{grad} u = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 10z\mathbf{k},$$

így az előzőek szerint a

$$8x_0 = 40\lambda,$$
$$2y_0 = 10\lambda,$$
$$10z_0 = 50\lambda$$

egyenletrendszernek kell teljesülnie.

A fenti egyenlőségekből

$$x_0 = 5\lambda, \qquad y_0 = 5\lambda, \qquad z_0 = 5\lambda.$$

Ezt a szintfelület egyenletébe helyettesítve:

$$4(5\lambda)^2 + (5\lambda)^2 + 5(5\lambda)^2 = 10,$$

ahonnan $\lambda_1 = \frac{1}{5}$ és $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$ adódik.

Tehát két olyan pont van a szintfelületen, amelyekben az érintősík az adott síkkal párhuzamos. Ezek:

$$P_1(1; 1; 1) \qquad \text{és} \qquad P_2(-1; -1; -1).$$

Hasonlóan kereshetünk a szintfelületen olyan pontot, amelyhez tartozó érintősík az adott síkra merőleges. Ez abban a pontban teljesül, amelyben grad $u(\mathbf{r}_0)$ merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra, azaz

$$\mathbf{n} \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) = 0,$$

tehát:

$$40 \cdot 8x_0 + 10 \cdot 2y_0 + 50 \cdot 10z_0 = 0.$$

Mivel

$$u(\mathbf{r}_0)=10,$$

így a

$$4x_0^2+y_0^2+5z_0^2=10$$

egyenlőség is teljesül. Ezen egyenletrendszer egy megoldását megkaphatjuk a $z_0=0$ választással. (Ekkor az xy síkban keressük a pontot.) $z=0$ választás esetén az egyenletrendszer egy megoldása:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{26}};\ -\frac{16}{\sqrt{26}};\ 0\right).$$

Megjegyzés: Végtelen sok olyan pont van, amelyben ez utóbbi feltétel teljesül. Ezen pontok az ellipszoid és a

$$16x+y+25z=0$$

sík metszésvonalának, egy ellipszisnek a pontjai. (A metszésvonal előállítása történhet például az $y=t$ paraméterválasztással.)

6. Igazolja, hogy az

$$u:(x,y,z)\mapsto\frac{z^2}{xy},\qquad (x,y,z)\in R^{+3}$$

függvény $u=1$ szintfelületének érintősíkjai illeszkednek az origóra!

Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont rajta van az $u=1$ szintfelületen, akkor

$$\frac{z_0^2}{x_0y_0}=1.$$

Az érintősík normálisát grad $u(\mathbf{r}_0)$ adja:

$$\operatorname{grad} u(r_0)=-\frac{z_0^2}{x_0^2y_0}\mathbf{i}-\frac{z_0^2}{x_0y_0^2}\mathbf{j}+\frac{2z_0}{x_0y_0}\mathbf{k},$$

így az érintősík egyenlete:

$$-\frac{z_0^2}{x_0^2y_0}(x-x_0)-\frac{z_0^2}{x_0y_0^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{x_0y_0}(z-z_0)=0.$$

Rendezve:

$$-\frac{z_0^2}{x_0^2y_0}x-\frac{z_0^2}{x_0y_0^2}y+\frac{2z_0}{x_0y_0}z=0,$$

azaz a sík valóban áthalad az origón.

Megjegyzés: A megoldásból látszik, hogy nemcsak az $u=1$ szintfelület érintősíkjai, hanem bármely szintfelület érintősíkjai az origón áthaladó síkok. A szintfelületek kúpfelületek, amelyek csúcsa az origó.

Ugyanis (l. a II.2. nyeregfelülete!), ha bevezetjük az

$$u=(x+y)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

és

$$v=(x-y)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

új változókat, amely mint láttuk a z tengely körüli forgatással egyenértékű transzformáció, akkor:

$$z^2=xy=2(u^2-v^2)$$

adódik, amely valóban egy kúpfelület egyenlete.

7. Határozza meg az

$$u:(x,y,z)\mapsto x^3y+y^2z,\qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvény iránymenti deriváltját az

$$\mathbf{r}_0(2;1;3)$$

pontban, az

$$\mathbf{a}(1;2;-2)$$

vektor irányában!

E szakasz bevezetőjében láttuk, hogy

$$\left.\frac{du}{d\mathbf{e}_a}\right|_{\mathbf{r}_0}=\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{e}_a.$$

Az a irányú egységvektor:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Mivel

$$\operatorname{grad} u = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + 2yz)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k},$$

így az $\mathbf{r}_0$ helyen:

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) = 12\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Tehát az a irányban vett iránymenti derivált:

$$\left.\frac{du}{d\mathbf{e}_a}\right|_{\mathbf{r}_0} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e}_a = \frac{38}{3}.$$

8. Határozza meg az

$$u : (x, y, z) \mapsto x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

függvény iránymenti deriváltjának maximumát az $\mathbf{r}_0(1; 4; 3)$ pontban, és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!

Láttuk, hogy

$$\left.\frac{du}{d\mathbf{e}}\right|_{\mathbf{r}_0} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e},$$

ahonnan a skalárszorzat definíciója alapján:

$$\left.\frac{du}{d\mathbf{e}}\right|_{\mathbf{r}_0} = |\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos\alpha,$$

ahol α jelöli a grad $u(\mathbf{r}_0)$ és e vektorok szögét. Mivel

$$|\mathbf{e}| = 1$$

és

$$|\cos\alpha| \leq 1,$$

így

$$\left|\left.\frac{du}{d\mathbf{e}}\right|_{\mathbf{r}_0}\right| \leq |\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)|.$$

Tehát az iránymenti derivált maximuma az $\mathbf{r}_0$ pontban:

$$|\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)| = \sqrt{(2x_0)^2 + y_0^2 + (2z_0)^2} = \sqrt{56}.$$

Ez a maximális érték akkor adódik, ha $\alpha = 0$, azaz az e vektor párhuzamos az

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) \text{ vektorral.}$$

Az a vektor:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$$

így az iránymenti derivált az

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{\sqrt{56}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{56}}\mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{56}}\mathbf{k}$$

egységvektor irányában maximális.

9. Határozza meg, mely irányban maximális az

$$u : (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény iránymenti deriváltja az

$$\mathbf{r}_0(1; 3)$$

pontban!

Adjon meg egy olyan irányt, amelyre az $\mathbf{r}_0$ ponthoz tartozó iránymenti derivált zérus!

Láttuk, hogy az iránymenti derivált a grad $u(\mathbf{r}_0)$ vektor irányában maximális; a maximum iránya tehát:

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) = 2x_0\mathbf{i} + 2y_0\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

Ez a maximális érték:

$$|\operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0)| = \sqrt{40}.$$

Az iránymenti derivált bármely grad $u(\mathbf{r}_0)$-ra merőleges vektor irányában zérus. Ilyen vektor például a $\mathbf{b}(-6; 2)$ vektor. Ekkor ugyanis:

$$\left.\frac{du}{d\mathbf{e}_b}\right|_{\mathbf{r}_0} = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{e}_b = 0.$$

10. Határozza meg az

$$u:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2+z^2, \qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvény $\mathbf{r}_0(1;1;\sqrt{2})$ pontbeli iránymenti deriváltját az

$$\mathbf{r}: t\mapsto 2\cos^2 t\mathbf{i}+2\cos t\sin t\mathbf{j}+2\sin t\mathbf{k}, \qquad t\in R$$

térgörbe $t_0=\frac{\pi}{4}$ helyhez tartozó érintővektora irányában!

Az

$$\mathbf{r}: t\mapsto \mathbf{r}(t), \qquad t\in R$$

függvénnyel adott térgörbe rajta van az

$$u=u(\mathbf{r}_0)$$

szintfelületen. Ugyanis:

$$x^2+y^2+z^2=4\cos^4 t+4\cos^2 t\sin^2 t+4\sin^2 t=$$
$$=4\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)+4\sin^2 t=4=u(\mathbf{r}_0).$$

Mivel a görbe illeszkedik a szintfelületre, így ennek érintővektorára a grad $u(\mathbf{r}_0)$ vektor merőleges, tehát a keresett iránymenti derivált zérus. (Könnyen látható, hogy $\dot{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ és grad $u(\mathbf{r}_0)$ létezik.)

Megjegyzés: Az $u=4$ szintfelület egy két egység sugarú origó középpontú gömbfelület. A térgörbe e felület és az

$$x^2+y^2-2z=0$$

egyenletű hengerfelület metszésvonala. (Ún. Viviani-görbe, l. 65. ábra.)

11. Igazolja, hogy az

$$\mathbf{r}\mapsto u(\mathbf{r})=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & \text{ha } \mathbf{r}\neq 0\\ 0, & \text{ha } \mathbf{r}=0\end{cases} \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

függvény nem differenciálható az origóban!

Határozza meg, mely irányokban létezik e függvény origóbeli iránymenti deriváltja!

Az origóbeli parciális deriváltak:

$$u'_x(\mathbf{0})=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x;0;0)-u(\mathbf{0})}{\Delta x}=0,$$

mivel a számláló azonosan zérus.

Hasonlóan látható be, hogy

$$u'_y(\mathbf{0})=u'_z(\mathbf{0})=0.$$

Így, ha u az origóban deriválható, origóbeli deriváltvektora csak a nullvektor lehet, azaz a deriválhatósághoz a

$$\lim_{\Delta\mathbf{r}\to\mathbf{0}}\frac{|u(\Delta\mathbf{r})-u(\mathbf{0})-\mathbf{d}\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=\lim_{\Delta\mathbf{r}\to\mathbf{0}}\frac{u(\Delta\mathbf{r})}{|\Delta\mathbf{r}|}=0$$

egyenlőségnek kellene teljesülnie.

Gömbi koordinátákra áttérve:

$$u(\Delta\mathbf{r})=|\Delta\mathbf{r}|\cdot\cos\vartheta\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi,$$

tehát

$$\lim_{\Delta\mathbf{r}\to\mathbf{0}}\frac{u(\Delta\mathbf{r})}{|\Delta\mathbf{r}|}=\lim_{\Delta\mathbf{r}\to\mathbf{0}}\cos\vartheta\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi,$$

amely határérték nem létezik, így u valóban nem deriválható az origóban.

Vizsgáljuk meg, mely irányokra létezik az origóbeli iránymenti derivált!

Láttuk, hogy ennek létezése

$$t\mapsto u(\mathbf{0}+\mathbf{e}t), \qquad t\in R$$

függvény $t=0$ helyen való differenciálhatóságát jelenti.

Legyen az $\mathbf{e}$ egységvektor:

$$\mathbf{e}=\cos\varphi\sin\vartheta\mathbf{i}+\sin\varphi\sin\vartheta\mathbf{j}+\cos\vartheta\mathbf{k}.$$

Ekkor:

$$u(\mathbf{e}t)=t\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\vartheta\cos\vartheta,$$

azaz a

$$\lim_{t\to 0}\frac{u(\mathbf{e}t)}{t}$$

határérték bármely rögzített φ, ϑ pár esetén, azaz bármely irány mentén létezik, noha u nem differenciálható.

4. Vektor-vektor függvények

Ha a háromdimenziós tér vektorainak egy D részhalmazát leképezzük e tér D-től nem feltétlenül különböző részhalmazára, akkor *vektor-vektor függvényt* (azaz *vektorteret*) értelmezünk.

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{v}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D$$

Ilyen függvény például a IV.3-ban szereplő skalártér deriváltja az

$$\mathbf{r}\mapsto\operatorname{grad}u(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in T$$

függvény.

Ha térben rögzítjük az **i**, **j**, **k** egységvektorokat, és ezzel együtt egy Descartes-féle koordináta-rendszert, akkor e koordináta-rendszerben $\mathbf{v}$ mindhárom koordinátája egy-egy háromváltozós függvénnyel jellemezhető:

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto v_1(x,y,z)\mathbf{i}+v_2(x,y,z)\mathbf{j}+v_3(x,y,z)\mathbf{k},\qquad \mathbf{r}\in D.$$

E függvény határértéke, folytonossága az előzőekhez hasonlóan értelmezhető, így azzal nem foglalkozunk.

A

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{v}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D$$

függvényt a D tartomány $\mathbf{r}_0\in D$ torlódási pontjában differenciálhatónak nevezzük, ha van olyan $\boldsymbol{A}$ tenzor, amelyre:

$$\lim_{\Delta\mathbf{r}\to 0}\frac{|\mathbf{v}(\mathbf{r}_0+\Delta\mathbf{r})-\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)-\boldsymbol{A}\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=\lim_{\Delta\mathbf{r}\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{v}-\boldsymbol{A}\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=0.$$

Az $\boldsymbol{A}$ tenzort a vektortér $\mathbf{r}_0$ pontbeli deriválttenzorának nevezzük:

$$\boldsymbol{A}=\left.\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right|_{\mathbf{r}_0}.$$

A tenzor lineáris vektor-vektor függvény, azaz bármely **a**, **b** vektor és $\lambda,\mu\in R$ esetén

$$\boldsymbol{A}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda(\boldsymbol{A}\mathbf{a})+\mu(\boldsymbol{A}\mathbf{b}).$$

Speciálisan, ha minden vektor képe önmaga, *egységtenzorról* beszélünk:

$$\boldsymbol{E}\mathbf{r}=\mathbf{r},\qquad \mathbf{r}\in R^3.$$

Rögzített koordináta-rendszer esetén a deriválttenzor létezésének szükséges és elégséges feltétele $\mathbf{v}$ koordinátáinak differenciálhatósága. Ekkor a deriválttenzor mátrixa:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z}\\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z}\\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

A vektorteret olyan görbék segítségével szemléltetjük, amelyeknek érintője minden $\mathbf{r}_0$ pontban $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$-lal párhuzamos, sűrűségük a vektortér nagyságával arányos. (E vonalakat az Olvasó fizikai tanulmányaiból áramvonal, erővonal néven ismeri.)

Lényeges fizikai tartalma van a deriválttenzor bizonyos invariánsainak.

Legyen a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{v}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D$$

függvény differenciálható az $\mathbf{r}_0\in D$ helyen. Az $\mathbf{r}_0$ pontbeli deriválttenzor sajátértékeinek összegét (mely érték a koordináta-rendszer megválasztásától független) a vektortér $\mathbf{r}_0$ pontbeli *divergenciájának,* a deriválttenzor vektorinvariánsát a vektortér $\mathbf{r}_0$ pontbeli rotációjának nevezzük (l. a 2. és 3. feladatot!).

Rögzített koordináta-rendszer esetén a divergencia:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

A definícióból következően a divergencia *skalár* mennyiség. (div $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ a vektortér $\mathbf{r}_0$ pontbeli forrássűrűségére jellemző. Ha div $\mathbf{v}=0$ a korlátos zárt $T\subset D$ tartomány minden pontjában, akkor a vektorteret e tartományon *forrásmentesnek* nevezzük. E fogalmak fizikai tartalmát a felületi integrál, ill. Gauss-tétel tárgyalása során világítjuk meg bővebben.)

Rögzített koordináta-rendszer esetén a rotáció:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}=\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial v_3}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\mathbf{k}.$$

A rotáció *vektormennyiség;* rot $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ a vektortér $\mathbf{r}_0$ pontbeli örvénysűrűségére jellemző. Ha a T tartomány pontjaiban rot $\mathbf{v}=0$, akkor a vektorteret T-ben *örvénymentesnek* nevezzük. (L. Stokes-tétel.)

Ha bevezetjük a nabla-operátort:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

akkor ennek felhasználásával:

grad $u=\nabla\cdot u$ (skalárral való szorzás),
div $\mathbf{v}=\nabla\cdot\mathbf{v}$ (skalárszorzat),

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}=\nabla\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Megjegyzés: Úgy kezelhető a nabla-operátor, mint differenciáloperátor, így például:

$$\nabla(u\cdot\mathbf{v})=(\nabla u)\mathbf{v}+u(\nabla\mathbf{v}),$$

a szorzat deriválási szabályához hasonlóan.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r}\mapsto\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

függvény deriválttenzorát! Írja fel e tenzor mátrixát!

A függvény deriválttenzora az egységtenzor, ugyanis:

$$E\Delta\mathbf{r}=\Delta\mathbf{r},$$

és

$$\Delta\mathbf{v}=\Delta\mathbf{r}$$

miatt

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}-A\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta\mathbf{r}|}=0,$$

hiszen a számláló azonosan zérus.

Az egységtenzor mátrixa az egységmátrix, azaz:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés: E vektortér divergenciája állandó

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=3,$$

rotációja a tér minden pontjában zérus.

2. Írja fel annak a T tenzornak a mátrixát, amely minden $\mathbf{r}$ vektorhoz $\mathbf{a}\times\mathbf{r}$-et rendeli, ahol a rögzített vektor:

$$T\mathbf{r}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}\in R^3.$$

Legyenek az a vektor koordinátái a_1, a_2, a_3. Határozzuk meg az egységvektorok képét!

$$T\mathbf{i}=\mathbf{a}\times\mathbf{i}=a_3\mathbf{j}-a_2\mathbf{k},$$
$$T\mathbf{j}=\mathbf{a}\times\mathbf{j}=a_1\mathbf{k}-a_3\mathbf{i},$$
$$T\mathbf{k}=\mathbf{a}\times\mathbf{k}=a_2\mathbf{i}-a_1\mathbf{j}.$$

Egy tetszőleges

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

vektor képe:

$$T\mathbf{r}=x(T\mathbf{i})+y(T\mathbf{j})+z(T\mathbf{k}),$$

azaz a T tenzor mátrixának oszlopvektorait az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorok képe adja. T tehát az alábbi mátrixszal adható meg:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor ugyanis

$$\boldsymbol{T}\mathbf{r}=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=$$
$$=(-a_3y+a_2z)\mathbf{i}+(a_3x-a_1z)\mathbf{j}+(-a_2x+a_1y)\mathbf{k}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}.$$

($\boldsymbol{T}$ mátrixának és az $\mathbf{r}$ vektornak szorzásakor a sor-oszlop szorzást alkalmaztuk.)

Megjegyzés: E tenzor a teret az $\mathbf{a}$ vektorra merőleges síkra képezi le. Szokásos a $\boldsymbol{T}=\mathbf{a}\times$ (a kereszt) elnevezés.

3. Határozza meg a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{a}\times\mathbf{r},\qquad \mathbf{r}\in R^3,$$

($\mathbf{a}$ állandó) vektor-vektor függvény deriválttenzorát!

Mivel

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r}=(a_2z-a_3y)\mathbf{i}-(a_1z-a_3x)\mathbf{j}+(a_1y-a_2x)\mathbf{k},$$

így a deriválttenzor mátrixa:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A deriválttenzor tehát az előző feladatban szereplő $\mathbf{a}\times$ tenzor.

E vektortér rotációja:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2z-a_3y & a_3x-a_1z & a_1y-a_2x \end{vmatrix}=2\mathbf{a},$$

divergenciája pedig azonosan zérus.

Megjegyzés:

a) Minden mátrix (tehát minden tenzor is) egyértelműen felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus részre. Minden antiszimmetrikus mátrix $\mathbf{a}\times$ alakú, azaz egyértelműen meghatároz egy $\mathbf{a}$ vektort. (Az egész teret $\mathbf{a}$-ra merőleges síkra képezi le.) Igazolható, hogy e vektor független a koordináta-rendszer választásától. E vektor a tenzor vektorvariánsa.

b) A $\mathbf{v}$ vektorteret az $\mathbf{a}$ tengely körül $|\mathbf{a}|$ nagyságú szögsebességgel forgó merev test sebességvektorának tekinthetjük.

Látjuk, hogy ez esetben a vektortér rotációja a szögsebesség irányát adja meg. Azaz a rotáció iránya a forgástengely irányába mutat, nagysága a szögsebesség nagyságával megegyező.

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{a}(\mathbf{br}),\qquad \mathbf{r}\in R^3$$

($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ állandó vektorok) deriválttenzorát!

Legyen a választott koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}!$$

Ekkor:

$$\mathbf{a}(\mathbf{br})=(b_1x+b_2y+b_3z)(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}).$$

Tehát a deriválttenzor mátrixa:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

E vektortér divergenciája — a mátrix főátlóbeli elemeinek összege —:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\mathbf{ab}.$$

A vektortér rotációja (l. a 3. feladat megjegyzését!):

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=(a_3b_2-a_2b_3)\mathbf{i}+(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_2b_1-a_1b_2)\mathbf{k},$$

azaz

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathbf{b}\times\mathbf{a},$$

tehát div $\mathbf{v}$ és rot $\mathbf{v}$ is csak az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektoroktól függ.

Megjegyzés: A deriváltmátrix az **a** és **b** vektorok *diadikus* (tenzoriális) *szorzata:* $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$.
(Az **a** oszlopvektort szorozzuk a **b** sorvektorral, sor-oszlop szorzással!)

Könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in R^3,$$

azaz

$$\frac{d}{d\mathbf{r}} (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{r} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b}.$$

5. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : (x, y, z) \mapsto x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2x\mathbf{k}, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

vektortér divergenciáját és rotációját!

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 2xy + 2yz + 2xz,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix} = -y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}.$$

6. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : (x, y, z) \mapsto y\mathbf{i} - x\mathbf{j}, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

vektortér rotációját! Értelmezze az eredményt!

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k}.$$

A vektortér z-től független, hengerszimmetrikus tér. A z tengelyű, R sugarú hengerfelület minden pontjában:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

Könnyen látható az is, hogy a hengerfelületre merőleges $\mathbf{a}(x_0; y_0; 0)$ vektor $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$-ra is merőleges, hiszen skalárszorzatuk zérus. Tehát e vektortér trajektóriái, erővonalai a hengerfelület palástjára illeszkedő körök. Így rot **v** iránya a henger tengelyével megegyező, azaz az erővonalak csavarodási tengelyének irányába mutat.

7. Legyen

$$u : \mathbf{r} \mapsto \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad D_u = \{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

és

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u.$$

Igazolja, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Mivel

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

azt kell igazolnunk, hogy

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Azt, hogy a fenti u függvény eleget tesz e differenciálegyenletnek a kétváltozós függvények tárgyalása során már igazoltuk.

Megjegyzés: Szokásos a

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

operátor (Laplace-féle Δ) bevezetése is. Ennek felhasználásával:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u.$$

8. Igazolja, hogy ha a

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u, \qquad \mathbf{r} \in D$$

vektortér folytonosan differenciálható egy korlátos zárt T tartományban, akkor itt **v** örvénymentes, azaz

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{r} \in T.$$

Láttuk, hogy

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

tehát

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)-\mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right).$$

Mivel $\mathbf{v}$ folytonosan differenciálható, így a szereplő másodrendű parciálisok egyenlők, azaz $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ mindhárom koordinátája zérus, amivel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés: A ∇ operátor segítségével formálisan könnyen belátható a feladat állítása:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=\nabla\times(\nabla u)=(\nabla\times\nabla)u=0,$$

hiszen két azonos vektor vektoriális szorzata zérus.

9. Igazolja, hogy a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}=\mathbf{e}_r \qquad D_v=\{\mathbf{r}\in R^3 \mid \mathbf{r}\neq\mathbf{0}\}$$

vektortér rotációja zérus!

A 3. szakasz 1. feladatában láttuk, hogy

$$\operatorname{grad}|\mathbf{r}|=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \qquad D=\{\mathbf{r}\in R^3 \mid \mathbf{r}\neq\mathbf{0}\},$$

tehát a vektortér egy skalár-vektor függvény gradienseként írható fel.

Mivel e vektortér az értelmezési tartománya minden pontjában folytonosan differenciálható, így az előző feladat szerint rotációja zérus.

10. Igazolja, hogy ha a

$$\mathbf{w}=\operatorname{rot}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{r}\in D$$

vektortér folytonosan differenciálható valamely T tartományban, akkor e tartomány minden pontjában

$$\operatorname{div}\mathbf{w}=0.$$

Mivel

$$\mathbf{w}=\operatorname{rot}\mathbf{v}=\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{\partial v_3}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

így e vektortér divergenciája:

$$\operatorname{div}\mathbf{w}=\frac{\partial^2 v_3}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 v_3}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial z\,\partial y}.$$

A folytonos deriválhatóságból következően a másodrendű vegyes parciális deriváltak egyenlők, így

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v}=0, \qquad \mathbf{r}\in T,$$

azaz a $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ vektortér T-ben forrásmentes.

Megjegyzés: A ∇ operátor alkalmazásával most is könnyen igazolható az állítás:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})=0,$$

mivel a vegyesszorzat zérus, ha a vektorok egysíkúak.

11. Igazolja, hogy ha a $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ vektortér egy T tartományban folytonosan differenciálható, akkor

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v}, \qquad \mathbf{r}\in T,$$

ahol

$\Delta=\nabla^2$ a Laplace-féle operátor!

A folytonos differenciálhatóságból következően a bal és jobb oldalon álló függvények egyaránt léteznek T-ben, csak ezek egyenlőségét kell igazolnunk. Dolgozzunk a ∇ operátorral!

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v}).$$

Vektorok körében ismert az ún. kifejtési tétel, mely szerint:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{ab})\mathbf{c}.$$

Ezt alkalmazva:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})=\nabla(\nabla\mathbf{v})-(\nabla\nabla)\mathbf{v}=\nabla(\text{div }\mathbf{v})-\nabla^2\mathbf{v}=\text{grad div }\mathbf{v}-\Delta\mathbf{v},$$

amit igazolnunk kellett.

12. Legyenek az

$$u:\mathbf{r}\mapsto u(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D_1$$

és a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D_2$$

függvények differenciálhatók egy T tartományban!
Határozza meg a

$$\mathbf{w}:\mathbf{r}\mapsto u(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D_1\cap D_2$$

vektortér divergenciáját és rotációját!

Alkalmazzuk a ∇ operátort!
Tudjuk, hogy

$$\text{div }\mathbf{w}=\nabla\mathbf{w},$$

másrészt, mivel ∇ differenciáloperátor, így szorzatra alkalmazva:

$$\nabla(u\cdot\mathbf{v})=(\nabla u)\cdot\mathbf{v}+u(\nabla\mathbf{v}).$$

Tehát:

$$\text{div }\mathbf{w}=\nabla(u\cdot\mathbf{v})=\mathbf{v}(\nabla u)+u(\nabla\mathbf{v})=\mathbf{v}\text{ grad }u+u\text{ div }\mathbf{v},\qquad \mathbf{r}\in T.$$

u és $\mathbf{v}$ differenciálhatóságából következően grad u és div $\mathbf{v}$ létezik T-ben, így ugyanitt div $\mathbf{w}$ is létezik. Hasonlóképpen határozható meg $\mathbf{w}$ rotációja is:

$$\text{rot }\mathbf{w}=\nabla\times\mathbf{w}=\nabla\times(u\mathbf{v})=\nabla u\times\mathbf{v}+u(\nabla\times\mathbf{v})=$$
$$=(\text{grad }u)\times\mathbf{v}+u\text{ rot }\mathbf{v},\qquad \mathbf{r}\in T.$$

Mivel grad u és rot $\mathbf{v}$ létezik T-n, így rot $\mathbf{w}$ is létezik.

13. Legyen

$$u:\mathbf{r}\mapsto \mathbf{r}^2,\qquad \mathbf{r}\in R^3$$

és

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto \mathbf{r}^2\mathbf{r},\qquad \mathbf{r}\in R^3.$$

Határozza meg — amennyiben értelmezett —

grad div rot $\mathbf{v}$,
rot rot grad u,
div div grad u,
rot grad div $\mathbf{v}$

értékét az $\mathbf{r}_0(1;1;1)$ helyen!

a) Láttuk, hogy (l. a 10. feladatot)

$$\text{div rot }\mathbf{v}=0,\qquad \mathbf{r}\in R^3,$$

így e skalártér gradiense is zérus.

b) A 8. feladatban igazoltuk, hogy

$$\text{rot grad }u=\mathbf{0},\qquad \mathbf{r}\in R^3,$$

így ennek rotációja is zérus.

c) Láttuk, hogy (l. a 7. feladatot)

$$\text{div grad }u=\Delta u=\text{skalár},$$

skalárnak viszont nincs divergenciája, tehát a felírt kifejezés nem értelmezhető!

d) Mivel div $\mathbf{v}$ skalár, ennek van gradiense, és ez vektor, ennek viszont létezik a rotációja, így a felírt kifejezés értelmezhető.
Mivel tudjuk, hogy

$$\text{rot grad }u=0,$$

így

$$\text{rot grad div }\mathbf{v}=0,\qquad \mathbf{r}\in R^3.$$

14. Határozza meg a

$$\mathbf{w}:\mathbf{r}\mapsto \mathbf{r}^2\mathbf{r},\qquad \mathbf{r}\in R^3$$

függvény divergenciáját és rotációját!

Legyen

$$u:\mathbf{r}\mapsto \mathbf{r}^2,\qquad \mathbf{r}\in R^3,$$
$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto \mathbf{r},\qquad \mathbf{r}\in R^3.$$

Ekkor:

$$\mathbf{w}=u\cdot\mathbf{v}.$$

A 12. feladat eredményét alkalmazva:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \operatorname{div}(u\mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot 2\mathbf{r} + r^2 \cdot 3 = 5r^2.$$

(Láttuk ugyanis, hogy

$$\operatorname{grad} r^2 = 2\mathbf{r},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 3.)$$

Hasonlóan

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \operatorname{rot}(u\mathbf{v}) = (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{v} + u \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{r} \times \mathbf{r} + r^2\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Természetesen **w** koordinátás alakjából ugyanez az eredmény adódik.

15. Legyen

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in R^3$$
$$\mathbf{w} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

és

$$u = \mathbf{v}\mathbf{w}.$$

Határozza meg a skalártér gradiensét, feltéve, hogy **v** és **w** differenciálhatóak!

Látszólag könnyen célt érhetünk a nabla operátor alkalmazásával:

$$\nabla u = \nabla(\mathbf{v}\mathbf{w}) = (\nabla\mathbf{v})\mathbf{w} + \mathbf{v}(\nabla\mathbf{w}) = (\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{w} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w}.$$

Könnyen beláthatjuk azt, hogy nem a helyes eredményt kaptuk.

Legyen például

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r},$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{r},$$

ekkor

$$u : \mathbf{r} \mapsto r^2, \qquad \mathbf{r} \in R^3,$$

tehát

$$\operatorname{grad} u = 2\mathbf{r}.$$

A fenti összefüggés alkalmazásával azonban:

$$\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{r} = 6\mathbf{r},$$

hiszen

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 3 \qquad \text{(l. az 1. feladatot),}$$

a nabla operátor mechanikus alkalmazásával tehát nem érünk célt.

Induljunk el más úton!

v differenciálhatóságából következik, hogy

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \Delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{r}),$$

ahol

$$\lim_{\Delta\mathbf{r} \to 0} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{r})}{|\Delta\mathbf{r}|} = 0.$$

Ezt alkalmazva:

$$\Delta(\mathbf{v}\mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \cdot \mathbf{w}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})\mathbf{w}(\mathbf{r}) =$$
$$= \left[\mathbf{v}(\mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \Delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_1(\Delta\mathbf{r})\right]\left[\mathbf{w}(\mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}} \Delta\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_2(\Delta\mathbf{r})\right] - \mathbf{v}(\mathbf{r})\mathbf{w}(\mathbf{r}).$$

Rendezve kapjuk, hogy:

$$\Delta u = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}} \Delta\mathbf{r} + \mathbf{w} \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} \Delta\mathbf{r} + \varepsilon.$$

Tetszőleges A tenzorra és **a**, **b** vektorokra:

$$\mathbf{a}(A\mathbf{b}) = \mathbf{b}(A^*\mathbf{a}),$$

ahol A^* az A tenzor adjungáltja. (Az adjungált tenzor mátrixát az eredeti mátrix elemeinek a főátlóra való tükrözésével kapjuk, ez a mátrix transzponáltja.)

Ennek alkalmazásával:

$$\Delta u = \Delta\mathbf{r}\left(\left(\frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}}\right)^* \mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)^* \mathbf{w}\right),$$

azaz:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}}\right)^* \mathbf{v} + \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)^* \mathbf{w}.$$

A 4. feladat megjegyzésében szereplő diadikus szorzat alkalmazásával:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \mathbf{v} \circ \nabla.$$

(Ezt az állítást az Olvasó könnyen beláthatja, ha a 4. feladatban szereplő **a** és **b** vektorok helyébe a **v**, ill. ∇ vektor koordinátáit helyettesíti.)

Látható az is, hogy a két tényező cseréje éppen a mátrix transzponáltját szolgáltatja:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\right)^* = \nabla \circ \mathbf{v}.$$

Tehát végeredményben:

$$\operatorname{grad}(\mathbf{v}\mathbf{w}) = (\nabla \circ \mathbf{v})\mathbf{w} + (\nabla \circ \mathbf{w})\mathbf{v}.$$

E feladattal arra szeretnénk felhívni az Olvasó figyelmét, hogy a ∇-operátor mechanikus, gondolkodás nélküli alkalmazása néha tévútra vezethet.

Megjegyzés: Bizonyítás nélkül közlünk néhány fontosabb deriválási formulát. Legyenek az u skalár-vektor, **v**, **w** vektor-vektor függvények differenciálhatóak egy T tartományban.

Ekkor:

$$\frac{d}{d\mathbf{r}}(u\mathbf{v}) = u\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} + \mathbf{v} \circ \operatorname{grad} u,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = -\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{w} \operatorname{rot} \mathbf{v},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\mathbf{w} - \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}}\mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} - \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

16. Az előző feladat megjegyzései alkalmazásával határozza meg az

$$\mathbf{r} \mapsto (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér divergenciáját és rotációját! (**a** állandó vektor.)

Legyen

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \mathbf{a}\times\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} \in R^3,$$
$$\mathbf{w}: \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r},$$

ekkor

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r} = \mathbf{v}\times\mathbf{w}.$$

A 3. feladatban láttuk, hogy

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{a},$$

valamint az 1. feladat szerint:

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0,$$

így az előző feladat eredményeit alkalmazva:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = -\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{w} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{a}\mathbf{r}.$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\mathbf{w} - \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{r}}\mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} - \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Az előzőleg említett feladatok eredménye szerint:

$$\frac{d}{d\mathbf{r}}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \mathbf{a},$$

$$\frac{d}{d\mathbf{r}}\mathbf{r} = E.$$

Ezek alkalmazásával:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{a}\times\mathbf{w} - E\mathbf{v} + 3(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) - 0 = 3(\mathbf{a}\times\mathbf{r}).$$

Természetesen a koordinátás alak alkalmazásával ugyanez az eredmény adódik.

V. KETTŐS INTEGRÁL

1. Kettős integrál négyszögtartomány esetén

Legyen $T \subset R^2$ korlátos, összefüggő ponthalmaz. T-t *mérhetőnek* nevezzük, ha a T-t tartalmazó (T köré írt) sokszögek területének alsó határa megegyezik a T által tartalmazott (T-be írt) sokszögek területének felső határával. Ezt a közös határt *T területének (mértékének)* nevezzük, és $\mu(T)$-vel jelöljük.

A továbbiakban feltesszük, hogy T mérhető.

T felosztását adja az

$$A = \{T_i \subset T \mid \quad i = 1, \ldots, n\}$$

halmazrendszer, ha a T_i halmazok valamennyien mérhetőek, egyesítésük T-t adja, és a T_i, $T_j (i \neq j)$ halmazoknak nincs közös belső pontjuk.

Azt mondjuk, hogy a felosztás minden határon túl finomodik, ha a T_i halmazok mindegyikének átmérője zérushoz tart.

Legyen az $f: T \to R$ kétváltozós függvény korlátos az előző T tartományon, s jelölje $m_i (M_i)$ f értékeinek alsó (felső) határát a $T_i \subset T$ halmazon!

Az f függvényt a T tartományon *integrálhatónak* nevezzük, ha a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(T_i) \qquad \text{és a} \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(T_i)$$

összegek határértéke bármely minden határon túl finomodó felosztássorozat esetén létezik és egyenlő. E közös határértéket nevezzük f T-re vett *kettős integráljának*:

$$\int_T\!\!\int f = \int_T\!\!\int f(x, y)\, dx\, dy.$$

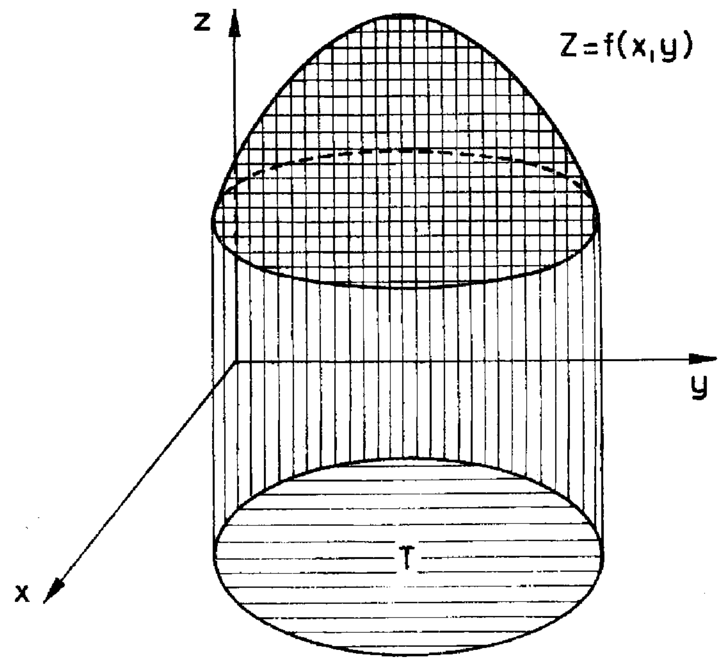
Ha f integrálható T-n, és

$$T = T_1 \cup T_2,$$

ahol T_1, T_2 mérhető tartományok, amelyeknek nincs közös belső pontjuk, akkor a definícióból következően:

$$\int_T\!\!\int f = \int_{T_1}\!\!\int f + \int_{T_2}\!\!\int f.$$

Ha f folytonos a mérhető területű, korlátos, zárt T tartományon, akkor $\int_T\!\!\int f$ biztosan létezik, f folytonossága azonban nem szükséges feltétele az integrálhatóságnak. Ha f integrálható T-n, és $f(x, y) \geq 0$ minden $(x; y) \in T$ pontban, akkor $\int_T\!\!\int f$ a T tartomány feletti $z = f(x, y)$ felülettel határolt hengerszerű térrész térfogatát adja (49. ábra).



49. ábra

E pontban csak négyszögtartományokra vizsgáljuk a kettős integrál kiszámítását.

Négyszögtartományról beszélünk, ha

$$T=\{(x, y) \mid a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d\}.$$

Ekkor, ha f integrálható T-n és létezik az

$$y\mapsto \int_a^b f(x, y)\, dx, \qquad y\in[c; d]$$

függvény, akkor

$$\iint_T f=\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy=\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx.$$

Négyszögtartomány esetén tehát az integrálás sorrendje felcserélhető.

Speciálisan, ha

$$f(x, y)=g(x)h(y) \qquad \text{minden} \qquad (x, y)\in T\text{-re},$$

akkor

$$\iint_T f=\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)\left(\int_a^d h(y)\, dy\right),$$

feltéve, hogy a jobb oldal két tényezője létezik.

Kettős integrál esetén is értelmezhető az *improprius integrál*. Ennek konvergenciája az egyváltozós függvények körében megismertekhez hasonlóan történik. E témával általánosan nem foglalkozunk, csak néhány gyakorló feladat megoldása során utalunk rá.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f: (x, y)\mapsto x^2+4y, \qquad (x, y)\in R^2$$

függvény integrálját a

$$T=\{(x, y) \mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$$

egységnégyzetre!

f folytonos R^2-en, így integrálható. Négyszögtartományról van szó, ezért az integrálás sorrendje tetszőleges. Integráljunk először x szerint! x szerinti integrálásnál $4y$ állandó, azaz integrálja $4xy$, így:

$$\int_0^1 (x^2+4y)\, dx=\left[\frac{x^3}{3}+4xy\right]_0^1=\frac{1}{3}+4y.$$

(Természetesen a határokat az x változó helyébe helyettesítettük!) Tehát:

$$\iint_T f=\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx\right) dy=\int_0^1 \left(\frac{1}{3}+4y\right) dy=$$

$$=\left[\frac{y}{3}+2y^2\right]_0^1=\frac{7}{3}.$$

Az Olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy fordított sorrendben végezve az integrálást ugyanez az eredmény adódik.

2. Határozza meg az

$$f: (x, y)\mapsto e^{3x+4y}, \qquad (x, y)\in R^2$$

függvény integrálját a

$$T=\{(x, y) \mid 0\leqq x\leqq \ln 2,\ 0\leqq y\leqq \ln 3\}$$

tartományra!

Mivel a tartomány négyszögtartomány, és

$$e^{3x+4y}=e^{3x}e^{4y},$$

így e rész bevezetője szerint:

$$\iint_T f=\left(\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,dx\right)\left(\int_0^{\ln 3} e^{4y}\,dy\right)=\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^{\ln 2}\left[\frac{e^{4y}}{4}\right]_0^{\ln 3}.$$

A határok helyettesítésekor vegyük figyelembe, hogy

$$e^{3\ln 2}=(e^{\ln 2})^3=8,$$

tehát:

$$\iint_T f=\frac{8-1}{3}\cdot\frac{81-1}{4}=\frac{140}{3}.$$

Ugyanez az eredmény adódik akkor is, ha a kettős integrált nem bontjuk szét két egyszeres integrál szorzatára:

$$\iint_T f=\int_0^{\ln 2}\left(\int_0^{\ln 3} e^{3x+4y}\,dy\right)dx=\int_0^{\ln 2}\left[\frac{e^{3x+4y}}{4}\right]_0^{\ln 3}dx=$$

$$=\int_0^{\ln 2} 20e^{3x}\,dx=\frac{20}{3}[e^{3x}]_0^{\ln 2}=\frac{140}{3}.$$

3. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto e^{-x-y},\qquad (x,y)\in R^2$$

függvény integrálját a

$$T=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq a\}\qquad (a>0)$$

tartományra! Mi az eredmény határértéke, ha a minden határon túl növekszik?

Az előző feladathoz hasonlóan járunk el.
Mivel

$$e^{-x-y}=e^{-x}e^{-y},$$

és a tartomány négyszögtartomány, így

$$\iint_T f=\left(\int_0^a e^{-x}\,dx\right)\left(\int_0^a e^{-y}\,dy\right)=\left(\int_0^a e^{-x}\,dx\right)^2=$$

$$=([-e^{-x}]_0^a)^2=(1-e^{-a})^2,$$

$$\lim_{\infty}(1-e^{-a})^2=1,$$

azaz f-nek az első síknegyedre vonatkozó impropritus integrálja létezik, és értéke 1.

4. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto\sin(x+y),\qquad (x,y)\in R^2$$

függvény integrálját a

$$T=\left\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\right\}$$

tartományra!

Integráljunk először x szerint! Mivel ekkor a y állandó, így:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dx=\Big[-\cos(x+y)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\cos y-\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\cos y+\sin y.$$

Ennek felhasználásával:

$$\iint_T f=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos y+\sin y)\,dy=\Big[\sin y-\cos y\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)-(\sin 0-\cos 0)=2.$$

5. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto xye^{x^2+y^2},\qquad (x,y)\in R^2$$

függvénynek az egységnégyzetre vett integrálját!

f szorzatalakban írható fel:

$$xye^{x^2+y^2}=(xe^{x^2})(ye^{y^2}),$$

tehát:

$$\iint_T f=\left(\int_0^1 xe^{x^2}\,dx\right)\left(\int_0^1 ye^{y^2}\,dy\right)=\left(\int_0^1 xe^{x^2}\,dx\right)^2=$$

$$=\left(\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1\right)^2=\frac{(e-1)^2}{4}.$$

(Természetesen más úton számolva ugyanerre az eredményre jutunk.)

6. Integrálja az

$$f:(x,y)\mapsto\frac{x}{x^2+y^2};\qquad D_f=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\neq 0\}$$

függvényt a

$$T=\{(x,y)\mid 1\leqq x\leqq\sqrt{3},\ 0\leqq y\leqq 1\}$$

tartományra!

A T tartományban f folytonos, tehát integrálható. Mivel T-ben $x\neq 0$, így az integrandust a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2}\,\frac{x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Integráljunk először y szerint! Ekkor x állandó, tehát:

$$\int_0^1\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dx=\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]_0^1=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arcctg}x.$$

(Az integrálás során felhasználtuk, hogy $\frac{1}{x}$ a belső függvény y szerinti deriváltja.)

$$\iint_T f=\int_1^{\sqrt{3}}1\cdot\operatorname{arcctg}x\,dx.$$

Parciálisan integrálunk:

$u':=1,$
$v:=\operatorname{arcctg}x$

választással kapjuk, hogy

$$\iint_T f=\Big[x\operatorname{arcctg}x\Big]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

A második tagot átalakítjuk:

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_1^{\sqrt{3}}.$$

A határokat behelyettesítve:

$$\iint_T f=\sqrt{3}\operatorname{arcctg}\sqrt{3}-\operatorname{arcctg}1+\frac{1}{2}(\ln 4-\ln 2)=$$

$$=\sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$$

7. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto\frac{2xy}{x^2+y^2};\qquad D_f=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\neq 0\}$$

függvény egységnégyzetre vett integrálját!

f az origóban nincs értelmezve, sőt, mint azt II.3-ban láttuk, itt határértéke sincs.

Könnyen belátható azonban, hogy f korlátos. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = |xy|,$$

azaz

$$|f(x, y)| \leq 1.$$

Mivel f korlátos, és az origó kivételével minden pontban folytonos, így integrálható.

$$\iint_T f = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{2xy}{x^2+y^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 [y \ln (x^2+y^2)]_0^1\, dy =$$

$$= \int_0^1 y \ln (1+y^2)\, dy - \int_0^1 2y \ln y\, dy.$$

Mindkét tagban parciálisan integrálva $(u' := y)$:

$$\int_0^1 y \ln (1+y^2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2} \ln (1+y^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^3}{1+y^2}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \int_0^1 \left(y - \frac{y}{1+y^2} \right) dy = \frac{1}{2} \ln 2 - \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \ln (1+y^2) \right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Hasonlóan a második tag:

$$\int_0^1 2y \ln y\, dy = [y^2 \ln y]_0^1 - \int_0^1 y\, dy = -\frac{1}{2}.$$

(Ugyanis: $\lim\limits_{0} y^2 \ln y = 0$.) Így:

$$\iint_T f = \ln 2 \approx 0{,}699.$$

Megjegyzés: Láttuk, hogy $|f(x, y)| \leq 1$ az egységnégyzeten, így teljesülnie kell a

$$\left| \iint_T f \right| \leq \mu(T) \cdot 1 = 1$$

egyenlőtlenségnek.

8. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+y^2}}, \qquad D_f = \{(x, y) \in R^2 \mid x+y^2 > 0\}$$

függvénynek az egységnégyzetre vett integrálját!

Az előző feladatokkal ellentétben f nem korlátos T-n, tehát egy improprius integrál értékét kell meghatároznunk. f biztosan integrálható T-n, ha van olyan f-et majoráló függvény, amelynek T-re vett integrálja létezik.

Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{x+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

és az

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad \text{improprius integrál konvergens,}$$

így f integrálható a T tartományon.

Először x szerint integrálva:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+y^2}} = 2\left[\sqrt{x+y^2}\right]_0^1 = 2\sqrt{1+y^2} - 2y$$

$(y \geq 0$ miatt $|y| = y)$.

Tehát

$$\iint_T f = \int_0^1 2\sqrt{1+y^2}\, dy - \int_0^1 2y\, dy.$$

Az első tag esetén helyettesítéses integrállal jutunk eredményre. Legyen

$$y := \operatorname{sh} t.$$

Ekkor

$$\sqrt{1+y^2} = \operatorname{ch} t,$$

és

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{ch} t.$$

(A helyettesítéskor az integrálási határok is megváltoznak.)

$$\int_0^1 2\sqrt{1+y^2}\,dy = \int_0^{\operatorname{arsh} 1} 2\operatorname{ch}^2 t\,dt = \int_0^{\operatorname{arsh} 1} (\operatorname{ch} 2t + 1)\,dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + t\right]_0^{\operatorname{arsh} 1}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} 1) = 1,$$

és

$$\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t},$$

kapjuk, hogy

$$\iint_T f = \sqrt{2} + \operatorname{arsh} 1 - 1.$$

Végezzük el az integrálást fordított sorrendben is!

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x+y^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dy}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2}} = \left(\operatorname{arsh} \frac{y}{\sqrt{x}}\right)_0^1 = \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

tehát:

$$\iint_T f = \int_0^1 1 \cdot \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Parciálisan integrálunk:

$$u' := 1, \qquad u = x$$

ekkor

$$v := \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x}};$$

ebből következően:

$$\iint_T f = \left[x \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \operatorname{arsh} 1 + \left[\sqrt{x+1}\right]_0^1 =$$

$$= \operatorname{arsh} 1 + \sqrt{2} - 1.$$

(Felhasználtuk, hogy

$$\lim_{+0} x \operatorname{arsh} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

amit az Olvasó pl. a L'Hospital-szabály alkalmazásával igazolhat.)
Látjuk tehát hogy e feladat esetén is teljesül az

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,dy\,dx$$

egyenlőség.

9. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{1}{x+y^2}; \qquad D_f = \{(x, y) \in R^2 \mid x+y^2 \neq 0\}$$

függvényt az egységnégyzetre!

A függvénynek nincs határértéke az origóban, nem korlátos T-n, sőt az

$$x \mapsto f(x, 0) = \frac{1}{x}, \qquad x \in R \setminus \{0\}$$

és

$$y \mapsto f(0; y) = \frac{1}{y^2}, \qquad x \in R \setminus \{0\}$$

függvények $[0; 1]$ intervallumra vett improprius integrálja nem létezik.

Határozzuk meg először f integrálját a

$$T_1 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ a \le y \le 1\} \qquad (a > 0 \text{ állandó})$$

tartományra, majd vegyük ennek határértékét, ha a zérushoz tart! (f T_1-en folytonos, így integrálható.)

$$\int_a^1 \int_0^1 \frac{1}{x+y^2}\,dx\,dy = \int_a^1 [\ln (x+y^2)]_0^1\,dy =$$

$$= \int_a^1 1 \ln (1+y^2)\,dy - \int_a^1 2 \ln y\,dy.$$

Mindkét tagban parciálisan integrálva kapjuk, hogy:

$$\iint_{T_1} f = [y \ln (1+y^2)]_a^1 - 2\int_a^1 \frac{y^2+1-1}{y^2+1}\,dy - [2(y \ln y - y)]_a^1 =$$

$$= [y \ln (1+y^2) - 2y \ln y + 2 \operatorname{arctg} y]_a^1 =$$

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - [a \ln (1+a^2) - 2a \ln a + 2 \operatorname{arctg} a].$$

A zárójelben levő tagok határértéke zérus, ha a tart a zérushoz, így f integrálható T-n, és:

$$\iint_T f = \ln 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Végezzük el az integrálást fordított sorrendben is!

$$\int_0^1 \frac{1}{x+y^2}\,dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dy = \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{x}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Így

$$\iint_T f = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Parciálisan integrálva:

$$u' := \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ekkor

$$u = 2\sqrt{x},$$

és

$$v := \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

így

$$v' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x^3}},$$

azt kapjuk, hogy

$$\iint_T f = \left[2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{2} + \ln 2,$$

ami az előző eredménnyel megegyező.

(Felhasználtuk, hogy

$$\lim_{+0} 2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

hiszen a szorzat egyik tényezője 0-hoz, a másik $\frac{\pi}{2}$-hez tart.)

10. Határozza meg c értékét úgy, hogy az

$$f:(x, y) \mapsto c(x^2+3y^2), \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény egységnégyzetre vett integrálja 1 legyen!

Integráljunk először x szerint!

$$c\int_0^1 (x^2+3y^2)\,dx = c\left[\frac{x^3}{3}+3xy^2\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{3}+3y^2\right),$$

így

$$\iint_T f = c\int_0^1 \left(\frac{1}{3}+3y^2\right)dy = c\left[\frac{1}{3}y+y^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}c.$$

Mivel az

$$\iint_T f = 1$$

egyenlőségnek teljesülnie kell, így

$$c=\frac{3}{4}.$$

11. Legyen az $f: T \to R$ függvény folytonos a

$$T=\{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b;\ c \leqq y \leqq d\}$$

tartományban. Határozza meg f T-re vett kettős integrálját, ha teljesül az

$$F''_{xy}(x, y)=f(x, y), \qquad (x, y) \in T$$

egyenlőség!

Mivel f folytonos T-n, így integrálható is. f folytonossága miatt

$$F''_{xy}=F''_{yx},$$

így az integrálás sorrendje tetszőleges. Integráljunk először x szerint!

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b F''_{yx}(x, y)\,dx = [F'_y(x, y)]_a^b = F'_y(b, y)-F'_y(a, y).$$

Ezt y szerint integrálva:

$$\int_c^d [F'_y(b, y)-F'_y(a, y)]\,dy = [F(b, y)-F(a, y)]_c^d =$$

$$=F(b, d)-F(a, d)-F(b, c)+F(a, c).$$

A kettős integrál értéke tehát az F függvénynek a téglalap csúcspontjaiban felvett értékeiből meghatározható. (A feladatot a Newton—Leibniz-formula általánosításának is tekinthetjük.)

2. Kettős integrál normáltartomány esetén

Legyenek az

$$g_1: x \mapsto g_1(x)$$

és $\qquad x \in [a; b]$

$$g_2: x \mapsto g_2(x)$$

függvények folytonosak az $[a; b]$ intervallumon, és legyen minden $x \in [a; b]$ esetén:

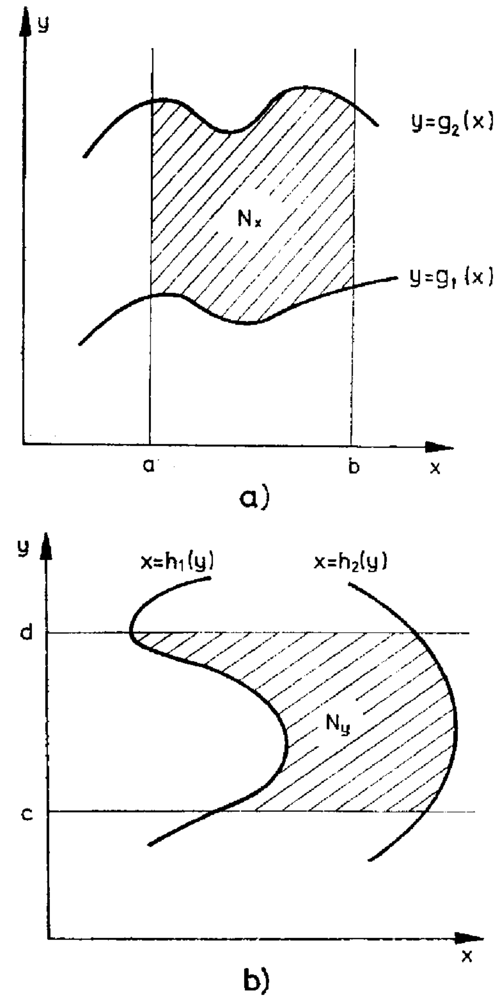
$$g_1(x) \leqq g_2(x)!$$

Ekkor a

$$T=N_x=\{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\}$$

tartományt az x *tengelyre normáltartománynak* nevezzük (50. ábra). Mivel g_1 és g_2 folytonos $[a; b]$-n, így itt integrálható is. Ebből következően N_x mérhető:

$$\mu(N_x)=\int_a^b g_2-\int_a^b g_1.$$



50. ábra

Hasonlóan értelmezhető az *y tengelyre normáltartomány* is:

$$T=N_y=\{(x,y)\mid c\leqq y\leqq d,\ h_1(y)\leqq x\leqq h_2(y)\}.$$

Ha f folytonos T-n, akkor:

$$\iint\limits_{N_x} f=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

ill.

$$\iint\limits_{N_y} f=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Normáltartományok esetén tehát az integrálás sorrendje meghatározott. A sorrend felcserélése csak akkor lehetséges, ha T mindkét tengelyre normáltartomány, de a csere ekkor is a határok átalakításával jár.

Ha T nem normáltartomány, akkor a tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel normáltartományokra bontjuk fel. f T-re vett integrálja e résztartományokra számított integráljainak öszszege.

Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy az

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}0, & \text{ha } x+y \quad \text{irracionális}\\ \dfrac{1}{n}, & \text{ha } x+y=\dfrac{k}{n}\neq 0, \qquad (x,y)\in R^2\\ 0, & \text{ha } x+y=0\end{cases}$$

függvény integrálható az $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$ csúcspontú háromszögre!

Annak igazolásához, hogy az adott tartományon f integrálható, azt kell megmutatnunk, hogy az alsó és felső közelítőösszegek határértéke azonos. Mivel f alsó korlátja zérus, így az alsó közelítő összeg is zérus. Azt kell tehát belátnunk, hogy a felső összeg tetszőlegesen kicsiny lehet.

Legyen ε egy egynél kisebb pozitív szám. Vizsgáljuk meg, mely pontokban nagyobb a függvényérték ε-nál! Ez csak olyan pontokban lehetséges, amelyekre:

$$x+y=\frac{k}{n}, \qquad \text{és} \qquad 0<n<\frac{1}{\varepsilon}.$$

E pontok az

$x+y=1$ egyenessel párhuzamos egyeneseken helyezkednek el.

Mivel láttuk, hogy

$$0<n<\frac{1}{\varepsilon},$$

és

$$0 \leqq x+y \leqq 1\text{-ből következően}$$
$$0<k \leqq n,$$

így csak véges sok ilyen egyenes van.

Jelöljük ezek számát m-mel!

Bontsuk a T tartományt az $x+y=1$ egyenessel párhuzamos egyenesekkel $\frac{\varepsilon}{2m}$ szélességű sávokra. E sávok közül m-ben a függvényérték ε-nál nagyobb lesz. Ezek járuléka a felső közelítő összeghez:

$$S_1=\sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2m} M_i l_i$$

(ahol l_i a sáv „hosszát" jelenti).

Mivel $M_i \leqq 1$ (hiszen $f(x, y) \leqq 1$, ha $(x, y) \in T$, és $l_i \leqq \sqrt{2}$), így

$$S_1 \leqq \frac{\varepsilon}{2m} \sqrt{2} m=\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2}.$$

A többi sávban a függvényérték maximuma ε-nál kisebb, így ezek járuléka:

$$S_2<\varepsilon \mu(T)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

E felbontás esetén a felső közelítő összeg:

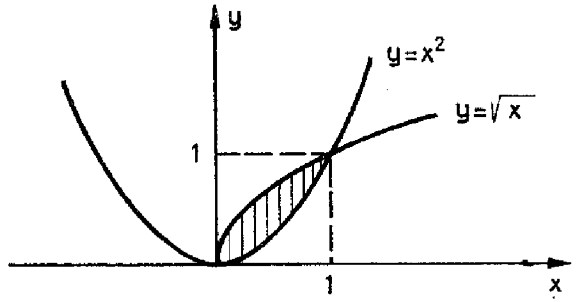
$$S=S_1+S_2<\frac{\varepsilon}{2}(1+\sqrt{2}),$$

amely érték tetszőlegesen kicsiny lehet. Mivel találtunk egy olyan felosztást, amelynél S tetszőlegesen kicsinnyé tehető, és belátható, hogy ez minden finomodó felosztássorozatra teljesül, azaz S alsó határa zérus, így megmutattuk, hogy f integrálható a T tartományon.

2.) Határozza meg az

$$f:(x, y) \mapsto 2xy, \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény integrálját az 51. ábrán látható tartományra!



51. ábra

A tartomány az x és y tengelyre is normáltartománynak tekinthető. Tehát

$$T=N_x=\{(x; y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x}\}$$

vagy

$$T=N_y=\{(x; y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y^2 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}.$$

(Vigyázzon, a

$$T_1=\{(x; y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

tartomány az egységnégyzet!)

A $T=N_x$ esetben először y szerint;

a $T=N_y$ esetben először x szerint kell integrálnunk.

Tehát

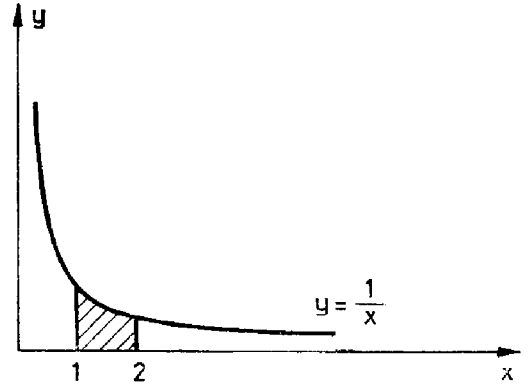
$$\iint_T f=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy\,dy\right) dx=\int_0^1\left[xy^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx=\int_0^1 (x^2-x^5)\,dx=$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

Természetesen a $T=N_y$ esetben is azonos eredményt kapunk.

3.) Határozza meg az

$$f:(x, y) \mapsto \frac{2y}{x+1}, \qquad D_f=\{(x, y) \in R^2 \mid x+1 \neq 0\}$$

függvény integrálját az 52. ábrán látható tartományra!



52. ábra

A tartomány:

$$N_x=\left\{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{x}\right\},$$

tehát először y szerint kell integrálnunk:

$$\iint_{N_x} f=\int_1^2\left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{2y}{x+1}\,dy\right) dx=\int_1^2\left[\frac{y^2}{x+1}\right]_0^{\frac{1}{x}} dx=\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx.$$

Az integrandust résztörtek összegére kell bontanunk:

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$1=x^2(A+C)+x(A+B)+B,$$

ahonnan — az együtthatók összehasonlításával —

$A=-1, \quad B=1, \quad C=1$ adódik.

Tehát:

$$\iint_{N_x} f=\int_1^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right) dx=\left[-\ln x-\frac{1}{x}+\ln (x+1)\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}+\ln 3-2 \ln 2=\frac{1}{2}+\ln \frac{3}{4}.$$

4. Integrálja az

$$f:(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad D_f=\{(x, y) \in R^2 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$$

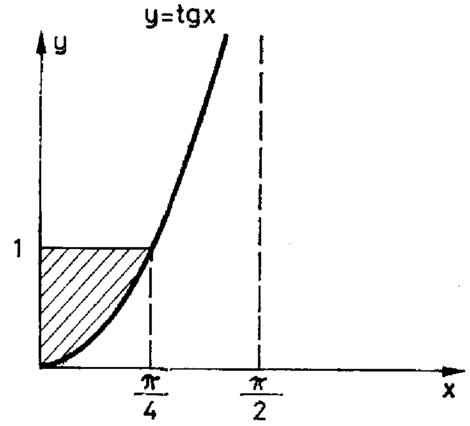
függvényt a

$$T=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$$

tartományra!

Láttuk, hogy f az origó kivételével folytonos T-n, és korlátos, így integrálható.

A tartomány egy origó középpontú egységsugarú kör. Mivel f mindkét változójában páratlan, és T szimmetrikus mindkét tengelyre, így f-nek az adott tartományra vett integrálja zérus.



53. ábra

5. Határozza meg az

$$f:(x, y) \mapsto 2y \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény integrálját az 53. ábrán látható tartományra!

T mindkét tengelyre normáltartomány. Az integrálást mindkét módon elvégezzük.

a) $T=N_x=\left\{(x, y) \,\middle|\, \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\ \operatorname{tg} x \leqq y \leqq 1\right\}.$

Ez esetben először y szerint kell integrálnunk:

$$\iint\limits_T f=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_{\operatorname{tg} x}^{1} 2y\,dy\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}[y^2]_{\operatorname{tg} x}^{1}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\operatorname{tg}^2 x)\,dx.$$

Az integrandust

$$1-\operatorname{tg}^2 x=1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1-\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=2-\frac{1}{\cos^2 x}$$

alakra hozva kapjuk, hogy:

$$\iint\limits_T f=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\Big[2x-\operatorname{tg} x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

b) $T=N_y=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq \operatorname{arctg} y\}$.

Most először x szerint kell integrálnunk:

$$\iint\limits_T f=\int\limits_0^{1}\left(\int\limits_0^{\operatorname{arctg} y} 2y\,dx\right)dy=\int\limits_0^{1}[2xy]_0^{\operatorname{arctg} y}\,dy=\int\limits_0^{1} 2y\operatorname{arctg} y\,dy.$$

Parciálisan integrálva: $u':=2y$,
$v:=\operatorname{arctg} y$,

$$\iint\limits_T f=[y^2\operatorname{arctg} y]_0^1-\int\limits_0^1\frac{y^2}{1+y^2}\,dy=\frac{\pi}{4}-\int\limits_0^1\frac{y^2+1-1}{1+y^2}\,dy=$$

$$=\frac{\pi}{4}-[y-\operatorname{arctg} y]_0^1=\frac{\pi}{2}-1,$$

ami az előzővel megegyező.

Megjegyzés: Láttuk, hogy normáltartományok esetén az integrálás sorrendjének felcserélése során a határok is megváltoznak, sőt legtöbb esetben a sorrend felcserélése el sem végezhető.

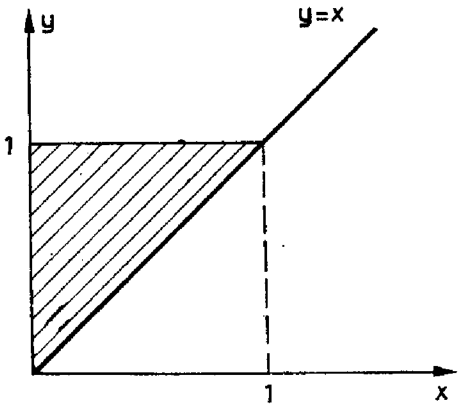
6. Integrálja az

$$f:(x,y)\mapsto\frac{\sin y}{y},\qquad D_f=\{(x,y)\in R^2\mid y\neq 0\}$$

függvényt a

$$T=N_x=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ x\leqq y\leqq 1\}$$

tartományra!



54. ábra

Az integrálási tartományt az 54. ábra mutatja. f korlátos, és T-ben az origó kivételével folytonos, így integrálható.

T mindkét tengelyre normáltartomány; így az integrálást kétféleképpen is elvégezhetjük.

a) $T=N_y=\{(x,y): 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\}$.

Először x szerint integrálunk:

$$\iint\limits_T f=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^y\frac{s\,n\,y}{y}\,dx\right)dy=\int\limits_0^1\left[\frac{\sin y}{y}\,x\right]_0^y dy=$$

$$=\int\limits_0^1\sin y\,dy=[-\cos y]_0^1=1-\cos 1\approx 0{,}454.$$

b) Fordított sorrendben végezve az integrálást először y szerint kell integrálnunk. Ezt csak közelítően, sorfejtéssel végezhetjük el.
Mivel

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \ldots,$$

így

$$\frac{\sin y}{y} = 1 - \frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{120} - + \ldots.$$

Ezt alkalmazva:

$$\int_x^1 \frac{\sin y}{y}\,dy \approx \int_x^1 \left(1 - \frac{y^2}{6} + \frac{y^4}{120}\right) dy = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\right).$$

A kapott eredményt x szerint integrálva:

$$\iint_T f \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - x + \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{600}\right) dx \approx 0{,}457,$$

ami az előzővel elég jól megegyezik. (Nagyobb pontosság eléréséhez $\sin y$ sorából több tagot kell figyelembe vennünk.)

7. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \cos(x - y), \qquad (x, y) \in R^2$$

függvényt az $A(0;0)$; $B(1;1)$; $C(3;1)$; $D(4;0)$ csúcspontú trapézra!

A tartományt az

$$y = 0;\ y = 1,$$

ill.

$$y = x;\ y = 4 - x$$

egyenesek határolják, így

$$T = N_y = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 4 - y\}.$$

Először tehát x szerint kell integrálnunk:

$$\int_y^{4-y} \cos(x - y)\,dx = [\sin(x - y)]_y^{4-y} = \sin(4 - 2y),$$

amit y szerint integrálva:

$$\int_0^1 [-\sin(2y - 4)]\,dy = \left[\frac{\cos(2y - 4)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\cos 2 - \cos 4).$$

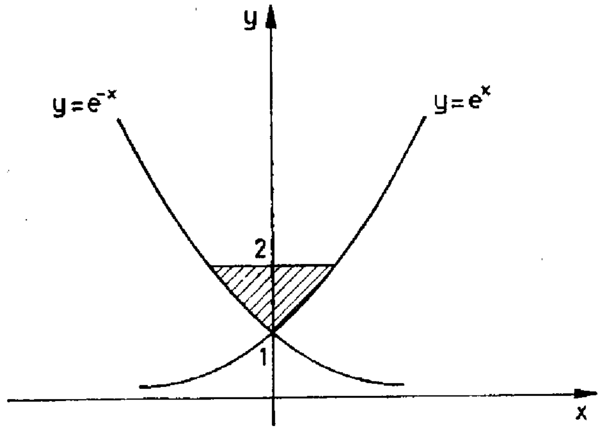
8. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \frac{2x}{x^2 + y^2}, \qquad D_f = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \neq 0\}$$

és

$$g: (x, y) \mapsto 2y, \qquad (x, y) \in R^2$$

függvényeket az 55. ábrán látható tartományra!



55. ábra

A tartomány az y tengelyre normáltartomány:

$$T = N_y = \{(x, y) \mid 1 \leqq y \leqq 2,\ -\ln y \leqq x \leqq \ln y\}.$$

a) f folytonos T-n, így integrálható.

Mivel T szimmetrikus az y tengelyre, és f x-ben páratlan függvény, ezért:

$$\iint_T f=0.$$

b) g x-ben páros függvény, így T szimmetriája miatt:

$$\iint_T g=2\int_1^2\left(\int_0^{\ln y} 2y\,dx\right)dy=2\int_1^2 2y\ln y\,dy.$$

Parciálisan integrálva ($u':=2y$):

$$\iint_T g=[2y^2\ln y-y^2]_1^2=8\ln 2-3.$$

9. Integrálja az

$$f:(x,y)\mapsto x^2+y^2,\qquad (x,y)\in R^2$$

függvényt a

$$T=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$$

tartományra!

Mivel f mindkét változójában páros függvény, és a tartomány mindkét tengelyre szimmetrikus, így elengedő az integrálást a

$$T_1=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\}$$

negyedkörre elvégeznünk, hiszen

$$\iint_T f=4\iint_{T_1} f.$$

Először y szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)\,dy=\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}=x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}.$$

A két tagot külön-külön integráljuk.

Mindkét esetben az $x:=\sin t$ helyettesítést alkalmazzuk.

Ekkor

$$\sqrt{1-x^2}=\cos t,$$

és

$$\frac{dx}{dt}=\cos t.$$

Mivel $x=1$ esetén $t=\frac{\pi}{2}$, és $x=0$ esetén $t=0$, így

$$I_1=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{1}{8}\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}.$$

Hasonlóan:

$$I_2=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt=$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{\sin 4t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16},$$

tehát:

$$\iint_T f=4(I_1+I_2)=\frac{\pi}{2}.$$

Megjegyzés: Polártranszformációval a feladat megoldása jóval egyszerűbb. Ezzel a következő szakaszban foglalkozunk.

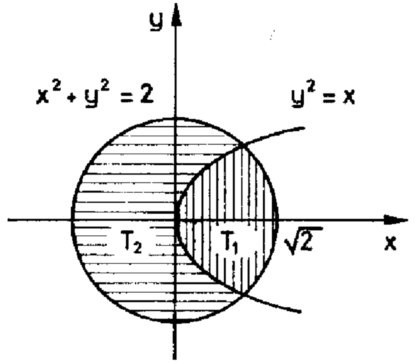
10. Integrálja az

$$f:(x,y)\mapsto -\operatorname{sg}(x^2-y), \qquad (x,y)\in R^2$$

függvényt a

$$T=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 2\}$$

tartományra!



56. ábra

Mivel

$$t\mapsto \operatorname{sg} t=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t>0 \\ 0, & \text{ha} \quad t=0 \\ -1, & \text{ha} \quad t<0,\end{cases}$$

így

$$\operatorname{sg}(x^2-y)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x^2>y \\ 0, & \text{ha} \quad x^2=y \\ -1, & \text{ha} \quad x^2<y.\end{cases}$$

Az $x^2=y$ görbe a T tartományt két részre bontja (56. ábra). Ennek T_1 részében $x^2>y$, így itt a függvényérték (-1), T_2-ben $x^2<y$, itt tehát a függvényérték 1. Ebből következően:

$$\iint_T f=\mu(T_2)-\mu(T_1).$$

Meg kell határoznunk tehát T_1 területét. Mivel a kör és a parabola metszéspontja az $(1;1)$ pont, így:

$$\mu(T_1)=2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx+2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx=$$

$$=2\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+2\sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx.$$

A második tag integrálásakor az $\dfrac{x}{\sqrt{2}}:=\sin t$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$\sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},$$

végeredményben tehát:

$$\mu(T_1)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}.$$

Mivel

$$T=T_1\cup T_2,$$

azaz

$$\mu(T)=\mu(T_1)+\mu(T_2),$$

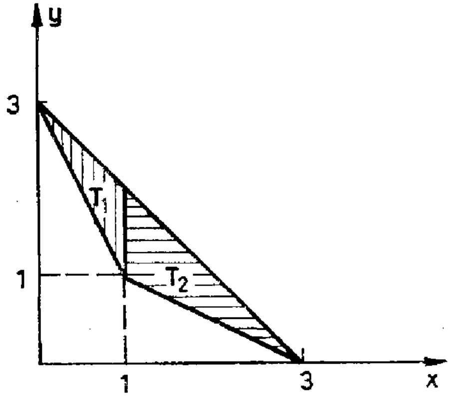
ebből következően:

$$\iint_T f=(\mu(T)-\mu(T_1))-\mu(T_1)=2\pi-2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\right)=\pi-\frac{2}{3}.$$

11. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto x^2+2y, \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény integrálját az $A(1;1)$, $B(0;3)$, $C(3;0)$ csúcspontú háromszögre!



57. ábra

A tartomány (57. ábra) nem normáltartomány, de az $x=1$ egyenes a tartományt két normáltartományra bontja. Ezek:

$$T_1=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1;\ 3-2x\leqq y\leqq 3-x\},$$

$$T_2=\left\{(x,y)\mid 1\leqq x\leqq 3;\ \frac{3-x}{2}\leqq y\leqq 3-x\right\}.$$

Tudjuk, hogy

$$\iint_T f=\iint_{T_1} f+\iint_{T_2} f,$$

Tehát az integrálást külön-külön kell elvégeznünk a két tartományra. T_1 esetén:

$$\int_0^1\left(\int_{3-2x}^{3-x}(x^2+2y)\,dy\right)dx=\int_0^1[x^2y+y^2]_{3-2x}^{3-x}\,dx=$$

$$=\int_0^1(6x-3x^2+x^3)\,dx=\left[2x^2-x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{5}{4},$$

hasonlóan T_2-re:

$$\int_1^3\left(\int_{\frac{3-x}{2}}^{3-x}(x^2+2y)\,dy\right)dx=\int_1^3\left[x^2y+y^2\right]_{\frac{3-x}{2}}^{3-x}dx=$$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}(3x^2-x^3)+\frac{3}{4}(3-x)^2\right)dx=5.$$

A keresett integrál e kettő összege:

$$\iint_T f=6\frac{1}{4}.$$

12. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto\sqrt{|y-x^2|}, \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény integrálját a

$$T=\{(x,y)\mid -1\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$$

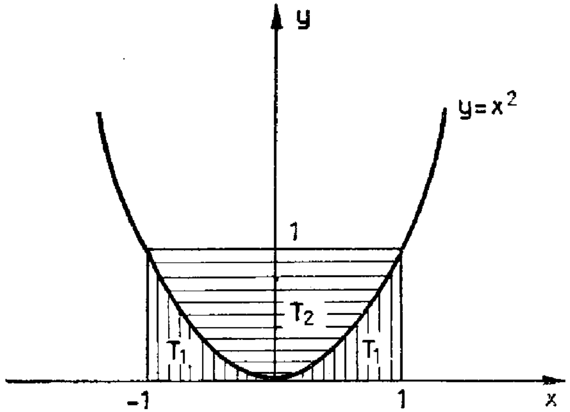
tartományra!

Mivel

$$\sqrt{|y-x^2|}=\begin{cases}\sqrt{y-x^2}, & \text{ha } y\geqq x^2\\ \sqrt{x^2-y}, & \text{ha } y<x^2,\end{cases}$$

így a tartományt két részre kell bontanunk (56. ábra):

$$T_1=\{(x,y)\mid -1\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x^2\}$$
$$T_2=\{(x,y)\mid -1\leqq x\leqq 1,\ x^2\leqq y\leqq 1\}.$$



58. ábra

A T_1 tartomány esetén $x^2>y$, így:

$$\iint_{T_1} f=2\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy\right)dx=2\int_0^1\left[\left(-\frac{2}{3}\right)(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2}dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{3}.$$

A T_2 tartomány pontjaiban $x^2<y$, tehát ekkor:

$$\iint_{T_2} f=2\int_0^1\left(\int_{x^2}^{1}\sqrt{y-x^2}\,dy\right)dx=2\int_0^1\left[\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{1}dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx.$$

Az $x:=\sin t$ helyettesítéssel:

$$\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{3\pi}{16}.$$

(l. a 9. feladatot!)

Az eredmény tehát:

$$\iint_T f=\iint_{T_1} f+\iint_{T_2} f=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{3\pi}{16}=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

3. A kettős integrál transzformációja

A kettős integrál transzformációja az egyváltozós függvények integrálásakor megismert helyettesítéses integrálás általánosítása. A változók célszerű transzformációja sok esetben megkönnyíti az integrál elvégzését, ill. lehetővé teszi a kiszámítását olyan esetekben, amelyekben transzformáció nélkül a feladat nem lenne megoldható.

Ha az

$$\begin{aligned} x&:(u,v)\mapsto x(u,v), \\ & \qquad\qquad\qquad (u,v)\in T'\subset R^2 \\ y&:(u,v)\mapsto y(u,v), \end{aligned}$$

függvények az u, v sík T' tartományát kölcsönösen egyértelműen leképezik az x, y sík T tartományára, és e függvények folytonosan differenciálhatók, akkor, ha f T-re vonatkozó integrálja létezik:

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{T'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

ahol:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},$$

a transzformáció determinánsa (Jacobi determináns). Speciálisan polártranszformáció esetén (láttuk, hogy a leképezés az origó kivételével kölcsönösen egyértelmű):

$$x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi,$$

tehát:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r.$$

A feladatok megoldása során — a tartomány alakjától függően — természetesen egyéb transzformációkat is alkalmazunk.

Megjegyzés: Ha T' mérhető, akkor T is mérhető, és:

$$\mu(T)=\iint_{T'} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f:(x, y)\mapsto\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2=0, \end{cases} \qquad (x, y)\in R^2$$

függvény integrálját a

$$T=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqq 1,\ y\geqq 0,\ x\geqq 0\}$$

negyedkörre!

Az előzőekben láttuk, hogy f az origó kivételével folytonos, T-n korlátos függvény, így integrálható T-n. Térjünk át polárkoordinátákra!

Ekkor:

$$T=\left\{(r, \varphi)\,\middle|\, 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\right\},$$

azaz a tartomány négyszögtartomány.
Elvégezve az

$x=r\cos\varphi$
$y=r\sin\varphi$ helyettesítést, kapjuk, hogy:

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}=\sin 2\varphi.$$

Ezt figyelembe véve:

$$\iint_T f=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin 2\varphi\, d\varphi\, dr=-\int_0^1\left[r\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r\, dr=\frac{1}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

2. Igazolja, hogy az

$$f:(x, y)\mapsto\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right], & \text{ha } x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2=0, \end{cases}$$

$(x, y)\in R^2$

függvény integrálható a

$$T=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqq 1\}$$

körre, s határozza meg az integrál értékét!

Az entier-függvény definíciójából következően f korlátos T-n, hiszen

$|f(x, y)|<1$, ha $(x, y)\in T$;

így ha f integrálható, akkor

$$\left|\iint_T f\right|<\mu(T).$$

Teteszőleges $n\in N^+$ esetén f folytonos a

$$T_n=\left\{(x, y)\,\middle|\, \frac{1}{(n+1)^2}<x^2+y^2\leqq\frac{1}{n^2}\right\}$$

tartományon, így itt integrálható is.

Ebből következően tetszőleges $n \in N^+$ esetén létezik f

$$T^* = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \frac{1}{n^2} < x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

tartományra vonatkozó integrálja is. Mivel f korlátossága miatt a

$$T \setminus T^* = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \le x^2 + y^2 \le \frac{1}{n^2} \right\}$$

tartomány járuléka tetszőlegesen kicsinnyé tehető, így f integrálható T-n.

Határozzuk meg az integrál értékét!

$$\iint_T f = \iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy - \iint_T \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] dx\, dy,$$

polárkoordinátákra áttérve az első tag:

$$\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi.$$

A második tag integrálásakor felhasználjuk, hogy

$$\frac{1}{n+1} < r \le \frac{1}{n} \qquad \text{esetén} \qquad \left[\frac{1}{r}\right] = n:$$

$$\iint_T \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{r}\right] r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 r \left[\frac{1}{r}\right] dr =$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} nr\, dr = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}.$$

Az integrál értékének meghatározásához a fenti összeget kell tehát kiszámítanunk.

Résztörtekre bontva:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2},$$

azaz:

$$2n+1 = A(n+1)^2 + Bn(n+1) + Cn.$$

A két oldal együtthatótit összehasonlítva:

$$A = 1, \; B = -1, \; C = 1.$$

Ezt felhasználva:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} \right\}.$$

Mivel a felbontásban szereplő összeg mindkét tagja abszolút konvergens sor, így a sor átrendezhető, azaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

A felbontásban az első tag:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{n} \right) = 1,$$

a második tag:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

A kapott eredmények alapján:

$$\iint_T f = 2\pi - \pi \left(1 + \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \approx 1{,}11.$$

Valóban teljesül tehát, hogy

$$\iint_T f \le \mu(T) = \pi.$$

Megjegyzés: A feladat megoldása során felhasználtuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ez például a következőképpen látható be:

Tekintsük a

$$g: x \mapsto \begin{cases} (x-\pi)^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2\pi, \\ g(x) = g(x+2\pi), & \end{cases} \qquad x \in R$$

függvényt!

Mivel g folytonos függvény, így Fourier-sora minden pontban előállítja a függvényt. Tehát minden $x \in R$ esetén:

$$g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos kx,$$

$x=0$ esetén:

$$g(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}.$$

Az egyenlőséget rendezve:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Integrálja az

$$f: (x, y) \mapsto \ln(x^2+y^2), \qquad (x, y) \in R^2 \setminus \{(0;0)\}$$

függvényt a

$$T = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

tartományra!

Mivel T nem normáltartomány az xy síkon, térjünk át polárkoordinátákra! Ekkor:

$$T = \{(r, \varphi) \mid 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\};$$

tehát:

$$\iint_T f = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r \ln r^2 \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_1^2 2r \ln r \, dr.$$

(Mivel az integrálandó φ-től független, így a φ szerinti integrálás 2π-vel való szorzást jelent.)

Parciálisan integrálva:

$$u' := 2r,$$
$$v := \ln r,$$

$$\iint_T f = 2\pi[r^2 \ln r]_1^2 - 2\pi \int_1^2 r^2 \frac{1}{r} \, dr = 2\pi \left[r^2 \ln r - \frac{r^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= 2\pi \left(4 \ln 2 - \frac{3}{2}\right).$$

4. Határozza meg az

$$f: (x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}, \qquad (x, y) \in R^2$$

függvény integrálját a

$$T = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq \varrho^2\}$$

tartományra!

Az integrálás csak polártranszformáció alkalmazásával végezhető el:

$$\iint_T f = \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^{\varrho} r e^{-r^2} \, dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\varrho} = \pi(1 - e^{-\varrho^2}).$$

Megjegyzés: Számítsuk ki a kapott eredmény határértékét, ha ϱ minden határon túl növekszik:

$$\lim_{\infty} \pi(1 - e^{-\varrho^2}) = \pi.$$

Tehát az f függvény integrálja a teljes síkra π:

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \, dx \, dy.$$

Mivel négyszögtartományról van szó, és f szorzatalakban írható fel, így V.1. szerint (belátható, hogy ez az összefüggés nemcsak korlátos tartományok esetén érvényes):

$$\pi=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Ebből következően:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

5. Az előző feladatban látott módszer alapján határozza meg az

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

integrál értékét!

A keresett érték négyzetét határozzuk meg:

$$A^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$

Polárkoordinátákra áttérve:

$$A^2=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-\frac{r^2}{2}}\,d\varphi\,dr=\int_0^{\infty} 2\pi re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=-2\pi\left[e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty}=2\pi,$$

ahonnan következik, hogy $A=\sqrt{2\pi}.$

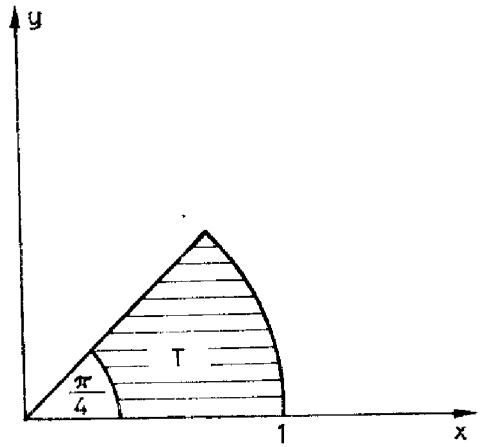
Megjegyzés: Az integrál értékét az előző feladat eredményének felhasználásával is meghatározhatjuk a

$$t:=\frac{x}{\sqrt{2}} \text{ helyettesítéssel.}$$

6. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto x^2-y^2, \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény integrálját az 59. ábrán látható körcikkre!



59. ábra

A tartomány polárkoordinátákra áttérve négyszögtartomány:

$$T=\left\{(r,\varphi)\,\middle|\, 0\leq r\leq 1,\quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Mivel

$$x^2-y^2=r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi=r^2\cos 2\varphi,$$

így f T-re vett kettős integrálja:

$$\iint_T f=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\cos 2\varphi r\,d\varphi\,dr=\int_0^1 r^3\left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}dr=\int_0^1\frac{r^3}{2}\,dr=\frac{1}{8}.$$

Az integrálás transzformáció nélkül is elvégezhető, de ekkor a számítás jóval bonyolultabb.

A tartomány:

$$T=N_y=\left\{(x,y)\,\Big|\; 0\leqq y\leqq\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y\leqq x\leqq\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

Először tehát x szerint kell integrálnunk:

$$\iint_T f=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_y^{\sqrt{1-y^2}}(x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left[\frac{x^3}{3}-y^2x\right]_y^{\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{(\sqrt{1-y^2})^3}{3}-y^2\sqrt{1-y^2}-\frac{y^3}{3}+y^3\right)dy=$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2}{3}y^3\,dy+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1-4y^2}{3}\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

Az első tag:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{2}{3}y^3\,dy=\left[\frac{y^4}{6}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{24}.$$

A második tag integrálásakor célszerű az $y:=\sin t$ helyettesítést alkalmazni:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1-4y^2}{3}\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-4\sin^2 t)\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 t-\sin^2 2t)\,dt=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}-\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{12}.$$

Azaz végeredményben:

$$\iint_T f=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8},$$

ami az előző módon kapott eredménnyel természetesen megegyező. A két megoldást összehasonlítva látszik, hogy a polártranszformáció elvégzésével lényegesen könnyebben jutunk eredményre.

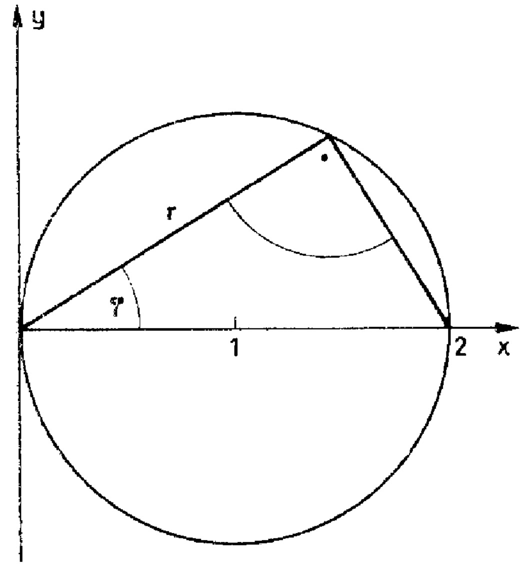
7. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad (x,y)\in R^2\setminus\{(0;0)\}$$

függvény integrálját a

$$T=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqq 1\}$$

körre!



60. ábra

A tartomány polárkoordinátákra áttérve (60. ábra):

$$T=\left\{(r,\varphi)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}\,;\ 0\leqq r\leqq 2\cos\varphi\right\},$$

az r, φ síkon tehát T normáltartomány. Először r szerint kell integrálnunk:

$$\iint_T f=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi}\frac{1}{r}\,r\,dr\,d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[r]_0^{2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\varphi\,d\varphi=\Big[2\sin\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4.$$

8. Integrálja az

$$f:(x,y)\mapsto x^2+y^2,\qquad (x,y)\in R^2$$

függvényt a

$$T=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-2)^2\leqq 1\}$$

körre!

Az integrál meghatározásához célszerű a következő transzformációt elvégeznünk:

$$x=3+r\cos t,$$
$$y=2+r\sin t.$$

E transzformációval az integrálási tartomány:

$$T=\{(r,\varphi)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}.$$

Mivel az állandó deriváltja zérus, így a Jacobi-determináns most is r-rel egyenlő. A helyettesítést elvégezve:

$$x^2+y^2=(3+r\cos t)^2+(2+r\sin t)^2=13+6r\cos t+4r\sin t+r^2,$$

így f integrálja:

$$\iint_T f=\int_0^1\int_0^{2\pi}(13+6r\cos t+4r\sin t+r^2)r\,d\varphi\,dr=$$

$$=2\pi\int_0^1(13r+r^3)\,dr=2\pi\left[\frac{13r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right]_0^1=13{,}5\pi.$$

9. Integrálja az

$$f:(x,y)\mapsto|2xy|,\qquad (x,y)\in R^2$$

függvényt a

$$T=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqq 1\right\}$$

tartományra!

A tartomány egy ellipszis, amelynek tengelyei egybeesnek a koordinátatengelyekkel. Az integrálás transzformáció nélkül is elvégezhető, de célszerű a következő transzformáció:

$$x=3r\cos\varphi,$$
$$y=2r\sin\varphi.$$

Ekkor az integrálási tartomány négyszögtartomány:

$$T=\{(r,\varphi)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}.$$

A Jacobi-determináns:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\cos\varphi & -3r\sin\varphi\\ 2\sin\varphi & 2r\cos\varphi\end{vmatrix}=6r.$$

Mivel a tartomány mindkét tengelyre szimmetrikus, f mindkét változójában páros, így elegendő az integrálást az első síknegyedre elvégezni:

$$\iint_T f=4\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot 3r\cos\varphi\, 2r\sin\varphi\, 6r\, d\varphi\, dr=$$

$$=288\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin 2\varphi\, d\varphi\, dr=288\int_0^1 r^2\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr=$$

$$=144\int_0^1 r^2\, dr=48.$$

10. Integrálja az

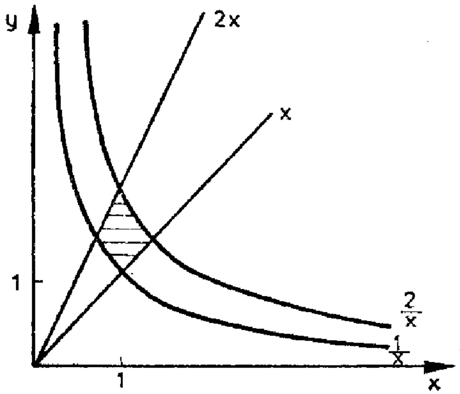
$$f:(x,y)\mapsto 1, \qquad (x,y)\in R^2$$

függvényt az

$$y=x, \qquad y=2x, \qquad xy=1, \qquad xy=2$$

görbék által határolt tartományra!

A tartomány (61. ábra) az xy síkon nem normáltartomány, sőt elég nehéz is normáltartományokra darabolni.



61. ábra

Vezessünk be új változókat!

Legyen

$$u:=xy,$$

$$v:=\frac{x}{y},$$

azaz

$$x=\sqrt{uv} \qquad \text{és} \qquad y=\sqrt{\frac{u}{v}}.$$

Ekkor a transzformáció determinánsa:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2v}.$$

A tartomány az u, v síkon négyszögtartomány:

$$T=\left\{(u,v)\,\middle|\, 1\leqq u\leqq 2,\ \frac{1}{2}\leqq v\leqq 1\right\}.$$

Így f integrálja (a determináns abszolút értékével szorzunk):

$$\iint_T f=\int_1^2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2v}\, dv\, du=\int_1^2 \frac{1}{2}\ln 2\, du\approx 0{,}35.$$

Mivel az integrálandó függvény T minden pontjában egységnyi, így a kettős integrál definíciójából következően a kapott érték a tartomány területével egyenlő.

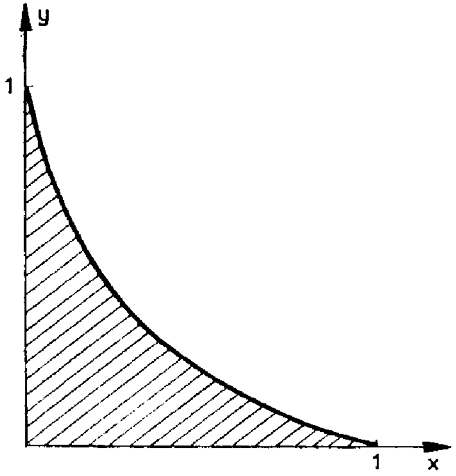
11. Határozza meg az

$$f:(x,y)\mapsto x, \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény integrálját a

$$T=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 1\}$$

tartományra!



62. ábra

A tartomány egy negyed asztroid (62. ábra). Vezessünk be új koordinátákat:

$$x := r\cos^3\varphi,$$
$$y := r\sin^3\varphi.$$

Ekkor T négyszögtartomány:

$$T = \left\{(r,\varphi)\,\middle|\, 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

A Jacobi-determináns:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Tehát f integrálja:

$$\iint_T f = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^3\varphi\, 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\, dr.$$

Alakítsuk át az integrandust!

$$3r^2\cos^5\varphi\sin^2\varphi = 3r^2\cos\varphi(1-\sin^2\varphi)^2\sin^2\varphi =$$
$$= 3r^2\cos\varphi(\sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi + \sin^6\varphi).$$

Felhasználva, hogy $g^n g' = \left(\frac{g^{n+1}}{n+1}\right)'$ $(n \ne -1)$, kapjuk, hogy:

$$\iint_T f = \int_0^1 3r^2\left[\frac{\sin^3\varphi}{3} - 2\frac{\sin^5\varphi}{5} + \frac{\sin^7\varphi}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr =$$

$$= \int_0^1 3r^2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) dr = \frac{8}{105}.$$

4. A kettős integrál alkalmazásai

A kettős integrál geometriai és fizikai alkalmazása egyaránt igen sokrétű. Ezen alkalmazási lehetőségek közül a legfontosabbakat említjük és szemléltetjük feladatokkal.

Az előző szakasz 11. feladatában már szerepelt, hogy a kettős integrál definíciójából következően:

$$\iint_T 1\, dx\, dy = \mu(T).$$

Hasonlóan, V.1-ben, a kettős integrál meghatározásánál láttuk, hogy ha f integrálható T-n és $f(x,y) \ge 0$ minden $(x,y) \in T$ pontban, akkor a

$$\iint_T f \qquad \text{a } T \text{ tartomány feletti} \qquad z = (x,y)$$

felülettel határolt hengerszerű test térfogatát adja (49. ábra).

IV.2. tárgyalása során láttuk, hogy ha a D tartomány mérhető területű és az

$$\mathbf{r} : (u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v), \qquad (u,v) \in D$$

folytonosan differenciálható D-n, akkor e kétparaméteres vektor-skalár függvénnyel jellemzett felület felszíne:

$$A = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\, du\, dv.$$

A lehetséges fizikai alkalmazások közül elsőként síklemez tömegközéppontjának meghatározását említjük. Helyezzük el a lemezt az x, y síkban! Legyen a lemez által lefedett tartomány T. Ha a lemez sűrűségét a

$$\varrho : (x, y) \mapsto \varrho(x, y), \qquad (x, y) \in T$$

függvény írja le, akkor tömegközéppontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\iint\limits_T x\varrho(x, y)\, dx\, dy}{\iint\limits_T \varrho(x, y)\, dx\, dy}; \qquad y_s = \frac{\iint\limits_T y\varrho(x, y)\, dx\, dy}{\iint\limits_T \varrho(x, y)\, dx\, dy}.$$

(E képletekben a számláló a síklemez y, ill. x tengelyre vett elsőrendű, ún. statikai nyomatéka, a nevező pedig a lemez tömege.) Természetesen, ha a lemez homogén, azaz sűrűsége állandó, ϱ az integráljel elé kiemelhető, s így egyszerűsíthetünk vele. Ekkor a nevező T területével $\mu(T)$-vel egyezik meg. Az előzőekben szereplő síklemez y, ill. x tengelyre vett másodrendű (tehetetlenségi) nyomatéka:

$$\Theta_x = \iint\limits_T y^2\varrho(x, y)\, dx\, dy;$$

$$\Theta_y = \iint\limits_T x^2\varrho(x, y)\, dx\, dy.$$

Hasonlóképpen a z tengelyre (vagy az origóra) vett másodrendű nyomaték:

$$\Theta = \iint\limits_T (x^2+y^2)\varrho(x, y)\, dx\, dy = \Theta_x + \Theta_y.$$

Forgástest felszíne, ill. térfogata és a tömegközéppont által leírt kör kerülete közötti összefüggést adják meg Guldin tételei:

A forgástest felszíne egyenlő a forgatott görbeív hosszának és a tömegközéppont által leírt kör kerületének szorzatával;

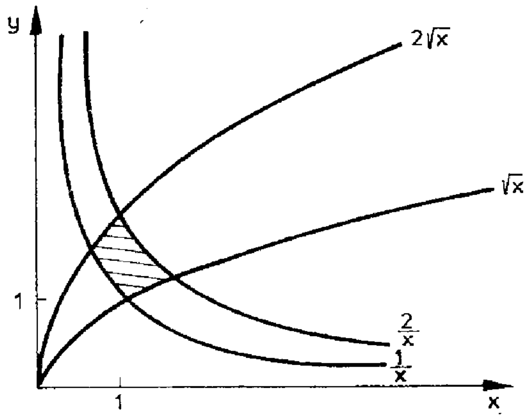
A forgástest térfogata egyenlő a forgatott lemez területének és a tömegközéppont által leírt kör kerületének szorzatával.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$y=\sqrt{x}, \qquad y=2\sqrt{x}, \qquad xy=1, \qquad xy=2$$

görbék által határolt síkidom területét!



63. ábra

A terület meghatározásához a görbék által határolt T tartományra (63. ábra) kell integrálnunk az egységet, azaz:

$$\iint\limits_T 1\, dx\, dy = \mu(T).$$

Az integrálás kiszámításához célszerű a kettős integrál transzformációját elvégeznünk.

Legyen

$$u := \frac{y}{\sqrt{x}},$$

$$v := xy,$$

azaz

$$x = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}} = v^{\frac{2}{3}} u^{\frac{-2}{3}},$$

$$y = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}}.$$

Ekkor a tartomány:

$$T = \{(u, v) \mid 1 \leqq u \leqq 2,\ 1 \leqq v \leqq 2\},$$

A transzformáció determinánsa:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-2}{3} u^{\frac{-5}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} v^{\frac{-1}{3}} u^{\frac{-2}{3}} \\ \frac{2}{3} u^{\frac{-1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{-2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \frac{1}{u},$$

tehát a keresett terület:

$$\mu(T) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{2}{3} \frac{1}{u}\, dv\, du = \int_1^2 \frac{2}{3} \frac{1}{u}\, du = \left[\frac{2}{3} \ln u\right]_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2 \approx 0{,}47.$$

2. Határozza meg a

$$z = 1 - x^2 - 2y^2, \qquad (x, y) \in R^2$$

felület $z \geqq 0$ része és az x, y sík által határolt térrész térfogatát!

A felület az xy síkot az

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

egyenletű ellipszisben metszi.

A meghatározandó térfogat tehát

$$\iint_T (1 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy,$$

ahol

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leqq 1\}.$$

Célszerű a kettős integrál transzformációja:

$$x := r \cos \varphi,$$

$$y := \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \varphi.$$

Ezen új változókkal:

$$T = \{(r, \varphi) : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}.$$

A transzformáció determinánsa (V.3. 9. feladatához hasonlóan):

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

tehát a keresett térfogat:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) \frac{r}{\sqrt{2}}\, d\varphi\, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) \frac{r}{\sqrt{2}}\, dr = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

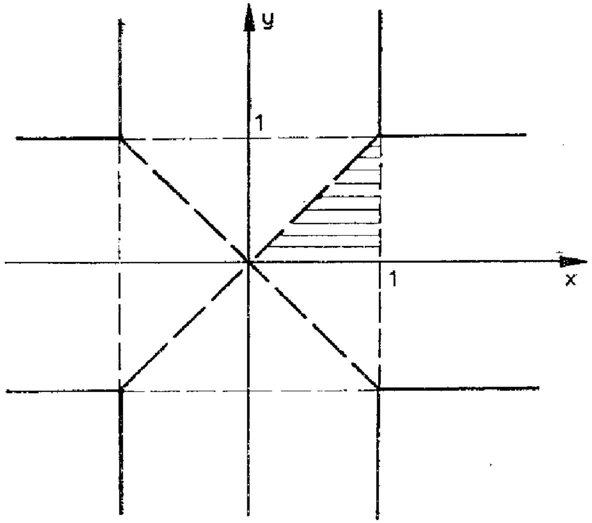
3. Határozza meg az

$$x^2 + z^2 = 1$$

és

$$y^2 + z^2 = 1$$

hengerek közös részének térfogatát!



64. ábra

A 64. ábrán felülnézetben ábrázoltuk a két hengert, amelyeknek tengelye az y, ill. az x tengely. Az ábrán szaggatott vonal jelzi a két hengerfelület metszésvonalának képét.

A szimmetriából következően elegendő a vonalkázott terület feletti rész térfogatát meghatároznunk. Ez az integrálási tartomány nyolcadrésze, de mivel csak az xy sík feletti rész térfogatát számoljuk, így a teljes térfogat tizenhatodrészét kapjuk meg.

Az integrálást tehát a

$$T=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq x\}$$

tartományra végezzük.

Itt a határoló hengerfelület — a takarásban levő „alsó" felület:

$$z^2+x^2=1,$$

így:

$$\frac{V}{16}=\int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx=\int_0^1\left[y\sqrt{1-x^2}\right]_0^x dx=$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

A keresett térfogat tehát:

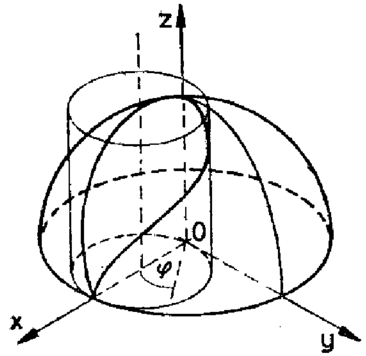
$$V=\frac{16}{3}.$$

Megjegyzés: Érdekességként bemutatjuk Bláthy Ottó e feladatra adott megoldását. (Műszaki nagyjaink 2. kötetéből.) Legyen a henger átmérője: D. „Ha a két hengert fekvő keresztnek képzeljük, a közös test elöl- és oldalnézete kör, felülnézete és minden vízszintes metszete pedig a kör köré írt négyzet. Tehát a közös test köbtartalma úgy viszonylik a gömbéhez, mint a négyzet területe a beírt köréhez, vagyis arányuk: $4:\pi$. A gömb köbtartalma $\frac{\pi}{6}D^3$, tehát a közös testé $\frac{4}{6}D^3$." $D=2$ esetén: $V=\frac{16}{3}$, azaz az előző eredményt kapjuk.

4. Határozza meg az origó középpontú két egység sugarú gömbből az

$$(x-1)^2+y^2=1$$

hengerfelület által kimetszett test (Viviani-féle test) térfogatát!



65. ábra

A test szimmetrikus az xy síkra (65. ábra), így elegendő a $z\geqq 0$ részének térfogatát meghatároznunk. Mivel a gömb egyenlete:

$$x^2+y^2+z^2=4,$$

tehát

$$\frac{V}{2}=\iint_T \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

ahol

$$T=\{(x, y) \mid (x-1)^2+y^2 \leq 1\}.$$

E tartomány polárkoordinátákra áttérve (60. ábra):

$$T=\left\{(r, \varphi) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq 2\cos\varphi\right\}.$$

A transzformációt elvégezve:

$$\frac{V}{2}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} (4-r^2)^{\frac{1}{2}} r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi.$$

Figyelembe véve, hogy $(4-4\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}|\sin^3\varphi|$, valamint a tartomány szimmetriáját, kapjuk, hogy:

$$\frac{V}{2}=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4^{\frac{3}{2}}(\sin^3\varphi-1)\,d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\big)\,d\varphi=$$

$$=\frac{16}{3}\left[\varphi+\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

tehát a Viviani-test térfogata:

$$V=\frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

5. Határozza meg az

$$(x-3)^2+z^2=4$$

egyenletű körvonal z tengely körüli forgatásakor keletkező te: felszínét!

A keletkező felület egyenlete (a IV.2. 3. feladata):

$$\mathbf{r}(u, \varphi)=(3+2\cos u)\cos\varphi\,\mathbf{i}+(3+2\cos u)\sin\varphi\,\mathbf{j}+ +2\sin u\,\mathbf{k} \qquad (u, \varphi)\in[0;\,2\pi]^2.$$

A felszín kiszámításához szükséges

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_\varphi|$$

meghatározása.

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u=-2\sin u\cos\varphi\mathbf{i}-2\sin u\sin\varphi\mathbf{j}+2\cos u\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_\varphi=(3+2\cos u)(-\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j}).$$

Ezek vektoriális szorzata:

$$\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_\varphi=(3+2\cos u)\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\sin u\cos\varphi & -2\sin u\sin\varphi & 2\cos u \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=(3+2\cos u)(-2\cos u\cos\varphi\mathbf{i}-2\cos u\sin\varphi\mathbf{j}-2\sin u\mathbf{k}).$$

Ennek abszolút értéke:

$$|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_\varphi|=(3+2\cos u)\sqrt{4\cos^2 u(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+4\sin^2 u}=$$
$$=2(3+2\cos u).$$

Ebből következően a tórusz felszíne:

$$A=\iint_T |\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_\varphi|\,du\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(6+4\cos u)\,d\varphi\,du=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(6+4\cos u)\,du=24\pi^2.$$

Lényegesen gyorsabban jutunk eredményre a Guldin-tétel alkalmazásával.

A forgatott kör kerülete:

$$k=4\pi.$$

A körlemez tömegközéppontja nyilvánvalóan a kör középpontja, így a tömegközéppont által a forgatáskor leírt kör kerülete: 6π.

Guldin tétele szerint a forgástest felszíne:

$$A=4\pi 6\pi=24\pi^2,$$

ami természetesen az előzővel megegyező érték. Hasonlóan igen könnyen kapjuk a tórusz térfogatát is.

A forgatott körlemez területe:

$$T=4\pi,$$

a térfogat tehát:

$$V=4\pi 6\pi=24\pi^2.$$

(A és V értéke általában különböző!)

6. Határozza meg a IV.2. szakasz 6. feladatában szereplő csavarfelület

$$t\in[0;2\pi] \qquad \text{és} \qquad u\in[0;1]$$

paraméterhatárokkal határolt részének felszínét!

A felület:

$$\mathbf{s}(t,u)=(\cos t-u\sin t)\mathbf{i}+(\sin t+u\cos t)\mathbf{j}+(t+u)\mathbf{k}.$$

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{s}'_t=(-\sin t-u\cos t)\mathbf{i}+(\cos t-u\sin t)\mathbf{j}+\mathbf{k},$$

$$\mathbf{s}'_u=-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

A felszín kiszámításához ezek vektoriális szorzatának abszolút értéke szükséges.

$$\mathbf{s}'_t\times\mathbf{s}'_u=-u\sin t\mathbf{i}+u\cos t\mathbf{j}+u\mathbf{k}.$$

Ennek abszolút értéke:

$$|\mathbf{s}'_t\times\mathbf{s}'_u|=\sqrt{2u^2}=u\sqrt{2}.$$

A felületdarab felszíne tehát:

$$A=\int_0^1\int_0^{2\pi}u\sqrt{2}\,dt\,du=2\pi\int_0^1 u\sqrt{2}\,du=\pi\sqrt{2}.$$

Megjegyzés: IV.1. szakasz 4. feladatában láttuk, hogy a csavarvonal ívhossza a $t\in[0;2\pi]$ intervallumon $2\pi\sqrt{2}$.

IV.2-ben említettük, hogy a felület úgynevezett lefejthető vonalfelület, azaz síkba kiteríthető. Várható volt tehát, hogy a felületdarab felszíne arányos a görbe ívhosszával.

Könnyen látható, hogy $t\in[0;t_0]$, $u\in[0;u_0]$ esetén a felszín.

$$A=\pi t_0u_0^2\sqrt{2}=\frac{U_0^2S}{2},$$

ahol S a görbe ívhossza.

7. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+xy\mathbf{k} \qquad D_r=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$$

felület felszínét!

A felület az

$$f:(x,y)\mapsto xy, \qquad (x,y)\in R^2$$

függvény grafikonjának — egy nyeregfelületnek — része. A felszín kiszámításához meg kell határoznunk a felületi normális abszolút értékét.

Mivel

$$\mathbf{r}'_x=\mathbf{i}+y\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_y=\mathbf{j}+x\mathbf{k},$$

tehát

$$\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=-y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Így az integrálandó függvény:

$$|\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y|=\sqrt{x^2+y^2+1}.$$

Mivel az integrálási tartomány az origó középpontú egységkör, célszerű polárkoordinátákra áttérnünk:

$$T=\{(r,\ \varphi)\mid 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}.$$

A felszín tehát:

$$A=\int_0^1\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+r^2}\,d\varphi\,dr=\frac{2\pi}{2}\int_0^1 2r(1+r^2)^{\frac{1}{2}}\,dr=$$

$$=\pi\left[\frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi(\sqrt{8}-1).$$

Megjegyzés: E feladatban látjuk, de általánosan is könnyen igazolható, hogy az

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y),\qquad (x,y)\in T\subset R^2$$

függvénnyel jellemzett felület felszíne:

$$A=\iint_T \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2},$$

ha ez az integrál létezik.

8. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(1-x^2-y^2)\mathbf{k}\qquad (x,y)\in R^2$$

felület xy sík feletti részének felszínét!

A felület az

$$f:(x,y)\mapsto 1-x^2-y^2,\qquad (x,y)\in R^2$$

függvény grafikonja, egy forgási paraboloid. Az xy síkkal alkotott metszésvonal egyenlete:

$$1-x^2-y^2=0.$$

Az előző feladat megjegyzése szerint az integrálandó:

$$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

Mivel az integrálási tartomány kör, így itt is célszerű polárkoordinátákra áttérnünk:

$$T=\{(r,\ \varphi)\mid 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}.$$

A felszín tehát:

$$A=\int_0^1\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\,d\varphi\,dr=\frac{2\pi}{8}\int_0^1 8r(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}\,dr=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}(\sqrt{125}-1).$$

Megjegyzés: Mivel forgásfelületről van szó, a felszín egyszeres integrálással is meghatározható.

Könnyen látható, hogy a feladatban szereplő felületdarab felszíne azonos az

$$x\mapsto\sqrt{x}\qquad x\in[0;\ 1]$$

függvény grafikonjának x tengely körüli forgatásakor keletkező felület felszínével. Ez viszont, mint azt az Olvasó az egyváltozós függvények analízisé-ből ismeri:

$$A=2\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\pi\int_0^1 \sqrt{4x+1}\,dx=$$

$$=\pi\left[\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{4\cdot\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}(\sqrt{125}-1),$$

ami az előzővel megegyező.

9. Határozza meg a

$$T=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq r^2,\ y\geqq 0\}$$

tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

Mivel a tartomány az y tengelyre szimmetrikus, és a tömegközéppont a szimmetriatengelyen helyezkedik el, tehát:

$$x_s=0.$$

Az y koordináta meghatározásakor figyelembe vesszük, hogy homogén síklapról van szó, tehát a sűrűség állandó, így az integráljel elé kiemelhető:

$$y_s=\frac{\iint\limits_T y\,dx\,dy}{\iint\limits_T dx\,dy}=\frac{\iint\limits_T y\,dx\,dy}{\mu(T)}.$$

A nevező a félkörlap területe:

$$\mu(T)=\frac{1}{2}r^2\pi,$$

az integrálási tartomány:

$$T=\{(x,y)\mid -r\leqq x\leqq r,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{r^2-x^2}\}.$$

így a számláló meghatározásakor először y szerint kell integrálnunk.

$$\iint\limits_T y\,dx\,dy=\int_{-r}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy\,dx=\int_{-r}^{r}\frac{r^2-x^2}{2}\,dx=\frac{2}{3}r^3.$$

Tehát a tömegközéppont y koordinátája:

$$y_s=\frac{4r}{3\pi}.$$

Megjegyzés: y_s értékét lényegesen egyszerűbben megkaphatjuk Guldin tételei alapján.

Mivel a félkör forgatásakor egy gömb keletkezik, így:

$$V_{\text{gömb}}=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{r^2\pi}{2}2\pi y_s,$$

ahol $2\pi y_s$ a tömegközéppont által megtett út.
Ezt rendezve:

$$y_s=\frac{4r}{3\pi}.$$

10. Határozza meg a

$$T=\{(x,y)\mid x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$$

tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

A tartomány (62. ábra) szimmetrikus az $y=x$ egyenesre, azaz $x_s=y_s$.
A tömegközéppont x koordinátája:

$$x_s=\frac{\iint\limits_T x\,dx\,dy}{\iint\limits_T dx\,dy}.$$

A számlálót már az V.3. szakasz feladatában meghatároztuk:

$$\iint_T x\,dx\,dy=\frac{8}{105}.$$

A nevezőt az ott látott módszerrel integráljuk az

$$x:=r\cos^3\varphi,$$
$$y:=r\sin^3\varphi$$

transzformációt alkalmazva:

$$\iint_T dx\,dy=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\,dr=$$

$$=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3r}{4}\sin^2 2\varphi\,d\varphi\,dr=\frac{3}{8}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi\,dr=$$

$$=\frac{3}{8}\int_0^1 r\frac{\pi}{2}\,dr=\frac{3\pi}{32}.$$

Ebből következően:

$$x_s=y_s=\frac{256}{315\pi}\approx 0{,}259.$$

Megjegyzés: E feladatnál is meghatározhatnánk y_s értékét a térfogat ismeretében: y_s-ből viszont kiszámíthatjuk a síklap forgatásával keletkező test térfogatát:

$$V=\mu(T)2\pi y_s=\frac{3\pi}{32}2\pi\frac{256}{315\pi}=\frac{16}{105}\pi.$$

11. Határozza meg annak az egységnégyzetet lefedő síklemez tömegközéppontjának koordinátáit, amelynek sűrűsége:

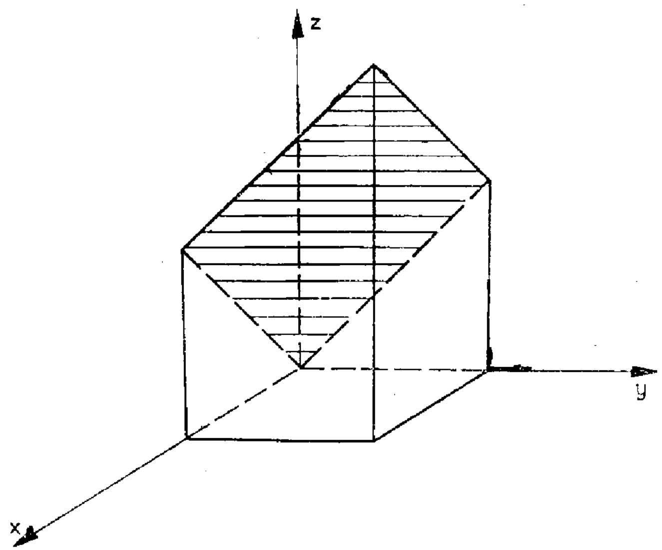
$$\varrho:(x,y)\mapsto x+y \qquad (x,y)\in[0;1]^2.$$

Mivel ϱ szimmetrikus két változójában, s a tartomány szimmetrikus az $y=x$ egyenesre, így

$$x_s=\frac{\iint_T x(x+y)\,dx\,dy}{\iint_T (x+y)\,dx\,dy}=\frac{\int_0^1\int_0^1 (x^2+xy)\,dx\,dy}{\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy}=$$

$$=\frac{\int_0^1\left(\frac{1}{3}+\frac{y}{2}\right)dy}{\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y\right)dy}=\frac{7}{12}.$$

A tömegközéppont tehát az $S\left(\frac{7}{12};\frac{7}{12}\right)$ pontban van.



66. ábra

Megjegyzés: A most megoldott feladatot úgy is felfoghatjuk, hogy a 66. ábrán látható homogén test tömegközéppontjának x és y koordinátáját határoztuk meg. A z koordináta meghatározásához már hármas integrál szükséges. (E test magassága a $P(x, y)$ pontban $x+y$.]

12. Határozza meg az R sugarú, homogén, ϱ sűrűségű, origó középpontú henger origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Mint e rész bevezetőjében láttuk, az origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték (ϱ állandó, így kiemelhető):

$$\Theta=\varrho\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Célszerű polárkoordinátákkal dolgoznunk:

$$\Theta=\varrho\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy=\varrho\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2 r\,d\varphi\,dr=$$

$$=\frac{2\pi\varrho R^4}{4}=\pi R^2\varrho\frac{R^2}{2}=m\frac{R^2}{2},$$

ahol m a korong tömege.

Megjegyzés: A kapott eredmény homogén R sugarú henger tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékának is tekinthető.

13. Határozza meg a

$T=\{(x, y) \mid 0\leqq x\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b\}$

tartományt lefedő homogén síklemez y tengelyre vett tehetetlenségi nyomatékát!

E rész bevezetője szerint:

$$\Theta_y=\varrho\iint_T x^2\,dx\,dy=\varrho\int_0^b\int_0^a x^2\,dx\,dy=\frac{1}{3}\varrho a^3 b=\frac{1}{3}ma^2,$$

ahol $m=ab\varrho$ a lap tömege.

A feladat megoldása egy a hosszúságú rúd, a végpontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának is tekinthető.

VI. HÁRMAS INTEGRÁL

1. Hármas integrál tégla-, ill. normáltartomány esetén

A hármas integrál definícióját a kettős integrál definíciójához hasonlóan adjuk meg.

Tekintsük a $V \subset R^3$ mérhető, korlátos, összefüggő tartományt! (V-t *mérhetőnek* nevezzük, ha a V-be beírt poliéderek térfogatának felső határa és a V köré írt poliéderek térfogatának alsó határa megegyezik.)

V térfogatát, mértékét jelölje $\mu(V)$.

Tekintsük V egy felosztását! (Egy tartomány felosztását V.1-ben definiáltuk.) Azt mondjuk, hogy a felosztás minden határon túl finomodik, ha a V_i ($i=1, \ldots, n$) halmazok mindegyikének átmérője zérushoz tart.

Legyen az $f: V \to R$ háromváltozós függvény korlátos V-n, s jelölje $m_i(M_i)$ az f értékeinek alsó (felső) határát a $V_i \subset V$ halmazon.

Az f függvényt *V-n integrálhatónak* nevezzük, ha a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mu(V) \qquad \text{és a} \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(V_i)$$

összegek határértéke bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozat esetén megegyezik. E közös határértéket nevezzük *f V-re vett hármas* (térfogati) *integráljának*.

Jelölése:

$$\iiint_V f = \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

de szokásos az

$$\int_V f\, dV$$

jelölés is.

Ha f integrálható V-n és

$$V = V_1 \cup V_2,$$

ahol V_1 és V_2 mérhető tartományok, amelyeknek nincs közös belső pontjuk, akkor a definícióból következően:

$$\iiint_V f = \iiint_{V_1} f + \iiint_{V_2} f.$$

Ha f folytonos a mérhető, korlátos, zárt V tartományon, akkor f V-re vonatkozó integrálja biztosan létezik, de f folytonossága itt sem szükséges feltétele az integrálhatóságnak.

Téglatartományról beszélünk, ha

$$V = \{(x, y, z) \mid a_1 \leqq x \leqq b_1,\ a_2 \leqq y \leqq b_2,\ a_3 \leqq z \leqq b_3\}.$$

Ekkor, ha f integrálható V-n és létezik a

$$z \mapsto \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y, z)\, dy\, dx, \qquad z \in [a_3; b_3]$$

függvény, akkor

$$\iiint_V f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Az integrálás sorrendje téglatartomány esetén felcserélhető. Itt is igaz, hogy ha f integrálható és

$$f(x, y, z) = g_1(x) g_2(y) g_3(z) \qquad \text{minden } (x, y, z) \in V$$

esetén, akkor f hármas integrálja három egyszeres integrál szorzataként számítható ki.

Legyen T az xy sík normáltartománya, legyenek továbbá a

$$\left.\begin{aligned} g_1 &: (x, y) \mapsto g_1(x, y), \\ g_2 &: (x, y) \mapsto g_2(x, y) \end{aligned}\right. \qquad (x, y) \in T$$

függvények folytonosak T-n, és teljesüljön ezekre T minden pontjában a

$$g_1(x, y) \leqq g_2(x, y)$$

egyenlőtlenség!

Ekkor a

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in T, g_1(x, y) \leqq z \leqq g_2(x, y)\}$$

tartományt az xy síkra *normáltartománynak* nevezzük. Hasonlóan értelmezhető xz-re, ill. yz-re normáltartomány is.

Normáltartományok esetén az integrálás sorrendje *meghatározott*. Például az előző tartomány esetén (ha f integrálható):

$$\iiint_V f = \iint_T \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy.$$

Ha V nem normáltartomány, akkor V-t normáltartományokra bontjuk, esetleg az integrál transzformációjával próbálkozunk. (A transzformációt VI.2-ben tárgyaljuk.)

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto x^2 + 4yz, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

függvény egységkockára vonatkozó integrálját!

Mivel V téglatartomány, ezért az integrálás sorrendje tetszőleges. Integráljunk először z szerint:

$$\int_0^1 (x^2 + 4yz)\, dz = [x^2 z + 2yz^2]_0^1 = x^2 + 2y.$$

Mivel a z szerinti integrálást már elvégeztük, így már csak a kapott függvény egységnégyzetre vett kettős integrálját kell meghatároznunk:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + 2y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + 2xy\right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + 2y\right) dy = \frac{4}{3}.$$

A hármas integrál kiszámítása tehát az egyik változó szerinti integrálás elvégzése után egy kettős integrál értékének meghatározásával egyenértékű.

2. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}, \quad D_f = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x+y+z > 0\}$$

függvény egységkockára vonatkozó integrálját!

f nem korlátos az egységkockán, de mivel itt

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

és

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

létezik, így f adott tartományra vett integrálja is létezik. (L. az V.1. szakasz 8. feladatát!)

Az integrálás sorrendje tetszőleges, mivel T téglatartomány. Integráljunk először z szerint!

$$\int_0^1 (x+y+z)^{-\frac{1}{2}} dz = \left[2(x+y+z)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2(1+y+x)^{\frac{1}{2}} - 2(y+x)^{\frac{1}{2}}.$$

E függvény egységnégyzetre vett kettős integrálja:

$$2\int_0^1\int_0^1\left[(1+y+x)^{\frac{1}{2}}-(y+x)^{\frac{1}{2}}\right]dy\,dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1\left[(1+y+x)^{\frac{3}{2}}-(y+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 dx=\frac{4}{3}\int_0^1\left((2+x)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx-$$

$$-2\int_0^1(1+x)^{\frac{3}{2}}dx\approx 0{,}86.$$

3. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}+y+z},$$

$$D_f=\{(x,y,z)\in R^3\mid x\geqq 0,\ \sqrt{x}+y+z\neq 0\}$$

függvényt az egységkockára!

Az előző feladatnál látott megoldásból következik, hogy f egységkockára vett integrálja létezik. Az integrálás sorrendje tetszőleges, mivel téglatartományra integrálunk.

Először z szerint integrálva:

$$\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{x}+y+z}=[\ln(\sqrt{x}+y+z)]_0^1=\ln(\sqrt{x}+y+1)-\ln(\sqrt{x}+y).$$

A kapott eredmény y szerinti integrálásakor mindkét tagban parciálisan integrálunk. Az első tag:

$$\int_0^1 1\ln(\sqrt{x}+y+1)\,dy=[y\ln(\sqrt{x}+y+1)]_0^1-\int_0^1\frac{y}{\sqrt{x}+y+1}dy=$$

$$=\ln(\sqrt{x}+2)-\int_0^1\left(\frac{y+\sqrt{x}+1}{y+\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+y+1}\right)dy=$$

$$=\ln(\sqrt{x}+2)-[y-(\sqrt{x}+1)\ln(\sqrt{x}+y+1)]_0^1=$$

$$=(\sqrt{x}+2)\ln(\sqrt{x}+2)-(\sqrt{x}+1)\ln(\sqrt{x}+1)-1.$$

Hasonlóan a második tag:

$$\int_0^1 1\ln(\sqrt{x}+y)\,dy=[y\ln(\sqrt{x}+y)]_0^1-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}+y}dy=$$

$$=\ln\sqrt{x}+1-\int_0^1\left(\frac{y+\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{y+\sqrt{x}}\right)dy=$$

$$=\ln(\sqrt{x}+1)-[y-\sqrt{x}\ln(y+\sqrt{x})]_0^1=$$

$$=(\sqrt{x}+1)\ln(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-1.$$

E kettő különbségét kell x szerint integrálnunk:

$$\iiint_V f=\int_0^1((\sqrt{x}+2)\ln(\sqrt{x}+2)-2(\sqrt{x}+1)\ln(\sqrt{x}+1)-$$

$$-\sqrt{x}\ln\sqrt{x})\,dx.$$

A három tagot külön-külön integráljuk. Az első tag integrálásakor célszerű az

$$u:=\sqrt{x}+2$$

helyettesítés:

$$\int_0^1(\sqrt{x}+2)\ln(\sqrt{x}+2)\,dx=\int_2^3 u\ln u\ 2(u-2)\,du.$$

Parciális integrálással:

$$\int_2^3 2(u^2-2u)\ln u\,du=\left[2\left(\frac{u^3}{3}-u^2\right)\ln u-2\left(\frac{u^3}{9}-\frac{u^2}{2}\right)\right]_2^3=$$

$$=3-2\left(\frac{8}{3}-4\right)\ln 2+2\left(\frac{8}{9}-2\right)\approx 2{,}64.$$

A második tagnál hasonlóan járunk el:

$$v:=\sqrt{x}+1$$

helyettesítéssel:

$$\int_1^2 2v\ln v2(v-1)\,dv=\left[4\left(\frac{v^3}{3}-\frac{v^2}{2}\right)\ln v-4\left(\frac{v^3}{9}-\frac{v^2}{4}\right)\right]_1^2=$$

$$=4\left(\frac{8}{3}-2\right)\ln 2-4\left(\frac{8}{9}-1\right)+4\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)\approx 1{,}76.$$

A harmadik tagban parciálisan integrálva:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{x}\ln x\,dx=\frac{1}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\ln x\right]_0^1-\left[\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{9},$$

mivel

$$\lim_{0+} x^{\frac{3}{2}}\ln x=0.$$

A részeredményeket összevonva:

$$\iiint_V f\approx 0{,}66.$$

4. Igazolja, hogy létezik az

$$f:(x,y,z)\mapsto xyze^{\frac{-x^2+y^2+z^2}{2}},\qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvény első térnyolcadra vonatkozó improprius integrálja, s határozza meg az integrál értékét!

Határozzuk meg először f integrálját a

$$V=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq a,\ 0\leq z\leq a\}$$

kockára!

Mivel V téglatartomány és

$$xyze^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}=xe^{-\frac{x^2}{2}}ye^{-\frac{y^2}{2}}ze^{-\frac{z^2}{2}},$$

így a hármas integrál három egyszeres integrál szorzatával egyenlő:

$$\iiint_V f=\int_0^a xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_0^a ye^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_0^a ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\left(\int_0^a xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^3=\left(\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^a\right)^3=\left(1-e^{-\frac{a^2}{2}}\right)^3.$$

Mivel

$$\lim_{\infty}\left(1-e^{-\frac{a^2}{2}}\right)^3=1,$$

így az f függvény első térnyolcadra vett integrálja létezik és 1.

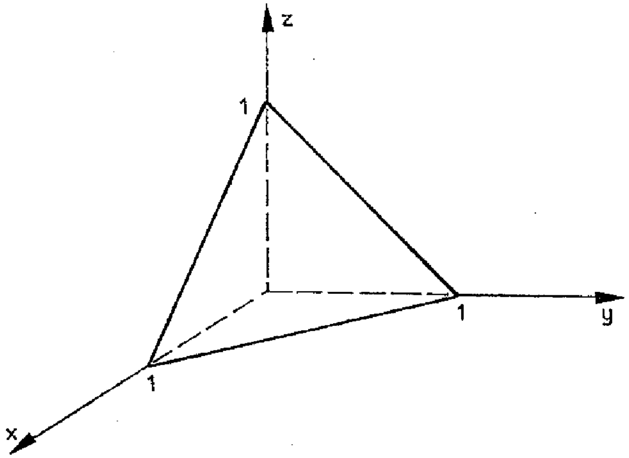
Megjegyzés: A feladat eredményéből következik, hogy

$$\iiint_{R^3}|f|=8.$$

5. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto 2xy,\qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvényt a 67. ábrán látható tartományra!



67. ábra

A tartományt a koordinátasíkok és az $x+y+z=1$ sík határolja. A tartomány egy lehetséges megadási módja:

$$V=\{(x, y, z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x,\ 0 \leqq z \leqq 1-x-y\}.$$

V az xy síkra normáltartomány.

Először z szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{1-x-y} 2xy\, dz = [2xyz]_0^{1-x-y} = 2xy-2x^2y-2xy^2.$$

Ennek y szerinti integrálja:

$$\int_0^{1-x} (2xy-2x^2y-2xy^2)dy = \left[xy^2-x^2y^2-2x\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{3}x^4+x^3-x^2+\frac{1}{3}x.$$

Tehát f integrálja:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^4+x^3-x^2+\frac{1}{3}x\right)dx = \frac{1}{60}.$$

Megjegyzés: A tartomány az xz, ill. yz síkra is normáltartomány, így megadható pl.:

$$V=\{(x, y, z) \mid 0 \leqq z \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1-z,\ 0 \leqq y \leqq 1-z-x\}$$

alakban is. Ekkor először y, majd x, végül z szerint kell integrálni. Az Olvasó gyakorlásképpen ellenőrizheti, hogy így elvégezve az integrálást, ugyanaz az eredmény adódik.

6. Integrálja az

$$f:(x, y, z) \mapsto 2y, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

függvényt a

$$V=\{(x, y, z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leqq z \leqq 1-x^2-y^2\}$$

tartományra!

A tartomány, amely az xy síkra normáltartomány a

$$z=1-x^2-y^2$$

paraboloid alatti térrész első térnyolcadba eső része. Először z szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{1-y^2-x^2} 2y\, dz = [2yz]_0^{1-y^2-x^2} = 2y-2y^3-2yx^2,$$

ennek y szerinti integrálja:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2y-2y^3-2yx^2)\, dy = \left[y^2-\frac{y^4}{2}-y^2x^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$=1-x^2-\frac{(1-x^2)^2}{2}-x^2(1-x^2) = \frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}.$$

Tehát f integrálja:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{4}{15}.$$

7. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto xyz, \qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvényt a

$$V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqq 1\}$$

tartományra!

Határozza meg

$$\iiint_V |f|$$

értékét is!

A tartomány egy origó középpontú, egységsugarú gömb. Mivel f páratlan mindhárom változójában, V szimmetrikus a koordinátasíkokra, így

$$\iiint_V f=0.$$

f abszolút értékének integrálásakor elegendő az első térnyolcadra integrálnunk. Ennek egy lehetséges megadási módja:

$$V_1=\{(x,y,z)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2},\ 0\leqq z\leqq\sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Mivel V_1-et az xy síkra normáltartományként adtuk meg, így először z szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz=\frac{1}{2}xy(1-x^2-y^2)=\frac{1}{2}xy-x^3y-xy^3.$$

Ennek y szerinti integrálja:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(xy-x^3y-xy^3)\,dy=\frac{1}{2}\left[\frac{xy^2}{2}-\frac{x^3y^2}{2}-\frac{xy^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{8}(x-2x^3+x^5).$$

Tehát:

$$\iiint_V |f|=8\iiint_{V_1} f=\int_0^1(x-2x^3+x^5)\,dx=\frac{1}{6}.$$

8. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto e^{\frac{z}{xy}}, \qquad D_f=\{(x,y,z)\in R^3\mid xy\neq 0\}$$

függvényt a

$$V=\{(x,y,z)\mid 1\leqq x\leqq 2,\ 1\leqq y\leqq 1+x,\ 0\leqq z\leqq xy\}$$

tartományra!

A tartomány az xy síkra normáltartomány, így először z szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{xy} e^{\frac{z}{xy}}\,dz=\left[\frac{e^{\frac{z}{xy}}}{\frac{1}{xy}}\right]_0^{xy}=xy(e-1),$$

tehát

$$\iiint_V f=(e-1)\int_1^2\int_1^{1+x} xy\,dy\,dx=(e-1)\int_1^2\left[\frac{xy^2}{2}\right]_1^{1+x}dx=$$

$$=\frac{e-1}{2}\int_1^2(2x^2+x^3)\,dx=\frac{101}{24}(e-1).$$

9. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto xy, \qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvényt a

$$V=\{(x,y,z)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2},\ 0\leqq z\leqq 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$$

tartományra!

A tartomány a $(z-1)^2=x^2+y^2$ egyenletű körkúp első síknegyedbeli, a $z=0$, ill. $z=1$ síkokkal határolt része.
Először z szerint kell integrálnunk:

$$\int_0^{1-\sqrt{y^2+x^2}} xy\,dz=[xyz]_0^{1-\sqrt{y^2+x^2}}=xy-xy\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ennek y szerinti integrálja:

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} [xy-xy(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]\,dy=\frac{1}{2}\left[xy^2-x\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}x(1-x^2)-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^4,$$

tehát f integrálja:

$$\iiint_V f=\int_0^1\left(\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^4\right)dx=\frac{9}{40}.$$

2. A hármas integrál transzformációja

Az V. fejezet 3. szakaszának tárgyalása során láttuk, hogy ügyes transzformációval egyes feladatok megoldása egyszerűbbé válik.

Hasonló céllal tárgyaljuk a hármas integrál transzformációját is.

Ha az

$$\begin{aligned} x&:(u,v,w)\mapsto x(u,v,w),\\ y&:(u,v,w)\mapsto y(u,v,w), \qquad (u,v,w)\in V'\subset R^3\\ z&:(u,v,w)\mapsto z(u,v,w), \end{aligned}$$

függvények az u, v, w tér V' tartományát kölcsönösen egyértelműen képezik le az x, y, z tér V tartományára, e függvények folytonosan differenciálhatók, és f integrálható V-n, akkor:

$$\iiint_V f=\iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u\ v,w),z(u,v,w))\times$$

$$\times\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dx\,dy\,dz,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix},$$

az ún. Jacobi-determináns.

Leggyakoribb transzformáció a hengerkoordinátákra, ill. gömbi koordinátákra való áttérés. Hengerkoordináták esetén:

$$\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi,\\ z&=z, \end{aligned}$$

a Jacobi-determináns ekkor r-rel egyenlő.

Gömbi koordináta-rendszer esetén:

$$\begin{aligned} x&=r\sin\vartheta\cos\varphi,\\ y&=r\sin\vartheta\sin\varphi,\\ z&=r\cos\vartheta, \end{aligned}$$

a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$-val egyenlő.

Az I. fejezetben láttuk, hogy a z tengely pontjainak kivételével a leképezés mindkét esetben kölcsönösen egyértelmű. Igazolható, hogy akkor is helyes eredményre jutunk, ha a tartománynak a z tengellyel van közös pontja.

Gyakorló feladatok

1. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto \frac{z}{1+x^2+y^2}, \qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvényt a

$$V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

tartományra!

A tartomány egy egységnyi magasságú körhenger, melynek tengelye a z tengely.

Célszerű hengerkoordinátákra áttérni. Ekkor a tartomány:

$$V=\{(r,\varphi,z)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq \varphi\leqq 2\pi,\ 0\leqq z\leqq 1\}.$$

Mivel a Jacobi-determináns r-rel egyenlő, így:

$$\iiint_V f=\int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{z}{1+r^2}\,r\,d\varphi\,dz\,dr=2\pi\int_0^1\int_0^1\frac{zr}{1+r^2}\,dz\,dr=$$

$$=\pi\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,dr=\frac{\pi}{2}\left[\ln(1+r^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

2. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto x^2+z^2, \qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvényt az előző szakasz 9. feladatában szereplő tartományra!

A tartomány a

$(z-1)^2=x^2+y^2$ egyenletű körkúp $0\leqq z\leqq 1$ része. A kúpfelületet az xy síkkal párhuzamos sík körben metszi, amelynek sugara:

$$r=|z-1|=1-z, \qquad \text{ha} \qquad 0\leqq z\leqq 1.$$

Tehát hengerkoordinátákra áttérve a tartomány:

$$V=\{(r,\varphi,z)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq z\leqq 1-r\}.$$

(z felső határát az $r=1-z$ egyenlőségből kaptuk.) A transzformációt elvégezve:

$$\iiint_V f=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1-r}(r^2\cos^2\varphi+z^2)r\,dz\,d\varphi\,dr=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\left(r^3(1-r)\cos^2\varphi+\frac{1}{3}r(1-r)^3\right)dr\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\left((r^3-r^4)\cos^2\varphi+\frac{1}{3}(r-3r^2+3r^3-r^4)\right)dr\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{20}\cos^2\varphi+\frac{1}{60}\right)d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{20}\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2}+\frac{1}{60}\right)d\varphi=\frac{\pi}{48}.$$

Megjegyzés: A feladatban látott meggondolás egyéb forgásfelületekkel határolt tartományok esetén is használható.

3. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad D_f=\{(x,y,z)\in R^3\mid x^2+y^2\neq 0\}$$

függvényt a 68. ábrán látható tartományra!

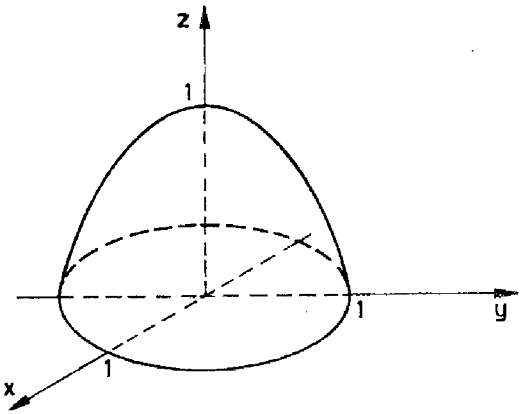
A tartományt a $z=1-x^2-y^2$ paraboloid és az xy sík határolja. A paraboloidot az xy síkkal párhuzamos síkokkal metszve, a metszésvonalak körök, amelyeknek sugara

$$r=\sqrt{1-z}, \qquad z\in[0;1].$$

Hengerkoordinátákra áttérve a tartomány határai tehát:

$$V=\{(r,\varphi,z)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ 0\leqq z\leqq 1-r^2\}.$$

A transzformációt elvégezve:



68. ábra

$$\iiint_V f=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r^2}\frac{z}{r}r\,dz\,d\varphi\,dr=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^2\,d\varphi\,dr=$$

$$=\pi\int_0^1(1-2r^2+r^4)\,dr=\frac{8}{15}.$$

Megjegyzés: Ha a tartomány szimmetriatengelye nem a z tengely, akkor a hengerkoordinátákat kissé módosítva alkalmazzuk, mint ezt a következő feladatban tesszük.

4. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto 2ye^{\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}},\qquad (x,y,z)\in R^3$$

függvényt a

$$V=\left\{(x,y,z)\mid 0\leq y\leq 1,\ \frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leq 1\right\}$$

tartományra!

A tartomány egy egységnyi magasságú henger, amelynek alapgörbéje az xz síkban levő ellipszis, tengelye az y tengely. Végezzük el a következő transzformációt:

$$x=2r\cos\varphi,$$
$$z=3r\sin\varphi.$$
$$y=y.$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke $6r$, és

$$V=\{(r,\varphi,y)\mid 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq y\leq 1\}.$$

Mivel a helyettesítést elvégezve

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=r^2,$$

így:

$$\iiint_V f=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 2ye^{r^2}6r\,dy\,d\varphi\,dr=$$

$$=\int_0^1 2y\,dy\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 6re^{r^2}\,dr=[y^2]_0^1[\varphi]_0^{2\pi}[3e^{r^2}]_0^1=6\pi(e-1).$$

Az integrál átalakításakor felhasználtuk, hogy az új változók bevezetésével V téglatartomány lett, és az integrálandó függvény szorzatalakban írható fel.

5. Integrálja az

$$f:(x,y,z)\mapsto\frac{x}{\sqrt{\frac{y^2}{4}+z^2}},\qquad D_f=\left\{(x,y,z)\in R^3\ \Big|\ \frac{y^2}{4}+z^2\neq 0\right\}$$

függvényt a

$$V=\left\{(x,y,z)\mid (x-1)^2\geq\frac{y^2}{4}+z^2,\ 0\leq x\leq 1\right\}$$

tartományra!

Az integrálási tartományt a zy sík és az

$$(x-1)^2=z^2+\frac{y^2}{4}$$

egyenletű kúpfelület határolja. E kúp csúcsa az A (1 ; 0; 0) pont, alapgörbéje az yz síkban levő

$$z^2+\frac{y^2}{4}=1 \text{ ellipszis.}$$

Alkalmazzuk a következő transzformációt:

$$x=x,$$
$$y=2r\cos\varphi,$$
$$z=r\sin\varphi.$$

Mivel

$$z^2+\frac{y^2}{4}=r^2,$$

így

$$(x-1)^2=r^2,$$

azaz

$$1-x=r, \qquad \text{ha} \qquad x\in[0;\, 1].$$

A tartomány határai tehát:

$$V=\{(x, r, \varphi) \mid 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq x\leq 1-r\}.$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke $2r$, így:

$$\iiint\limits_V f=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r}\frac{x}{r}\,2r\,dx\,d\varphi\,dr=\int_0^1\int_0^{2\pi}[x^2]_0^{1-r}\,d\varphi\,dr=$$

$$=2\pi\int_0^1(1-r)^2\,dr=\frac{2}{3}\pi.$$

6. Integrálja az

$$f:(x, y, z)\mapsto\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, \qquad (x, y, z)\in R^3\setminus\{(0;0;0)\}$$

függvényt a

$$V=\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$$

tartományra!

Határozza meg f abszolút értékének e tartományon vett integrálját is!

Az integrálási tartomány egy origó középpontú egységsugarú gömb. Mivel f mindhárom változójában páratlan, és V a koordinátasíkokra szimmetrikus, így f V tartományon vett integrálja zérus.

f abszolút értékének integrálásakor elegendő az integrál értékét a tartomány első térnyolcadba eső részére meghatároznunk.

Célszerű gömbi koordinátákat alkalmazni.

Ekkor:

$$V_1=\left\{(r, \varphi, \vartheta)\,\middle|\, 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\ 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}\right\}.$$

A helyettesítést elvégezve:

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=r\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi,$$

tehát $|f|$ integrálja:

$$\iiint\limits_V |f|=8\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\, r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr=$$

$$=8\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=2[r^4]_0^1\left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$$

7. Határozza meg az

$$f: (x, y, z) \mapsto e^{-x^2-y^2-z^2}, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

függvény első térnyolcadra vett integrálját!

Az előző feladathoz hasonlóan e feladatnál is dolgozhatnánk gömbi koordinátákkal. Célszerűbb azonban V.3. 4. feladatának eredményét felhasználni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

tehát

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Ennek alkalmazásával:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2} e^{-y^2} e^{-z^2}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy \int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^3 = \frac{\pi}{8}\sqrt{\pi}.$$

8. Határozza meg az

$$f: (x, y\ z) \mapsto e^{\sqrt{x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}}} \qquad (x\ y\ z) \in R^3$$

függvény

$$V = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leqq 1\right\}$$

tartományra vett integrálját!

A tartomány egy origó középpontú ellipszoid, amelynek tengelyei a koordinátatengelyekkel egyirányúak.

Célszerű kissé módosított gömbi koordinátákat (elliptikus koordináták) alkalmazni:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y = 2r \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$z = 3r \cos\vartheta.$$

Mivel a Jacobi-determináns második sora kétszerese, harmadik sora háromszorosa a gömbi koordináta-rendszer alkalmazásakor felírt determinánsnak, így a determináns értéke $6r^2 \sin\vartheta$.

Az integrálási tartomány:

$$V = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi\}.$$

f integrálja tehát:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 6r^2 \sin\vartheta\, e^r\,d\vartheta\,d\varphi\,dr =$$

$$= \int_0^1 6r^2 e^r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Az első tényező értéke parciális integrálással:

$$\int_0^1 6r^2 e^r\,dr = [6r^2e^r - 12re^r + 12e^r]_0^1 = 6e - 12.$$

Végeredményben a keresett integrál:

$$\iiint_V f = (6e-12)2\pi \cdot 2 = 24\pi(e-2).$$

9. Integrálja a

$$V = \left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1\right\}$$

tartományra az

$$f:(x, y, z) \mapsto \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}, \qquad (x, y, z) \in V$$

függvényt!

Az előző feladathoz hasonlóan végezzük el a következő transzformációt:

$$x = ar \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y = br \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$z = cr \cos\vartheta.$$
$$(a, b, c \in R^+)$$

A Jacobi-determináns értéke $abcr^2 \sin\vartheta$, az integrálási tartomány:

$$V = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi\}.$$

Ezt alkalmazva:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{1-r^2}\, abcr^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr =$$

$$= abc \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta = 4abc\pi \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\, dr.$$

Célszerű az $r := \sin t$ helyettesítést elvégezni:

$$4\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\, dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát f integrálja az adott tartományon

$\frac{1}{4} abc\pi^2$-tel egyenlő.

10. Integrálja az

$$f:(x, y, z) \mapsto x, \qquad (x, y, z) \in R^3$$

függvényt a

$$V = \{(x, y, z) \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 \leqq 1\}$$

gömbre!

Célszerű a koordináta-rendszer kezdőpontját a gömb középpontjába tolva gömbi koordinátákat bevezetni, azaz elvégezni a következő transzformációt:

$$x = 3 + r \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y = 2 + r \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$z = 4 + r \cos\vartheta.$$

Az integrálási tartomány ekkor:

$$V = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \vartheta \leqq \pi\}.$$

Mivel állandó deriváltja zérus, így a Jacobi-determináns értéke $r^2 \sin\vartheta$, tehát:

$$\iiint_V f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3 + r \sin\vartheta \cos\varphi) r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(3r^2 \sin\vartheta + r^3 \cos\varphi \frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\right) d\vartheta \, d\varphi \, dr.$$

Mivel

$$\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta = 2,$$

és

$$\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\vartheta}{2}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

tehát a ϑ szerinti integrálás elvégzése után:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(6r^2 + \frac{\pi}{2} r^3 \cos\varphi\right) d\varphi\, dr = \int_0^1 12\pi r^2\, dr = 4\pi.$$

Az eredmény az integrálási tartomány térfogatának háromszorosa.

Megjegyzés: Az eredményt egyszerűbben kapjuk meg, ha felhasználjuk, hogy a gömb tömegközéppontjának x koordinátája 3, és (l. a következő szakaszt!)

$$x_s = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV},$$

ahol a nevező a gömb térfogata.

3. A hármas integrál alkalmazásai

A hármas integrál definíciójából következően:

$$\int_V dV = \mu(V) = \text{a } V \text{ tartomány térfogata.}$$

A lehetséges fizikai alkalmazások közül csak néhányat említünk: Ha a V térrészt kitöltő test sűrűségét a

$$\varrho : (x, y, z) \mapsto \varrho(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in V$$

függvény írja le, akkor e test tömege:

$$m = \int_V \varrho\, dV.$$

(Ha ϱ a térrész töltéssűrűségét adja meg, akkor a fenti integrál a térrészben levő töltés mennyiségét adja meg.)

A V térrészt betöltő ϱ sűrűségű test tömegközéppontjának koordinátái — a kettős integrál alkalmazásainál látottak logikus általánosításaként:

$$x_s = \frac{\iiint_V x\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_V \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz},$$

y_s, z_s kiszámítása hasonlóképpen történik.

(Természetesen, ha ϱ állandó, akkor az integráljel elé kiemelhető.)

Az előzőekben szereplő test x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Az origóra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a

$$V = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$$

tartomány térfogatát!

A tartomány egy ellipszoid, amelynek tengelyei a koordináta-tengelyekkel egyirányúak.

A tartomány térfogata:

$$\mu(V)=\int_V dV.$$

Az integrál meghatározásához a VI.2. szakasz 9. feladatában látott transzformációt végezzük el:

$$x=ar\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$y=br\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$z=cr\cos\vartheta.$$

E transzformációval:

$$\int_V dV=abc\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr=2abc\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi\,dr=$$

$$=4\pi abc\int_0^1 r^2\,dr=\frac{4\pi}{3}abc.$$

Természetesen, ha $a=b=c=R_0$, azaz a tartomány gömb, a test térfogatára a jól ismert

$$V=\frac{4\pi}{3}R_0^3 \text{ adódik.}$$

2. Határozza meg az előző feladatbeli ellipszoid $z\geqq 0$ részének tömegközéppontját, ha e test sűrűsége állandó!

Mivel a z tengely a test szimmetriatengelye, így a tömegközéppont a z tengelyen helyezkedik el, azaz

$$x_s=y_s=0,$$

a z koordináta:

$$z_s=\frac{\displaystyle\iiint_V z\,dx\,dy\,dz}{\displaystyle\iiint_V dx\,dy\,dz}.$$

A nevező a térrész térfogatával egyenlő. Ez az érték — mivel félellipszoidról van szó — az előző feladatban számított térfogat fele, azaz

$$\int_V dV=\frac{2\pi}{3}abc.$$

A számláló meghatározásához az előbb látott transzformációt alkalmazzuk:

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=abc^2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\vartheta r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr=$$

$$=abc^2\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\vartheta\,d\vartheta=abc^2\frac{\pi}{4}.$$

A tömegközéppont z koordinátája tehát:

$$z_s=\frac{abc^2\dfrac{\pi}{4}}{abc\dfrac{2\pi}{3}}=\frac{3}{8}c.$$

A tömegközéppont tehát az $S\left(0;0;\frac{3}{8}c\right)$ pontban van. (R_0 sugarú félgömb esetén:

$$z_s=\frac{3}{8}R_0\Big).$$

3. Határozza meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az

$$1\leqq x^2+y^2+z^2\leqq 4$$

gömbhéjból a

$$z^2=x^2+y^2 \qquad z\geqq 0$$

kúp vág ki!

A kúp tengelye a z tengely, félnyílásszöge $\frac{\pi}{4}$.

Elegendő a kérdéses test negyedrészének a térfogatát meghatároznunk. Gömbi koordinátákra áttérve ez a térrész a következőképp jellemezhető:

$$V_1=\left\{(r,\varphi,z)\,\middle|\,1\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Tehát a térfogat:

$$\mu(V)=\int_V dV=4\int_{V_1}dV=\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr=$$

$$=4\int_1^2 r^2\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\vartheta\,d\vartheta=4\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$$

4. Határozza meg az

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=2z$$

ellipszoid és az

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2\qquad z\ge 0$$

kúp közös részének térfogatát!

Az ellipszoid egyenlete

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+(z-1)^2=1$$

alakban is írható.
A két felület a $z=1$ síkon az

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

ellipszisben metszi egymást.

A térrész tehát:

$$V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1,\ \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}\le z\le 1+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\right\}.$$

Integráljunk először z szerint:

$$\int_V dV=\iint_T\left(\int_{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}}dz\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_T\left(1+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}-\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}\right)dx\,dy.$$

(Itt T-vel jelöltük az xy sík

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$$

tartományát.)

A kettős integrál meghatározásához célszerű polárkoordinátás alakra áttérni:

$$x=2r\cos\varphi,$$
$$y=3r\sin\varphi.$$

Ekkor

$$\int_V dV=6\int_0^1\int_0^{2\pi}r(1+\sqrt{1-r^2}-r)\,d\varphi\,dr=$$

$$=12\pi\int_0^1\left(r+r(1-r^2)^{\frac{1}{2}}-r^2\right)dr=$$

$$=12\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1=6\pi.$$

Megjegyzés: A feladatot egyszerűbben is megoldhatjuk. A szóban forgó térrész ugyanis egy egységnyi magasságú ellipszis alapú kúpból és egy félellipszoidból áll, tehát térfogata:

$$\mu(V)=\frac{1}{3}\,6\pi+\frac{2}{3}\,6\pi=6\pi.$$

(A kúp alapterülete $ab\pi=6\pi$.)

5. Határozza meg a

$$V=\left\{(x, y, z) \mid 0\leqq z\leqq c,\ \left(\frac{z}{c}-1\right)^2\geqq\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right\}$$

térrészt betöltő homogén test tömegközéppontjának koordinátáit!

A test egy ellipszis alapú kúp, amelynek tengelye az z tengely, tehát a tömegközéppont x, ill. y koordinátája zérus. A kúp térfogatát integrálás nélkül is könnyen meghatározhatjuk. Alapterülete, az ellipszis területe $ab\pi$-vel, magassága c-vel egyenlő, így

$$\mu(V)=\frac{abc\pi}{3}.$$

Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha a VI.2. szakasz 2. feladatához hasonlóan a következő transzformációt végezzük el:

$$x=ar\cos\varphi,$$
$$y=br\sin\varphi,$$
$$z=z.$$

Ekkor az integrálási tartomány:

$$V=\{(r, \varphi, z) \mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ 0\leqq z\leqq c(1-r)\}.$$

Ezt alkalmazva:

$$\int_V dV=ab\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{c(1-r)} r\,dz\,d\varphi\,dr=abc\int_0^1\int_0^{2\pi} r(1-r)\,d\varphi\,dr=$$

$$=2\pi abc\int_0^1 (r-r^2)\,dr=\frac{abc\pi}{3},$$

ami valóban az előzővel megegyező.

Meg kell határoznunk a z_s számlálójában levő integrál értékét is:

$$\int_V z\,dV=ab\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{c(1-r)} rz\,dz\,d\varphi\,dr=\frac{abc^2}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} r(1-r)^2\,d\varphi\,dr=$$

$$=\frac{\pi abc^2}{12}.$$

Végeredményben tehát a kúp tömegközéppontjának z koordinátája:

$$z_s=\frac{\pi abc^2}{12}:\frac{abc\pi}{3}=\frac{c}{4},$$

azaz a tömegközéppont a kúp magasságát 3 : 1 arányban bontja.

Megjegyzés: Ha az első feladatban szereplő ellipszoid $z\leqq 0$ részéből és az e feladatban szereplő kúpból alkotunk egy homogén testet, az eddigi számítások alapján ennek a tömegközéppontját is meg tudjuk határozni. A félellipszoid térfogata — így tömege is — az e feladatbeli kúp térfogatának kétszerese.

A kúp

$$S_1\left(0; 0; \frac{c}{4}\right)$$

tömegközéppontjában tehát egységnyi, az ellipszoid

$$S_2\left(0; 0; -\frac{3}{8}c\right)$$

tömegközéppontjában két egységnyi tömeg helyezkedik el. E két pontból álló pontrendszer tömegközéppontja:

$$S\left(0; 0; -\frac{c}{6}\right).$$

Ha ezt a testet gravitációs térben egy vízszintes lapra állítjuk, „keljfeljancsiként" viselkedik. Stabil egyensúlyi helyzetben akkor van, ha az ellipszoid helyezkedik el alul és a kúp tengelye függőlegesen áll.

6. Határozza meg az R sugarú homogén gömb középpontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

Vegyük fel a koordináta-rendszert úgy, hogy a gömb középpontja az origóban legyen, és a forgástengely a z tengellyel essen egybe!

Mint a bevezetőben láttuk:

$$\Theta_z = \iiint_V (x^2+y^2)\varrho \, dx\, dy\, dz.$$

Gömbi koordinátákra áttérve:

$$\Theta_z = \varrho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr =$$

$$= \varrho \int_0^R r^4\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta.$$

A harmadik tényező:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \int_0^{\pi} \sin \vartheta (1-\cos^2 \vartheta)\, d\vartheta = \int_0^{\pi} (\sin \vartheta - \sin \vartheta \cos^2 \vartheta) d\vartheta =$$

$$= \left[-\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

Ezt helyettesítve:

$$\Theta_z = \varrho \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3}.$$

Mivel a gömb tömege: $\varrho \frac{4}{3} R^3 \pi$, így

$$\Theta_z = \frac{2}{5} m R^2.$$

7. Határozza meg az R sugarú, M magasságú, ϱ sűrűségű egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékát a tömegközéppontján átmenő, alaplapjával párhuzamos tengelyre!

Helyezzük el a hengert úgy, hogy tömegközéppontja az origóba kerüljön, tengelye a z tengely legyen, s határozzuk meg az x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

$$\Theta_x = \varrho \iiint_V (y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Célszerű hengerkoordinátákat alkalmazni. Ekkor:

$$V = \left\{ (r, \varphi, z) \,\middle|\, 0 \leqq r \leqq R,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ -\frac{M}{2} \leqq z \leqq \frac{M}{2} \right\},$$

tehát

$$\Theta_x = \varrho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}} r(r^2 \sin^2 \varphi + z^2)\, dz\, d\varphi\, dr =$$

$$= \varrho \int_0^R \int_0^{2\pi} r \left(r^2 M \sin^2 \varphi + \frac{M^3}{12} \right) d\varphi\, dr =$$

$$= \varrho \int_0^R \int_0^{2\pi} r \left(r^2 M \frac{1-\cos 2\varphi}{2} + \frac{M^3}{12} \right) d\varphi\, dr =$$

$$= \varrho \int_0^R \left(r^3 M\pi + \pi \frac{M^3}{6} r \right) dr = \varrho \left(\frac{R^4}{4} M\pi + \frac{M^3}{12} R^2 \pi \right).$$

Mivel a henger tömege:

$$m = \varrho \pi R^2 M,$$

így

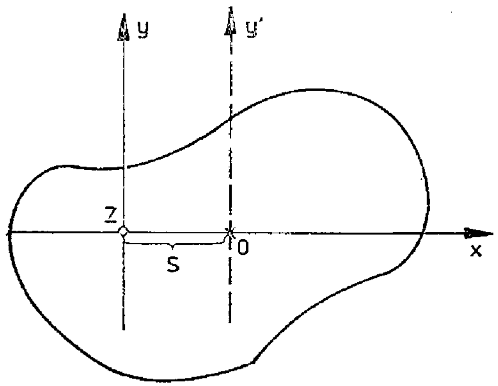
$$\Theta_x = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{M^2}{12} \right).$$

8. Igazolja, hogy egy test tetszőleges 0 ponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \Theta_s + ms^2,$$

ahol Θ_s: az előző tengellyel párhuzamos, a tömegközépponton áthaladó tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték,

m: a test tömege,
s: a két tengely távolsága.



69. ábra

Rögzítsük a koordináta-rendszert úgy, hogy a tömegközéppont az origóba kerüljön, és a forgástengely a z tengely irányába mutasson! Ekkor

$$\Theta_s = \int_V (x^2+y^2)\varrho\, dV.$$

Hasonlóképpen (69. ábra) adódik a 0 ponton átmenő tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\Theta = \int_V ((x-s)^2+y^2)\varrho\, dV =$$

$$= \int_V (x^2+y^2)\varrho\, dV + s^2 \int_V \varrho\, dV - 2s \int_V x\varrho\, dV.$$

Itt az első tag Θ_s, a másodikban szereplő integrál a test tömegét adja, tehát a második tag ms^2; a harmadik tagban szereplő integrál zérus, ugyanis

$$x_s = \frac{\int_V x\varrho\, dV}{\int_V \varrho\, dV} = 0,$$

hiszen a tömegközéppont az origóban van.

Ezzel beláttuk, hogy:

$$\Theta = \Theta_s + ms^2.$$

A most igazolt állítás *Steiner tétele.*

9. Határozza meg a 7. feladatban szereplő körhenger tehetetlenségi nyomatékát, ha a forgástengely az alaplap egyik átmérője!

A 7. feladatban láttuk, hogy a tömegközépponton áthaladó, az alaplappal párhuzamos tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_s = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{M^2}{12}\right).$$

A 8. feladat (Steiner-tétel) alkalmazásával az ezzel párhuzamos, tőle $\frac{M}{2}$ távolságban levő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \Theta_s + m\left(\frac{M}{2}\right)^2 = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{M^2}{3}\right).$$

Természetesen a feladat a Steiner-tétel alkalmazása nélkül is megoldható.

10. Határozza meg az a élű, egységnyi sűrűségű kockának a kocka középpontján áthaladó, a kocka élével párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! Igazolja, hogy bármely középponton áthaladó tengely esetén ugyanekkora a tehetetlenségi nyomaték!

Helyezzük el a kockát úgy, hogy középpontja az origóban legyen, élei a tengelyekkel párhuzamosan helyezkedjenek el, s határozzuk meg az x tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot!
Az integrálási tartomány:

$$V=\left\{(x, y, z) \,\middle|\, -\frac{a}{2}\leqq x\leqq\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\leqq y\leqq\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\leqq z\leqq\frac{a}{2}\right\}.$$

A tartomány szimmetriája következtében elegendő az első térnyolcadra integrálni:

$$\Theta_x=8\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=4a\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}(y^2+z^2)\,dy\,dz=$$

$$=4a\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^3}{24}+\frac{a}{2}z^2\right)dz=4a\left(\frac{a^4}{48}+\frac{a^4}{48}\right)=\frac{a^5}{6}.$$

Mivel $\varrho=1$, így $m=a^3$,
tehát:

$$\Theta_x=\frac{ma^2}{6}.$$

nyilvánvaló, hogy $\Theta_x=\Theta_y=\Theta_z$, hiszen az integrálási tartományt a tengelyek cseréje nem változtatja meg. Ha az origón átmenő forgástengely irányát az

$\mathbf{e}(e_1;\, e_2;\, e_3)$ egységvektor adja meg, akkor a kocka egy $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjának tengelytől való távolsága (70. ábra):

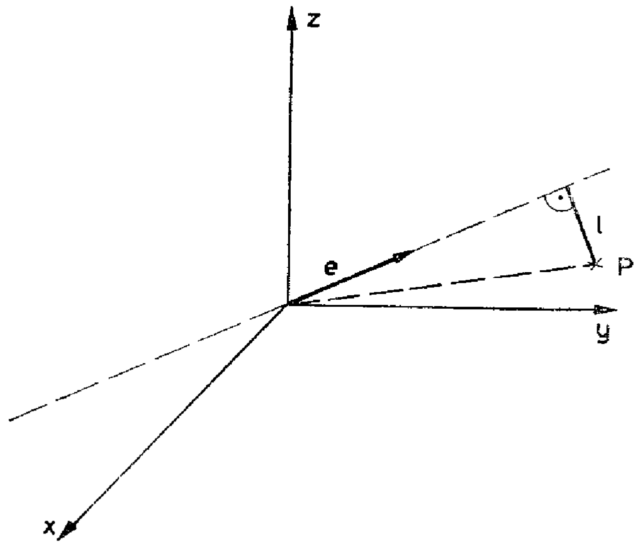
$$l=|\mathbf{r}|\sin(\mathbf{e}, \mathbf{r})\sphericalangle,$$

ami egyenértékű az

$$l^2=|\mathbf{r}\times\mathbf{e}|^2$$

egyenlőséggel.
Tehát

$$\begin{aligned}l^2&=(e_2z-e_3y)^2+(e_1z-e_3z-e_3x)^2+(e_1y-e_2x)^2=\\&=e_1^2(z^2+y^2)+e_2^2(z^2+x^2)+e_3^2(x^2+y^2)-\\&-2e_2e_3zy-2e_1e_3zx-2e_1e_2xy.\end{aligned}$$



70. ábra

Tudjuk, hogy az $\mathbf{e}$ irányú tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\Theta=\int_V l^2\,dV.$$

l^2 előző alakját beírva, tagonként integrálva (figyelembe vesszük, hogy:

$$\int_V (z^2+y^2)\,dV=\Theta_x,\qquad \int_V zy\,dV=0,$$

a tartomány szimmetriája miatt):

$$\Theta=\Theta_x e_1^2+\Theta_y e_2^2+\Theta_z e_3^2.$$

Mivel

$$\Theta_x=\Theta_y=\Theta_z,$$

és

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=1,$$

így

$$\Theta=\Theta_x(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=\Theta_x,$$

amivel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés: A feladat speciális esete egy általános tételnek: Ha a 0 átmenő minden tengelyre felmérjük az

$$\overline{OP}=\frac{1}{\sqrt{\Theta_{\overline{OP}}}}$$

távolságot, akkor a P pontok egy ellipszoid felületén helyezkednek el. A kocka esetén ez gömb, mivel három egymásra merőleges tengely esetén Θ egyenlő, így minden irányban azonos.

VII. VONAL- ÉS FELÜLETI INTEGRÁL

1. Vonalintegrál

A vonalintegrál fogalmát szemléletesen, egy fizikai alkalmazáson keresztül vezetjük be.

Tekintsük az

$$\mathbf{E}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{E}(\mathbf{r}),\qquad \mathbf{r}\in D\subset R^3$$

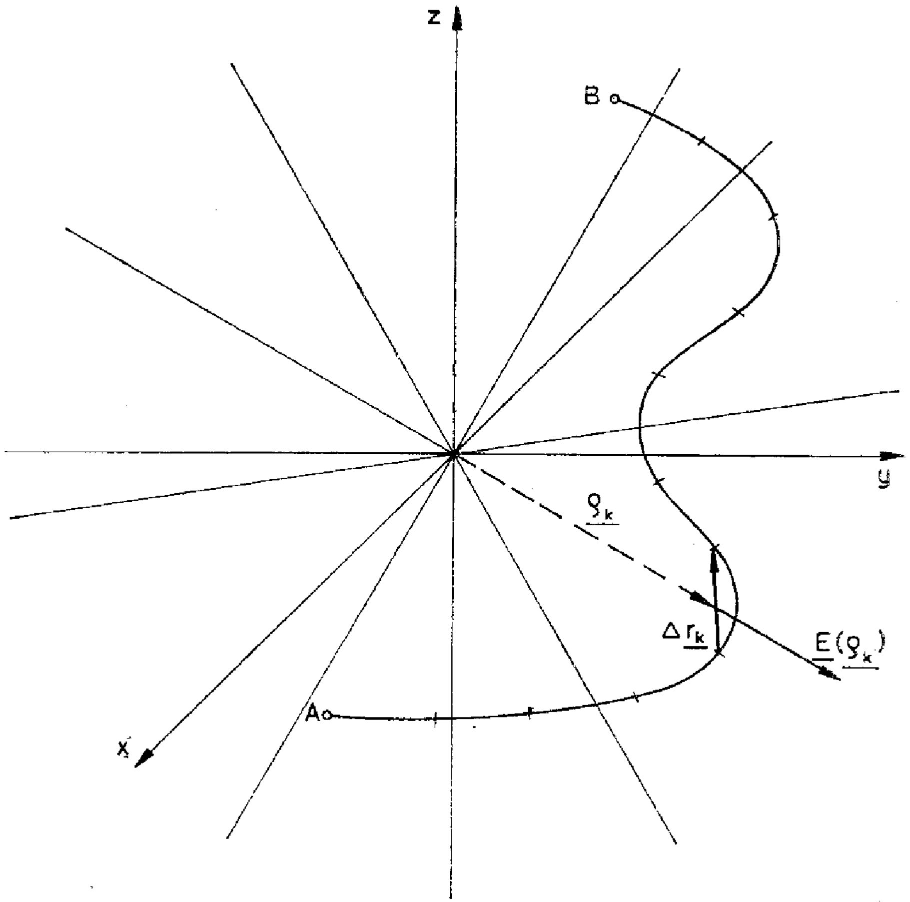
elektromos teret s egy D-ben levő térgörbét (71. ábra). Mozgassunk e görbe A pontjából B pontjába egy pozitív egységnyi töltést! Határozzuk meg a végzett munka értékét! Mivel a térerősség általában pontról pontra változik, s az elmozdulás nem feltétlenül egyenes mentén történik, így a munka nem számítható az erő- és az elmozdulásvektor skalárszorzataként. Bontsuk fel az $L=AB$ görbét kis darabokra! (E kis ívdaraboknak csak a végpontjaik közösek, egyesítésük a teljes ívet adja meg.) A k-adik részt a $\Delta\mathbf{r}_k$ vektorral helyettesítjük, amely az ívelem kezdőpontjából végpontjába mutat. Mivel a mozgatott töltés $Q=1$, így $\mathbf{F}=\mathbf{E}$, tehát az e részen végzett munka, közelítőleg:

$$\Delta W_k\approx\mathbf{E}(\varrho_k)\Delta\mathbf{r}_k,$$

ahol ϱ_k jelöli $\Delta\mathbf{r}_k$ valamely pontját.
Ha ezeket az elemi munkákat összegezzük, s vesszük az összeg határértékét, midőn a felosztás minden határon túl finomodik $\left(\text{azaz, ha } \max\limits_k|\Delta\mathbf{r}_k| \text{ is zérushoz tart}\right)$, akkor, ha az összegnek van véges, a felosztástól és a reprezentáns ponttól független határértéke, akkor ezt az értéket az $\mathbf{E}$ vektortér L görbére vett *vonalintegráljának* nevezzük. Értéke az egységnyi töltés mozgatásakor végzett munkát adja meg.

Jelölése:

$$\int_L\mathbf{E}\,d\mathbf{r}.$$



71. ábra

(Ha L zárt görbe, akkor: $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{r}$.)

A továbbiakban a vonalintegrál létezésének elégséges feltételéről szólunk.

Legyen adott a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in D \subset R^3$$

folytonos vektor-vektor függvény, valamint az

$$L = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\ t \in [t_1; t_2] \quad r \in D\}$$

irányított térgörbe.

Ha $\dot{\mathbf{r}}(t)$ létezik és folytonos a térgörbe minden pontjában, akkor a vektortér L görbén vett vonalintegrálja létezik, és

$$\int_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\, dt.$$

A vonalintegrál értékét általában nem határozza meg egyértelműen a vektortér és az integrálási út kezdő-, ill. végpontja. Az-az különböző görbéken haladva az A és B pontok között, a vonalintegrál értéke általában különböző lesz. Másképp fogalmazva: a vonalintegrál értéke zárt görbe esetén általában zérustól különböző.

Ha a vonalintegrál értéke független az úttól, akkor a vektorteret *potenciálosnak* nevezzük. A potenciálfüggvény (egy skalár-vektor függvény) értékét a $B \in D$ pontban a következőképp definiáljuk:

Legyen az $A \in D$ pontban $u(A) = 0$, és

$L = \widehat{AB}$ a D-ben futó térgörbe.

Ekkor

$$u(B) = \int_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r}.$$

Legyen adott egy

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in V \subset R^3$$

(V egyszeresen összefüggő tartomány) vektortér, és tegyük fel, hogy van olyan V-ben értelmezett

$$u : \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r})$$

függvény, amely V-ben differenciálható és tetszőleges $\mathbf{r} \in V$-re:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}).$$

Ekkor tetszőleges V-ben haladó differenciálható térgörbe esetén

$$\int_L \mathbf{v}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{grad} u(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt=$$
$$=u(\mathbf{r}(t_1))-u(\mathbf{r}(t_2)).$$

(*Egyszeresen összefüggőnek* nevezzük a V térrészt, ha minden benne haladó zárt görbe lefedhető V-ben levő felületdarabbal. A tórusz például nem egyszeresen összefüggő tartomány, két koncentrikus gömb közötti térrész viszont ilyen.)

Annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a $\mathbf{v}$ vektortér potenciálos, a Stokes-tétel tárgyalásánál adjuk meg.

A vektortér valamely zárt görbére vett integrálját a vektortér *cirkulációjának* nevezzük.

Fektessünk a tér egy rögzített P_0 pontjára L_k ($k\in N$) P_0-ra zsugorodó görbesorozattal határolt felületeket, amelyek felszíne Δf_k.

Ha bármely ilyen sorozat esetén létezik és mindig ugyanaz a

$$\lim \frac{1}{\Delta f_k} \oint \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$$

határérték, akkor ezt a P_0 pontbeli átlagos örvénysűrűségnek nevezzük. Belátható, hogy az átlagos örvénysűrűség

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{v}(P_0),$$

ahol $\mathbf{n}$ a felületsorozat normálegységvektorának határértéke. Megjegyezzük még, hogy az előzőekhez hasonlóan értelmezhető a vektorértékű vonalintegrál is, amelynek jelölése

$$\int_L \mathbf{v}\times d\mathbf{r}.$$

(Ekkor az előző vektortér, ill. térgörbe esetén a

$$\lim \sum \mathbf{v}(\varrho_k)\times \Delta\mathbf{r}_k$$

határértéket vizsgáljuk. Ha ez létezik és értéke bármely finomodó felosztássorozat esetén ugyanaz, akkor ezt az értéket a v vektortér L görbére vett *vektorértékű vonalintegráljának* nevezzük.)

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r}\mapsto y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

vektortérnek az $A(1;2;5)$ és a $B(4;7;9)$ pontokat összekötő egyenesszakaszra vett vonalintegrálját!

Az egyenesszakasz egyenlete (IV.1. szakasz 1. feladat)

$$\mathbf{r}=(1+3t)\mathbf{i}+(2+5t)\mathbf{j}+(5+4t)\mathbf{k}, \qquad t\in[0;1].$$

$\mathbf{r}$ megfelelő koordinátáit $\mathbf{v}$-be helyettesítve:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))=(2+5t)\mathbf{i}+(5+4t)\mathbf{j}+(1+3t)\mathbf{k}.$$

Mivel e szakaszra

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k},$$

így az integrandus $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))$ és $\dot{\mathbf{r}}(t)$ skalárszorzata:

$$3(2+5t)+5(5+4t)+4(1+3t).$$

Tehát:

$$\int_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^1 (47t+35)\,dt=58{,}5.$$

Természetesen, ha a feladatbeli egyenesszakasznak más paraméterezését választjuk, az integrál értéke nem változik. Az

$$\mathbf{r}: t\mapsto(1+3t^2)\mathbf{i}+(2+5t^2)\mathbf{j}+(5+4t^2)\mathbf{k} \qquad t\in[0;1]$$

függvény szintén az AB szakasz egy lehetséges megadási módja.

Ekkor

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))=(2+5t^2)\mathbf{i}+(5+4t^2)\mathbf{j}+(1+3t^2)\mathbf{k},$$

és

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=6t\mathbf{i}+10t\mathbf{j}+8t\mathbf{k},$$

tehát:

$$\int_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^1 (94t^3+70t)\,dt=58{,}5,$$

ami valóban az előzővel megegyező.

2. Határozza meg a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto x^2y\mathbf{i}+xy^2\mathbf{j}+zx\mathbf{k},\qquad \mathbf{r}\in R^3$$

függvénynek az

$$L_1=\{\mathbf{r}_1\mid \mathbf{r}_1=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k},\ 0\leqq t\leqq 1\},$$

$$L_2=\{\mathbf{r}_2\mid \mathbf{r}_2=t^2\mathbf{i}+t^3\mathbf{j}+t^4\mathbf{k},\ 0\leqq t\leqq 1\},$$

térgörbékre vett vonalintegrálját!

A két görbe kezdő- és végpontja azonos, hiszen

$\mathbf{r}(0)=A(0;0;0)$,

és

$\mathbf{r}(1)=B(1;1;1)$.

Az L_1 görbe esetén:

$$\int_{L_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^1 \mathbf{v}[\mathbf{r}_1(t)]\dot{\mathbf{r}}_1(t)\,dt=$$

$$=\int_0^1 (t^4\mathbf{i}+t^5\mathbf{j}+t^4\mathbf{k})(\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k})\,dt=$$

$$=\int_0^1 (t^4+2t^6+3t^6)\,dt=\frac{32}{35}.$$

Hasonlóan az L_2 görbére:

$$\int_{L_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^1 (t^7\mathbf{i}+t^8\mathbf{j}+t^6\mathbf{k})(2t\mathbf{i}+3t^2\mathbf{j}+4t^3\mathbf{k})\,dt=$$

$$=\int_0^1 (2t^8+3t^{10}+4t^9)\,dt=\frac{886}{990},$$

ami az előzőtől különböző.

E feladat esetében tehát

$$\int_{L_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}\neq\int_{L_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$$

bár az L_1 és L_2 görbék kezdő- és végpontja azonos.

3. Határozza meg a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto x^3y\mathbf{i}+\frac{x}{2+y}\mathbf{j}+xz\mathbf{k},\qquad D_v=\{\mathbf{r}\in R^3\mid y\neq -2\}$$

függvény

$$L=\{\mathbf{r}\mid \mathbf{r}=\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}\quad 0\leqq t\leqq 2\pi\}$$

görbére vett vonalintegrálját!

Az L görbe az $x=1$ síkban fekvő egységsugarú kör, azaz zárt görbe.

$$\oint_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left(\cos t\mathbf{i}+\frac{1}{2+\cos t}\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}\right)(-\sin t\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k})\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin t}{2+\cos t}+\cos t\sin t\right)dt=\left[\ln(2+\cos t)+\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}=0.$$

Megjegyzés: Az, hogy a vonalintegrál egy zárt görbe esetén zérus, nem jelenti azt, hogy a tér potenciálos, azaz minden zárt görbe esetén zérus. Esetünkben az

$$L_1=\{\mathbf{r}_1\mid \mathbf{r}_1=\sin 2t\mathbf{i}+\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k}\qquad 0\leqq t\leqq 2\pi\}$$

zárt görbe esetén

$$\int_{L_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left(2\sin^3 2t\cos 2t-\frac{1}{2}\sin^2 2t\right)dt=\frac{\pi}{2}$$

adódik, ami zérustól különböző.

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j},\qquad D_v=\{\mathbf{r}\in R^3 \mid x^2+y^2\neq 0\}$$

függvény

$$L=\{\mathbf{r}\mid \mathbf{r}=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}\quad 0\leqq t\leqq 2\pi\}$$

görbére vett vonalintegrálját!

A térgörbe a IV.1. szakasz 2. feladatában szereplő csavarvonal, amely illeszkedik az $x^2+y^2=1$ felületre. A vektortér hengerszimmetrikus, trajektóriái a z tengelyre, azaz a térgörbe érintőjére is merőlegesek. Ebből következően $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))$ és $\dot{\mathbf{r}}(t)$ vektorok skalárszorzata minden pontban zérus, így:

$$\int_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=0.$$

(Az Olvasó gyakorlásképpen ellenőrizze számítással, hogy az integrandus valóban zérus!)

5. Határozza meg a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}-\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j},\qquad D_v=\{\mathbf{r}\in R^3 \mid x^2+y^2\neq 0\}$$

vektortér

$$L=\{\mathbf{r}\mid \mathbf{r}=t\mathbf{i}+\sqrt{1-t^2}\mathbf{j}+\mathbf{k},\quad 0\leqq t\leqq 1\}$$

negyedkörre vett vonalintegrálját!

Végezze el az integrálást a teljes körre is!

A kör pontjaiban

$$x^2+y^2=1,$$

így

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))=\sqrt{1-t^2}\,\mathbf{i}-t\mathbf{j},$$

és

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{j}.$$

Tehát:

$$\int_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^1\left(\sqrt{1-t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt.$$

A második tagot átalakítjuk:

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}-\sqrt{1-t^2}.$$

Így:

$$\int_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=[\arcsin t]_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

A teljes körre való integráláskor célszerű más paraméterezéssel dolgozni:

$$L_1=\{\mathbf{r}\mid \mathbf{r}=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+\mathbf{k},\qquad 0\leqq t\leqq 2\pi\}.$$

Az előzőhöz hasonlóan:

$$\int_{L_1}\mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=2\pi,$$

ami az előző eredmény négyszerese.

Megjegyzés: A vektortér az

$$u:\mathbf{r}\mapsto\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\qquad D_u=\{\mathbf{r}\in R^3 \mid y\neq 0\}$$

függvény gradienseként állítható elő (a zx sík pontjainak kivételével). Így bármely $y>0$ féltérben levő zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke.

A feladatbeli kör átmetszi az $y=0$ síkot, körülveszi a z tengelyt, amelynek pontjaiban a vektortér nincs értelmezve, így e zárt görbére nem kell zérussal egyenlőnek lennie a vonalintegrálnak.

6. Legyen

$$u: \mathbf{r} \mapsto x^3yz^2, \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

és

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \operatorname{grad} u.$$

Határozza meg a vonalintegrál értékét az $A(1;1;1)$ és $B(2;3;5)$ pontokat összekötő tetszőleges, folytonosan differenciálható görbére!

Mivel a

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} u(\mathbf{r}) = \frac{du}{d\mathbf{r}}$$

egyenlőség a tér minden pontjában teljesül, így a tér potenciálos, s potenciálfüggvénye az u skalárvektor függvény.

Így:

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \frac{du}{d\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} du = u(\mathbf{r}_B) - u(\mathbf{r}_A).$$

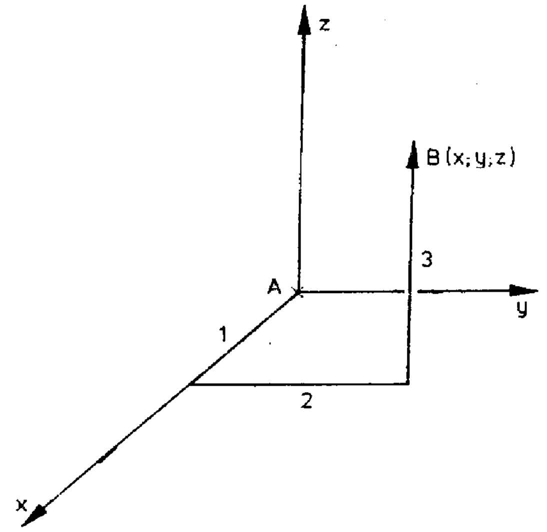
Mivel az u függvény értéke az A pontban 1, a B pontban 600, így:

$$\int_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = 599.$$

7. Határozza meg a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto xy^2\mathbf{i} + (x^2y+z)\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér vonalintegrálját az $A(0;0;0)$ és $B(x;y;z)$ pontokat összekötő 72. ábrán látható töröttvonalra!



72. ábra

Az első szakaszon az x tengelyen haladunk az A pontból a $P_1(x;0;0)$ pontba.

Ekkor

$$L_1 = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = t\mathbf{i}, \quad t \in [0;x]\},$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = 0,$$

tehát

$$\int_{L_1} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = 0.$$

A második szakaszon a $P_1(x;0;0)$ pontból a $P_2(x;y;0)$ pontig megyünk, az y tengellyel párhuzamosan:

$$L_2 = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = x\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t \in [0;y]\},$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = xt^2\mathbf{i} + x^2t\mathbf{j},$$
$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{j}.$$

E szakaszra tehát

$$\int_{L_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_0^y x^2t\, dt = \left[\frac{x^2t^2}{2}\right]_0^y = \frac{x^2y^2}{2}.$$

Végül a P_2 pontból a B pontig a z tengellyel párhuzamosan:

$$L_3=\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+t\mathbf{k}, \quad t\in[0;z]\}.$$

Ekkor

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))=xy^2\mathbf{i}+(x^2y+t)\mathbf{j}+(y+t)\mathbf{k},$$
$$\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{k},$$

tehát:

$$\int_{L^3} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^z (y+t)\,dt=\left[yt+\frac{t^2}{2}\right]_0^z=yz+\frac{z^2}{2}.$$

Végeredményben:

$$\int_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_{L_1} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}+\int_{L_2} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}+\int_{L_3} \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\frac{x^2y^2}{2}+yz+\frac{z^2}{2}.$$

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy a vektortér

$$u:\mathbf{r}\mapsto\frac{x^2y^2}{2}+yz+\frac{z^2}{2}, \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

skalár-vektor függvény gradienseként állítható elő. Ha tehát tudjuk, hogy a vektortér valamely $V\subset R^3$ tartományban potenciálos, a potenciálfüggvényt az e feladatban látott módszerhez hasonlóan kereshetjük meg.

Természetesen az A, B pontok a V tartományban vannak, s a töröttvonalat is úgy kell felvennünk, hogy az végig a V térrészben haladjon.

8. Az

$$\mathbf{E}:\mathbf{r}\mapsto\frac{k\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \qquad D_{\mathbf{E}}=\{\mathbf{r}\in R^3 \mid \mathbf{r}\neq 0\}$$

térerősségű vektortérben az $A(4;0;0)$ pontból a $B(0;10;0)$ pontba mozgatunk egy pozitív egységnyi töltést az AB szakasz mentén. Határozza meg a végzett munka értékét!

Láttuk, hogy a pozitív egységnyi töltés mozgatásakor végzett munka:

$$W=\int_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}.$$

Mivel a vektortér az

$$u:\mathbf{r}\mapsto\frac{-k}{|\mathbf{r}|} \qquad D_u=\{\mathbf{r}\in R^3 \mid \mathbf{r}\neq 0\}$$

skalár-vektor függvény gradienseként állítható elő (IV.3. szakasz alapján), és a

$$V=\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}\in R^3 \setminus |\mathbf{r}|>1\}$$

tartomány egyszeresen összefüggő, így e tartományban haladó bármely görbe esetén a vonalintegrál értéke független az úttól, azaz V-ben a vektortér potenciálos. Tehát:

$$W=\int_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=u(B)-u(A)=-\frac{k}{10}+\frac{k}{4}=\frac{3k}{20}.$$

Megjegyzés: A vonalintegrál úttól való függetlenségét a következőképpen is kihasználhatjuk.

Mozgassuk először a töltést az A pontból a $C(0;4;0)$ pontba az $x^2+y^2=16$ körvonal mentén, majd C-ből vigyük B-be. Mivel a tér radiális, azaz erővonalai a kört merőlegesen metszik, így az AC íven a vonalintegrál értéke zérus. A CB szakaszon csak y értéke változik, így $|\mathbf{r}|=y$.

$$\int_{\widehat{CB}} \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\int_4^{10} \frac{ky}{y^3}\,dy=\left[\frac{-k}{y}\right]_4^{10}=\frac{3k}{20},$$

tehát

$$\int_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\frac{3k}{20},$$

ami természetesen az előzővel megegyező.

A vektorértékű vonalintegrál alkalmazásai közül a Biot—Savart-törvényt említjük.

Az L görbe mentén folyó I intenzitású áram által az $\mathbf{r}_0$ helyvektorú pontban létrehozott mágneses térerősség:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)=-\frac{I}{4\pi}\int_L \frac{\mathbf{r}_0-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|^3}\times d\mathbf{r}.$$

9. Határozza meg a Biot—Savart-törvény alapján az I árammal átjárt R sugarú körvezető középpontjában a mágneses térerősség értékét!

Helyezzük el a körvezetőt az xy síkban úgy, hogy a kör középpontja az origó legyen. ($\mathbf{r}_0=0$)

Mivel az $\mathbf{r}$ a kört merőlegesen metszi, s a körön $|\mathbf{r}|=R$, így:

$$|\mathbf{r}\times d\mathbf{r}|=|\mathbf{r}|\,|d\mathbf{r}|\sin 90°=R\,dr.$$

Ebből következően:

$$|\mathbf{H}(o)|=\frac{I}{4\pi}\oint_L \frac{R}{R^3}\,dr=\frac{I}{4\pi}\,\frac{1}{R^2}\oint_L dr.$$

Mivel

$$\oint_L dr=2R\pi,$$

hiszen az integrál értéke a kör kerületével egyenlő, így

$$|\mathbf{H}(o)|=\frac{I}{2R}.$$

($\mathbf{H}(o)$ a körvezető síkjára merőleges.)

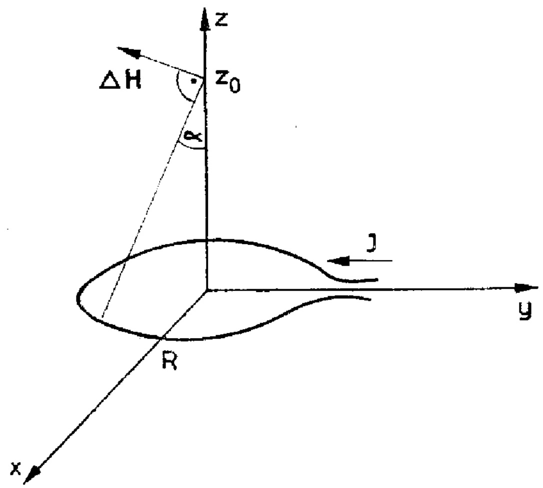
10. Határozza meg a mágneses térerősséget az előző körvezető tengelyén levő P pontban, amely a körvezető síkjától m távolságra van!

Helyezzük el a körvezetőt az előző feladatban látott módon (73. ábra). Az elrendezés szimmetriájából következik, hogy $\mathbf{H}$ a z tengely pontjaiban a tengely irányába mutat. Az $\mathbf{r}_0-\mathbf{r}$ vektor minden pontban merőleges a kör érintőjére, tehát:

$$|(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})\times d\mathbf{r}|=|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|\cdot|d\mathbf{r}|=\sqrt{R^2+m^2}\,dr.$$

Mivel — mint láttuk — $\mathbf{H}$ a z tengely irányába mutat, így csak $\Delta\mathbf{H}$ tengelyirányú komponenseit kell összegeznünk. Az ábra alapján a $\Delta\mathbf{H}$ vektor z tengely irányú vetülete:

$$|\Delta\mathbf{H}|\sin\alpha,$$



73. ábra

ahol

$$\sin\alpha=\frac{R}{\sqrt{R^2+m^2}}$$

(merőleges szárú szögek), tehát

$$|\mathbf{H}(\mathbf{r}_0)|=\frac{I}{4\pi}\oint_L \frac{\sqrt{R^2+m^2}}{(\sqrt{R^2+m^2})^3}\sin\alpha\,dr=\frac{IR}{4\pi(R^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}\oint_L dr.$$

Az előző feladatban láttuk, hogy

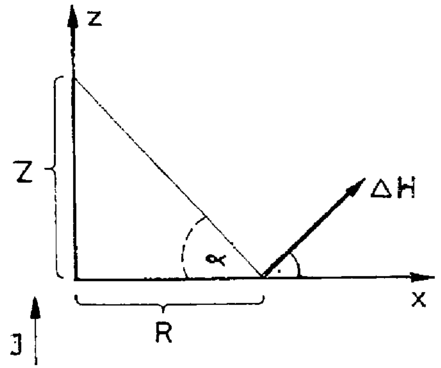
$$\oint_L dr=2R\pi,$$

így:

$$|\mathbf{H}|=\frac{I}{2}\,\frac{R^2}{(R^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$m=0$ esetén az előző feladat eredményét kapjuk.

11. Határozza meg az I árammal átjárt, végtelen hosszú egyenes vezető által létrehozott mágneses tér nagyságát, a vezetőtől R távolságban!



74. ábra

Helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy a vezető a z tengellyel essen egybe!

Határozzuk meg az $A(R; 0; 0)$ pontban $\mathbf{H}$ abszolút értékét! Mivel az $\mathbf{r}_0-\mathbf{r}$ vektor az xz síkban van, így $\mathbf{H}$ az y tengely irányába mutat (74. ábra).

Mivel

$$|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|=\sqrt{R^2+z^2},$$

és

$$\sin\alpha=\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}},$$

így

$$|\mathbf{H}|=\frac{I}{4\pi}\int\limits_L \frac{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}|^3}\sin\alpha\, dr=\frac{I}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\,dz=$$

$$=\frac{I}{4\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{2z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz=\frac{I}{4\pi}\left[-2(R^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\infty}=\frac{I}{2R\pi}.$$

Megjegyzés: Az egyenes vezető által létrehozott mágneses tér erősségét egyszerűbben megkaphatjuk az ún. gerjesztési törvény alkalmazásával, amely szerint a mágneses térerősség zárt görbén vett vonalintegrálja egyenlő a zárt görbe által határolt felületen áthaladó áramok előjeles összegével. Legyen a zárt görbe az

$$x^2+y^2=R^2$$

kör. Mivel a $\mathbf{H}$ vektortér hengerszimmetrikusan veszi körül a vezetőt, így e kör pontjaiban $\mathbf{H}$ érintőirányú, azaz

$$\mathbf{H}\,d\mathbf{r}=|\mathbf{H}|\,dr.$$

A gerjesztési törvény szerint:

$$I=\oint\limits_L \mathbf{H}\,d\mathbf{r}=\oint\limits_L |\mathbf{H}|\,dr=|\mathbf{H}|\oint dr=|\mathbf{H}|\,2R\pi.$$

Ebből

$$|\mathbf{H}|=\frac{I}{2R\pi},$$

ami az előzővel megegyezik.

2. Felületi integrál

A felületi integrál fogalmát is egy alkalmazásán keresztül mutatjuk be.

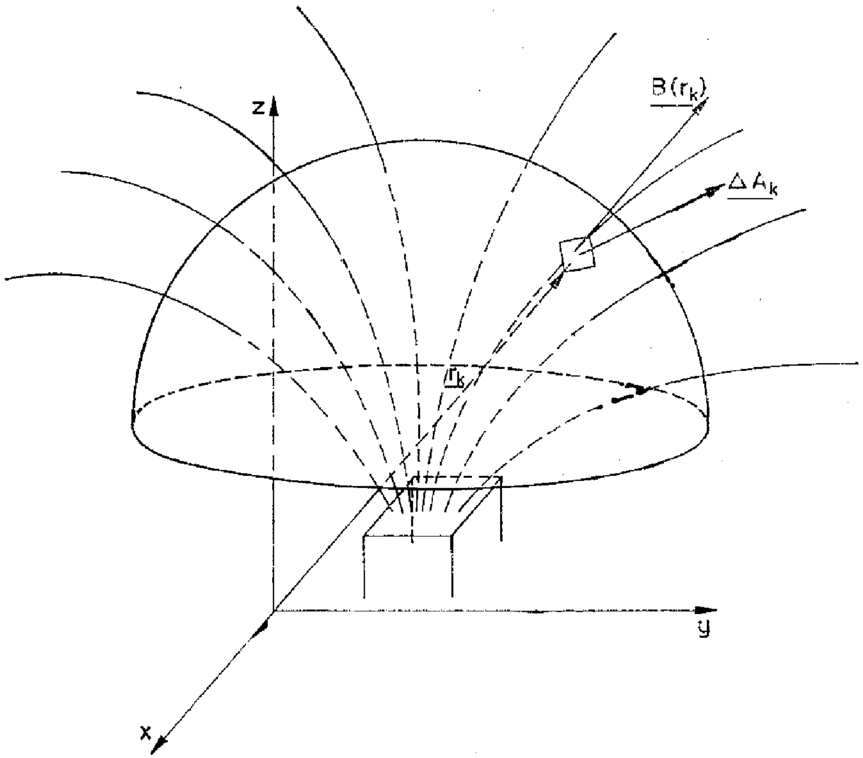
Tekintsük a

$$\mathbf{B}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{B}(\mathbf{r})\qquad \mathbf{r}\in D\subset R^3$$

indukcióvektorral jellemzett mágneses teret és egy D-ben levő irányítható, mérhető felszínű felületet (jelölje ezt F).

Határozzuk meg az e felületen áthaladó indukcióvonalak számát, a fluxust (75. ábra)!

Mivel általában B pontról pontra változik, s a felület nem sík, így a fluxus nem számolható a $\mathbf{B}$ és a felületre merőleges $\mathbf{A}$ vektor skalárszorzataként. Bontsuk fel a felületet mérhető felszínű részekre! (E részeknek csak a határvonaluk közös, egye-



75. ábra

sítésük az eredeti felületet adja!) A k-adik darabon válasszunk ki egy $\mathbf{r}_k$ reprezentáns pontot, és jelölje $\Delta\mathbf{A}_k$ azt a vektort, amelynek iránya a felületi normális irányával megegyező, abszolút értéke a felületdarab felszínével egyenlő, azaz: $|\Delta\mathbf{A}_k|=\mu(F_k)$. (A felületdarabok irányítása a felület irányításának megfelelő.) E kis felületen az elemi fluxus:

$$\Delta\Phi_k=\mathbf{B}(\mathbf{r}_k)\Delta\mathbf{A}_k.$$

Ha minden határon túl finomodó felosztássorozat (F_k átmérőinek maximuma is zérushoz tart) esetén létezik a felosztástól és a reprezentánspont választásától független

$$\lim \sum_k \mathbf{B}(\mathbf{r}_k)\Delta\mathbf{A}_k$$

határérték, akkor ezt az értéket a **B** vektortér *F felületre vett felületi integráljának* nevezzük.

Jelölése:

$$\int_F \mathbf{B}\, d\mathbf{A}.$$

Zárt felület esetén a jelölés:

$$\oint_F \mathbf{B}\, d\mathbf{A}.$$

Az integrál értéke tehát az F felületen áthaladó fluxust adja meg.

Ha a

$$\mathbf{B}:\mathbf{r}\mapsto\mathbf{B}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in D\subset R^3$$

folytonos, és az

$$F=\{\mathbf{r}\mid \mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v),\ (u,v)\in T\}$$

D-ben levő korlátos, irányítható, mérhető felszínű, folytonosan differenciálható felület, akkor:

$$\int_F \mathbf{B}\, d\mathbf{A}=\int_T\int \mathbf{B}(\mathbf{r}(u,v))(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)\, du\, dv.$$

Tekintsük az előző vektortér egy $\mathbf{r}_0\in D$ pontját, s vegyük azt körül D-ben haladó $\mathbf{r}_0$-ra zsugorodó olyan $\{F_n\}$ $n\in N^+$ zárt felületsorozattal, amelynek minden elemére létezik

$$\oint_{F_n} \mathbf{B}\, d\mathbf{A}.$$

Az F_n zárt felületre számított fluxus a felület által határolt térrészben (legyen ez V_n) levő „forrás" mennyiségére jellemző. Ha bármely ilyen sorozat esetén létezik a felület alakjától függetlenül mindig ugyanaz a

$$\lim \frac{1}{\mu(V_n)}\oint_{F_n} \mathbf{B}\, d\mathbf{A}$$

határérték, akkor ezt az $\mathbf{r}_0$ pontbeli *forrássűrűségnek* nevezzük. Igazolható, hogy értéke

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0).$$

Megjegyezzük, hogy a (skalárértékű) felületi integrálhoz hasonlóan értelmezhető az

$$\int_F \mathbf{B} \times d\mathbf{A}$$

vektorértékű felületi integrál is.

Ekkor az előző vektortér, ill. felület esetén a

$$\lim \sum \mathbf{B}(\mathbf{r}_k) \times \Delta \mathbf{A}_k$$

határértéket vizsgáljuk. Ha ez létezik, és értéke bármely finomodó felosztássorozat esetén ugyanaz, akkor ezt az értéket a **B** vektortér *F felületre vett vektorértékű felületi integráljának* nevezzük.

$$\int_F dA$$

a felületelemek összegével, azaz a felület felszínével egyezik meg. Ha a felület irányítását megváltoztatjuk, a felületi integrál értéke előjelet vált. A feladatokban az irányítást úgy választottuk, hogy az integrál értéke pozitív legyen.

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a

$$\mathbf{W} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

függvény felületi integrálját az $A(1;1;3)$, $B(4;2;7)$ és $C(5;4;9)$ csúcspontú háromszögre!

A háromszöglap egy lehetséges megadási módja (l. a IV.2. szakasz 1. feladatát):

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = (1+3u+4v)\mathbf{i} + (1+u+3v)\mathbf{j} + (3+4u+6v)\mathbf{k},$$
$$(u, v) \in R^{+2} \mid 0 \leq u+v \leq 1\}.$$

Határozzuk meg a paraméterek szerinti parciálisokat:

$$\mathbf{r}'_u = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Az integrandus a

$\mathbf{w}[\mathbf{r}(u, v)]$, $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$ vektorok vegyes szorzata; azaz

$$\begin{vmatrix} 1+3u+4v & 1+u+3v & 3+4u+6v \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 7.$$

(Mivel a determináns első sorában összeg szerepel, így ez három determináns összegére bontható. A másodikból u-t, a harmadikból v-t kiemelve ezeknek két sora megegyező, tehát értékük zérus, tehát csak az összeg első tagja marad meg.)

Az integrálási tartomány:

$$T = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1-u\}.$$

Tehát:

$$\int_F \mathbf{W}\, d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^{1-u} 7\, dv\, du = \frac{7}{2}.$$

2. Határozza meg az előző feladatban szereplő vektortér integrálját egy origó középpontú, R sugarú gömbfelületre!

A gömbfelület egy lehetséges megadása (l. a. IV.2. szakasz 2. feladatát):

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = R \sin u \cos v\mathbf{i} + R \sin u \sin v\mathbf{j} + R \cos u\mathbf{k},\ u \in [0;\pi],\ v \in [0;2\pi]\}.$$

A parciális deriváltak:

$$\mathbf{r}'_u = R \cos u \cos v\mathbf{i} + R \cos u \sin v\mathbf{j} + (-R \sin u)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_v = -R \sin u \sin v\mathbf{i} + R \sin u \cos v\mathbf{j}.$$

Az integrandus:

$$\mathbf{w}[\mathbf{r}(u, v)] \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) =$$
$$= R^3 \sin^3 u \cos^2 v + R^3 \sin^3 u \sin^2 v + R^3 \cos^2 u \sin u = R^3 \sin u.$$

Tehát a vektortér gömbfelületre vett felületi integrálja:

$$\oint_F \mathbf{w}\, d\mathbf{A} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} R^3 \sin u \, dv \, du = 4\pi R^3.$$

Jóval egyszerűbben kapjuk meg az eredményt, ha felhasználjuk, hogy a tér erővonalai (trajektóriái) sugárirányúak, azaz merőlegesen metszik a gömbfelületet, így lévén a felületen $|\mathbf{w}| = R$,

$$\oint_F \mathbf{w}\, d\mathbf{A} = \oint_F |\mathbf{w}|\, dA = \oint_F R\, dA = R \oint_F dA.$$

Mivel a felületelemek összege a gömb felszínét adja, így:

$$R \oint_F dA = 4\pi R^3,$$

ami az előzővel megegyező.

Megjegyzés: Jelölje V a gömbfelület által határolt térrészt, s képezzük a

$$\lim_{R \to 0} \frac{1}{\mu(V)} \oint_F \mathbf{w}\, d\mathbf{A}$$

határértéket!

Mivel

$$\mu(V) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

az R sugarú gömb térfogata, így a fenti határérték 3-mal egyenlő.

Esetünkben tehát valóban teljesül a

$$\lim \frac{1}{\mu(V)} \oint_F \mathbf{w}\, d\mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{0}) = 3$$

összefüggés.

3. Határozza meg a

$$\mathbf{B} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{j} \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér felületi integrálját az

$$x^2 + z^2 = 1$$

hengerfelület $0 \leq y \leq 1$ részére!

A felület:

$$F = \{\mathbf{r} \mid = \cos \varphi \mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Tekintve, hogy

$$\mathbf{j} \times \mathbf{r} = z\mathbf{i} - x\mathbf{k},$$

így

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}(\varphi, t)) = \sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{k}.$$

Tehát az integrandus:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_t) = \begin{vmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

így

$$\int_F \mathbf{B}\, d\mathbf{A} = 0.$$

Megjegyzés: Mivel a felület tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjában a felületi normális irányát az $\mathbf{r}(x, 0, z)$ vektor adja, amely a $\mathbf{B}$ vektorra merőleges, vagyis $\mathbf{nB} = 0$, így nyilvánvaló, hogy teljesül a

$$\int_F \mathbf{B}\, d\mathbf{A} = 0 \text{ egyenlőség.}$$

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto zy\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortér felületi integrálját az

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = (\operatorname{ch} t + 2u)\mathbf{i} + (\operatorname{sh} t + 4u)\mathbf{j} + 5u\mathbf{k}, \ 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq 1\}$$

felületre!

A felület egy hiperbola alapú henger része (l. a IV. 2. szakasz 5. feladatát). Elvégezve a megfelelő koordináták helyettesítését:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t, u)) = 5u\,((\text{sh}\, t + 4u)\mathbf{i} + (\text{ch}\, t + 2u)\mathbf{j} + 5u\mathbf{k}),$$

az integrandus pedig:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_t) = 5u \begin{vmatrix} \text{sh}\, t + 4u & \text{ch}\, t + 2u & 5u \\ \text{sh}\, t & \text{ch}\, t & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 150u^2\,(\text{ch}\, t - \text{sh}\, t) = 150u^2 e^{-t}.$$

Tehát a felületi integrál:

$$\int_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A} = \int_0^1 \int_0^1 150u^2 e^{-t}\, du\, dt = 50(1 - e^{-1}).$$

5. Határozza meg a

$$\mathbf{E}: \mathbf{r} \mapsto \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \qquad D_{\mathbf{E}} = \{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

függvény felületi integrálját a $z=1$ síkra!

Célszerű kihasználni a z tengelyre való forgásszimmetriát. Adjuk meg a felületet a következő módon:

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = u\cos\varphi\,\mathbf{i} + u\sin\varphi\,\mathbf{j} + \mathbf{k},\ u \geqq 0, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Ekkor az $u = u_0$ vonalak z tengely középpontú körök. Mivel a felületen

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{u^2 + 1},$$

így:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(u, \varphi)) = \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,(u\cos\varphi\,\mathbf{i} + u\sin\varphi\,\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Az integrandus tehát:

$$\mathbf{E}\mathbf{r}'_u\mathbf{r}'_\varphi = \frac{1}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} u\cos\varphi & u\sin\varphi & 1 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -u\sin\varphi & u\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = u.$$

Így $\mathbf{E}$ felületi integrálja:

$$\int_F \mathbf{E}\, d\mathbf{A} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}\, d\varphi\, du = \pi \int_0^\infty 2u(u^2+1)^{-\frac{3}{2}}\, du =$$

$$= \pi\left[-2(u^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^\infty = 2\pi.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a síkot

$$F = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad (x, y) \in R^2\}$$

alakban adjuk meg, s a felületi integrál számításakor polárkoordinátákra térünk át.

6. Az elektrosztatika Gauss-tételét felhasználva határozza meg az origóban levő egységnyi ponttöltés terét!

Az elektrosztatika Gauss-tétele:

$$\oint_F \mathbf{D}\, d\mathbf{A} = \sum_i Q_i,$$

azaz a $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ vektor zárt felületre vett integrálja egyenlő a felület által határolt térrészben levő töltések előjeles összegével.

Mivel a kialakuló tér gömbszimmetrikus, így egy origó középpontú R_0 sugarú gömbre célszerű a felületi integrált meghatároznunk.

E gömbfelületen, mivel $\mathbf{D}$ merőleges a felületre:

$$\mathbf{D}\, d\mathbf{A} = |\mathbf{D}|\, dA,$$

ebből következően

$$\oint_F \mathbf{D}\, d\mathbf{A} = \oint_F |\mathbf{D}|\, dA = |\mathbf{D}| \oint_F dA = |\mathbf{D}| 4\pi R_0^2 = Q = 1.$$

Az integrálás során felhasználtuk, hogy a gömbszimmetria miatt a felületen $|\mathbf{D}|$ állandó, így az integráljel elé kiemelhető.

Tehát

$$|\mathbf{D}(\mathbf{r})| = \varepsilon|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{1}{4\pi r^2},$$

azaz

$$\mathbf{E}:\mathbf{r}\mapsto\frac{1}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\qquad D_{\mathbf{E}}=\{\mathbf{r}\in R^3\mid \mathbf{r}\neq\mathbf{0}\}.$$

Megjegyzés: Ha a töltést egy a sugarú fémgömbre vittük fel, ennek tere $|\mathbf{r}|\geqq a$ esetén kapott eredményünkkel megegyező, $|\mathbf{r}|<a$ esetén pedig $|\mathbf{E}|=0$.

7. Határozza meg az R_1 sugarú végtelen hosszú vezető henger által létrehozott tér erősségét, ha annak egységnyi magasságú részén Q töltés helyezkedik el!

Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\oint_F \mathbf{D}\,d\mathbf{A}=Q.$$

Helyezzük el a hengert úgy, hogy tengelye a z tengely legyen, és legyen a zárt felület egy ugyancsak z tengelyű, R_0 sugarú egységnyi magasságú körhenger. (A henger alap- és fedőkörét is figyelembe kell vennünk!)

A felületi integrál meghatározásához kihasználjuk, hogy a tér hengerszimmetrikus, azaz a henger alap- és fedőkörén nem lép ki erővonal, így ezek járuléka a felületi integrálhoz zérus.

A henger palástján $\mathbf{D}$ állandó, így:

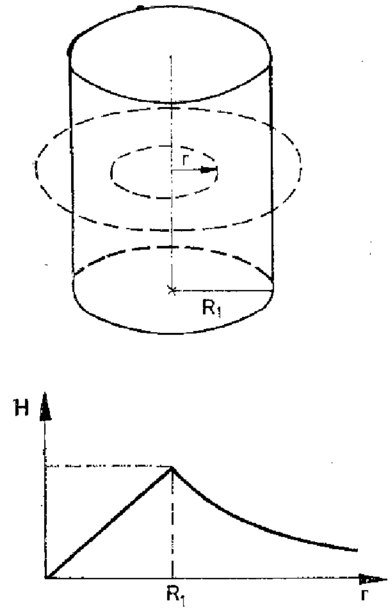
$$\int_F \mathbf{D}\,d\mathbf{A}=\int_F|\mathbf{D}|\,dA=|\mathbf{D}|\int_F dA=|\mathbf{D}|2\pi R_0=\begin{cases}0, & \text{ha } R_0<R_1,\\ Q, & \text{ha } R_0\geqq R_1.\end{cases}$$

Tehát:

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})|=\begin{cases}0, & \text{ha } |\mathbf{r}|<R_1\\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon|\mathbf{r}|}, & \text{ha } |\mathbf{r}|\geqq R_1.\end{cases}$$

Ez esetben tehát a tengelytől távolodva a térerősség abszolút értéke csak $\frac{1}{|\mathbf{r}|}$ első hatványa szerint csökken.

8. Egy R_1 sugarú egyenes vezetőben $\mathbf{j}$ áramsűrűségű egyenáram folyik. Határozza meg a mágneses térerősség értékét a vezetőben s azon kívül!



76. ábra

Írjuk fel a VII.1. 11. feladatában szereplő gerjesztési törvény általános alakját!

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{r}=\int_F \mathbf{j}\,d\mathbf{A}$$

(itt F a zárt L görbére fektetett felület).

Legyen az L görbe a vezető tengelyére merőleges síkban levő, a tengelyre szimmetrikusan elhelyezkedő körvonal, F az erre fektetett síklap (76. ábra).

Láttuk (VII.1. szakasz 11. feladata), hogy

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{r}=|\mathbf{H}|2\pi r,$$

ahol r a kör sugara.

A felületi integrál $r\leqq R_1$ esetén:

A vezetőben $\mathbf{j}$ a felületre merőleges,

$$|\mathbf{j}|=\frac{I}{R_1^2\pi}=\text{állandó},$$

így ekkor:

$$\int_F \mathbf{j}\,dA=\int_F |\mathbf{j}|\,dA=\frac{I}{R_1^2\pi}\int dA=\frac{Ir^2\pi}{R_1^2\pi}=\frac{Ir^2}{R_1^2}.$$

A két eredmény egyenlőségéből:

$$|\mathbf{H}|=\frac{Ir}{2\pi R_1^2}, \qquad \text{ha } r<R_1.$$

A vezető belsejében tehát a tengelytől távolodva $|\mathbf{H}|$ lineárisan növekszik, a vezetőn kívül, mint azt VII.1.11. feladatában láttuk, $\frac{1}{r}$-rel arányosan csökken.

9. Határozza meg a

$$\mathbf{B}:\mathbf{r}\mapsto x\mathbf{i} \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

vektortér vektorértékű felületi integrálját a zx síkban fekvő

$$(x-1)^2+z^2\leqq 1$$

körlapra!

$$\int_F \mathbf{B}\times d\mathbf{A} \text{ értékét kell meghatároznunk.}$$

Mivel minden $\mathbf{r}\in R^3$ pontban $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ $\mathbf{i}$-vel párhuzamos, az F (sík) felület pedig $\mathbf{i}$-re merőleges, így:

$$|\mathbf{B}\times d\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|\,dA=dA.$$

Ebből következően a felületi integrál abszolút értékének kiszámítása a

$$\iint_T x\,dx\,dz$$

értékének meghatározásával egyenértékű, ahol

$$T=\{(x,y)\mid (x-1)^2+z^2\leqq 1\}.$$

Az integrál értékének meghatározásához célszerű a következő transzformációt elvégezni:

$$x-1=t\cos\varphi,$$
$$z=t\sin\varphi.$$

Ekkor

$$T=\{(t,\varphi)\mid 0\leqq t\leqq 1, \quad 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\},$$

így

$$\iint_T x\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{2\pi}(1+t\cos\varphi)t\,d\varphi\,dt=2\pi\int_0^1 t\,dt=\pi.$$

Így, mivel $\mathbf{B}\times d\mathbf{A}$ iránya $(-\mathbf{j})$-vel egyezik meg, tehát:

$$\int_F \mathbf{B}\times d\mathbf{A}=-\mathbf{j}\pi.$$

Megjegyzés: Ha a felületet határoló görbében egységnyi erősségű áram folyik, a $\mathbf{B}$ indukciójú mágneses tér $\int_F \mathbf{B}\times d\mathbf{A}$ forgatónyomatékot gyakorol rá.

10. Határozza meg a

$$\mathbf{v}:\mathbf{r}\mapsto xy\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+yz\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

vektortér

$$F=\left\{\mathbf{r}\mid \mathbf{r}=u\cos\varphi\mathbf{i}+u\sin\varphi\mathbf{j}+2\mathbf{k}, \quad u\in[0;1],\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

felületre vett vektorértékű felületi integrálját!

A felület a $z=2$ síkban fekvő negyedkör, amelynek normálvektora párhuzamos $\mathbf{k}$-val, így az integrálás eredménye $\mathbf{k}$-ra merőleges vektor lesz.

Mivel a kifejtési tétel szerint:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{ac})\mathbf{b}-(\mathbf{ab})\mathbf{c},$$

tehát az integrandus:

$$\mathbf{v}\times(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_\varphi)=(\mathbf{v}\mathbf{r}'_\varphi)\mathbf{r}'_u-(\mathbf{v}\mathbf{r}'_u)\mathbf{r}'_\varphi.$$

Elvégezve a helyettesítést, s meghatározva a parciálisokat kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(u,\varphi))=u^2\sin\varphi\cos\varphi\mathbf{i}+2u\cos\varphi\mathbf{j}+2u\sin\varphi\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}'_u=\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}'_\varphi=-u\sin\varphi\mathbf{i}+u\cos\varphi\mathbf{j}.$$

Ha ezeket az értékeket az integrandusba helyettesítjük — a részletszámítások mellőzésével — a következő adódik:

$$\int_F \mathbf{v}\,d\mathbf{A}=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2u^2\cos\varphi\mathbf{i}-u^3\cos\varphi\sin\varphi\mathbf{j})\,d\varphi\,du=\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{8}\mathbf{j},$$

amely vektor valóban merőleges a $\mathbf{k}$ vektorra.

VIII. INTEGRÁLTÉTELEK

1. Gauss—Osztogradszkij-tétel

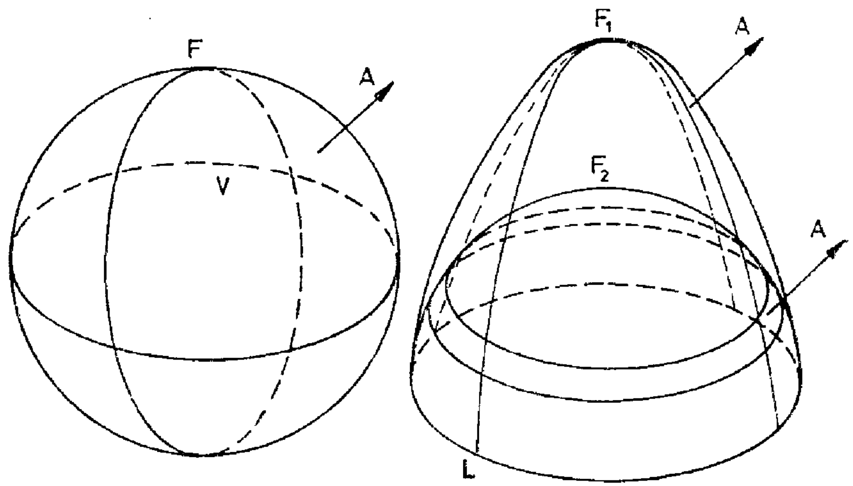
A VII.2. szakaszban említettük a vektortér $\mathbf{r}_0$ pontbeli divergenciája és az $\mathbf{r}_0$-t körülvevő zárt felületre vett felületi integrálja közötti kapcsolatot.

Ennek alapján várható, hogy a vektortér divergenciájának térfogati integrálja és a vektortér felületi integrálja között valamilyen összefüggés áll fenn.

Ezt mondja ki a Gauss—Osztogradszkij-tétel (77. ábra).

Legyen F zárt, véges sok, egymáshoz élekben csatlakozó folytonosan differenciálható felületdarabból álló felület, kifelé irányított normálvektorral; az F által határolt V térrész mérhető térfogatú, s legyen a $\mathbf{v}$ vektortér e térrészben és a felületen folytonosan differenciálható, ekkor:

$$\oint_F \mathbf{v}\,d\mathbf{A}=\int_V \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV.$$



77. ábra

A tétel fizikai tartalma — elektromos térben szemléltetve —: Legyen a vektortér e térben a térerősség vektora.

A bal oldalon szereplő integrál az **E** tér fluxusát (az F felületen áthaladó erővonal számot) adja meg.

A jobb oldal a forrássűrűség (az **E** tér forrásai a töltések) térfogati integrálja. Nyilvánvaló, hogy ha a zárt F felületen több erővonal lép ki, mint be, akkor a felület belsejében pozitív forrásnak kell lennie; másrészt, ha a V térrész forrásmentes, akkor a belépő és kilépő erővonalak száma azonos kell hogy legyen, tehát a bal oldal zérus.

Hasonló értelmezés adható áramlási terek esetén (**v** ekkor az áramló közeg sebességeloszlása).

Speciálisan, ha a **v** vektortér forrásmentes egy V térrészben, azaz

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r})=0 \qquad \mathbf{r}\in V,$$

és F, valamint az általa bezárt térrész V részhalmaza, ekkor, ha F-re teljesülnek a tétel kikötései:

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=0,$$

tehát forrásmentes vektortér esetén a vektortér zárt felületre vett felületi integrálja zérus.

Ezt a tényt másképpen is megfogalmazhatjuk: az előző térrészben haladó sima, zárt görbére illesztett F_1 (nyílt) felületre vett felületi integrál értéke nem függ a felület alakjától, azaz L görbére illeszkedő különböző, de azonos irányítású felületek esetén azonos érték adódik.

Ha van olyan kétszer folytonosan differenciálható **W** vektortér, amelyre

$$\mathbf{v}=\operatorname{rot} \mathbf{W} \qquad \mathbf{r}\in V,$$

akkor az előző zárt F felületre:

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=0,$$

hiszen

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{W}=0, \qquad \mathbf{r}\in V.$$

(Igazolható az állítás megfordítása is, tehát **v** akkor és csak akkor forrásmentes, ha $\mathbf{v}=\operatorname{rot}\mathbf{W}$.)

A **W** vektorteret a **v** tér *vektorpotenciáljának* nevezzük. A vektorpotenciál meghatározásának módszereivel nem foglalkozunk.

Gyakorló feladatok

1. Szemléltesse a Gauss-tételt a következő két esetben úgy, hogy a tételben szereplő mindkét integrált meghatározza!

a) $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto x\mathbf{i}, \qquad \mathbf{r}\in R^3,$

a V térrész az egységkocka, F a kocka felszíne.

b) $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}\in R^3,$

$V=\{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1\},$

F a gömb felszíne.

a) Mivel a **v** minden pontban **i**-vel egyirányú, így a felületi integrálban csak az **i**-re merőleges lapok járuléka lehet zérustól különböző. Az $x=0$ sík esetén azonban $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, így az erre vett felületi integrál értéke zérus; az $x=1$ sík esetén $|\mathbf{v}|=1$, így

$$\int_{F_1} \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=\int_{F_1} |\mathbf{v}|\, dA=\int_{F_1} dA=1.$$

Tehát $\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=1.$

Mivel

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=1 \qquad \mathbf{r}\in R^3,$$

és

$$\mu(V)=1,$$

így

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = 1,$$

tehát a két oldal értéke valóban egyenlő.

b) Mivel v sugárirányú, azaz F minden pontjában merőleges a felületre, és a felületen $|v|=1$, így

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A} = \oint_F |\mathbf{v}|\, dA = \oint_F dA = 4\pi.$$

Másrészt:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 3, \qquad \mathbf{r} \in V,$$

így

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \int_V 3\, dV = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi,$$

tehát a két integrál értéke valóban egyenlő.

2. Írja fel az

a) $$\oint_F \mathbf{D}\, d\mathbf{A} = \int_V \varrho\, dV$$

(elektrosztatika Gauss-tétele: VII.2.8.)

b) $$\oint_F \mathbf{B}\, d\mathbf{A} = 0$$

(**B** a mágneses indukció vektora).
Maxwell-egyenletek differenciális alakját! (F a V térrészt határoló zárt felület.)

a) Feltéve, hogy teljesülnek a Gauss-tétel feltételei, alakítsuk át a bal oldalt:

$$\oint_F \mathbf{D}\, d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D}\, dV.$$

Az egyenlet ekkor

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D}\, dV - \int_V \varrho\, dV = 0$$

alakban írható; az integrál tulajdonságait felhasználva:

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{D} - \varrho)\, dV = 0.$$

A térfogati integrál értéke csak akkor lehet térrésztől függetlenü zérus, ha maga az integrandus is zérus, azaz:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho.$$

(ϱ a töltéssűrűség, tehát a divergencia valóban a forrássűrűséget jelenti)

b) Láttuk e rész bevezetőjében, hogy a zárt felületre vett felületi integrál zérus voltából nem következik az, hogy az integrandus is zérus.

A bal oldalt a Gauss-tétel alapján átalakítva:

$$\oint_F \mathbf{B}\, d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B}\, dV = 0.$$

Ebből már következik az, hogy az integrandus zérus, azaz:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

tehát a **B** tér forrásmentes vektortér, azaz **B** egy másik vektortér rotációjáva egyenlő.

(Azt, hogy **B** forrásmentes, úgy is mondhatjuk, hogy nincs mágnese monopólus.)

3. Határozza meg a

$$\mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto x^2yz\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortérnek az

$$F_1 = \{\mathbf{r} \mid x^2+y^2+z^2 = 16 \qquad z \geqq 0\}$$

félgömb felületére vett felületi integrálját!

Zárjuk le a felületet az

$$F_2=\{\mathbf{r} \mid x^2+y^2 \leq 16,\ z=0\}$$

körlappal, s alkalmazzuk az így nyert zárt felületre a Gauss-tételt ($F=F_1 \cup F_2$)!

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV.$$

Mivel

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=0,$$

így a jobb oldalon szereplő integrál zérus, a másik oldal pedig:

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=\int_{F_1} \mathbf{v}\, d\mathbf{A}+\int_{F_2} \mathbf{v}\, d\mathbf{A}.$$

A körlapon $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, mivel itt $z=0$, tehát az F_2 felületre vett felületi integrál zérus, így

$$\int_{F_1} \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=0.$$

4. Határozza meg a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto x^4y^3z^2\mathbf{i}+xz^4\mathbf{j}+x^3y^{10}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r} \in R^3$$

vektortérnek az egységkocka felszínére vett felületi integrálját (kifelé irányított felületi normális mellett)!

Alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=\int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV.$$

A vektortér divergenciája:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=4x^3y^3z^2,$$

a V térrész

$$V=\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in [0; 1]^3\},$$

tehát

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A}=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 4x^3y^3z^2\, dx\, dy\, dz=\int_0^1\int_0^1 y^3z^2\, dy\, dz=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 z^2\, dz=\frac{1}{12}.$$

5. Határozza meg az

$$\mathbf{E}: \mathbf{r} \mapsto \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \qquad D_{\mathbf{E}}=\{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\}$$

vektortér felületi integrálját az

a) $K(2; 3; 5)$ középpontú egységsugarú gömb felületére,
b) az origó középpontú egységsugarú gömb felületére,
c) a

$$V=\{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$$

térrész határfelületére! (A felületi normálist irányítsuk a térrészből kifelé.)

a) IV.4-ben láttuk, hogy a vektortér az origó kivételével forrásmentes, azaz $\operatorname{div} \mathbf{E}=0$, ha $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

Mivel az origó a gömbfelületen kívül helyezkedik el, így:

$$\oint_{F_a} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=\int_{V_a} \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV=0.$$

b) Mivel az origóban $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$, és itt a vektortérnek szingularitása van, így ez esetben az integrál értéke zérustól különböző.

A felület pontjaiban $\mathbf{E}$ a felületre merőleges, és itt $|\mathbf{E}|=1$, így

$$\oint_{F_b} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=\oint_{F_b} |\mathbf{E}|\, dA=\oint_{F_b} dA=4\pi.$$

c) Mivel a vektortér az origó kivételével forrásmentes, így a V térrészbe belépő, ill. onnan kilépő erővonalak száma azonos, így

$$\oint_{F_c} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=0.$$

Megjegyzés: Tetszőleges origót tartalmazó, mérhető V térrészt lezáró felület esetén (ha erre teljesülnek a Gauss-tétel kikötései):

$$\oint_F \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=4\pi.$$

6. Határozza meg az előző feladatbeli vektortér

$$F_1=\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\mathbf{k}, \quad (x, y)\in[-1;1]^2\}$$

felületére vett felületi integrálját!

Az előző feladat szerint a vektortér

$$V=\{(x, y, z) \mid (x, y, z)\in[-1;1]^3\}$$

térrésze határfelületére (F) vonatkozó felületi integrálja:

$$\oint_F \mathbf{E}\, dA=4\pi.$$

A tér szimmetriájából következően a kocka lapjain az $\mathbf{E}$ tér felületi integráljának értéke azonos, így:

$$\int_{F_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=\frac{1}{6}\cdot 4\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

7. Határozza meg az

$$\mathbf{E}: \mathbf{r}\mapsto x^2yz^2\mathbf{i}+xy^3z^4\mathbf{j}+z^3x\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

vektortér rotációjának integrálját az

$$F=\{\mathbf{r} \mid x^2+y^2+z^2=1, \qquad z\geqq 0\}$$

felületre! (A felületi normális a z tengely pozitív irányába mutasson.)

Mivel $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E}=0$, így e vektortér zárt felületre vett felületi integrálja zérus; azaz bármely, az F felület határgörbéjére illeszkedő, azonos irányítású felület esetén, azonos érték adódik a felületi integrálra.

Legyen

$$F_1=\{\mathbf{r} \mid x^2+y^2\leqq 1, z=0\}.$$

Az előzőek szerint:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=\int_{F_1} \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}.$$

az $\mathbf{E}$ vektortér rotációja:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz^2 & xy^3z^4 & z^3x \end{vmatrix}=$$

$$=\mathbf{i}(-4xy^3z^3)-\mathbf{j}(z^3-2x^2yz)+\mathbf{k}(y^3z^4-x^2z^2).$$

Mivel F_1 pontjaiban $z=0$, így itt

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}=\mathbf{0},$$

tehát:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=\int_{F_1} \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=0.$$

8. Igazolja, hogy ha a V térrész és az azt határoló F zárt felület eleget tesz a Gauss-tételben említett kikötéseknek, és a $\mathbf{B}$ vektortér folytonosan differenciálható, akkor:

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{B}\, dV=-\oint_F \mathbf{B}\times d\mathbf{A}!$$

Mivel a $\mathbf{B}$ vektortér folytonosan differenciálható, így tetszőleges, rögzített $\mathbf{a}$ vektor esetén a

$$\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{B}$$

vektortér is folytonosan differenciálható, azaz v-re teljesül a Gauss-tétel:

$$\oint_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV.$$

Mivel

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{B}) = -\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

— amit az Olvasó a ∇ operátor alkalmazásával könnyen igazolhat —, így

$$-\int_V \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{B}\, dV = \oint_F (\mathbf{a}\times\mathbf{B})\, d\mathbf{A}.$$

A jobb oldalon egy vegyesszorzat áll, amelynél a vektoriális és skaláris szorzás sorrendje felcserélhető:

$$\oint_F (\mathbf{a}\times\mathbf{B})\, d\mathbf{A} = \oint_F \mathbf{a}(\mathbf{B}\times d\mathbf{A}).$$

Mivel az a vektor állandó, így az integráljel elé kiemelhető:

$$-\mathbf{a}\int_V \operatorname{rot} \mathbf{B}\, dV = \mathbf{a}\oint_F \mathbf{B}\times d\mathbf{A};$$

ez az összefüggés azonban tetszőleges a vektor esetén csak úgy teljesülhet, ha az igazolandó állítás teljesül.

Megjegyzés: Ha a V térrészben a $\mathbf{B}$ vektortér örvénymentes, akkor

$$\int_F \mathbf{B}\times d\mathbf{A}$$

értéke csak a felület határvonalától és a felület irányításától függ.

9. Határozza meg az a, b, c paraméterek értékeit úgy, hogy a

$$\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto (xz+ay^c+bz^2)\mathbf{i} + (xy+az^c+bx^2)\mathbf{j} + (yz+ax^c+by^2)\mathbf{i}, \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

vektortér vektor értékű felületi integráljának értéke tetszőleges zárt felület esetén zérus legyen!

Az előző feladat szerint ez akkor teljesül, ha a $\mathbf{v}$ vektortér rotációja egy egyszeresen összefüggő V térrészben zérus, azaz itt $\mathbf{v}$ örvénymentes.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz+ay^c+bz^2 & xy+z^c+bx^2 & yz+ax^c+by^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(z+2by-acz^{c-1}) - \mathbf{j}(acx^{c-1}-x-2bz) + \mathbf{k}(y+2bx-acy^{c-1}).$$

Ha $b=0$, $c=2$, $a=\dfrac{1}{2}$, akkor

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{r}\in R^3,$$

s így az előző feladat szerint

$$\oint_F \mathbf{v}\times d\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

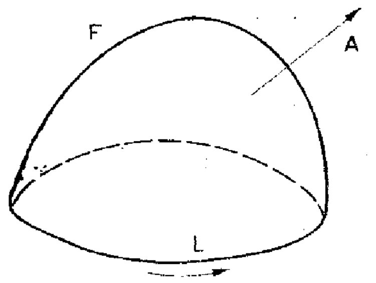
2. Stokes-tétel

A vonalintegrál definiálása során utaltunk a vektortér $\mathbf{r}_0$ pontbeli rotációjának és a vektortér $\mathbf{r}_0$-t körülvevő zárt görbére vett vonalintegráljának kapcsolatára. Ennek alapján várható, hogy a rotáció felületi integrálja és (skalárértékű) vonalintegrálja között valamilyen összefüggés áll fenn.

Ezt mondja ki a *Stokes-tétel* (78. ábra).

Legyen F véges sok, egymáshoz élekben csatlakozó, folytonosan differenciálható felületdarabból álló irányítható felület, L a felületet határoló, szakaszonként „sima” (folytonosan deriválható) zárt görbe, amelyet úgy irányítunk, hogy körüljárása a felület normálisa irányából pozitív legyen. Ha a $\mathbf{v}$ vektortér folytonosan differenciálható a felületen s annak határán, akkor:

$$\oint_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\mathbf{A}.$$



78. ábra

A tételből következik, hogy ha egy egyszeresen összefüggő V térrészben a vektortér örvénymentes (azaz rot $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ V minden pontjában), akkor minden V-ben haladó zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke, azaz a tér potenciálos, tehát a vonalintegrál értéke két adott pont között független az integrálási úttól.

Igazolható, hogy ez akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan

$$u: \mathbf{r} \mapsto u(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{r} \in V$$

skalártér, amelyre:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} u.$$

A potenciálfüggvény meghatározására a például VII.1.7.-ben látott módszer használható.

Megemlítjük még, hogy ha a $\mathbf{v}$ vektortér divergenciája az egyszeresen összefüggő V tartományban zérus, akkor (VIII.1. szerint):

$$\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w},$$

azaz

$$\int_F \mathbf{v}\, d\mathbf{A} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{w}\, d\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{w}\, d\mathbf{r},$$

vagyis $\mathbf{v}$ felületi integrálja vektorpotenciáljának vonalintegráljával egyenlő.

Gyakorló feladatok

1. Szemléltesse a Stokes-tételt a tételben szereplő mindkét integrál meghatározásával:

a) $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto \mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{r} \in R^3,$

a felület a $z=0$ síkban fekvő, origó középpontú egységsugarú körlap, a görbe ennek határa;

b) $\mathbf{v}: \mathbf{r} \mapsto y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad \mathbf{r} \in R^3,$

F és L az előző!

a) Láttuk (IV.4. 3.), hogy

$$\operatorname{rot}(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{k},$$

így a körlap pontjaiban rot $\mathbf{v}$ a felületre merőleges, azaz:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\mathbf{A} = \int_F |\operatorname{rot} \mathbf{v}|\, dA = 2 \int_F dA = 2\pi,$$

mivel a felületelemek összege a körlap területével egyenlő. Mivel a felület normális $\mathbf{k}$-val egyező irányú, így az egységkört pozitív körüljárással kell befutnunk.

A másik integrál tehát, mivel a $\mathbf{k} \times \mathbf{r}$ vektor $\mathbf{k}$-ra és $\mathbf{r}$-re is merőleges, így iránya a körvonal érintőjével azonos, így (a körvonalon $|\mathbf{v}|=1$)

$$\oint_L \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \oint_L |\mathbf{v}|\, dr = \oint_L dr = 2\pi,$$

hiszen ez az integrál a kör kerületével egyezik meg. A két integrál értéke tehát valóban egyenlő.

Megjegyzés: E vektortér esetén rot $\mathbf{v}$ zérustól különböző, tehát a tér nem potenciálos, de bármely $\mathbf{k}$-ra merőleges síkban levő zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke.

b) E vektortér esetén

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

tehát ennek felületi integrálja is zérus. A határoló körvonal:

$$\mathbf{r}=\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}, \qquad t\in[0;2\pi]\},$$

azaz:

$$\oint_L \mathbf{v}\,d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} (\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j})(-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j})\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt=0,$$

a két integrál értéke tehát valóban egyenlő. E vektortér potenciálos, így bármely zárt görbe esetén a vonalintegrál értéke zérus.

2. Írja fel az

a) $$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{r}=\int_F \left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{A},$$

(gerjesztési törvény általánosítása).

b) $$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=-\int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{A}$$

(Faraday-féle indukciótörvény) Maxwell-egyenletek differenciális alakját!

a) Feltéve, hogy teljesülnek a Stokes-tétel feltételei, alakítsuk át a bal oldalt:

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{r}=\int_F \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{A}=\int_F \left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{A},$$

rendezve:

$$\int_F \left(\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{j}-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{A}=0.$$

Tetszőleges felületre integrálva, az integrál értéke csak úgy lehet zérussal egyenlő, ha maga az integrandus zérus, azaz

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

b) Az előzőhöz hasonlóan a bal oldalt alakítjuk át:

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\int_F \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{A}=-\int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{A},$$

amely tetszőleges felület esetén csak úgy teljesülhet, ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Megjegyzés:

a) A feladatban szereplő függvények

$$\mathbf{E}:(\mathbf{r},t)\mapsto\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \qquad \mathbf{r}\in R^3,\ t\in R^+$$

jellegűek; az eddig szereplő vektor—vektor függvényeknél általánosabb függvények.

b) A második egyenlet eredményét a következőképp értelmezhetjük: az **E** vektortér akkor rotációmentes, ha nincs kölcsönhatásban egy időben változó **B** térrel. Tehát annak a feltétele, hogy zárt görbe esetén a munkavégzés zérustól különböző legyen az, hogy közben a tér valahonnan „energiautánpótlást" kapjon.

c) Homogén, izotrop közegben:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}; \qquad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}.$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbf{j}$ és ϱ zérus e térrészben. Tehát

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Vegyük a második egyenlet rotációját!

Feltéve, hogy a szereplő függvények kétszer folytonosan differenciálhatók — azaz a vegyes parciálisok egyenlők — a rotációképzés, és az idő-szerinti deriválás sorrendje felcserélhető:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{H}.$$

A bal oldalt IV.4. szerint átalakítva:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}-\Delta\mathbf{E}=-\Delta\mathbf{E},$$

hiszen VIII.1.2. szerint $\varrho=0$ esetén div **E** is zérus.

A másik oldalon rot **H** helyett $\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$-t helyettesítve (az első egyenlet alapján) kapjuk, hogy:

$$\Delta\mathbf{E}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Ez az összefüggés, a III.1. 18-ban látott hullámegyenlet vezetett arra az elméleti felismerésre, hogy létezniük kell elektromágneses hullámoknak. Ezután igazolták kísérletileg is létezésüket, majd sor került igen sokrétű alkalmazásukra is.

3. Potenciálos-e az

$$\mathbf{E}:\mathbf{r}\mapsto\frac{\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|^3},\qquad D_{\mathbf{E}}=\{\mathbf{r}\in R^3\mid\mathbf{r}\neq\mathbf{0}\}\qquad(\varepsilon>0\text{ állandó})$$

vektortér? Ha igen, határozza meg a potenciálfüggvényt!

IV.3. tárgyalása során láttuk, hogy

$$\operatorname{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}|}=-\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}=-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\qquad\{\mathbf{r}\in R^3\mid\mathbf{r}\neq\mathbf{0}\},$$

tehát az **E** vektortér az

$$u:\mathbf{r}\mapsto\frac{-1}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}|}+c\qquad D_u=\{\mathbf{r}\in R^3\mid\mathbf{r}\neq\mathbf{0}\}$$

skalártér gradiense, így a vektortér potenciálos, s potenciálfüggvénye(i) az *u* skalár—vektor függvény(ek).

Megjegyzés: A gyakorlatban a potenciálfüggvény értelmezése az

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}u$$

összefüggés alapján történik, meghatározásához általában a „végtelen távoli" pontban választják zérusnak *u* értékét. Ennek alapján

$$u(R_0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon R_0}.$$

VII.2-ben láttuk, hogy az **E** tér az origóban levő egységnyi ponttöltés, vagy az R_0 sugarú egységnyi töltésű fémgömb tere ($|\mathbf{r}|\geq R_0$).

Egységnyi töltés hatására tehát a gömb $u(R_0)$ feszültségre töltődik, így a gömb kapacitása:

$$C=\frac{Q}{U}=4\pi\varepsilon R_0,$$

tehát a sugarával egyenesen arányos.

4. Potenciálos-e az

$$\mathbf{E}:\mathbf{r}\mapsto(4x^3y+z^2)\mathbf{i}+(x^4+3y^2z)\mathbf{j}+(1+y^3+2zx)\mathbf{k}\qquad\mathbf{r}\in R^3$$

vektortér? Határozza meg a potenciálfüggvényt!

Az **E** vektortér akkor és csak akkor potenciálos, ha a tér örvénymentes, azaz

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathbf{0}\qquad\mathbf{r}\in R^3.$$

Mivel

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 4x^3y+z^2&x^4+3y^2z&1+y^3+2zx\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

így a vektortér potenciálos, tehát van olyan *u* skalártér, amelynek gradienseként állítható elő **E**.

Azaz *u*-ra teljesülnie kell a

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3y+z^2,\qquad(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^4+3y^2z, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y^3+2zx+1 \qquad (3)$$

parciális differenciálegyenlet-rendszernek.

(1)-ből:

$$u=x^4y+z^2x+k(y, z),$$

ezt (2)-be helyettesítve:

$$u'_y=x^4+k'_y=x^4+3y^2z,$$

ahonnan

$$k(y, z)=zy^3+k_1(z).$$

Ezt (3)-ba helyettesítve:

$$u'_z=2zx+y^3+k'_1=1+y^3+2zx,$$

tehát

$$k_1(z)=z+c,$$

azaz

$$u=x^4y+z^2x+zy^3+z+c.$$

Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy **E** valóban e skalártér gradiense.

A potenciálfüggvényt a VII.1-ben látott módszerrel is meghatározhatjuk.

Haladjunk az origóból a 72. ábrán látható töröttvonal mentén a $P(x, y, z)$ pontba, s határozzuk meg a vonalintegrál értékét!

Az első szakaszon az x tengely irányában mozgunk, azaz:

$$L_1=\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}=t\mathbf{i} \qquad t\in[0; x]\}.$$

Mivel itt $y=z=0$, így e görbén a vonalintegrál értéke zérus.

A második szakasz:

$$L_2=\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}=x\mathbf{i}+t\mathbf{j} \qquad t\in[0; y]\}.$$

E szakaszon $z=0$, így

$$\int_{L_2} \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\int_0^y x^4\,dt=x^4y.$$

A harmadik szakasz:

$$L_3=\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+t\mathbf{k} \qquad t\in[0; z]\},$$

ezen

$$\int_{L_3} \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\int_0^z (1+y^3+2tx)\,dt=z+zy^3+z^2x.$$

Ebből következően:

$$u=\int_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=yx^4+z^2x+zy^3+z,$$

ami az előzővel megegyező.

Megjegyzés: A töröttvonal kezdőpontját, s magát a töröttvonalat úgy kell megválasztani, hogy tartalmazza a függvény értelmezési tartománya. Az előző feladatnál például a kezdőpont nem lehet az origó.

5. Potenciálos-e az

$$\mathbf{E}: \mathbf{r}\mapsto(3x^2y+2x)\mathbf{i}+(x^3+3y^2)\mathbf{j} \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

vektortér? Határozza meg a potenciálfüggvényt!

Ahhoz, hogy az **E** tér potenciálos legyen, teljesülnie kell a

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathbf{0}$$

egyenlőségnek. Itt

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y+2x & x^3+3y^2 & 0 \end{vmatrix}=\mathbf{0},$$

tehát a tér potenciálos.

Az előző feladat szerint az u potenciálfüggvényre teljesülnie kell az

$$u'_x=3x^2y+2x,$$

$$u'_y=x^3+3y^2,$$

$$u'_z=0$$

egyenleteknek.

Az elsőből:

$$u=x^3y+x^2+k(y, z),$$

amit a másodikba helyettesítve:

$$u'_y=x^3+k'_y=x^3+3y^2.$$

Mivel k nem függ z-től, hiszen a z szerinti derivált zérus, így

$$k(y, z)=y^3+c,$$

tehát

$$u=x^3y+x^2+y^3+c.$$

Megjegyzés: E feladat megoldása egzakt differenciálegyenlet megoldásának keresésével egyenértékű.

6. Határozza meg az

$$\mathbf{E}: \mathbf{r}\mapsto(x+z)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(y+z)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}\in R^3$$

vektortér

$$L=\left\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r}=\cos t\,\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{k} \qquad 0\leqq t\leqq 2\pi\right\}$$

görbére vett vonalintegrálját!

Az L zárt görbe az

$$y=-z$$

sík és az

$$x^2+y^2+z^2=1$$

gömb metszésvonala, egy egységsugarú kör.

A Stokes-tétel szerint:

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\int_F \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{A},$$

ahol F legyen az L görbe által határolt körlap. A vektortér rotációja:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Jelölje α a rot $\mathbf{E}$ vektornak és a sík normálvektorának szögét. (Az $\mathbf{n}(0; 1; 1)$ vektor irányából nézve az L görbe irányítása a Stokes-tételnek megfelelő);

$$\int_F \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{A}=\int_F |\operatorname{rot}\mathbf{E}|\cos\alpha\,dA.$$

Mivel

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}}{|\mathbf{n}|\,|\operatorname{rot}\mathbf{E}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}},$$

így:

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\int_F \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{A}=\sqrt{2}\pi.$$

Megjegyzés: Bármely $y=-z$ síkban levő zárt görbe esetén:

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{r}=\sqrt{2}\cdot T,$$

ahol T jelöli a görbe által határolt síkrész területét.

7. Határozza meg az előző feladatbeli vektortér

$$L=\{\mathbf{r}: \mathbf{r}=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k} \qquad 0\leqq t\leqq 2\pi\}$$

görbére vett vonalintegrálját!

Az előző feladathoz hasonlóan itt is a Stokes-tételt alkalmazzuk.

A görbe az

$$y-z=0$$

síkban fekvő ellipszis. E sík egy normálvektora az $\mathbf{n}(0; 1; -1)$ vektor

Mivel

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{E}=0,$$

így:

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{r}=\int_F \operatorname{rot} \mathbf{E}\, d\mathbf{A}=0.$$

Megjegyzés: Bármely $y=z$ síkban fekvő zárt görbe esetén zérus a vonalintegrál értéke.

A gyakorlati alkalmazások során az eddig említetteknél általánosabb potenciálkeresési feladatok megoldása is szükséges. E feladatokban a potenciálfüggvény magasabb rendű deriváltjai szerepelnek, s e függvénynek valamilyen peremfeltételeket is ki kell elégítenie.

Ilyen probléma adódik, ha a **D** vektortér potenciálos. Ekkor a VIII.1.2*a)*-ban látott egyenletből

$$\operatorname{div} \mathbf{D}=\operatorname{div} \operatorname{grad} u=\Delta u=\varrho,$$

ahol ϱ adott skalár-vektor függvény.

A $\varrho=0$ esetén adódó egyenlet a

$\Delta u=0$ ún. Laplace-egyenlet;
$\Delta u=\varrho$ Poisson-egyenlet.

Ezek és a hasonló jellegű feladatok megoldásának segédeszközei a Green-tételkör tételei. Erre vonatkozik a következő feladat.

8. Igazolja, hogy ha a V térrész és az azt határoló zárt F felület eleget tesz a Gauss-tételben V-re és F-re kirótt követelményeknek, valamint a v és u skalár-vektor függvények kétszer folytonosan differenciálhatók e térrészben és a felületen, akkor:

$$\oint_F u \operatorname{grad} v\, d\mathbf{A}=\int_V (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v+u\Delta v)\, dV!$$

Alkalmazzuk a Gauss-tételt az

$u \operatorname{grad} v$ vektor-vektor függvényre!

(Mivel v kétszer folytonosan differenciálható, így grad v deriváltja folytonos tehát alkalmazható a tétel.)

E vektortér divergenciája a ∇ operátor alkalmazásával:

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)=\nabla(u \nabla v)=\nabla u\, \nabla v+u\, \nabla^2 v=\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v+u\Delta v.$$

Tehát a Gauss-tétel szerint:

$$\oint_F u \operatorname{grad} v\, d\mathbf{A}=\int_V \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)\, dV=\int_V (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v+u\Delta v)\, dV,$$

ami a bizonyítandó állítás. Az igazolt összefüggés a Green-tétel aszimmetrikus alakja.

Megjegyzés: Alkalmazzuk a Gauss-tételt a v grad u függvényre is. Ekkor:

$$\oint_F v \operatorname{grad} u\, d\mathbf{A}=\int_V (\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v+v\Delta u)\, dV.$$

Ezt az előzőből kivonva kapjuk a Green-tétel másik alakját:

$$\oint_F (u \operatorname{grad} v-v \operatorname{grad} u)\, d\mathbf{A}=\int_V (u\, \Delta v-v\, \Delta u)\, dV.$$

9. Szemléltesse a Green-tétel szimmetrikus alakját úgy, hogy a tételben szereplő mindkét integrált meghatározza:

$$u: \mathbf{r} \mapsto |\mathbf{r}| \qquad \mathbf{r} \in R^3,$$

$$v: \mathbf{r} \mapsto \frac{1}{|\mathbf{r}|} \qquad D_v=\{\mathbf{r} \in R^3 \mid \mathbf{r} \neq \mathbf{0}\},$$

$$V=\{\mathbf{r} \mid |\mathbf{r}| \leqq R_0\}!$$

IV.3-ban láttuk, hogy

$$\operatorname{grad} |\mathbf{r}|=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}|}=-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Ezt behelyettesítve a bal oldal:

$$\oint_F (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u)\, d\mathbf{A} = \oint_F \left(\frac{-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\right) d\mathbf{A}.$$

Felhasználva, hogy a felületi normális párhuzamos az $\mathbf{r}$ vektorral, és a felületen $|\mathbf{r}| = R_0$:

$$-2 \oint_F \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}\, d\mathbf{A} = -2 \oint_F \frac{1}{R_0}\, dA = -8R_0\pi.$$

A másik oldal:

$$\Delta u = \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r}\right) = \mathbf{r} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{|\mathbf{r}|} \operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{2}{|\mathbf{r}|},$$

tehát

$$v \Delta u = \frac{2}{|\mathbf{r}|^2}.$$

Ennek térfogati integrálja gömbi koordinátákra áttérve:

$$\int_V \frac{2}{|\mathbf{r}|^2}\, dV = \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{r^2} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = 8R_0\pi.$$

IV.4-ben láttuk, hogy

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = 0, \qquad \text{ha } \mathbf{r} \neq \mathbf{0}.$$

Másrészt VIII.1.5-ben láttuk, hogy e függvény bármilyen origó középpontú gömbre vett integrálja 4π, tehát nem szükségszerű, hogy az $\int_V u\, \Delta v\, dV = 0$ egyenlőség teljesüljön.

Bontsuk V-t két részre:

$$V_1 = \{\mathbf{r} : \varepsilon \leq |\mathbf{r}| \leq R_0\},$$
$$V_2 = \{\mathbf{r} : 0 \leq |\mathbf{r}| \leq \varepsilon\};$$

V_1-ben $u\Delta v$ zérus, így integrálja is zérus. V_2-ben:

$$\int_{V_2} |\mathbf{r}| \cdot \Delta v\, dV \leq \varepsilon \int_{V_2} \Delta v\, dV = \varepsilon 4\pi,$$

amely érték tetszőlegesen kicsivé tehető. Így tehát

$$\int_V u\, \Delta v\, dV = 0,$$

tehát

$$\int_V (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dV = -8R_0\pi,$$

amely a másik oldallal megegyező érték.

Megjegyzés $\int_V u\, \Delta v\, dV$ meghatározásának módszeréből látható, hogy tetszőleges V-ben folytonos u skalár-vektor függvény esetében az integrál értéke; ha v a feladatbeli skalártér: $4\pi u(\mathbf{0})$.

A Green-tétel alkalmazásait nem ismertetjük, csak annyit említünk, hogy potenciálkeresési feladatok esetén általában v az e feladatban szereplő függvény, u az ismeretlen potenciál, amely bizonyos peremfeltételeket kell teljesítsen. Ha a tér szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik, megfelelő transzformációval a feladatok lényegesen leegyszerűsíthetők.

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Fischer Herbert igazgató

Szedte az Alföldi Nyomda
Nyomta az Alföldi Nyomda
A nyomdai rendelés törzsszáma: 1380.66-12-2
Készült Debrecenben, az 1985. évben

Műszaki vezető: Kőrizs Károly
Műszaki szerkesztő: Metzker Sándor
A borítót és a kötést tervezte: Sebes János
A könyv ábráit rajzolta: Wator Béla
A könyv formátuma: Fr5
Ívterjedelme: 18,25 (A5)
Ábrák száma: 78
Példányszám: 6350
Papír minősége: 80 g ofszet
Betűcsalád és -méret: New Times, 10/10 és 8/10
Azonossági szám: 61 218
A kézirat lezárva: 1983. szeptember
MÜ: 3666–i–8587